



EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK



Á B R Á Z O L Ó G E O M E T R I A

TENB 011 segédlet a PTE PMMK építőmérnök hallgatói részére

„Az építés- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

Tantárgy leírás

A tantárgy megnevezése:	Ábrázoló geometria
Tantervi kód:	TENB 011
Óraszám/hét (előadás/gyakorlat/labor):	220
Félévzárási követelmény:	V
Kredit:	4
Javasolt szemeszter:	1. félév
Gesztor tanszék(ek):	Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék
Beoktató tansz./Beoktatási arány	100 %
Előtanulmányi követelmény(ek): - t	
Képzési terület:	Építőmérnök BSc szak
Célja: A műszaki információközlés egyik alapelemének, az ábrázoló geometriának készség szintű elsajátítása, a problémamentes, színvonalas műszaki kommunikáció érdekében. Cél a térlátás, a rajzolás/ábrázolás olyan szintre emelése, amely elősegíti a műszaki tárgyak eredményes hallgatását, térbeli alkotások, tervezési feladatok egyértelmű közlését.	
Rövid tantárgyprogram Műszaki rajz alapismeretei. Térgeometriai alapfogalmak, alaptételek. Ábrázolási módok: 1. Perspektíva. 2. Axonometria. 3. Ortogonális paralel projekció (Monge-féle két képsíkos ábrázolás): Térelemek relatív, és abszolút helyzete. Síkidom, síkokkal határolt test, transzformációja, síkmetszete, áthatása, ábrázolás I., II., III., IV. (V.) képsíkon. Síkidom, síkokkal határolt test, tetőidom szerkesztése. Szabálytalan görbe felületek, ábrázolása, célorientált mérőszám szerkesztések. Általános helyzetű sík és szabálytalan felület metszészvonala (út-rézsű-terep). Forgástestek ábrázolása, síkmetszete, áthatása, ábrázolás I., II., III., IV. (V.) képsíkon.	
A tantárggyal kapcsolatos követelmények és egyéb adatok	
Tantárgyfelelős / Előadó(k) / Gyakorlatvezető(k):	Schmidt Ferencné tanszéki mérnök Schmidt Ferencné tanszéki mérnök
Nyelv:	Magyar
Aláírás megszerzés feltétele (évközi követelmények):	A gyakorlatokon és előadásokon való, a kreditrendszerű TVSZ előírása szerinti részvétel. A szorgalmi időszakban a 2 zárthelyi és 8 hf. megírásával szerzett pontok 50%-a. A zárthelyiket a tematika szerinti időpontban kell megírni. A szorgalmi időszak végén egyszeri alkalommal egy pótlási lehetőséget biztosítunk!
Számonkérés módja:	Írásbeli vizsga
A jegykialakítás szempontjai:	A félévközi munka elismerésének minimális pontszáma 60 pont! A gyakorlaton elérhető pontszám összetevői: 2 ZH. 2X40 = 80 8 hf 8X5 = 40 összesen = 120 Vizsga követelmények: Írásbeli vizsga a félév anyaga alapján. A vizsgán megszerezhető maximális pontszám 120 pont. A vizsgán teljesítendő minimális pontszám 61 pont! A félévvégi vizsgajegy kialakításának módja: 0-120 = elégtelen (1) 121-150 = elégséges (2) 151-180 = közepes (3) 181-210 = jó (4) 211-240 = jeles (5)
Oktatási segédeszközök, jegyzetek:	Kötelező irodalom: Órai jegyzet. Ajánlott: Pethes Endre: 222 ábrázoló geometriai feladat Más felsőoktatási intézmény: Ábrázoló geometriai jegyzete
A tantárgy felvételének módja:	ETR-en keresztüli tárgyfelvétel és egyéni órarend kialakítás

Részletes tantárgyprogram:		
Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Regisztráció, tantárgyi követelmények. Műszaki rajz célja, feladata. Térgeometriai alapfogalmak, alaptételek. Regisztráció, rajzeszközök. Alapfogalmak, alaptételek : Térlátást fejlesztő feladatok.
2.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vetítési módok, elvek. Ábrázolási módok: Perspektíva (két iránypontos) Síkidom, síkokkal határolt test, testcsoport két iránypontos ábrázolása 1. Hf. kiadása: perspektíva
3.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Ábrázolási módok: Ortogonális paralel projekció, axonometria: különleges és általános helyzetű térelemek ábrázolása (csonkolt kocka, testcsoport) Különleges és általános helyzetű térelemek ábrázolása. Térlátást fejlesztő feladatok szerkesztése. 2. Hf. kiadása: axonometria (három képsíkos ábrázolás)
4.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat.	Ábrázolási módok: Ortogonális paralel projekció (Monge-féle két képsíkos ábr.). Transzformáció, céltranszformáció: ábrázolás az I., II., III., IV., stb. képsíkon. Szakasz valódi hossza, egyenes-pont távolsága, kitérő egyenesek távolsága, metsződő egyenesek által ; egyenes-sík által ; sík-sík által bezárt valós szög szerkesztése 3. Hf. kiadása: valós távolság + valós szög
5.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Különleges és általános helyzetű térelemek ábrázolása: nyomvonalak, dőféspontok, metszésvonalak. Fedélidom szerkesztés. Egyenes-sík dőféspontja, különleges és általános helyzetű sík nyomvonala, sík-sík metszésvonala, fedélidom szerkesztés. 4. Hf. kiadása: fedélidom szerkesztés
6.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síklapokkal határolt testek származtatása (gúla, hasáb). Síklapokkal határolt test ábrázolása I., II., III., IV., stb. képsíkon. Síklapokkal határolt test (gúla, hasáb) ábrázolása különleges és ált. helyzetű, fordított méretes szerkesztési feladatok.
7.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	I. ZH Perspektíva, axonometria, sík-egyenes dőféspontja, metszésvonal (fedélidom) Síklapokkal határolt test (gúla, hasáb) ábrázolása különleges és ált. helyzetű, fordított méretes szerkesztési feladatok.
8.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síklapokkal határolt test síkmetszete, áthatása Síklapokkal határolt test síkmetszete, áthatása 5. Hf. kiadása : Síklapokkal határolt test áthatása
9.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Szabálytalan görbe felületek ábrázolása, célorientált mérőszámok szerkesztések, út-rézsű-plató. Általános helyzetű sík és szabálytalan görbe felület metszésvonala, rézsű szerkesztés. 6. Hf. kiadása : plató
10.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Forgástestek származtatása (kúp, henger, gömb). Forgástestek ábrázolása. Forgástestek (kúp, henger, gömb) ábrázolása különleges és ált. helyzetű, fordított méretes szerkesztési feladatok. 7. Hf. kiadása : forgástest fordított méretes feladat
11.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Forgástestek (kúp, henger, gömb) síkmetszete. Forgástestek (kúp, henger, gömb) síkmetszete. 8. hf. kiadása : forgástest síkmetszete/áthatása
12.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Forgástestek (kúp, henger, gömb) áthatása. Forgástestek (kúp, henger, gömb) áthatása.

13.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	II. ZH Síklapokkal határolt test síkmetszete, áthatása, út-rézsű-plató, forgástestek síkmetszete, áthatása. Gyakorlás
14.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	PÓTLÁSOK Pótlások.

TARTALOM JEGYZÉK:

Előszó	9
Bevezetés	10
1. TÉRMÉRTANI (TÉRGEOMETRIAI) ALAPISMERETEK	11
1.1.1. <i>Térmértani alakzatok (térelemek)</i>	11
1.1.2. <i>Térelemek kölcsönös helyzete</i>	12
1.1.3. <i>Térelemek meghatározása</i>	13
1.1.4. <i>Térelemek alaptulajdonságai</i>	15
1.1.5. <i>Végtelenben fekvő térelemek</i>	15
1.1.6. <i>Mértani hely fogalma</i>	15
1.2. TÉRGEOMETRIA ALAPTÉTELEI	16
1.2.1. <i>I. ALAPTÉTEL: Egyenes-sík párhuzamossága</i>	16
1.2.2. <i>II. ALAPTÉTEL: sík-sík (két sík) párhuzamossága</i>	16
1.2.3. <i>III. ALAPTÉTEL: egyenes-sík merőlegessége</i>	17
1.2.4. <i>IV. ALAPTÉTEL: sík-sík (két sík) merőlegessége</i>	17
1.2.5. <i>TÉRELEMEK FONTOSABB TÉTELEI ÖSSZEFOGLALVA</i>	18
a.) <i>PÁRHUZAMOS TÉRELEMEK</i>	18
b.) <i>MERŐLEGES TÉRELEMEK</i>	19
c.) <i>PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES TÉRELEMEK</i>	20
1.3. TÁVOLSÁGOK, SZÖGEK, SZIMMETRIA	21
1.3.1. <i>TÁVOLSÁGOK</i>	21
1.3.2. <i>SZÖGEK</i>	22
1.3.3. <i>TÉRBELI IDOMOK SZIMMETRIÁJA</i>	22
1.4. VETÍTÉSI MÓDOK, ELVEK	24
1.5. TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSI MÓDJAI	26
1.5.1. <i>PERSPEKTÍVA</i>	26
<i>Pont vetülete, egyenes vetülete, síkok vetülete,</i> <i>térbeli alakzatok vetületeinek ábrázolása</i>	
1.5.2. <i>AXONOMETRIA (PÁRHUZAMOS SUGARÚ VETÍTÉS)</i>	35
a.) <i>EGYMÉRETŰ ORTOGONÁLIS AXONOMETRIA</i>	37
b.) <i>KÉTMÉRETŰ VAGY FRONTÁLIS AXONOMETRIA</i>	37
c.) <i>FERDESZÖGŰ KÉTMÉRETŰ (KAVALIER) AXONOMETRIA</i>	37
2. ORTOGONÁLIS PARALEL PROJEKCIÓ	38
(Merőleges, párhuzamos sugarú vetítés)	
MONGE – FÉLE (KÉT KÉPSÍKOS) ÁBRÁZOLÁS	39
2.1. PONT ÁBRÁZOLÁSA	40
2.1.1. <i>ÁLTALÁNOS HELYZETŰ PONT ÁBRÁZOLÁSA</i>	40
2.1.2. <i>KÜLÖNLEGES HELYZETŰ PONT ÁBRÁZOLÁSA</i>	40
2.1.3. <i>FEDŐPONTOK</i>	41
2.2. EGYENES ÁBRÁZOLÁSA	41
2.2.1. <i>ÁLTALÁNOS HELYZETŰ EGYENES ÁBRÁZOLÁSA</i>	41
2.2.2. <i>KÜLÖNLEGES HELYZETŰ EGYENESEK</i>	42
2.3. SÍK ÁBRÁZOLÁSA	46
2.3.1. <i>Általános helyzetű sík ábrázolása</i>	46
2.3.2. <i>Különleges helyzetű sík ábrázolása</i>	46
2.4. EGYMÁSRA ILLESZKEDŐ TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA	48
2.4.1. <i>Egyenesre illeszkedő pont ábrázolása</i>	48
2.4.2. <i>Síkra illeszkedő pont és egyenes ábrázolása</i>	48
2.4.3. <i>Sík különleges egyenesei</i>	49

2.5. PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA	51
2.6. TRASZFORMÁCIÓ	55
(Új képsík alkalmazása)	
2.6.1. Pont transzformációja	55
2.6.2. Egyenes transzformációja	56
2.6.3. Sík transzformációja	57
2.6.4. A régi (I. és II.) képsíkokra merőleges III. képsík	57
2.6.5. Síklapú test transzformációja	58
2.7. METSZÉSI FELADATOK	59
2.7.1. Síkidom és egyenes dőféspontjának szerkesztése	59
2.7.2. Síkok metszésvonala	61
2.7.3. Azonos dőlésű síkok metszésvonala: FEDÉLIDOM	63
3. SÍKLA PÚ TESTEK	67
3.1. SÍKLA PÚ TESTEK SZÁRMAZTATÁSA	67
3.2. SÍKLA PÚ TESTEK METSZÉSE EGYENESSEL	67
3.3. SÍKLA PÚ TESTEK METSZÉSE SÍKKAL.	71
3.4. SÍKLA PÚ TESTEK ÁTHATÁSA	74
4. CÉLORIENTÁLT MÉRŐSZÁMOS ÁBRÁZOLÁS	86
4.1. EGYENESSEL KAPCSOLATOS MÉRŐSZÁMOS SZERKESZTÉSEK	88
4.2. EGYENESSEL ÉS SÍKKAL KAPCSOLATOS MÉRŐSZÁMOS SZERKESZTÉSEK (RÉZSŰSZERKESZTÉS)	90
5. GÖRBE VONALAK, KÖR VETÜLETE	101
5.1. KÖR ÁBRÁZOLÁSA, VETÜLETE	101
<i>Ellipszis szerkesztése</i>	
<i>Rytz-féle szerkesztés.</i>	
5.2. GÖRBE FELÜLETEK, FORGÁSTESTEK	109
5.2.1. EGYENESVONALÚ FELÜLETEK	109
5.2.1.1. KÚPFELÜLETEK	109
5.2.1.2. HENGERFELÜLETEK	111
5.2.2. FORGÁSFELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA, METSZÉSŰK SÍKKAL ÉS EGYENESSEL	114
5.2.2.1. FORGÁSKÚP (EGYENES KÖRKÚP)	115
a.) A kúp metszetgörbéi	115
b.) A körkúp síkmetszetének szerkesztése	116
c.) A körkúp és egyenes dőféspontjának szerkesztése	
5.2.2.2. Forgáshenger (egyenes körhenger)	117
a.) Henger síkmetszete	117
b.) Henger és egyenes dőféspontjának szerkesztése	118
5.2.3. GÖMB	118
a.) Gömb síkmetszete, ha a metszősík vetítőhelyzetű	119
b.) Gömb és általános helyzetű egyenes dőféspontja	119

IRODALOMJEGYZÉK:

- KÓLYA DÁNIEL: GYAKORLATI ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA
ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA PÉLDATÁR
(MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ 1978)
- STROMMER GYULA: ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA
(TANKÖNYVKIADÓ 1971)
- KORECZ LÁSZLÓNÉ: ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA
(TANKÖNYVKIADÓ 1973)
- PETHES ENDRE: 222 ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI FELADAT
(MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ 1966)
- SÓS JÓZSEF: FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIÁBÓL
(ÉPÍTŐIPARI SZAKKÖZÉPISKOLA, KAPOSVÁR 1988)
- BEZZEGH ZOLTÁN: ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA
(PMMFK 1977)

1. heti előadás

Előszó

- Az ábrázoló geometria a geometria egyik fejezete, azaz alkalmazott matematika.
- Az ábrázoló geometria a **műszaki élet közlő nyelve**, a műszaki rajz alaptörvényeit tanítja.
- Az ábrázoló geometria ismerteti a **műszaki rajzolás alaptörvényeit, szabályait, rajztechnikai tanácsokat ad**, segíti a műszaki pályára lépő emberek sajátos megfigyelőképességének kialakulását.
- Az ábrázoló geometria logikus rendje műszaki szempontból kiváló alakítója az elmének. Segítségével a tudatosan látni tanuló ember előtt kitárul a vizuális úton felfogható világ. Értelmet nyernek azok a térbeli geometriai összefüggések, melyekre eddig fel sem figyelt.
- Az ábrázoló geometriának a személyiség alakításában is fontos szerepe van. *Hiszen a tantárgy elsajátításához **figyelem összpontosításra, pontosságra, lelkiismeretességre, a lényeg kiemelésére, a legegyszerűbb és a legjárhatóbb út felismerésére van szükség.** Továbbá esztétikai igényességre is nevel.*
- Tudomásul kell venni, hogy a szűk időkeret korlátozott tanári segítséget tesz lehetővé, mely intenzív, önálló otthoni munkával kell, kiegészülnön. Az ábrázoló geometriát kizárólag rajzolva lehet tanulni. A szöveg olvasása, az ábrák szemlélése nem vezet eredményre. A szöveg és az ábra segítségével először a minta feladatokat kell megoldani, majd önálló feladatmegoldásokat gyakorolni.
- Azok a hallgatók, akik középiskolában nem tanultak műszaki rajzot, csak sok gyakorlással fogják elsajátítani a rajzeszközök használatát. Jó rajzot csak jó minőségű eszközökkel lehet készíteni.
- Nagyon fontos, hogy minden hallgató megtalálja a számára legkedvezőbb tanulási módszert. Nincs két azonos képességű és előképzettségű hallgató. Vannak, akik könnyen és gyorsan elsajátítják a tananyagot, élvezik a feladatmegoldásokkal járó szellemi erőfeszítéseket. Másoknak több időre és gyakorlásra van szükségük, talán a sikertelen kezdeti lépések miatt kedvüket veszítik, reménytelenül keresik – rendszerint magukon kívül – a nehézségek okait.
- A műszaki életben dolgozók sokasága bizonyosság arra, hogy minden átlagos képességű ember meg tudja tanulni az előírt tananyagot.
- Az egészséges elmének jól esik a szellemi torna, az erőfeszítést igénylő feladatmegoldás. A felfedezésekkel járó kellemes izgalmi állapot. Az alkotás, a tudományos kutatás öröme bőséges kárpótlást nyújt a megoldással járó fáradságért.
- Az ábrázolás mellett meg kell tanulni a rajzok olvasását. A rajz alapján minden térbeli helyzetben látni kell az ábrázolt elemet.
A rajzolás és a rajzolását biztosító egységes szabványokat alapfokon az ábrázoló geometria tanítja. A műszaki rajznak egyértelműen közölni kell a tervező elgondolásait a kivitelezővel. A rajzról egyértelműen leolvasható kell, hogy legyen az ábrázolt objektum alakja, mérete, térbeli helyzete, szükség esetén az anyaga is.
- A műszaki életben dolgozó embernek nagyon meg kell tanulni a rajzi nyelvet, melynek „**nyelvtanát**” tanítja az ábrázoló geometria.

