



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM  
MŰSZAKI ÉS INFORMATIKAI KAR

# Mechanikai alapismeretek I. (statika)

## 3. előadás

### Egyenestengelyű és konzoltartók belső erő ábrái

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

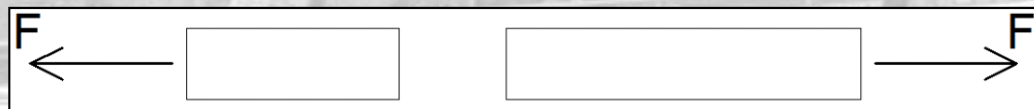
# 1. A belső erők fogalma

A külső erők hatására a tartó anyagában is keletkeznek erők. Ezeket az erőket *belső erőknek* nevezzük. A nyugalomban levő testre ható külső erők egyensúlyban levő erőrendszert alkotnak.



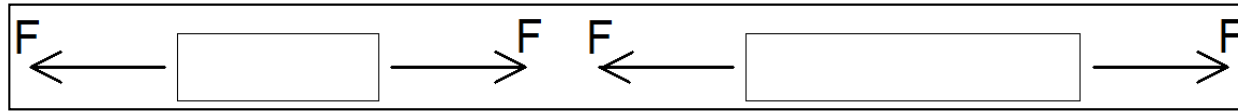
1. ábra. Egyensúlyban levő test [Szabó I. G. 2012]

Ha a rudat képzeletben két részre osztjuk, a két erő már nem lesz egyensúlyban, az elválasztott tartódarab eredeti helyzetéből elmozdul.



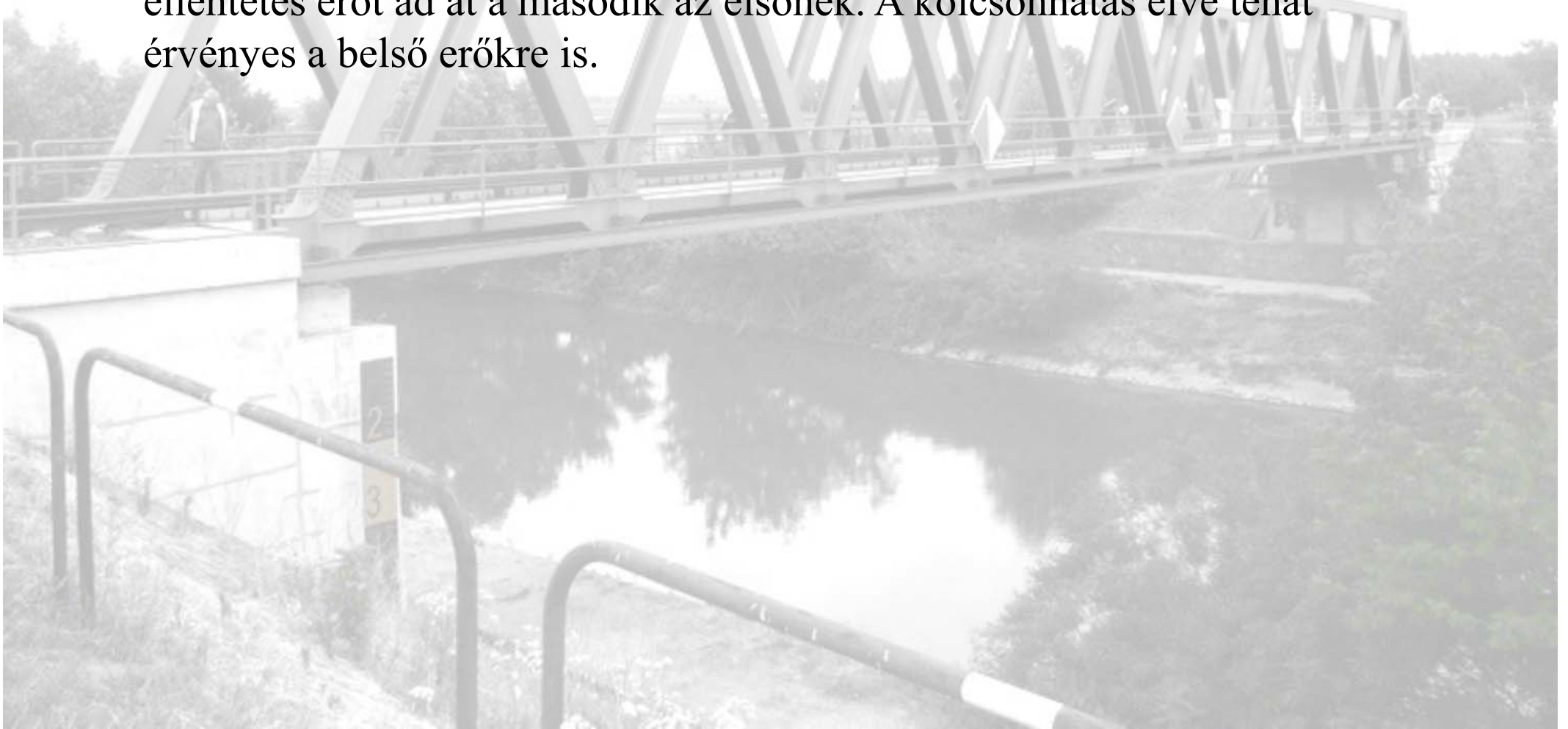
2. ábra. Képzeletben kettévágott test [Szabó I. G. 2012]