Bevezetés

1. Az ábrázoló geometria térbeli alakzatok síkban való ábrázolásával foglalkozik. Az ábrázoló geometriában a téralakot képe segítségével ábrázoljuk és a kép síkjában végzett szerkesztéssel, térmértani feladatot oldunk meg.
 2. Az ábrázoló geometria térelemek és térgeometriai szerkesztések **SÍKBELI leképezése**.
 3. A képpel szemben támasztott követelmények:
 - a.) Legyen leolvasható a tárgy alakja, térbeli helyzete és méretei.
 - b.) Az ábrázolt alak elképzelhető – térben felépíthető = REKONSTRUÁLHATÓ legyen.
 - c.) Az alakzat képe minél tökéletesebben helyettesítsen (SZEMLÉLETES KÉPRŐL BESZÉLÜNK)
- Ha egy térbeli alakzatot – ami a valóságban háromdimenziós – síkban szeretnénk ábrázolni, lerajzolni, a tárgy méretei, arányai megváltoznak.
 - A képiesség és a mérettartás egymásnak látszólag ellentmondó tulajdonság. Hol az egyik, hol a másik tulajdonságot részesítjük előnyben a célnak megfelelően.
 - Az ismeretszerző tevékenység a megismeréssel, az érzékeléssel kezdődik, mint absztrakt gondolkodás. A megfigyeléssel szerzett ismeretek gyakorlati alkalmazása, ha a hallgató alkotó jellegű feladatot old meg.
 - A műszaki gondolatközlés formája a **műszaki rajz**. A rajz olvasójának meg kell értenie a közölt információkat, a rajz készítőjének, pedig ki kell tudni fejezni a gondolatait a rajz nyelvén.
 - A műszaki gondolat közlésének formáját egyszerűsíteni, egységesíteni és rögzíteni kell. Nemzetközileg egyeztetett szabványok segítik, illetve írják elő a műszaki rajz készítésének és dokumentálásának módját.
 - A műszaki gondolat egyértelmű, a lehető legtöbb információt tartalmazó rögzítése nem könnyű feladat, mert a háromdimenziós alakzatokat a rajzlap kétdimenziós síkjában kell ábrázolni. Ehhez viszont a rajz készítőjének ismernie kell a *műszaki ábrázolás szabályait, módját, rajzjeleit, jelképeit és egyszerűsítési lehetőségeit*.
 - Továbbá elengedhetetlen feltétel a **térlátás** és bizonyos **geometriai tájékozottság** is.
 - Mai, számítógép uralta világunkban van-e létjogosultsága a „**kézzel**” való rajzolásnak? tehetjük fel a kérdést, és bizonyára sokan érvelnek mellette, illetve ellene. Én a „**mellette**” táborhoz tartozom és **indokaim** a következők: a számítógéppel való rajzolásnak feltétele „valamilyen rajzoló program” készség szintű használata, mellyel nem biztos, hogy minden hallgató rendelkezik. A papír, ceruza, radír, vonalzó, körző viszont minden hallgató számára ismert, és már eddig is használt eszköz. A számítógép is csak eszköz, ha úgy tetszik „rabszolga”, nem fog helyettem gondolkodni, sem önállóan feladatot megoldani, nekem kell a logikai lépéseket közölnöm vele. Szerintem a kézzel, és a géppel történő rajzolás közötti különbség „csupán” a megjelenítés eszközében más (papír/képernyő), a logikai levezetés mindkét esetben az alkotó ember feladata.

1. TÉRMÉRTANI (TÉRGEOMETRIAI) ALAPISMERETEK

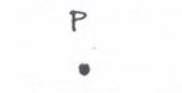
Az ábrázolás és a geometriai szerkesztések előtt ismerkedjünk meg a térmértani fogalmakkal és tételekkel.

1.1. TÉRMÉRTANI ALAPFOGALMAK :

1.1.1. Térmértani alakzatok (térelemek):

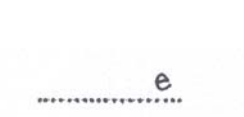
A legegyszerűbb geometriai alakzatokat térelemeknek (a tér építőelemeinek) nevezzük, ezek:

1. Pont:

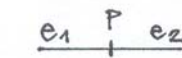


- a pont *alapfogalom* és *alapelem*
- a pont a sík legegyszerűbb, *kiterjedés nélküli eleme*

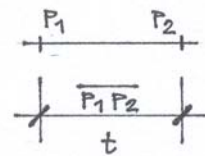
2. Egyenes:



- egy bizonyos irányban elhelyezkedő végtelen sok pont, *egydimenziós végtelen kiterjedésű alakzat* (Bizonyos pontok összességét alakzatnak nevezzük)

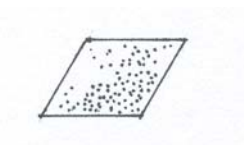


- az egyenest bármely pontja két *félegyenesre* osztja

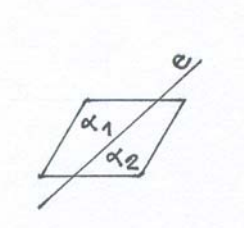


- az egyenes két pontja által határolt, véges hosszúságú részét *szakasznak* nevezzük, a szakasz hosszát a két pont *távolsága* adja.

3. Sík:

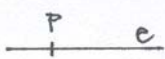
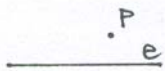
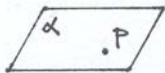
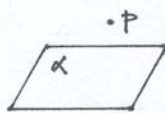
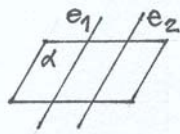
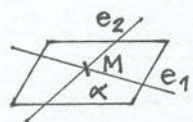
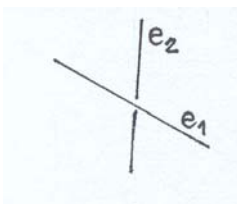


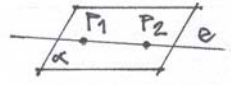
- kiemelkedések, bemélyedések és görbületek nélkül elhelyezkedő végtelen sok pont, *kétdimenziós végtelen kiterjedésű alakzat*



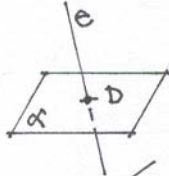
- a síkot bármely egyenese két *félsíkra* osztja

A pontnak és az egyenesnek a síkgeometriában megismert tulajdonságai a térgeometriára is érvényesek !

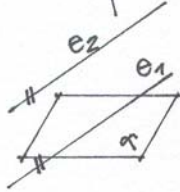
1.1.2. Tételek kölcsönös helyzete:1. PONT-PONT helyzete P_1, P_2 P_1, P_2 - *egybeesik* (illeszkedik egymásra) a tér azonos helyéről van szó- *nem esik egybe* (két különböző pont)2. PONT-EGYENES helyzete- a pont illeszkedik az egyenesre, *rajta van* az egyenesen (a pont az egyenes része)- *nincs rajta* az egyenesen, nem illeszkedik rá (a pont nem része az egyenesnek, rajta kívül eső pontról van szó)3. PONT-SÍK helyzete- a pont illeszkedik a síkra, *rajta van* síkon (a pont a sík része)- *nincs rajta* a síkon, nem illeszkedik rá (a pont nem része a síknak, rajta kívül eső pontról van szó)4. EGYENES-EGYENES helyzete- a két egyenes illeszkedik egymásra, *egybeesik* = azonos (minden pontjuk közös) Ha két pontjuk közös, akkor minden pontjuk közös, azaz a két egyenes egybeesik.- a két egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást és egy közös síkban vannak (nincs közös pontjuk)- két egyenes *metszi egymást*, ha nem párhuzamosak, azaz van egy közös pontjuk, és egy síkban fekszenek (csak egyetlen közös pontjuk van)**Metsző és párhuzamos egyenes-párok síkot határoznak meg**- két egyenes *kitérő*, ha nem egy közös síkban vannak (nincs közös pontjuk, és nem lehet rájuk közös síkot fektetni)

5. EGYENES-SÍK helyzete:

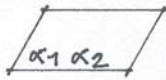
- az egyenes benne fekszik a síkban, *rajta van* a síkon (a sík egyik egyenese) Ha az egyenes két pontja benne van a síkban, akkor az egyenes minden pontja benne van a síkban.



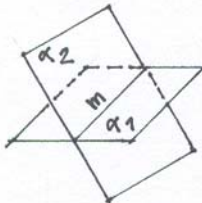
- az egyenes *döfi* a síkot, ha nem párhuzamos a síkkal és nincs benne a síkban, egyetlen közös pontjuk van (speciális eset, ha az egyenes merőleges a síkra)



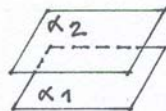
- az egyenes *párhuzamos* a síkkal, akkor és csakis akkor, ha a rajta kívül eső sík tartalmaz az egyenessel párhuzamos egyenest

6. SÍK-SÍK helyzete:

- két sík *illeszkedik* egymásra minden pontjuk közös (a tér ugyanazon síkjáról van szó)



- két sík *metszi* egymás, van egy közös pontjuk, két sík metszése egy egyenes (két sík egy egyenesben metszi egymást)

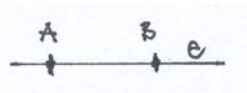


- két sík párhuzamos egymással, ha nincs közös pontjuk

EGYENES ÉS SÍK KÍTÉRŐ HELYZETBEN NEM LEHET!1.1.3. Térelemek meghatározása :

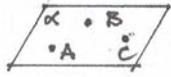
a.) **ÖSSZEKÖTÉSSEL:** két vagy több térelemet összekötésével egy újabb térelemet kapunk.

az *egyenest*:

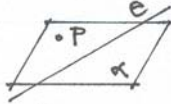


- két pontja határozza meg

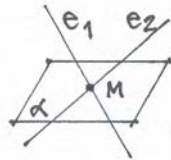
a *síkot* meghatározza:



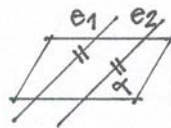
- három pontja, amelyek nem esnek egy egyenesbe



- egy egyenese és egy rajta kívül eső pontja

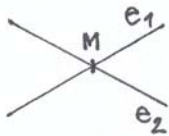


- két metsző egyenese

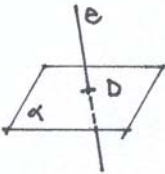


- két párhuzamos egyenese

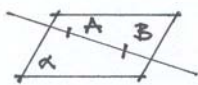
b.) **METSZÉSSEL:** egy újabb térelemet másik kettő metszéseként kapjuk



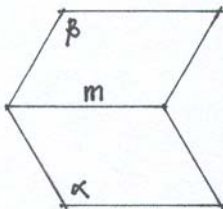
- két egyenesnek lehet egy közös pontja, ez a metszéspont



- egyenes és sík egyetlen közös pontja a metszéspontjuk = dőféspont, talppont, nyompont.

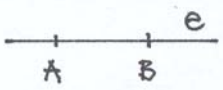
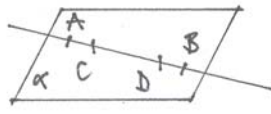
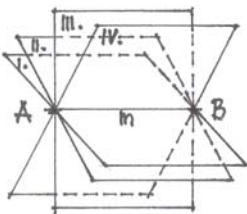
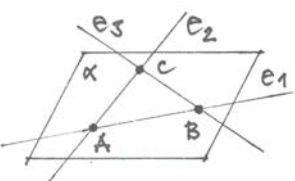
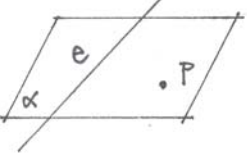
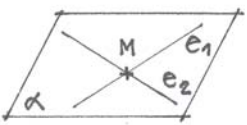
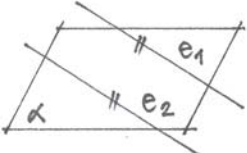


- ha az egyenesnek és a síknak két közös pontja van, akkor az egyenes benne fekszik a síkban



- két síknak lehet egy közös egyenese, ez a síkok metszévonalára nyomvonal, a metszévonal két sík közös pontjainak összessége

1.1.4. Tételek alaptulajdonságai:

- 
- Két ponton át csak *egyetlen* egyenes fektethető (azaz két pont meghatároz egy egyenest).
- 
- Ha az egyenes *két pontja* rajta van a síkon, akkor minden pontja, tehát maga az *egyenes is a síkban fekszik*.
- 
- Két ponton keresztül *számtalan* sík fektethető. Ezek a két pont által meghatározott egyenesben metszik egymást.
- 
- Három ponton át – amelyek nem esnek egy egyenesbe – mindig lehet *egyetlen* síkot fektetni (azaz három nem egy egyenesbe eső pont *síkot* határoz meg).
- 
- Egy egyenes és egy rajta kívül eső pont meghatározza a *síkot*.
- 
- Két metsző egyenes szintén meghatározza a *síkot*.
- 
- Két párhuzamos egyenes is *síkot* határoz meg.

1.1.5. Végtelenben fekvő tételek:

Logikailag egységet teremthetünk, ha elfogadjuk, hogy minden egyenesnek egyetlenegy végtelenben fekvő pontja van.

Párhuzamos egyenesek végtelenben lévő pontja közös. Ez a közös pont a párhuzamos egyenesek metszéspontja.

A sík végtelenben lévő pontjai a síkra illeszkedő egyenesek végtelenben lévő pontjai. E végtelenben lévő pontok halmaza a sík egyetlen végtelenben lévő egyenese.

Párhuzamos síkok végtelenben fekvő egyenese közös.

A tér végtelenben lévő pontjai, illetve egyenesei egy síkra illeszkednek, a tér egyetlen végtelenben lévő síkjára.

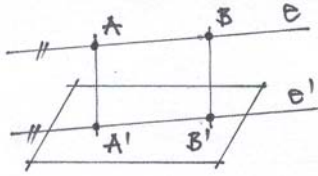
1.1.6. Mértani hely fogalma:

Mértani helynek nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek bizonyos feltételeket kielégítve helyezkednek el a térben.

A mértani hely pontja a feltételeket kielégítő elhelyezkedésű összes pont, de nem pontja egyetlenegy olyan pont sem, amely nem tesz eleget a feltételeknek

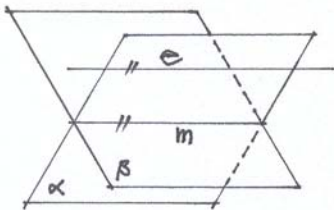
1.2. TÉRGEOMETRIA ALAPTÉTELEI

1.2.1. I. ALAPTÉTEL: Egyenes-sík párhuzamossága

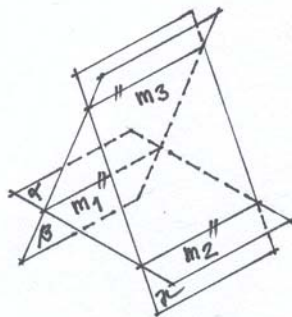


Egy egyenes akkor párhuzamos egy síkkal, ha van a síkban egy olyan egyenes, amely az adott egyenessel párhuzamos.

Következménye:



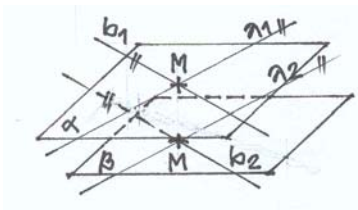
1. Ha a síkkal párhuzamos egyenesre síkot fektetünk, ez a sík az adott síkot, az adott egyenessel párhuzamos egyenesben metszi.



2. Két egymást metsző sík metszésvonalával párhuzamos harmadik sík az adott síkokat a metszésvonallal párhuzamos egyenesekben metszi. Ezek az egyenesek (m_1 ; m_2 ; m_3) egymással is párhuzamosak.

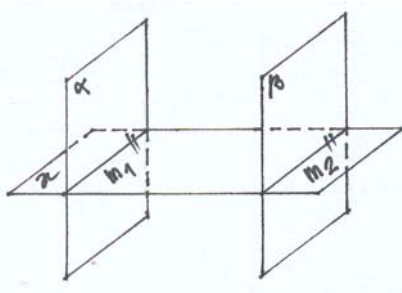
Ha három sík párhuzamos egyenesekben metszi egymást, akkor bármelyik két sík metszésvonala párhuzamos a harmadik síkkal. Tehát ha a három sík páronként metszi egymást, metszésvonalaik (m_1 ; m_2 ; m_3) párhuzamosak.

1.2.2. II. ALAPTÉTEL: sík-sík (két sík) párhuzamossága



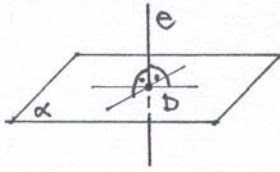
Két sík akkor párhuzamos egymással, ha az egyik síkban van két olyan metsződő egyenes, amely a másik sík két egyenesével párhuzamos.

Következménye:



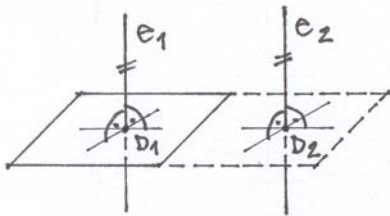
Két párhuzamos síkot egy harmadik sík egymással párhuzamos egyenesekben metszi (m_1 ; m_2).

1.2.3. III. ALAPTÉTEL: egyenes-sík merőlegessége (Síkot metsző egyenesek speciális esete)



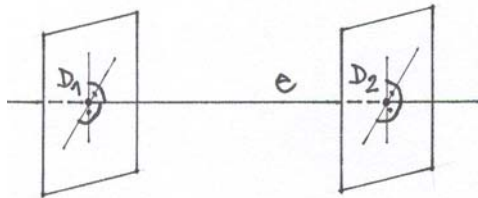
Egy egyenes akkor merőleges a síkra, ha van a síkban az egyenes talp-pontján áthaladó két egyenes, amelyekkel az adott egyenessel külön-külön is derékszöveget alkot.

Következménye:

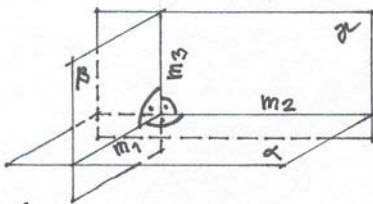


1. Azok az egyenesek, amelyek egy adott egyenes talp-pontján átmennek és az adott egyenesre merőlegesek, egy síkban, az egyenesre merőleges síkban vannak.

2. Ha két egyenes párhuzamos és közülük az egyik egy síkra merőleges, a másik is merőleges erre a síkra.



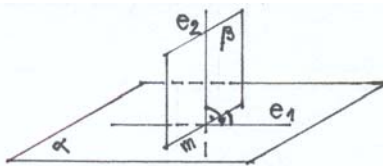
Ha két egyenes ugyanarra a síkra merőleges, a két egyenes párhuzamos egymással.



4. Ha két sík ugyanarra az egyenesre merőleges, a két sík párhuzamos egymással.

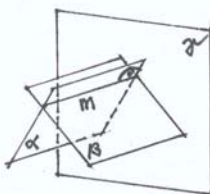
5. Két sík metszésvonalára merőleges sík mindkét adott síkra merőleges.

1.2.4. IV. ALAPTÉTEL: sík-sík (két sík) merőlegessége

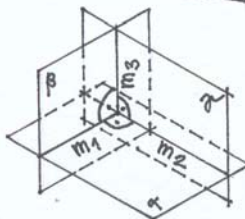


Két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban van olyan egyenes, amely a másik síkra is merőleges.

Következménye:



1. Ha két, egymást metsző sík merőleges egy harmadik síkra, metszésvonaluk is merőleges a harmadik síkra.



2. Ha három sík páronként egymásra merőleges, akkor metszésvonalaik is merőlegesek egymásra.

1.2.5. TÉRELEMEK FONTOSABB TÉTELEI ÖSSZEFOGLALVA

a.) PÁRHUZAMOS TÉRELEMEK

1. Két egyenes akkor párhuzamos, ha van összekötő síkjuk, és nincs a végesben fekvő metszéspontjuk.
2. Egy sík és a síkon kívül adott egyenes akkor párhuzamos, ha van a síkban olyan egyenes, amely az adott egyenessel párhuzamos.
3. Két sík párhuzamos, ha van az egyik síkban két olyan különböző irányú egyenes, amely a másik síkkal külön-külön is párhuzamos.
4. Ha két egyenes külön-külön ugyanazzal az egyenessel párhuzamos, akkor a két egyenes egymással is párhuzamos.
5. Adott síkkal adott ponton át egyetlen párhuzamos sík fektethető.
6. Adott síkkal adott ponton át számtalan párhuzamos egyenes húzható. Ezek az egyenesek valamennyien az adott ponton átmenő és az adott síkkal párhuzamos síkban vannak.
7. Ha egy sík két párhuzamos egyenes közül az egyikkel párhuzamos, akkor a másik egyenessel is párhuzamos.
8. Ha egy egyenes egy síkkal párhuzamos, akkor az egyenesen átmenő minden sík az adott síkot az adott egyenessel párhuzamos egyenesben metszi.
9. Ha két sík párhuzamos, akkor mindegyik síknak valamennyi egyenese párhuzamos a síkkal.
10. Ha két párhuzamos síkot egy harmadik sík metsz, akkor a metszéspontok is párhuzamosak.
11. Ha két egymást metsző egyenes külön-külön egy adott síkkal párhuzamos, akkor az egyenesek síkja is párhuzamos az adott síkkal.
12. Ha két egymást metsző sík mindegyike ugyanazzal az egyenessel párhuzamos, akkor a két sík metszéspontja is párhuzamos az egyenessel.
13. Ha egy egyenes két párhuzamos sík közül az egyikkel párhuzamos, akkor a másik síkkal is párhuzamos.
14. Ha három sík közül egyik kettő sem párhuzamos egymással, és az egyik sík párhuzamos a másik két sík metszéspontjával, akkor bármelyik sík a másik két sík metszéspontjával párhuzamos. A három metszéspont egymással párhuzamos.
15. Ha két sík külön-külön ugyanazzal a harmadik síkkal párhuzamos, akkor a két sík egymással is párhuzamos.
16. Párhuzamos egyenesekből párhuzamos síkok egyenlő szakaszokat metszenek le.
17. Ha két kitérő egyenes közül az egyiknek egy pontján keresztül a másikkal párhuzamos egyeneseket húzunk, akkor az így nyert egyenesek egy síkban vannak.
18. Két kitérő egyenesen mindig keresztülfektethető egyetlen párhuzamos síkpár. Két kitérő egyenesen azonban egyetlen sík nem fektethető.

b.) MERŐLEGES TÉRELEMEK

1. Ismeretes, hogy az egyenesszög szárai egy egyenesre esnek. Az egyenesszög felét derékszögnek nevezzük. A derékszög szárait azt mondjuk, hogy merőlegesek egymásra.
2. Két egymást metsző egyenes, akkor merőleges egymásra, ha derékszöget zárnak be.
3. Két kitérő egyenes akkor merőleges egymásra, ha a tér egy tetszőleges pontján átmenő és velük párhuzamos két egyenes egymásra merőleges.
4. Egy sík, akkor merőleges egy másik síkra, ha tartalmaz olyan egyenest, amely a másik síkra is merőleges.
5. Egy sík akkor merőleges egy másik síkra, ha merőleges a másik sík egyik egyenesére.
6. Síkban egy ponton keresztül a síkban adott egyenesre csak egyetlen merőleges húzható.
7. Adott egyenes akkor merőleges egy síkra, ha annak két különböző irányú egyenesére merőleges. Az adott egyenes ilyenkor a sík minden egyenesére merőleges.
8. Ha adott egyenes egy síkot úgy metsz, hogy reája nem merőleges, akkor a síknak végtelen sok olyan egyenese van, mely az adott egyenesre merőleges, és végtelen sok olyan egyenese van, mely metszi azt, végül van olyan egyenese, mely merőleges az adott egyenesre, és metszi is. A síkból ezt az egyenest a dőfsponton átmenő és az adott egyenesre merőleges sík metszi ki.
9. Adott egyenesre egy pontban állított valamennyi merőleges egyenes egy síkban van. Ez az egyetlen olyan sík mely a pontban az egyenesre merőleges.
10. Az adott egyenesre egy rajta kívül levő pontból számtalan egyenes bocsátható. Ezek az egyenesek abban az egyetlen síkban vannak, amely az adott egyenesre merőlegesen állítható. Az egyenesek közül csak egy olyan van, amelyik az adott egyenest merőlegesen metszi.
11. Adott síkra egy ponton keresztül csak egy merőleges egyenes bocsátható.
12. Adott ponton át egy egyenesre csak egy merőleges sík állítható.
13. Ha egymásra merőleges síkok egyikében a metszészvonalra merőleges egyenest állítunk, akkor ez a másik síkra is merőleges.
14. Adott síkra egy ponton számtalan merőleges sík állítható. A síkok a pontból az adott síkra bocsátott egyetlen merőleges egyenesen mennek keresztül. Adott síkra merőleges síkok az adott síkra merőleges egyenesekben metszik egymást.
15. Ha két sík merőleges egy harmadik síkra, akkor a két sík metszészvonala is merőleges a harmadik síkra.
16. Ha három sík páronként merőleges egymásra, akkor metszészvonalaik is páronként merőlegesek egymásra.
17. Adott síkra nem merőleges egyenesre egyetlen olyan sík fektethető, amely az adott síkból az egyenesek az adott síkon lévő merőleges vetületét metszi ki.
18. Ha két egyenes kitérő helyzetű, akkor mindig van egy olyan egyenes, amelyik mindkettőt merőlegesen metszi. Ez az egyenes a kitérő egyenesek normáltranszverzálisa.

c.) PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES TÉRELEMEK

1. Ha két egyenes ugyanarra a síkra merőleges, akkor párhuzamos egymással.
2. Ugyanarra az egyenesre merőleges két sík párhuzamos egymással.
3. Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges egy síkra, akkor a másik is merőleges a síkra.
4. Ha két párhuzamos sík közül az egyik valamely egyenesre merőleges, akkor a másik is merőleges az egyenesre.
5. Ha egy egyenes egy adott síkra merőleges, akkor bármely, az adott síkkal párhuzamos síkra is.
6. Ha egy sík adott egyenesre merőleges, akkor merőleges bármely, az adott egyenessel párhuzamos egyenesre is.
7. Ha adott egyenes és egy sík ugyanarra az egyenesre merőleges, akkor az adott egyenes a síkkal párhuzamos (vagy benne van).
8. Ha egy sík egy egyenessel párhuzamos és az egyenes egy másik síkra merőleges, akkor a sík is merőleges a másik síkra.
9. Egy síkra számtalan merőleges egyenes állítható, ezek az egyenesek egymással párhuzamosak, közös irányúak. Egy síkhoz egyetlen merőleges irány tartozik ez a *normálisa*.
10. Egy egyenesre számtalan sok merőleges sík állítható, ezek egymással párhuzamosak, közös az állásuk. Egy egyeneshez egyetlen merőleges síkállítás tartozik.

1.3. TÁVOLSÁGOK, SZÖGEK, SZIMMETRIA

A térelemek viszonylagos helyzetétől függően beszélhetünk két térelem távolságáról és szögéről.

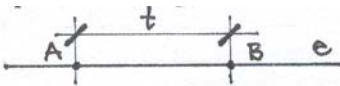
A *távolság* az alakzatok pontjainak *legrövidebb* távolsága és a *merőlegesség* is a jellemzője a fogalomnak.

Rendszerint a *legrövidebb* a definíció alapja, és bizonyítható, hogy ez egyben a merőleges is.

1.3.1. TÁVOLSÁGOK:

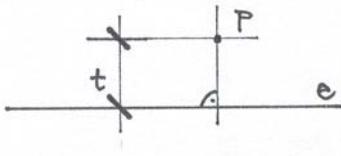
Két pont távolsága :

a két pontot összekötő szakasz hossza



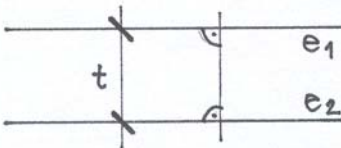
Pont és egyenes távolsága :

a pontból az egyenesre bocsátott merőleges egyenes és az egyenes metszéspontja, valamint az adott pont által határolt szakasz hossza



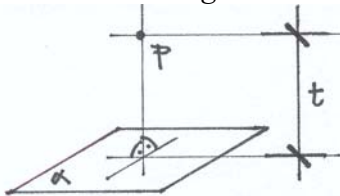
Két párhuzamos egyenes távolsága :

a két egyenest merőlegesen metsző bármely egyenesnek az adott egyenesek közötti merőleges szakasz hossza.