Ezek a mozgások korábban azért nem következtek be, mert addig a szerkezet anyagi folytonossága biztosította az egyensúlyt. A szerkezetek belsejében tehát olyan közvetítő hatásoknak kell ébredniük, amelyek nélkül a külső erők egyensúlyi állapota nem jöhetne létre. Ezeket a hatásokat a tartók *belső erőinek* nevezzük.



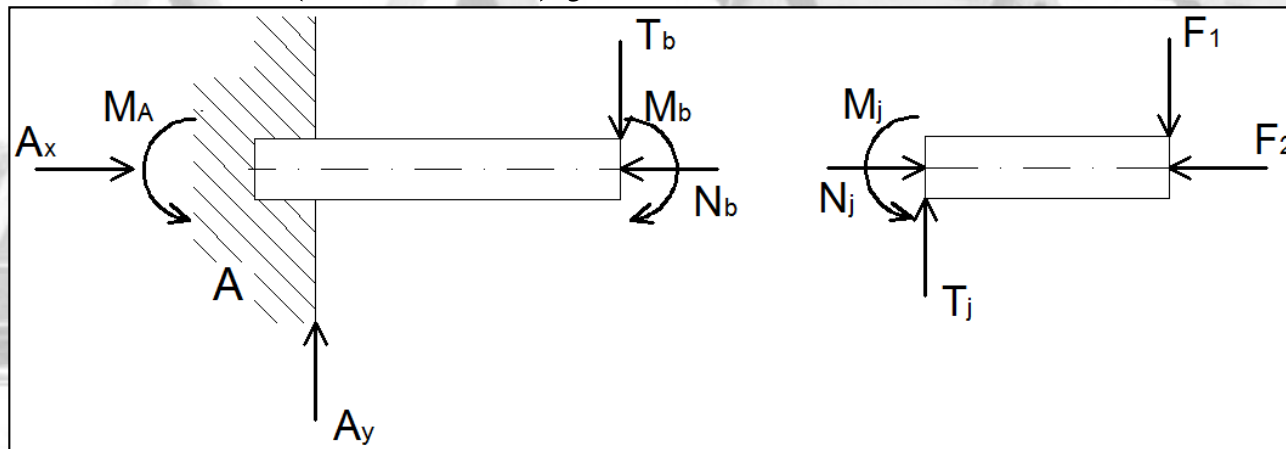
3. ábra. Belső erők [Szabó I. G. 2012]

Végeredményül megállapíthatjuk, hogy a kétfelé vágott test elválasztott metszési lapjain működő belső erők egymás ellentettjei, vagyis valamilyen nagyságú belső erőt ad át a test egyik része a másiknak, ugyanakkora, de ellentétes erőt ad át a második az elsőnek. A kölcsönhatás elve tehát érvényes a belső erőkre is.