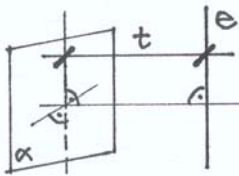
Pont és sík távolsága :

a pontból a síkra bocsátott merőleges egyenes és a sík metszéspontja, valamint az adott pont által határolt szakasz hossza



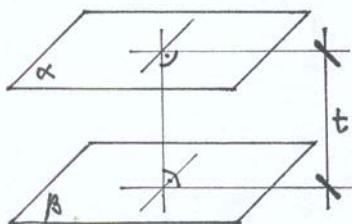
Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága :

az egyenes tetszőlegesen kijelölt pontjából a síkra bocsátott merőleges egyenes és a sík metszéspontja



Két párhuzamos sík távolsága :

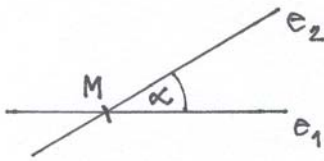
a két síkra merőleges egyenes, két sík közötti szakaszának hossza



1.3.2. SZÖGEK :

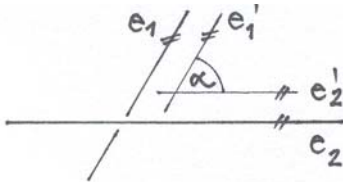
Két metsző egyenes szöge :

a két egyenes által bezárt szög közül a hegyesszög



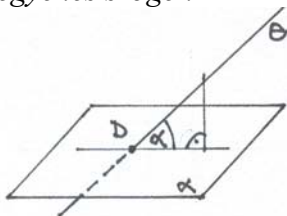
Kitérő egyenesek szöge :

az a hegyesszög, melynek egyik szára az egyik, másik szára, pedig a másik kitérő egyenessel párhuzamos



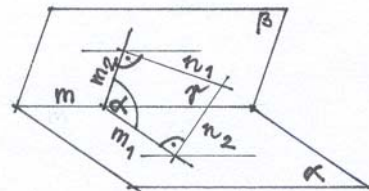
Sík és egyenes szöge :

az egyenesen át az adott síkra merőlegesen fektetett sík és az adott sík metszsvonalának az egyenessel bezárt szöge. Ez a szög nem más, mint az adott egyenes és az adott síkra merőleges egyenes szögének pótszöge



Két sík szöge (lapszög) :

bármely két sík metszsvonalára merőleges síknak a két síkból kimetszett metszsvonalai által bezárt szög



1.3.3. TÉRBELI IDOMOK SZIMMETRIÁJA :

- *Pontra vonatkoztatott szimmetria :*

Két alakzat szimmetrikus egy pontra, ha az egyik alakzat minden pontjának a másik alakzat olyan pontja felel meg, hogy a megfelelő pontokat összekötő összes szakasz felezőpontja egy és ugyanazon pont, a **szimmetria-középpont**.

- *Egyenesre vonatkoztatott szimmetria:*

Két alakzat szimmetrikus egy egyenesre, a **szimmetriatengelyre**, ha az egyik alakzat minden pontjának a másik alakzat olyan pontja felel meg, hogy a megfelelő pontokat összekötő összes szakaszt a szimmetriatengely merőlegesen metszi és felezi.

- *Síkra vonatkoztatott szimmetria (tükrösség) :*

Két alakzat szimmetrikus egy síkra, a **szimmetriasíkra** (tükörképe egymásnak), ha az egyik alakzat minden pontjának a másik alakzat olyan pontja felel meg, hogy a megfelelő pontokat összekötő összes szakaszt a szimmetriasík merőlegesen felezi.

2. heti előadás

1.4. VETÍTÉSI MÓDOK, ELVEK:

A műszaki rajz alapvető feladata, térbeli 3 dimenziós alakzatok képeinek előállítás. A térbeli megjelenítés bonyolult, nagy apparátust és költséget igényel (pl. a hologram). Módszereink és eszközeink lehetővé teszik és alkalmasak, hogy a térbeli alakzatokat két dimenzióban, síkban ábrázoljuk.

Nézzük meg, hogyan keletkezik szemünkben a kép?

A valóság formáit szemünk ideghártyájára a szemlencse optikai úton vetíti. Ez a vetítődő kép **kétdimenziós síkkép** a valóság háromdimenziós térformáiról.

A tárgyról visszaverődő fénysugarak vetítik a szem ideghártyájára a képet úgy, hogy a sugarak a szemlencsében metszik egymást.

A fénysugarak metszéspontja a **vetítési középpont**. Ugyanígy keletkezik a fényképezőgéppel készített kép is.

A szemünk és a fényképezőgép a külvilág formáiról úgynevezett **perspektivikus** képet készít. A kép keletkezéséhez (egy pontban metsződő) **vetítősugarak** kellenek, melyek a képet egy képfelfogó felületre (rendszerint sík felületre) a **KÉPSÍK**-ra vetítik.

- Az alakzat síkbeli képéhez a **vetítés (projekció)** módszerével jutunk.
- A kép keletkezésének három *elengedhetetlen feltétele*:

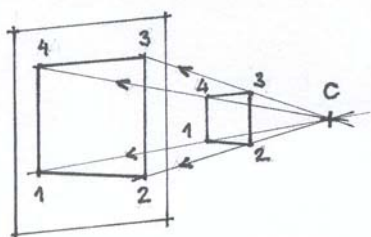
- a) **a tárgy**
- b.) **a vetítő sugár** (vetítő egyenes)
- c.) és egy rendszerint sík felület = **a képsík**

A tárgy és a képsík pontjait a VETÍTŐ-EGYENESEK rendelik egymáshoz. A tárgy egy pontjának a képe ott van, ahol a rajta átmenő vetítősugár dőfi a képsíkot.

- A vetítésnek *két alapvető* módja:

(Vetítő egyenesek egymáshoz és a képsíkhöz viszonyított helyzete szerint.)

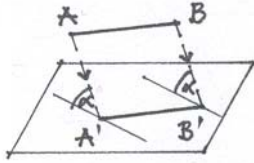
1.) **CENTRÁLIS (KÖZPONTOS) VETÍTÉS-I MÓD**



egy közös pontból indulnak a vetítősugarak, nem párhuzamosak egymással, és nem merőlegesek a képsíkra

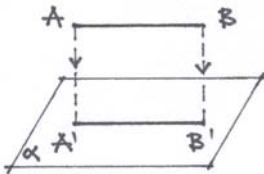
2.) PARALEL (PÁRHUZAMOS) PROJEKCIÓ

a.) FERDE PARALEL



a vetítősugarak, egymással párhuzamosak, de nem merőlegesek képsíkra, hanem szöget zárnak be vele

b.) ORTOGONÁLIS PARALEL PROJEKCIÓ



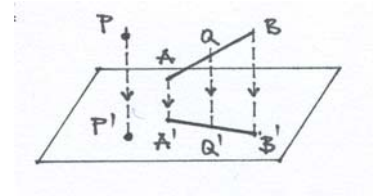
a vetítősugarak egymással párhuzamosak és merőlegesek a képsíkra

A PÁRHUZAMOS VETÍTÉS FONTOSABB JELLEMZŐI:

a pont vetülete : pont

az egyenes vetülete : egyenes

A párhuzamos vetítés tehát EGYENESTARTÓ leképezés.



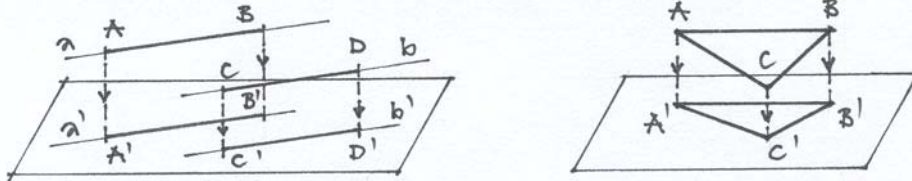
A párhuzamos vetítés ARÁNYTARTÓ :

Ha egy szakaszt egy pont két részre oszt, a két részzel hosszának aránya a vetületen is ugyanakkora. A szakasz felezőpontjának vetülete felezi a szakasz vetületét.

PÁRHUZAMOSSÁGTARTÓ :

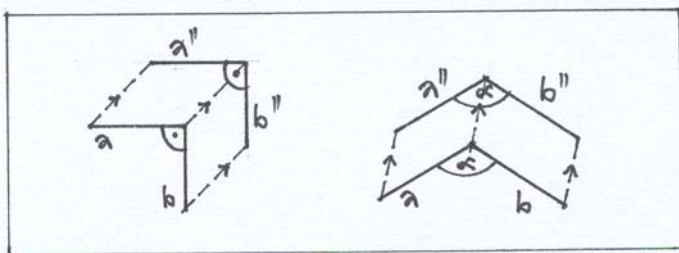
Párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak. A képsíkkal párhuzamos síkban lévő síkidom és vetülete egybevágó (EGYBEVÁGÓSÁG)

Ebből a tételből következik: hogy valamely szög nagysága a vetületben nem változik, ha a szög szárai párhuzamosak a képsíkkal.



Merőleges vetítéskor a derékszög vetülete derékszög marad, ha legalább az egyik szögcszár benne fekszik a síkban, vagy azzal párhuzamos. Ekkor ugyanis a derékszög másik szárának vetítősíkja – függetlenül a szögcszár helyzetétől – ugyanaz a sík.

Merőleges vetítés esetén valamely egyenes szakasz vetületének hossza az eredeti hosszal vagy egyenlő, vagy annál rövidebb.



1.5. TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSI MÓDJAI

1.5.1. PERSPEKTÍVA

(CENTRÁLIS, KÖZÉPPONTOS VETÍTÉSI MÓD)

(Nevezik még TÁVLATTANNAK, LÁTSZATTANNAK)

A bennünket körülvevő világot szemünk perspektivikus képekben látja, vagyis ez a vetítési rendszer közelíti meg legjobban a valóságot.

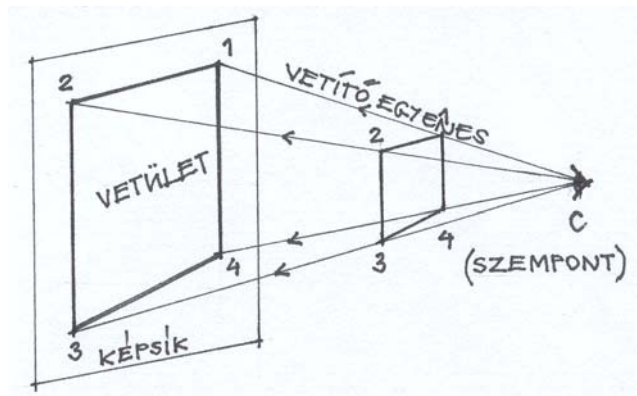
Tehát a kép keletkezéséhez egy pontban metsződő vetítősugarak kellene, melyek a képet egy képfelfogó felületre (rendszerint sík felületre) vetítik. Más megfogalmazásban bármilyen térbeli elem perspektivikus képét sugarak vetítik egy adott síkfelületre. Ez a felület a **képsík**. A vetítősugarak ennél a rendszernél egy pontban metszik egymást. A vetítősugarak metszéspontja a vetítési középpont ($C = \text{centrum}$). A vetület (**a kép**) ott keletkezik, ahol a vetítendő tárgy pontjait súroló sugarak eléri a képsíkot. A testek, síkidomok, egyenesek, görbék pontjait vetítjük, a pontképek megfelelő összekötésével kapjuk a térbeli elem képét, vetületét.

Mindig tudni kell, hogy a szerkesztés vonalainak melyek a térbeli megfelelői!

Ha egy térbeli alakzatot ábrázolunk a rajzlap síkján, az alakzat minden pontjának megfelel a rajz síkjának egy pontja. Ez a pont a térbeli pont **KÉPE** (**VETÜLETE**). A pontok képét tartalmazó síkot nevezzük **KÉPSÍKNAK**.

Ha a képsíkot függőlegesnek választjuk, nézzük egy pont térbeli képét (vetületét) a képsíkban.

Legyen ez a pont az ábránk **1** pontja. Fektsünk egyenest az **1** ponton át közös metszéspontból. Ennek az egyenesnek a képsíkkal alkotott metszéspontja (döféspontja) a pont képe. Az egyenes a pontot a képsíkra vetíti, ez az egyenes a **VETÍTŐ EGYENES** (**VETÍTŐ SUGÁR**), a pont képét a pont **VETÜLETÉNEK** nevezzük.



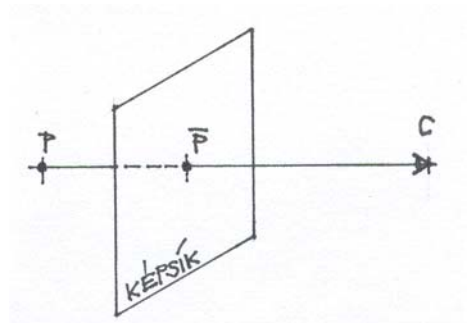
Tehát, ha a vetítő egyenesek (vetítő sugarak) egy pontban metszik egymást (**VAN EGY KÖZÖS PONTJUK**), akkor középpontos vetítésről beszélünk. Ezt a közös pontot szempontnak, vetítési középpontnak, **CENTRUMNAK** nevezzük. Jele: **C**

Az így készült képről az alakzat (a tárgy) könnyen felismerhető, de méretei közvetlenül nem állapíthatók meg. Az ábrázolandó tárgy mérete úgy választandó meg, hogy a képe elférjen egy csúcsával a szemre illeszkedő, a képsíkra merőleges tengelyű, 30° -os csúcshögű látókúpban a képsíkkal alkotott metszetsík körébe. E körbe eső része a képnek természetesen hat, ezen körön kívüli részek torzulnak.

TÉRELEMEK VETÜLETE:

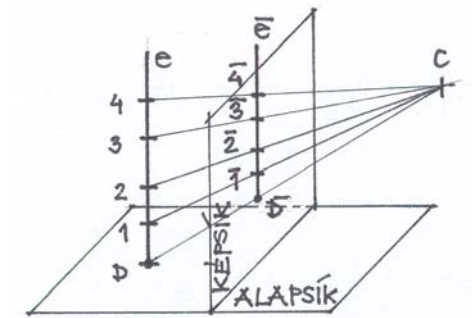
1. Pont vetülete: pont

A pont vetülete, a pontot a középponttal (szemmel) összekötő egyenesnek a képsíkkal alkotott metszéspontja (dőféspontja).

**2. Egyenes vetülete:** egyenes

Az egyenes vetülete egyenes, mert az egyenes pontjait a középponttal összekötő egyenesek síkot alkotnak, ez a sík a képsíkot egyenesben metszi.

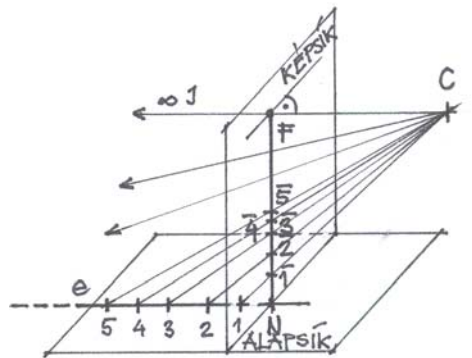
a.) függőleges egyenes vetülete : függőleges egyenes



b.) képsíkra merőleges egyenes vetülete:

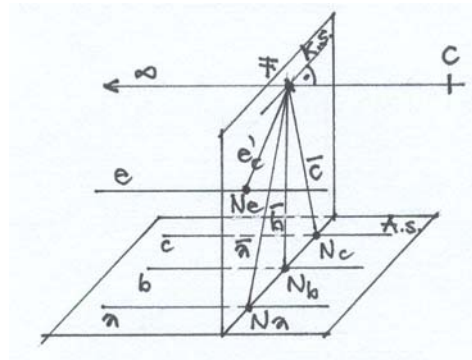
Az alapsíkban fekvő egyenes a képsíkot a két sík (ALAPSÍK és KÉPSÍK) metszés-vonalának, az **ALAPVONALNAK** egy pontjában dőfi. Az egyenesnek a képsíkkal alkotott dőféspontja az egyenes **NYOMPONTJA**. Jele : N. A nyompont a képsíkban van, vetülete önmaga. Az egyenes vetülete a nyompontra megy át. Ha az egyenes végtelen távoli pontját összekötjük a középponttal (szemponttal), akkor belátható, hogy ez az összekötő egyenes párhuzamos az alapsíkban lévő egyenessel, vagyis az összekötő egyenes is merőleges a képsíkra. Dőféspontját a képsíkon **FŐPONTNAK** nevezzük. Jele : F.

Az egyenes vetülete e felé a pont felé irányul, ez a pont az egyenes **IRÁNYPONTJA**, jele : I.



c.) képsíkra merőleges párhuzamos egyenesek vetülete:

Ha az alapsíkban több a képsíkra merőleges egyenest veszünk fel, ezek egymással párhuzamosak. A végtelen távoli pontjukat a középponttal (szemponttal) ugyanaz az egyenes köti össze, amely a képsíkot a főpontban dőfi. Az egyenesek képe mind a főpontba irányul. Ha az egyenes nem az alapsíkban van, akkor is a főpontba irányul a vetülete.

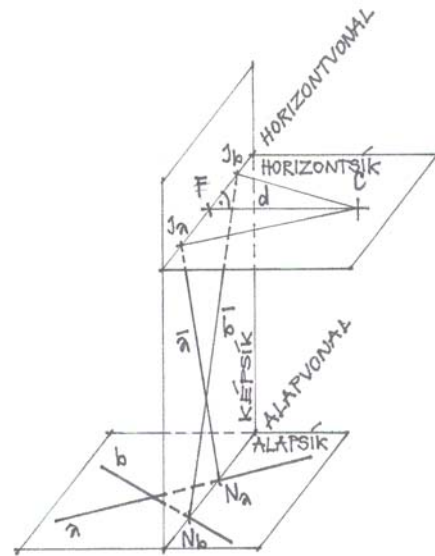


MEGÁLLAPÍTHATJUK, hogy a képsíkra merőleges egyenesek iránypontja a főpont, továbbá, hogy a párhuzamos egyeneseknek közös iránypontjuk van.

d.) alapsíkban fekvő, vagy alapsíkkal párhuzamos

.de általános helyzetű egyenesek vetülete :

Az egyenesek a képsíkot az alapvonalon fekvő \mathbf{Na} és \mathbf{Nb} nyompontokban metszik. Az „a” egyenes végtelen távoli pontját a középponttal (szem-ponttal) összekötve a képsíkot az \mathbf{Ia} pontban metszi. Az „a” egyenes e felé a pont felé irányul, ezt a pontot az egyenes **IRÁNYPONTJÁNAK** nevezzük. A „b” egyenes hasonlóképpen az \mathbf{Ib} felé irányul. Az $\mathbf{Ia-C}$ és az $\mathbf{Ib-C}$ egyenesek az alapsíkkal párhuzamos síkot határoznak meg. Ez a sík a képsíkot az alapvonalal párhuzamos egyenesben metszi. Ezen az egyenesen (metszésvonalon) vannak az alapsíkban fekvő egyenesek iránypontjai. Ezt az egyenest **HORIZONTVONALNAK** (látóhatárnak) nevezzük. A horizontvonal a főponton halad át.

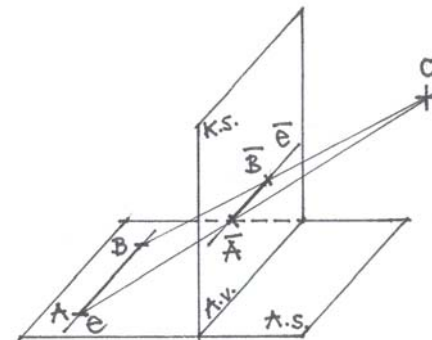


Ha az egyenes nem fekszik az alapsíkban, de párhuzamos vele, iránypontja ugyancsak a horizontvonalon van.

Az alapsíkot vízszintesnek választottuk, tehát kimondhatjuk, hogy a vele párhuzamos egyenesek is vízszintesek és a vízszintes egyenesek iránypontjai a horizontvonalon vannak.

e.) alaponallal párhuzamos egyenesek vetületei :

Az egyenes és a középpont által meghatározott sík a képsíkot az alapvonalal párhuzamos egyenesbe metszi. Tehát az alaponallal párhuzamos egyenes akár az alapsíkban fekszik, akár csak párhuzamos vele, vetülete az alapvonalal párhuzamos egyenes lesz.



f.) síkok vetülete:

A síkok vetületeinek szerkesztését csak sokszögek ábrázolására korlátozzuk, a sokszögeket, határoló egyenseik vetületének megszerkesztésével. Síkbeli görbét pl. kört, pontjainak megszerkesztésével ábrázoljuk.

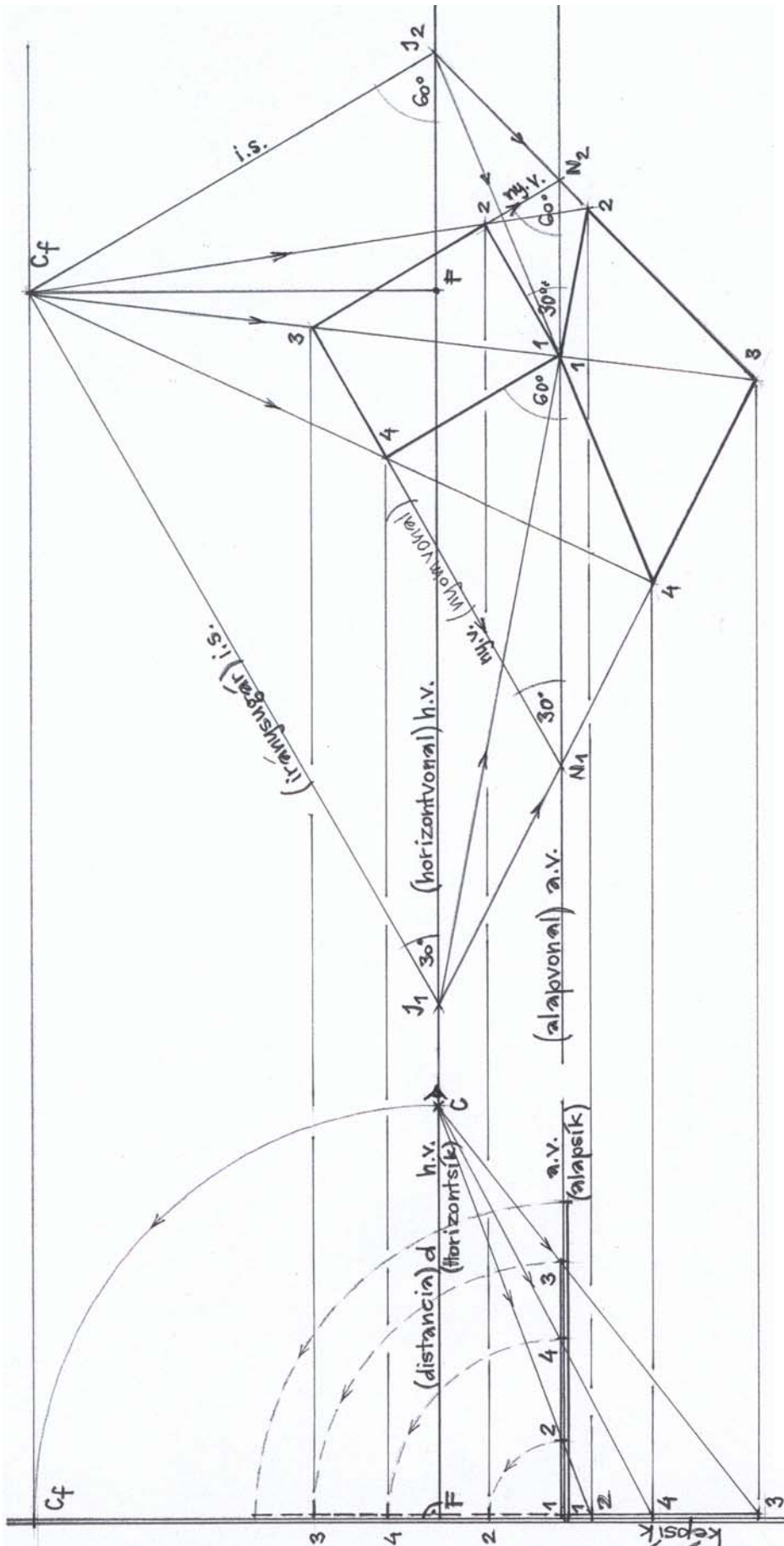
(Lásd: 1.- 2.- 3. ábra+ gyak. feladatok)

g.) térbeli alakzatok vetületeinek ábrázolása :

Ha valamilyen térbeli alakzatot (síkot, síklapu testet, épületet) akarunk ábrázolni, akkor *ismernünk kell az alakzat méreteit, az alakzatnak a képsíkhöz viszonyított helyzetét, valamint a középpontnak (szem-pontnak) a képsíkhöz viszonyított helyzetét.*

(Lásd: 1.- 2.- 3. ábra+ gyak. feladatok)

- Az ábra tudatos és figyelmes tanulmányozásával a középpontos vetítés térgeometriai törvényei leolvashatóak.
- Ez a modell egyszerű eszközökkel könnyen előállítható, az ábra alapján el is képzelhető. Feszítsünk egy függőleges falfelületre egy nagyobb méretű papírlapot, legyen ez a **képsík** (rövidítve: **k.s.**). Illesszünk elé vízszintesen, a falsíkra/képsíkra merőlegesen egy üveglapot, ez lesz az **alapsík** (rövidítve: **a.s.**). Középpontként/**centrumként** (rövidítve: **C**) használjunk pontszerű fényforrást, pl.: gyertyát vagy zseblámpaizzót.
- Helyezzünk az **alapsíkra**/üveglapra egy síkidomot, pl.: egy téglalapot, az ábrán látható módon, csúcsait megszámozva. Egyik csúcsát (pl.: az **1** számút) illesszük az **alapsík**/üveglap és a **képsík**/falsík metszésvonalára, úgy hogy az **1-2-es** él „ **α** ” szöveget, az **1-4-es** él „ **β** ” szöveget zárjon be a metszésvonallal.
- Tartsuk a fényforrást/**centrumot**, mint vetítési középpontot az üveglap fölé, a képsíktól/falsíktól bizonyos távolságra. A **képsík** és a **centrum közötti merőleges távolságot** **distanciának** (képtávolságnak) nevezzük, rövidítve **d** betűvel jelöljük. A fénysugarak, mint **vetítősugarak** (rövidítve: **v.s.**) súrolják a téglalap egyenes éleit. E fénysugarak/**vetítősugarak** élesen kirajzolják a falra erősített papírlapon/**képsíkon** a téglalap árnyékát, amit nevezünk geometriai nyelvén **képnek**, vagy **vetületnek**.
- Ha a fényforrásra/centrumra illesztünk egy szintén vízszintes síkot, úgy hogy a falsíkra/**képsíkra** merőleges legyen, megkapjuk a szem-pont síkját/**horizontsíkot** (rövidítve: **h.s.**). A horizontsík és a képsík **metszésvonalát** **horizontvonalnak** (rövidítve: **h.v.**), az alapsík és a képsík **metszésvonalát** **alapvonalnak** (rövidítve: **a.v.**) nevezzük. A horizontsík, az alapsík vízszintesek és merőlegesek a képsíkra, ebből következően a *horizontvonal és az alapvonal párhuzamosak egymással*.
- Ha az alapsíkon/üveglapon fekvő téglalap oldaléleit meghosszabbítjuk az alapvonalig, megkapjuk az oldalélek **nyompontjait** (rövidítve: **N**). Ha a vetület/árnyék oldaléleit is meghosszabbítjuk, akkor a *térben párhuzamos, vízszintes oldalélek* vetítő egyenesei a távoldás irányában összehajlónak/összetartónak látszanak és a nyomponton keresztül, a horizontvonalon metszik egymást. Ezt a metszéspontot **iránypontnak** nevezzük (rövidítve: **I**). A két-két párhuzamos (a valóságban, a térben párhuzamos) oldalél két (**I₁** és **I₂**) iránypontot ad. Az iránypontok egyben a centrumból/fényforrásból bocsátott **iránysugarak** (rövidítve: **i.s.**) és a horizontvonal metszéspontjai is. Az iránysugarak párhuzamosak az alapsíkon/üveglapon lévő síkidom két (4-3-as és 2-3-as) oldalának élével.
- Már említettük, hogy a centrumból a képsíkra bocsátott merőlegest a distancia, ennek a merőleges vetítő egyenesnek a képsíkkal alkotott dőféspontja a főpont (rövidítve: **F**).
- Az iránypontok és a főpont ugyanazon az egyenesen, a horizontvonalon sorakoznak, az alapvonalon pedig a nyompontok.
- Ha előállítottuk a fent leírt modellt, akkor mielőtt elkezdjük a rajzolást, kísérletezzünk még egy kicsit. Figyeljük, milyen változást okoznak az árnyékon/vetületen, ha pl.: a fényforrást/centrumot függőlegesen felfelé-lefelé mozgatjuk, illetve ha a képsíktól való távolságot csökkentjük vagy növeljük. Alkalmazzunk síkidom helyett téglatestet (gyufásdoboz), vagy hengeres tárgyat.



Perspektíva alapfogalmak

ALAPVONAL
 HORIZONTVONAL
 DISTANCIA
 FORGATOTT CENTRUM
 FŐPONT
 IRÁNYPONT
 NYOMPONT
 IRÁNYVONAL/IRÁNSUGÁR
 NYOMVONAL

- (a.v.) a képsíkra merőleges sík élből látszó képe/ az alapsík és a képsík metszésvonala
 (h.v.) a „szem-pont” vonala, a (szem-sík) horizontsík és a képsík metszésvonala
 (d) a középpont (C = CENTRUM)/szem-pont és a képsík közötti távolság
 (C_f) a vetítési középpont (C) képsíkba forgatott képe
 (F) a vetítési középpontból a képsíkra bocsátott merőleges
 (I) egymással párhuzamos egyenesek végtelen távoli metszéspontja
 (N) a vetítő egyenes képsíkban (alapvonalon) fekvő pontja
 (i.s.) i.s.; ny.v. egymással párhuzamosak. A sík irányvonalán (horizontvonalán) sorakoznak.
 (ny.v.) a sík egyenesének nyompontja a sík nyomvonalán (alapvonalán) sorakoznak.

3. ábra Képsíkba forgatás oldalnézete + perspektíva síkban való szerkesztése

- Mielőtt a síkba forgatást elvégeznénk, foglaljuk össze az előzőekben leírtakat és olvassuk el a 6. oldal g.) pontját!
A téglalapot úgy helyeztük az alapsíkra, hogy az egyik csúcsa (1) illeszkedjen az alapvonalra. A téglalap mérete: hosszabb éle (h), rövidebb éle (sz). A hosszabb él α , a rövidebb él β szöget zár be az alapvonalal.
Mivel az 1 jelű sarokpont illeszkedik az alapvonalra, az 1 sarokpont perspektivikus képe már kész, mert ennek a pontnak az „árnyéka” önmaga.
A centrum (C) távolsága a képsíktól d távolságra van. A horizontvonal helyét a főponttal (F) tűzzük ki. A centruból a képsíkra bocsátott merőlegese adja a főpontot. A téglalap képsíkra illeszkedő csúcsa (1) az alapvonal helyét adja meg. Tehát F ponton át megrajzolt vízszintes egyenes a horizontvonalat, a téglalap 1-es csúcspontján át húzott egyenes az alapvonalat határozza meg. Az alapvonal és a horizontvonal egymással párhuzamos egyenesek.
- A rajzot csak egy síkon (a papírlapunk síkjában) lehet elkészíteni, így modellünk három síkját (képsík, alapsík, horizontsík) egyesíteni kell.

Mindig tudni kell, hogy a szerkesztés vonalainak melyek a térbeli megfelelői!