## 2. Egyenes tengelyű tartók belső erői

A belső erők számítása természetesen feltételezi a külső erők ismeretét, tehát a támaszerőket is. A tartót képzeletben kettévágjuk, a levágott tartórészen működő erőhatásokat a tartórész átvágási keresztmetszetére redukáljuk. A síkbeli rúdszerkezeteken működő belső erőt három erőhatással (dinámmal) jellemezzük.



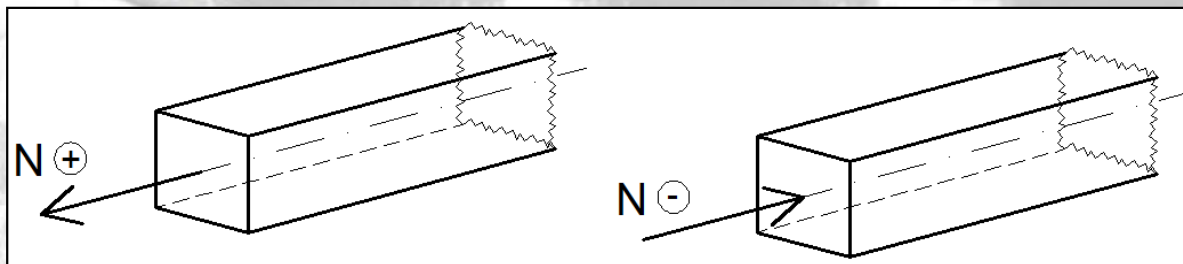
4. ábra. Belső erők működése egy vízszintes és függőleges erőkkel is terhelt konzolos gerendán [Szabó I. G. 2012]

1. A normálerő ( $N$ ) a tartó *rúdtengelyével párhuzamos*, a keresztmetszeti síkra merőleges. Az erő nagysága és iránya a keresztmetszettől balra levő erők eredőjének a keresztmetszet síkjára merőleges összetevőjével azonos.

2. A nyíróerő ( $T$ ) a tartó *rúdtengelyére merőleges*, a keresztmetszettől balra levő erők eredőjének a keresztmetszet síkjával párhuzamos összetevőinek algebrai összege.
3. A hajlítónyomaték ( $M$ ) a keresztmetszetre működő forgató hatás. Úgy számítjuk, hogy az egyik tartórész valamennyi erőhatásának nyomatékösszegét képezzük az átvágási keresztmetszet súlypontjára, s ezt a nyomatékot működtetjük a másik tartórész ugyanezen keresztmetszetén.