A további információk a **2. és 3. ábrára** értelemszerűen egyaránt vonatkoznak.

- Az alapsíkot (**a.s.**) az alapvonal (**a.v.**) körül, a horizontsíkot (**h.s.**) a horizontvonal (**h.v.**) körül felfelé forgatjuk a képsík (**k.s.**) síkjába. A forgatás irányát az ábrán ívek jelzik. Az eddig térben elhelyezkedő elemek most egy síkba rendeződnek, megtartva térbeli kapcsolatukat. A téglalap az alapvonal fölé kerül, megtartva az alapvonalal bezárt α , és β szögét. A vetítési középpont/centrum (C) a horizontvonal fölé kerül, természetesen a distancia (**d**) távolságot megtartva, és ekkor forgatott centrumnak (**C_f**) nevezzük. A vetítési sugarakat a centrum magával viszi, azok továbbra is összekötik a téglalap csúcsaival.
- Hosszabbítsuk meg a téglalap éleit az alapvonalig, ezek a metszéspontok az alapvonalon a nyompontok (**N₁; N₂**), illetve ezek a pontok már az egyenesek perspektivikus képpontjai. Ezekre a pontokra illeszkednek az egyenesek perspektivikus megfelelői. Az egymásnak megfelelő oldalélek az *alpvonalon, a nyompontokban metszik egymást*. A végtelenbe vetített téglalap élek végtelen távoli pontjait vetítik az irányugarak (**i.s.**), melyek párhuzamosak a téglalapoldalakkal. Forgatott helyzetben is *párhuzamosak maradnak az irányugarak a téglalap képsíkba forgatott éleivel*, ezért α , és β szögben metszik a horizontvonalat a forgatott centruból (**C_f**) kiindulva, és merőlegesek egymásra. Ahol az irányugarak (**i.s.**) metszik a horizontvonalat, ott vannak a téglalap élek végtelen távoli pontjainak perspektivikus képei. Ezek a metszéspontok az iránypontok (**I₁; I₂**).
- Az iránypontok (**I₁; I₂**) és nyompontok (**N₁; N₂**) összekötésével megrajzolhatjuk a téglalap perspektivikus képét. Ezek a vonalak négyszöget zárnak be, ez a négyszög a **téglalap perspektivikus képe**.
- Rajzunk pontosságát ellenőrizhetjük a forgatott vetítésugarakkal. Ezek a téglalap és perspektivikus képének megfelelő csúcsait kötik össze a forgatott centrummal (**C_f**).

3. heti előadás

1.5.2. AXONOMETRIA (PÁRHUZAMOS SUGARÚ VETÍTÉS)

A vetítési rendszerek ismertetésének sorát azért kezdtük a centrális rendszerrel, mert a bennünket körülvevő világot perspektivikus képekben látjuk.

A műszaki gyakorlatban más természetű képekre, ábrázolási módokra is szükség van. Ezek a képek más sugárrendszerben vetítik a képet a képsíkra. Ezek a képek már nem azonosak az emberi szem által látott képekkel, csak több-kevesebb mértékben hasonlítanak azokhoz.

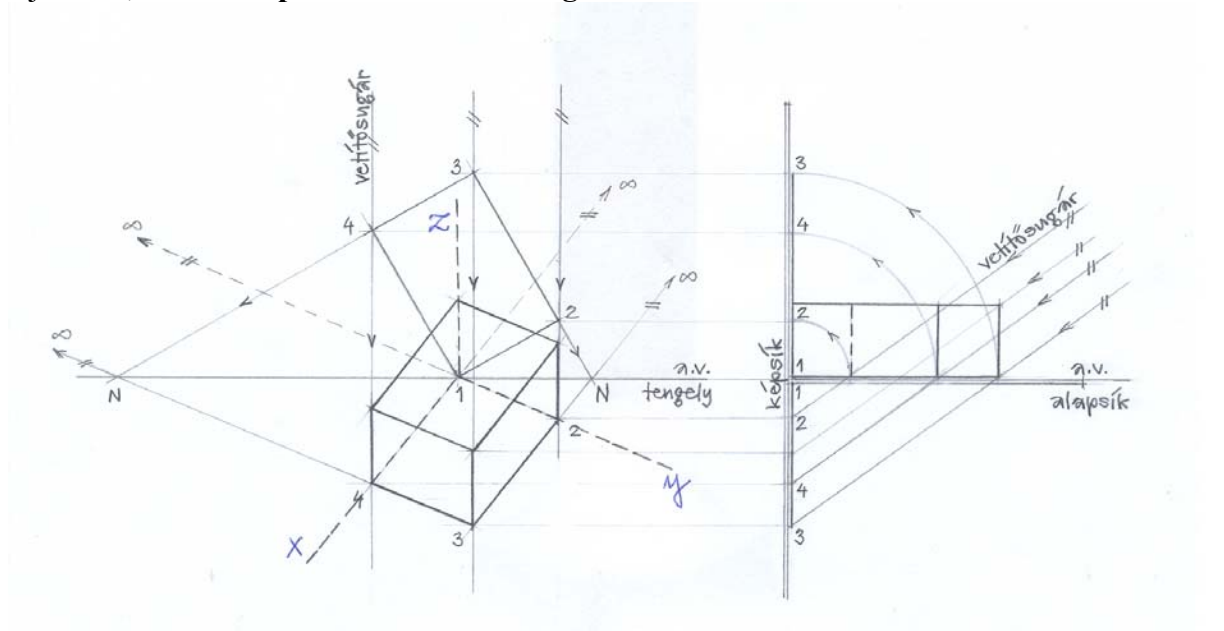
Az új vetítési rendszer, új képi sajátosságokat jelent. Méretes és formai szempontból más lehetőségeket nyújt, mint a perspektivikus kép. Ennek a vetítési rendszernek az előnye, hogy könnyebb szerkeszteni, a kész rajzot könnyebb méretezni és kótázott vonalakkal kiegészíteni. Tehát előnyös szerkesztési és mérési lehetőségeket nyújtanak a mindennapi műszaki életben való alkalmazásukhoz.

Az axonometrikus képnek a műszaki gyakorlatban csak kisegítő szerepe van. Épületek tervrajzát így elkészíteni nehézkes és nem is célszerű, csak épületrészek, szerkezetek, épületelemek bemutatására használjuk.

Tehát az **AXONOMETRIKUS** (*tengelyméretes*) ábrázolás módszerével a háromdimenziós alakzatokról szemléletes (a valósághoz nagyon közel álló) térhatású képet lehet szerkeszteni.

Az ismertetésre kerülő vetítési rendszer vetítősugarai párhuzamosak egymással, a képsíkkal azonban hegyes szöget zárnak be, ezért **ferde sugarú párhuzamos vetítésnek** nevezzük.

Készítsünk képet egy téglatestről, a perspektivikus képhez hasonló szerkesztő eljárással, csak most **párhuzamos vetítésűsugárral**.



Vegyünk fel egy alapvonalat, ITT A HORIZONTVONAL HIÁNYZIK!!!, mert a fényforrás most **végtelen távoli** (pl.: a nap). Az *alpvonalat* nevezhetjük *tengelynek*.

A téglatest alaplapjának, a téglalapnak a képét párhuzamos vetítősugarak vetítik a képsíkra. A téglalap és a vetített képe közötti összefüggést **AFFINITÁSNAK** nevezzük. Tehát az **affinitás** = GEOMETRIAI ELEMELK SÍKBELI ÉS TÉRBELI KAPCSOLATA. Ilyen kapcsolatban a geometriai elemek bizonyos tulajdonságai egyik képről a másíkra áttevődnek (pl.: párhuzamosság, metsződés, stb.)

Feladatunkban szereplő téglalap (téglatest alaplapja) és képének (árnyékának) megfelelő csúcsait párhuzamos egyenesek (vetítősugarak) kötik össze (jobbaldali ábra!). A párhuzamos oldalaknak a képe (árnyéka) is párhuzamos (baloldali ábra!). Ezek az egymásnak megfelelő oldalak meghosszabbítva a tengely vonalában (az affinitás tengelyében) metszik egymást. A derékszögű csúcsok affín társai itt most nem derékszögűek. Bizonyos esetekben a derékszögnek affín megfelelője lehet derékszög.

A szerkesztés lényegében azonos a perspektíva-szerkesztéssel. Az oldalélek meghosszabbítása a tengelyig kijelöli a nyompontokat. Viszont az iránypontokat a végtelenben képzeljük el, ezért a képen (vetületen, árnyékon) a szemben fekvő élek párhuzamosak.

Ha megrajzoltuk a téglatestet, akkor nézzük meg a téglatest három egy csúcsában metsződő élének a képét (vetületét) Legyen az egyik egyenes térbeli helyzete függőleges, ennek képe a képsíkon is **függőleges**, **jelöljük: Z** betűvel. Az erre merőleges másik két tengely a térben vízszintes helyzetű lesz. Ezek a képsíkra merőleges vízszintes síkban bármilyen irányban fehetnek. A képük általában ferde egyenesek, jelöljük a **baloldalt X** betűvel, a **jobbaldalt Y** betűvel. Ez a három egyenes (**X; Y; Z**) az új vetítési rendszerben a három axonometrikus tengely szerepét tölti be. A vetítési rendszerben készített képet **axonometrikus képnek** nevezzük.

Azt a célt, hogy a keletkezett axonometrikus kép térhatású legyen, a tengelykereszt állásának többféle felvételével érhetjük el. Az alakzatot és a hozzákapcsolt koordinátarendszert az axonometrikus képsíkhöz képest általános helyzetben állónak képzeljük, és párhuzamos vetítést alkalmazunk.

Kérdés, hogyan vehetjük fel a tengelykeresztet, és hogyan határozhatjuk meg a képtengelyek mentén a méretváltozást párhuzamos vetítés esetén?

Az axonometrikus ábrázolás során 3 egymásra páronként merőleges sík által meghatározott térbeli koordinátarendszerbe helyezzük az ábrázolandó alakzatot. A 3 tengely a síkok metszészvonala, melyet együtt ábrázolunk az axonometrikus képsíkon. A térben (a valóságban) páronként egymásra merőleges x; y; z irány közül egyik sem párhuzamos a képsíkkal, ezért a vetületen a tengely irányú méretek sem valódi nagyságúak. Az alakzat axonometrikus képét csak a koordinátatengely (**tengelykereszt**) axonometrikus képe ismeretében tudjuk megrajzolni.

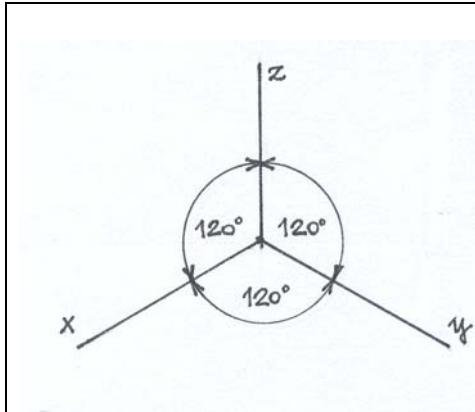
Az ortogonális axonometriában a tengelykereszt tetszőlegesen felvehető úgy, hogy egy-egy tengelypárja egymással tompaszöget zárjon be.

A műszaki rajzgyakorlatban sokféle tengelyállással készíthetünk axonometrikus (térhatású) képet. A teljesség kedvéért meg kell említeni, hogy itt most csak a 3 leegyszerűsített axonometrikus szerkesztést mutatunk be.

A leggyakrabban használatos módszerek:

a) EGYMÉRETŰ ORTOGONÁLIS AXONOMETRIA

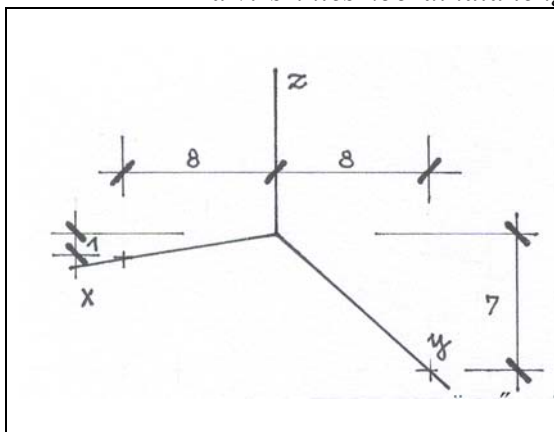
a tengelykereszttek egymással bezárt szöge 120° . A tengelyek mentén a rövidülés azonos. Mindhárom tengelyre ezért a **valódi** méretet mérjük fel.



$$q_x = q_y = q_z = 1$$

b) KÉTMÉRETŰ VAGY FRONTÁLIS AXONOMETRIA

a vízszintes koordináta tengelyek vetületeinek aránya: 8:1 ; 8:7 lejtésű

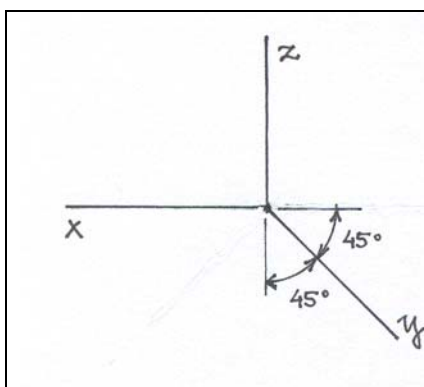


$$q_x = q_z = 1$$

$$q_y = \frac{1}{2}$$

c.) FERDESZÖGŰ KÉTMÉRETŰ (KAVALIER) AXONOMETRIA

az x, y tengely párhuzamos az axonometrikus képsíkkal, vagy vele azonos, A két koordináta tengely vetülete (a függőleges és vízszintes) egymásra merőleges, a harmadik tengely képe a másik kettő szögfelezőjének egyenesével esik egybe. Az egymásra merőleges tengelyek irányában valódi a méret, a ferde tengelyen $\frac{1}{2}$ arányú a rövidülés.



$$q_x = q_z = 1$$

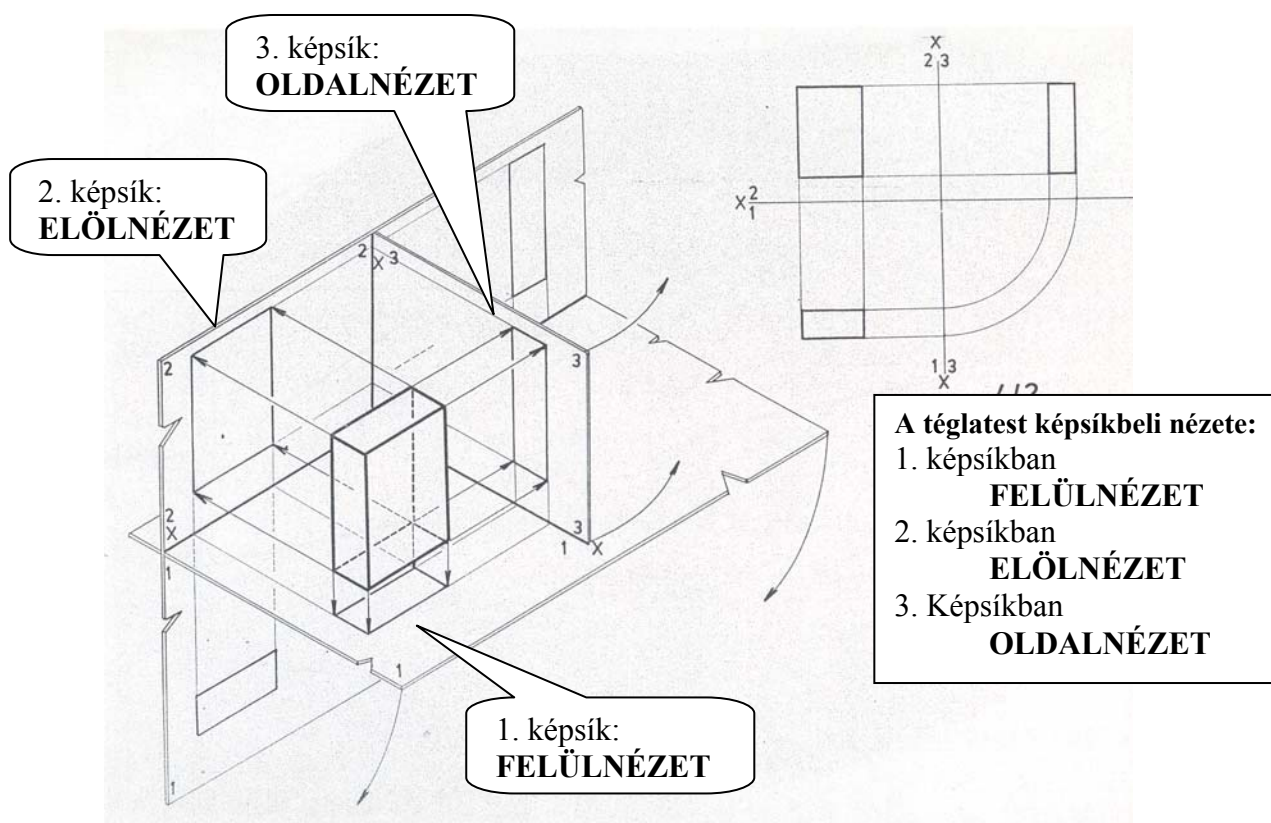
$$q_y = \frac{1}{2}$$

2. ORTOGONÁLIS PARALEL PROJEKCIÓ

(Merőleges, párhuzamos sugarú vetítés)

A műszaki rajzgyakorlat keresi a legegyszerűbb képszerkesztéseket, az olyan lehetőségeket, amelyek az egyértelmű formai és méretes tolmácsolás lehetőségeit biztosítják. Erre a célra legalkalmasabb a merőleges, párhuzamos vetítés. Ezzel a vetítési rendszerrel szinte minden nehézség nélkül rögzíthető a térbeli elemek térbeli helyzete, mérete, formája. E szerint készülnek a tervrajzok.