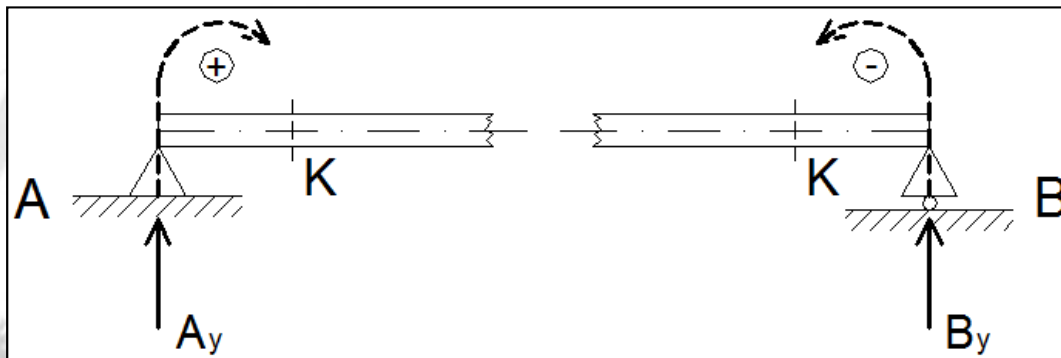
## 2.1 A belső erők előjelszabálya

1. Normálerő: a rúd keresztmetszetre ható normálerőt akkor tekintjük pozitívnak (+), ha a vizsgált rúdrészt húzásra veszi igénybe (a normálerő elmutat a keresztmetszettől). Akkor tekintjük negatívnak (−), ha a vizsgált rúdrészt nyomásra veszi igénybe (rámutat a keresztmetszetre).



5. ábra. A normálerő előjelének megállapítása [Szabó I. G. 2012]

2. Nyírőerő: akkor pozitív (+), ha a képzeletben átvágott tartó megmaradt tartórészén felvett keresztmetszet körül az óramutató járásával egyezően forog. Negatív (–) ha az óramutató járásával ellentétesen forog.



6. ábra. A nyírőerő előjelének megállapítása [Szabó I. G. 2012]

3. Nyomaték: a nyomaték előjelezése megállapodáson alapszik. Az óramutató járásával megegyező irányt pozitívnak (+), az óramutató járásával ellentétes irányt negatívnak (–) tekintjük. A nyomatéki ábrát minden esetben a *húzott* (domború) oldalra kell rajzolni, ehhez mindig célszerű első lépésben – amennyiben lehetséges – megállapítani a tartó alakváltozását.



A belső erő ábrák készítése során nem szükséges minden egyes keresztmetszetben meghatározni az étékeket (kézi számítás esetén ez nem is lenne lehetséges, hiszen tulajdonképpen egy tartó végtelen számú keresztmetszetből áll), hanem csak az úgynevezett *jellemző keresztmetszetekben*. Ezek a jellemző keresztmetszetek a teherfüggvényből, valamint a tartó geometriájából adódnak, ilyenek vannak a támaszok, a koncentrált erők, valamint a koncentrált nyomatékok helyén, illetve a megoszló terhek kezdetén és végén, továbbá ahol törés van a tartó tengelyében.

A *normálerő ábra* készítése során célszerű balról jobbra haladva megkeresni az első olyan erőt, amely párhuzamos a tartó tengelyére, ennek megállapítani az előjelét, majd tovább haladva balról jobbra ahol újabb tengelyre párhuzamos erő megjelenik, azt hozzáadni előjelhelyesen (irány szerint) az előző értékhez, s ezt ábrázolni.

A *nyíróerő ábra* készítése során a normálerő ábra esetén elmondottak szerint kell eljárni, annyi eltéréssel, hogy itt a tengelyre merőleges erőket kell figyelembe venni.



A *nyomatéki ábra* készítése során szintén érdemes balról jobbra haladni, s a fent említett jellemző keresztmetszetekben kiszámítani az értékeket. A nyomaték előjel nélküli mennyiség, mégis ilyenkor – leginkább bonyolultabb terhelésű tartók esetén – érdemes a kapott előjelet is leírni, mert ebből is lehet következtetni arra, hogy egy adott nyomaték érték a tengely melyik oldalára kerüljön. Ha az egymást követő keresztmetszetekben kapott előjelek azonosak, akkor az értékek a tengely ugyanazon oldalára, ha a kapott előjelek különbözőek, akkor a tengely másik oldalára kerülnek.

Mindhárom esetben természetesen lehet jobbról balra haladva is számolni a szükséges értékeket, azonban ilyenkor az előjelekre nagy figyelmet kell fordítani, leginkább a nyomatékok számolásakor. Ha egy adott pontra a nyomatékot jobbról balra írjuk fel, akkor a kapott eredmény előjelének az ellentettjét kell figyelembe venni.