A merőleges sugarú vetítés két, három, sokszor több képsíkot használ egy vetítési rendszerben. A képsíkok páronként merőlegesek egymásra. A vetületek törvényszerű geometriai rendben kapcsolódnak egymáshoz. Ezek a síkok merőleges sugarú vetítési rendszer *alap-képsíkjai*. A képsíkok egymást ún. *képsík-tengelyekben* metszik. A tengelyeket „*x*” betűvel jelöljük. A képsíkoknak száma van. A képsíkok számát a tengelyek mellé írjuk. A képsíkokat a tengelyek kettészelik, így beszélünk pozitív és negatív képsíkfelületekről. A függőleges, velünk szemben álló képsík a *második képsík*. A vízszintes az *első képsík*. A második képsík pozitív fele a tengely felett van, az első pozitív fele felénk áll. Ugyanígy felénk áll a *harmadik* – mindkettőre merőleges – *képsík* pozitív fele.



A három képsík síkba forgatása

A perspektíva szerkesztésénél már alkalmaztuk a síkok egy síkba egyesítését. Ez szükséges ahhoz, hogy egy felületen rajzolhassunk. A többsíkú rendszer képsíkjait egy síkba kell egyesíteni. Az első két képsík egyesítésénél az a szabály, hogy csak különböző előjelű felületek kerülhetnek az egyesítés után egymásra. Ezt mutatják a fenti ábra nyíljelzései. A képsíkok a teret részekre osztják.

MONGE – FÉLE (KÉT KÉPSÍKOS) ÁBRÁZOLÁS

A különböző vetítési módok közül a számunkra legmegfelelőbb az, amelynek vetülete alapján az ábrázolt alakzat a térben egyértelműen és aránylag könnyen visszaállítható (rekonstruálható).

Ilyen vetítési mód a **merőleges, párhuzamos vetítés (ORTOGONÁLIS PARALELL PROJEKCIÓ)** melyet a Monge-féle két képsíkú rendszerben használunk.

A térbeli alakzat ábrázolásakor a vetületeket, két egymásra merőleges képsíkon hozzuk létre. A képsíkok közül a vízszinteset **I. KÉPSÍKNAK**, a függőlegeset **II. KÉPSÍKNAK** nevezzük.

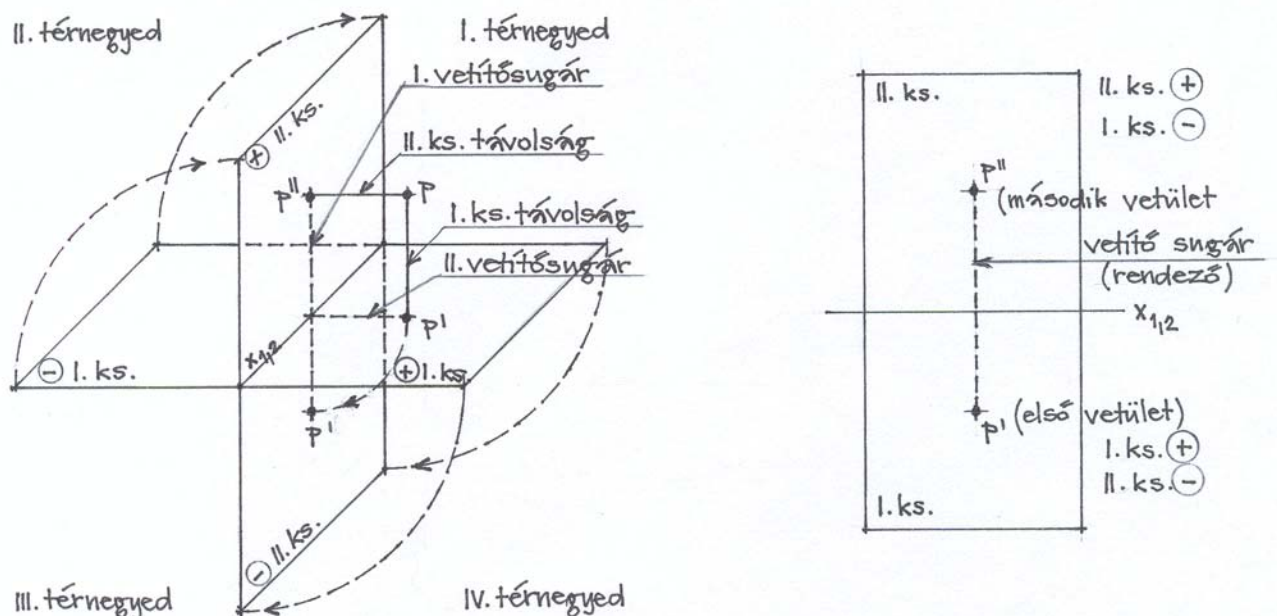
A két képsík metszévonalát az $x_{1,2}$ **tengely**, vagy egyszerűen tengelynek is szokás nevezni. A képtengely a képsíkokat pozitív és negatív fél-képsíkokra osztja.

A két képsík a teret négy térnegyedre osztja.

Az ábrázolandó alakzatot általában az **I. térnegyedben** helyezük el, melyet a pozitív félképsíkok határolnak el a szomszédos térnegyedektől.

Az alakzat vetületét valamely képsíkon az illető képsíkra merőleges vetítősugarak, vetítősíkok, illetve vetítőhengerek metszik ki.

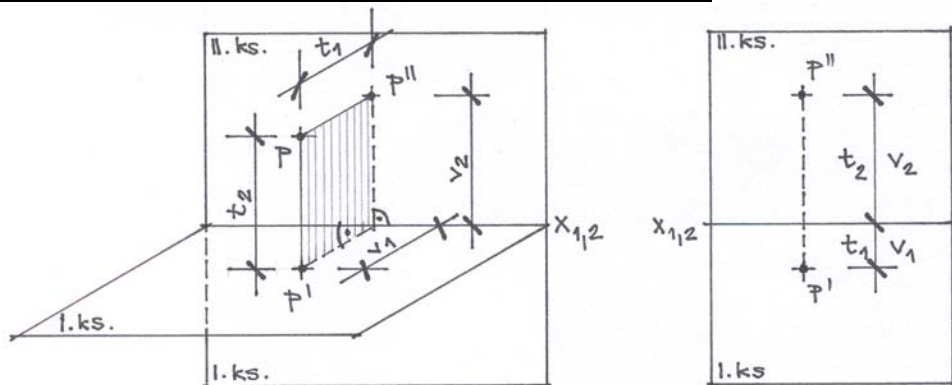
Az **I. képsíkon** előállított vetület az alakzat **ELSŐ KÉPE**, azaz **FELÜLNÉZETE**, a **II. képsíkon** előállított vetület az alakzat **MÁSODIK KÉPE**, azaz **ELÖLNÉZETE**.



A vetületeket egyetlenegy síkban, a rajzlap síkjában kell megrajzolnunk, ezért a képsíkokat a vetületképzés után egyesítenünk kell. Az egyesítés azt jelenti, hogy úgy forgatjuk el az $x_{1,2}$ tengely körül az egyik képsíkot, hogy a képtengely által pozitív és negatív félképsíkokra osztott képsíkoknak az ellenkező előjelű félképsíkjai egymással fedésbe kerüljenek.

2.1. PONT ÁBRÁZOLÁSA

2.1.1. ÁLTALÁNOS HELYZETŰ PONT ÁBRÁZOLÁSA



t_1 (II. képsíktól való távolság) = v_1 (első vetítősugár/**rendező**)
 t_2 (I. képsíktól való távolság) = v_2 (második vetítősugár/**rendező**)

A pont rendezői, illetve vetítősugarai egyetlen a képsíktengelyre merőleges síkot határoznak meg. A pont rendezői, a képsíkok egyesítése után, egy egyenesbe, a képtengelyre merőleges egyenesbe esnek. Az ily módon képzett vetületeket **RENDEZETT VETÜLETNEK** nevezzük.

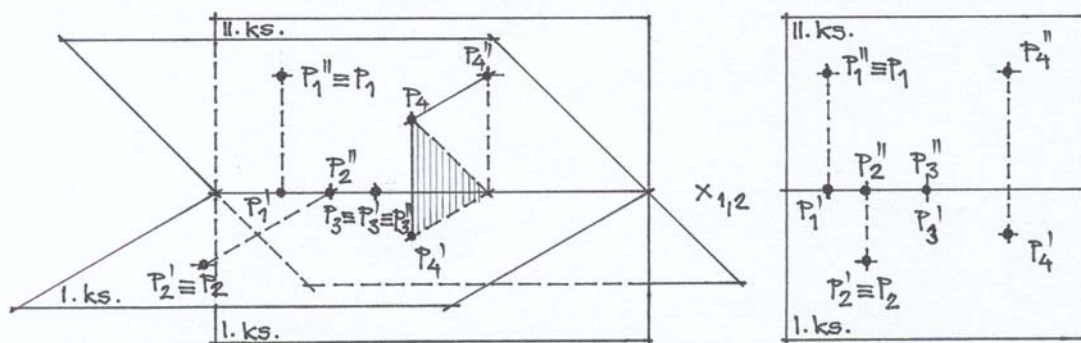
A rendezett vetületepárok alapján a pont térbeli helye visszaállítható (rekonstruálható). Először az egyesítéskor beforgatott képsíkot kell visszaforgatni a benne lévő vetülettel együtt eredeti helyzetébe. Ezt követően a P pont első és második képére illesztett vetítősugarak metszéspontjaként kapjuk meg a P pontot eredeti, térbeli helyén.

Fentiekből következik, hogy pont ábrázolásakor egy pontnak csak az egyik képe vehető fel tetszőlegesen. A másik képének rajta kell lennie a felvett képponton keresztül húzható vetítő/rendező egyenesen (választásunktól függ, hogy hol).

A pont helyzetét a térnegyedben akkor nevezhetjük általánosnak, ha vetítő/rendező egyeseinek hossza sem egymással, sem zérussal nem egyenlő.

2.1.2. KÜLÖNLEGES HELYZETŰ PONT ÁBRÁZOLÁSA

Különleges helyzetű a pont, ha valamelyik rendező hossza zérus. (ábrán a P_1 és a P_2 pontok) Ebben az esetben a pont rajta van valamelyik képsíkon. Ha mindkét rendező hossza zérus, (ábrán a P_3 pont) akkor a pont a képtengelyre illeszkedik. Az egyenlő hosszúságú vetítősugarakkal rendelkező pont (ábrán a P_4 pont) a térnegyed felező síkjában helyezkedik el.



A pont felsorolt különleges helyzetei bármelyik térnegyedben lehetségesek. Általában az első térnegyedbe helyezve ábrázoljuk.

2.1.3. FEDŐPONTOK

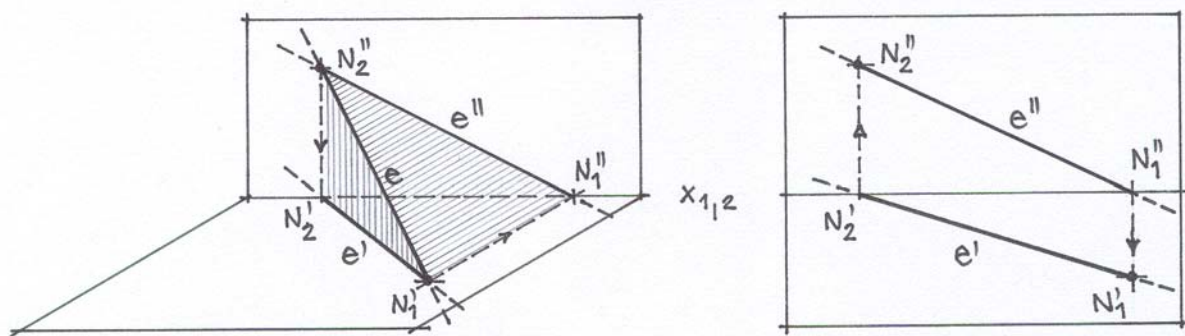
Fedőpontoknak nevezzük a közös vetítősugárra illeszkedő pontokat. Az első fedőpontok az első képsíkra merőleges első vetítősugárra, a második fedőpontok pedig a második képsíkra merőleges, második vetítősugárra illeszkednek. A fedőpontoknak szerkesztéseinknél a láthatóság megállapításánál van fontos szerepe. Ha egy ponthoz két betűjel tartozik, akkor biztos, hogy a pont fedőpont.

2.2.EGYENES ÁBRÁZOLÁSA

2.2.1. ÁLTALÁNOS HELYZETŰ EGYENES ÁBRÁZOLÁSA

Kiindulási alap : az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza.

Az egyenes vetülete meghatározott, ha ismert az egyenes két pontjának vetülete.



E pontok első képét az egyenes első képe, második képét az egyenes második képe köti össze.

Másképpen: az egyenes első vetítősíkjának a metszévonalára az **egyenes első vetülete**, az egyenes második vetítősíkjának a metszévonalára a második képsíkkal az **egyenes második vetülete**.

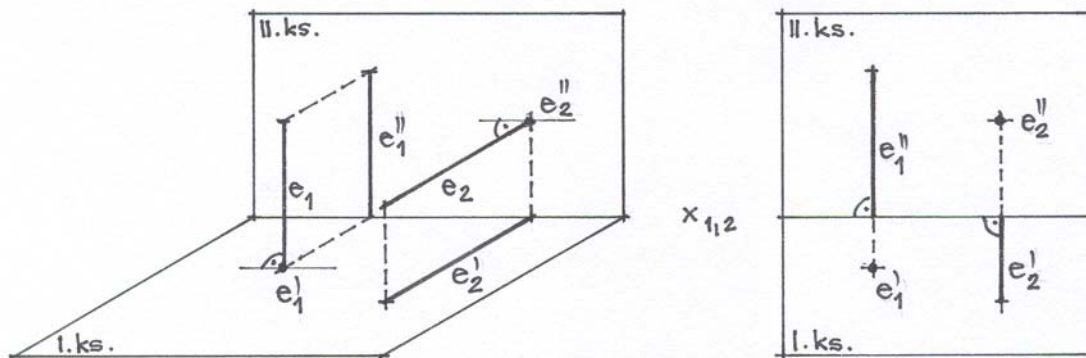
Ha egy pont és egy egyenes egymásra illeszkedik, akkor **egynevű képek** is egymásra illeszkednek.