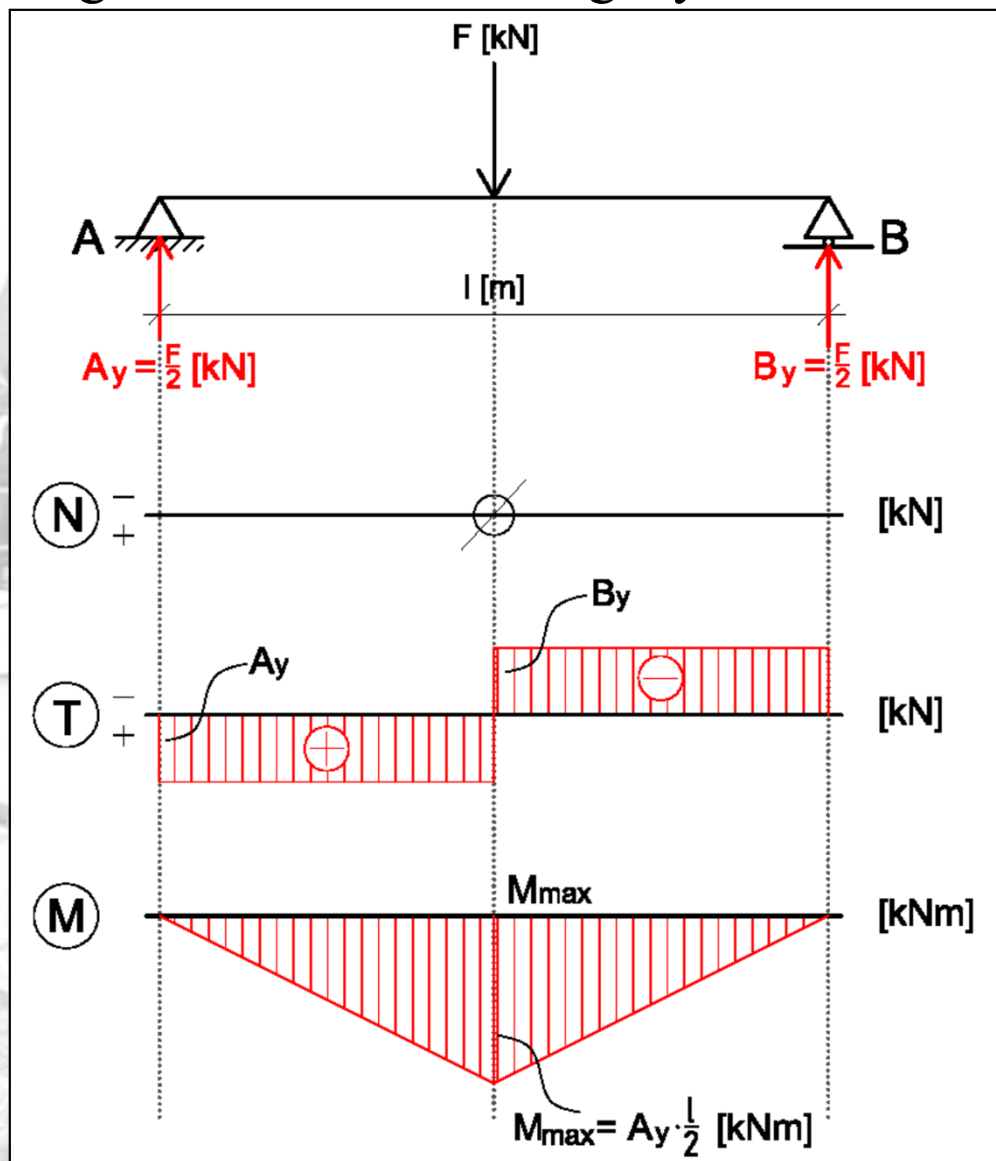
## **2.2 A maximális nyomaték**

A nyíróerő függvény a nyomaték függvény első deriváltja, ezért a nyomaték függvénynek ott van szélső értéke, ahol a nyíróerő értéke zérus, illetve ahol előjelet vált.

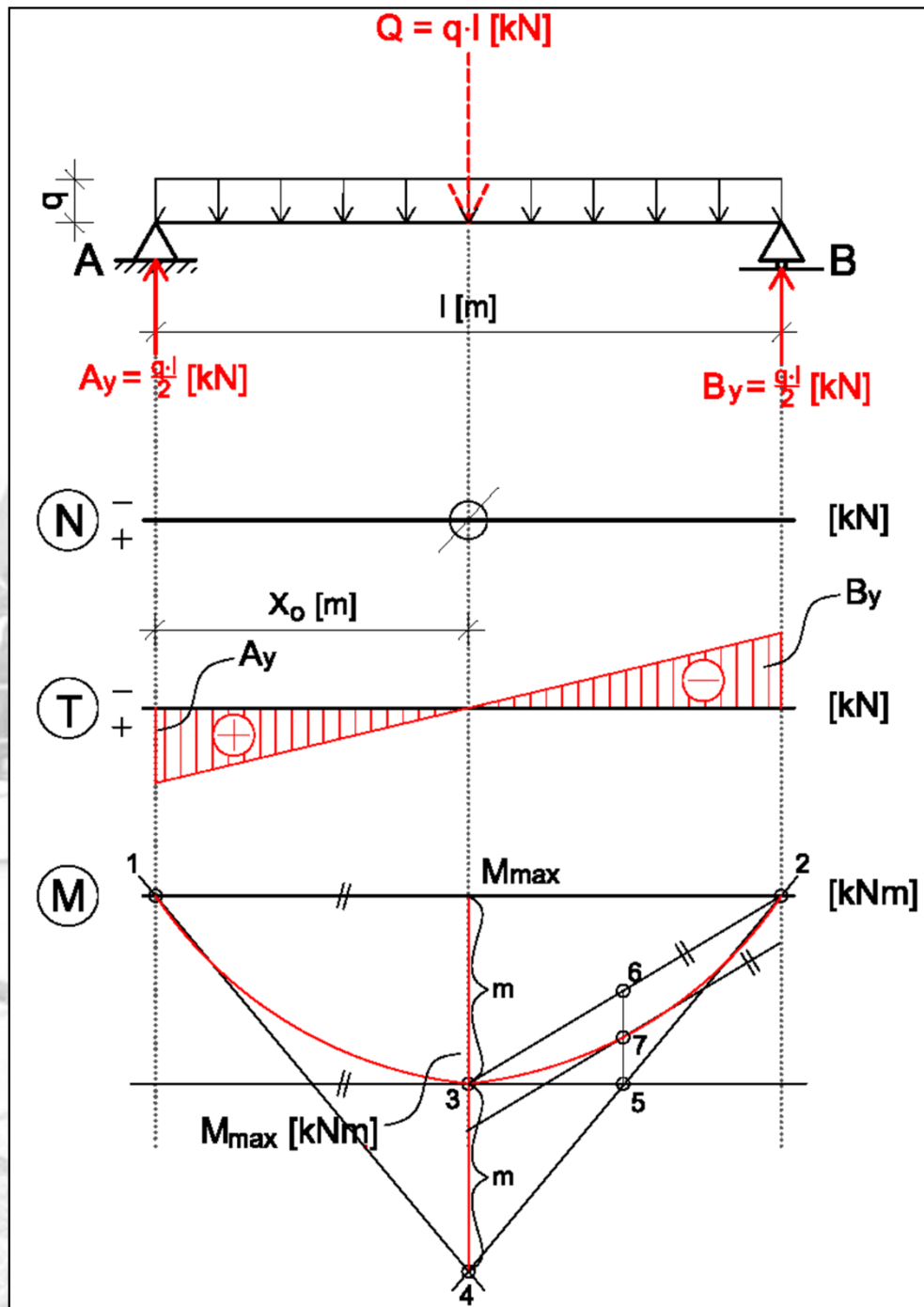


## 2.3 Belső igénybevételi ábrák készítése

A továbbiakban két alapvető terhelési típus támaszerőinek meghatározása és belső igénybevételi ábráinak szemléltetése látható:



6. ábra. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó [Szabó I. G. 2012]



7. ábra. Egyenletesen megoszló teherrel terhelt kéttámaszú tartó [Szabó I. G. 2012]



$$|A_y| = |B_y| = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$X_o = \frac{A}{q} = \frac{q \cdot l}{2 \cdot q} = \frac{l}{2}$$

$$M_{\max} = A_y \cdot X_o = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l^2}{4}$$

A nyomatéki parabola rajzolásának lépései: rajzoljuk meg a tartó tengelyének felező merőlegesét, a megoszló teher irányának megfelelően mérjük fel rá kétszer az „m” értékét. A kapott pontot (4) kössük össze a támaszpontokkal (1) és (2), így megkapjuk a parabola végérintőit. Húzzunk párhuzamos egyenest a tartó tengelyével egyszeres „m” távolságra, így megkapjuk a (3) pontot. Ebben a (3)–as pontban, ahol a nyíróerő ábrának zérus értéke van, a nyomatéki ábrának szélső értéke lesz. További pontokat is fel lehet még venni az ábra alapján (5), (6), (7) pontok.

### 3. Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái

A kéttámaszú tartó a magas- és mélyépítésben is egyaránt a leggyakrabban alkalmazott tartószerkezet. Sok esetben a bonyolult, összetett szerkezetek vizsgálatát is egyszerű kéttámaszú tartóra vezethetjük vissza. Ezek a szerkezetek egyaránt lehetnek kisebb és nagyobb nyílásméretűek is.

A mindennapok során gyakran találkozunk ilyen szerkezetekkel, gondoljunk csak akár a legegyszerűbb nyílásáthidalóra.

Nagy fesztávolságú szerkezeteknél – például hídszerkezetek – gyakran alkalmaznak a megtámasztásukhoz külön kiegészítő szerkezeteket (sarukat), melyek egyértelműen kijelölik a támaszerők hatásvonalait. A kisebb kéttámaszú tartóknál – például nyílásáthidalók, földémgerendák – nem alkalmaznak ilyen kiegészítő szerkezeteket, hanem a tartó végeit egyszerűen csak a falra, pillérre fektetik bizonyos feltámaszkodási hosszon. Ilyen esetekben a támaszerők pontos helye nem ismert, hiszen a feltámaszkodás egy adott nagyságú felületen történik, a támaszerők hatásvonalainak és az úgynevezett elméleti fesztávnak a meghatározása külön feladat.

Az *1. képen* egy kisebb, mindössze 10 méter fesztávolságú kéttámaszú gerendahíd látható. Kisebb fesztávolságú szerkezetekben – akár hidak esetében is – nem mindig szükséges a megtámasztó saruk alkalmazása, a

teherátadás az építési technológia helyes megválasztásával (például súrlódó csökkentő réteg beépítésével) is biztosítható.

A 2. képen kéttámaszú előregyártott földégerendák és béléstestek elhelyezése látható.



1. kép. Kéttámaszú gerendahíd [Szabó I. G. 2012]



2. kép. Kéttámaszú előregyártott földégerendák [Szabó I. G. 2012]

A feladatok megoldása során adott lesz a tartó tengelyvonala, valamint a megtámasztására szolgáló fix-, illetve görgős támaszok. Első lépésben mindig szükséges a kiindulási adatok pontosítása (ferde erők felbontása tengelyre párhuzamos és tengelyre merőleges összetevőire, valamint a megoszló terhelések koncentrált erőkké alakítása). Ezután következhet a támaszerők kiszámítása, a már korábban megismert nyomatéki egyenlet és



az egymástól független vetületi egyenletek segítségével, s csak utána lehet a belső igénybevételi ábrákat elkészíteni. A normálerő és a nyíróerő ábra tengely feletti oldalát negatívnak ( $-$ ), a tengely alatti oldalát pozitívnak ( $+$ ) szoktuk tekinteni. A nyomatéki ábra nem kap előjelet, az ábrát mindig a húzott oldalra kell rajzolni.



## 4. Konzolos tartók igénybevételi ábrái

A konzolos tartó a kéttámaszú tartóhoz hasonlóan szintén olyan egyszerű tartószerkezet, amellyel nap, mint nap találkozhatunk, gondoljunk csak egy egyszerű talajba beásott oszlopra, vagy egy kehelyalapba befogott pillérre, esetleg egy falból kinyúló erkélylemezre.

A konzolos tartó megtámasztását a számítások során egy adott pontban tételezzük fel. Ezzel szemben a valóságban azonban mindig van egy nem elhanyagolható hosszúságú tartószakasz, amit az elméleti megtámasztási pont, illetve a statikai váz felvételénél figyelembe kell venni.



3. kép. Vasbeton erkélylemez [Szabó I. G. 2012]



4. kép. Zárt gótikus köerkély [Szabó I. G. 2012]

Az 3. képen egy nyitott, míg a 4. képen egy zárt kialakítású erkély látható, mindkét esetben a statikai váz konzolos tartó.

A feladatok megoldása során adott lesz a tartó tengelyvonala, valamint a rögzítésére szolgáló befogás. Első lépésben mindig szükséges a kiindulási adatok pontosítása (ferde erők felbontása tengelyre párhuzamos és tengelyre merőleges összetevőire, valamint a megoszló terhelések koncentrált erőkké alakítása). Ezután következhet a befogási nyomaték és a támaszerők kiszámítása, a már korábban megismert nyomatéki egyenlet és az egymástól független vetületi egyenletek segítségével, s csak utána lehet a belső igénybevételi ábrákat elkészíteni. A normálerő és a nyíróerő ábra tengely feletti oldalát negatívnak ( $-$ ), a tengely alatti oldalát pozitívnak ( $+$ ) szoktuk tekinteni. A nyomatéki ábra nem kap előjelet, az ábrát mindig a húzott oldalra kell rajzolni.



## 5. Kéttámaszú, konzolosan túlnyúló tartók igénybevételi ábrái

Kéttámaszú konzolosan túlnyúló tartóval szintén gyakran találkozhatunk a mindennapokban. Számításának lépései megegyeznek a kéttámaszú tartónál korábban ismertetett lépésekkel.



5. kép. Vasbeton Konténerrakodó bakdaru, a gerendája kéttámaszú konzolosan túlnyúló tartónak tekinthető [Szabó I. G. 2012]

Adott a tartó tengelyvonala és a megtámasztására szolgáló fix–, valamint görgős támaszok. Először itt is szükséges a kiindulási adatok pontosítása (ferde erők felbontása, megoszló terhelések koncentrált erőkké alakítása). Következő lépés a támaszerők kiszámítása, majd a belső igénybevételi ábrák megrajzolása.



Külön figyelmet érdemelnek az olyan megoszló terhelések, amikor egy, nem tartóvégen elhelyezett támasz felett, annak bal oldaláról jobb oldalára (vagy fordítva) „átnyúlik” a megoszló terhelés. Ilyenkor lehetséges a támasztól bal- illetve jobboldalra lévő megoszló teherszakaszra külön-külön számolni egy-egy „ $Q$ ” eredő értéket. Természetesen lehetőség van a teljes megoszló terhelésből egyetlen „ $Q$ ” eredő számítására is. Mindkét megoldás egyenértékű, de nagy figyelmet kell fordítani a nyomatéki egyenletekben az eredő(k)höz tartozó erőkar(ok) megfelelően meghatározására.



# Felhasznált irodalom

**SIPTÁR TIBOR, MARSAY ISTVÁN:** *Mechanika módszertani útmutató és példatár.* Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, 1978.

**SZABÓ IMRE GÁBOR:** *Mechanika I. (statika). Példatár és módszertani útmutató.* Pécs, 2012.