Az egyenesnek a képsíkokkal alkotott metszéspontjait **NYOMPONTNAK** nevezzük. Az egyenes első nyompontja (N_1), az egyenes és az I. képsík dőféspontja. Az egyenes második nyompontja (N_2), az egyenes és a II. képsík dőféspontja. Az egyenes nyompontjainak egyik vetülete mindig rajta van a képtengelyen ($x_{1,2}$). Ugyanakkor az egyenes megfelelő vetületének is rajta kell lennie, ezért az egyenes első képének és a képtengelynek a metszéspontja a második nyompont első képét, az egyenes második képének és a képtengelynek a metszéspontja az első nyompont második képét adja. Az így meghatározott nyompont vetületekből a nyompontok hiányzó képét a megfelelő képegyeneseiken rendező vonalakkal jelöljük ki.

2.2.2. KÜLÖNLEGES HELYZETŰ EGYENESEK

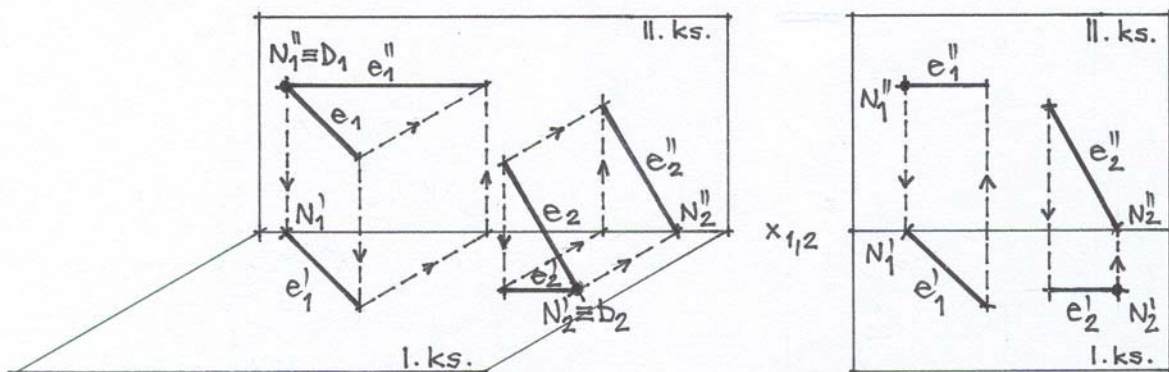
Különleges helyzetű az egyenes, ha a képsíkok valamelyikére merőleges, ha benne fekszik valamelyik képsíkban, vagy vele párhuzamos, illetve ha a képtengelyre merőleges vagy vele párhuzamos, illetve egybeesik.

a.) Képsíkra merőleges egyenes



A vetítősugar vetülete azon a képsíkon, amelyre merőleges az egyenes, az egyenes vetülete pont. Mely nem más mint a vetítősugárnak a képsíkkal alkotott dőléspontja. Ha a vetítősugar merőleges az egyik képsíkkal, törvényszerű, hogy a másikkal párhuzamos.

b.) Képsíkkal párhuzamos egyenes

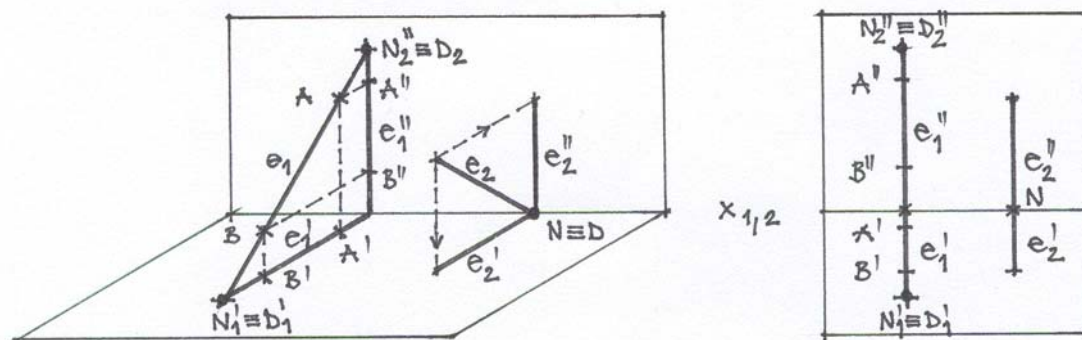


Ha a képsíkkal párhuzamos egyenes vetítősíkja közül az egyik párhuzamos azzal a képsíkkal, mellyel az egyenes is párhuzamos, az általa meghatározott vetület is párhuzamos a képtengellyel.

Mindkét képsíkkal párhuzamos egyenes a képsíkok metszéspontjával, a képtengellyel is párhuzamos. Vetületei a képtengellyel párhuzamosak.

A képsíkkal párhuzamos egyenest **FŐEGYENESNEK** nevezzük.

A képsíkkal párhuzamos egyenes szakasz hossza a vele párhuzamos képsíkon levő vetületén **eredeti nagyságú**.

c.) Képtengelyre merőleges egyenes

A képtengelyre merőleges egyenes két vetítősíkja egybeesik. Így az egyenes két képét ugyanaz a sík metszi ki a két képsíkból. A képsíkok egyesítése után a két kép a képtengelyre merőlegesen esik egybe.

A mindkét képsíkra merőleges vetítősíkot **PROFILSÍKNAK**, a benne fekvő egyeneseket **PROFILEGYENESEKNEK** nevezzük.

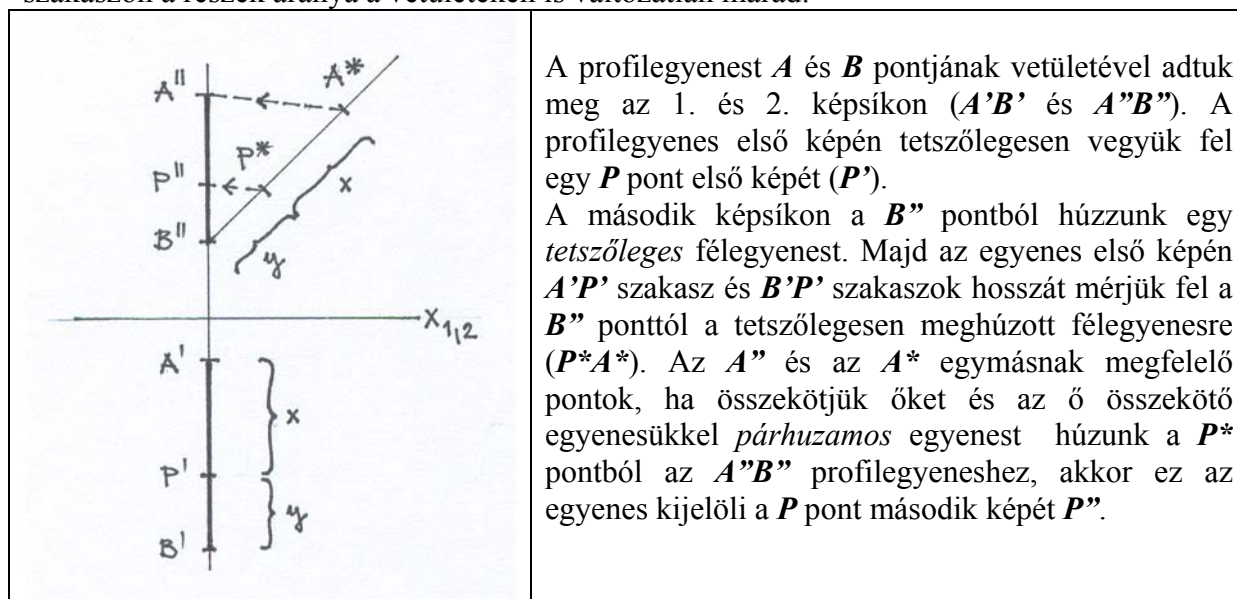
Az egyenest két vetülete általában egyértelműen meghatározza.

KIVÉTEL ez alól a profilegyenes, melynek képegyenes az egyenesre illeszthető profilsík számtalan egyenesének vetülete, ezért egyértelmű meghatározásához két pontjának vetületei is szükségesek.

Az általános egyenesre illeszkedő pont képe illeszkedik a megfelelő képegyenesre, ezért az egyenesen lévő pontnak csak egy képe vehető fel tetszőlegesen a megfelelő képegyenesen. A pont hiányzó másik képét a másik képegyenesen rendező vonallal tudjuk kijelölni.

Profilegyenes esetén ez az út nem járható, mert a felvett képponttól vetített rendezővonal a képegyenessel egybeesik, így azzal nem lesz metszéspontja.

Profilegyenes esetén az ún. **OSZTÓVISZONYOS** szerkesztést használhatjuk. Ez azon tétel következménye, mely szerint a tetszőleges pontjával két részre osztott egyenesszakaszon a részek aránya a vetületeken is változatlan marad.

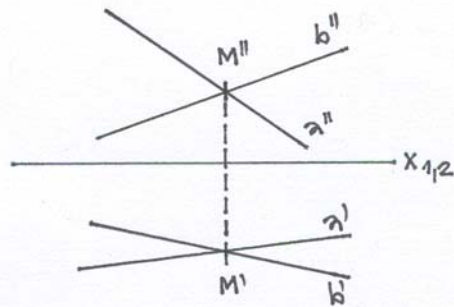


A profilegyenest A és B pontjának vetületével adtuk meg az 1. és 2. képsíkon ($A'B'$ és $A''B''$). A profilegyenes első képén tetszőlegesen vegyük fel egy P pont első képét (P').

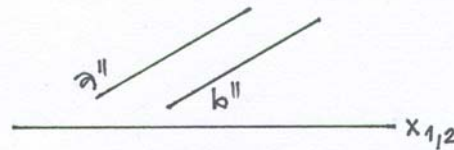
A második képsíkon a B'' pontból húzzunk egy *tetszőleges* félegyeneset. Majd az egyenes első képén $A'P'$ szakasz és $B'P'$ szakaszok hosszát mérjük fel a B'' ponttól a tetszőlegesen meghúzott félegyenesre (P^*A^*). Az A'' és az A^* egymásnak megfelelő pontok, ha összekötjük őket és az ő összekötő egyenesükkel *párhuzamos* egyenest húzzunk a P^* pontból az $A''B''$ profilegyeneshez, akkor ez az egyenes kijelöli a P pont második képét P'' .

d.) **KÜLÖNFÉLE egyenespárok ábrázolása**1. **Egymást metsző egyenespár:**

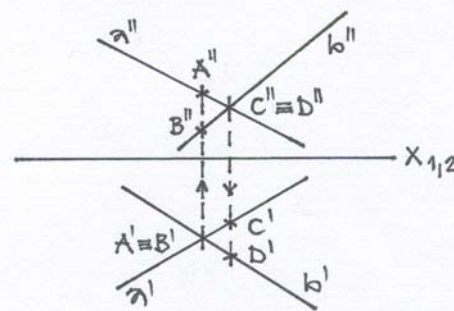
egymást metsző két egyenes metszéspontjának képei ugyanazon rendezőn helyezkednek el.

2. **Párhuzamos egyenespár:**

Párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak.

3. **Kitéró egyenesek:**

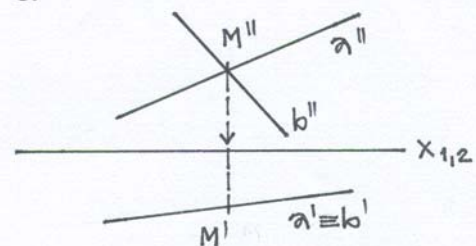
Kitéró egyeneseknek nincs közös pontjuk. Metszéspontjuk nem egyetlen térbeli pont képe, ezért nem lehetnek ugyanazon rendezővonalon.

4. **Fedőegyenesek:**

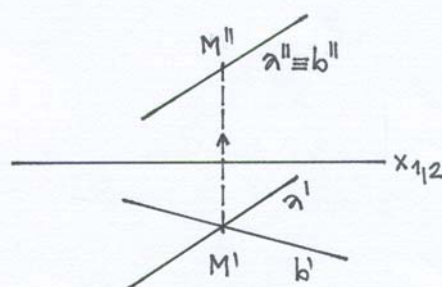
Két egyenes képei valamelyik képsíkon egybeeshetnek, ha arra a képsíkra nézve közös a vetítősíkjuk. Az ilyen egyeneseket fedőegyeneseknek nevezzük. Lehet első és második fedőegyenes, továbbá lehetnek metsződők és párhuzamosak egymással.

**KITÉRŐEK NEM LEHETNEK?
MERT EGY SÍKBAN
FEKSZENEK!!**

Első fedőegyenes



Második fedőegyenes



4. heti előadás

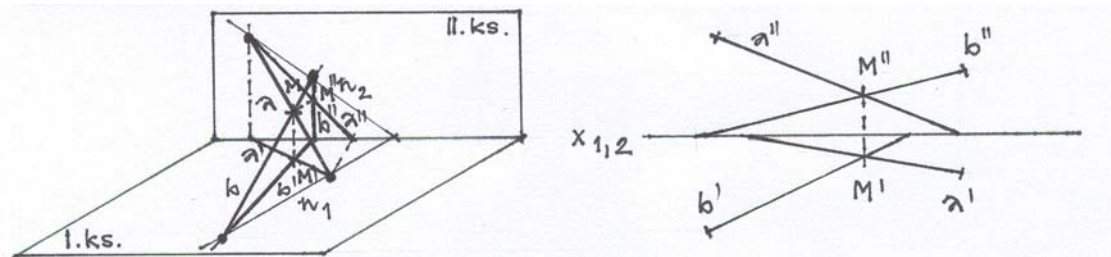
2.3. SÍK ÁBRÁZOLÁSA

2.3.1. Általános helyzetű sík ábrázolása

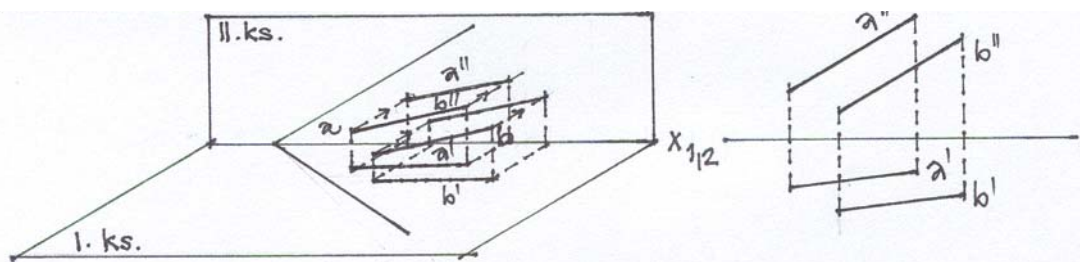
Általános helyzetű sík képe a teljes képsík. A síkot tehát egyértelműen a *teljes képével nem tudjuk ábrázolni*.

Azokkal a térelemekkel ábrázoljuk, amelyek egyértelműen meghatározzák:

a.) **metsződő egyenespár** által meghatározott sík



b.) **két párhuzamos egyenes** által meghatározott sík



c.) három nem egy egyenesbe eső pont,

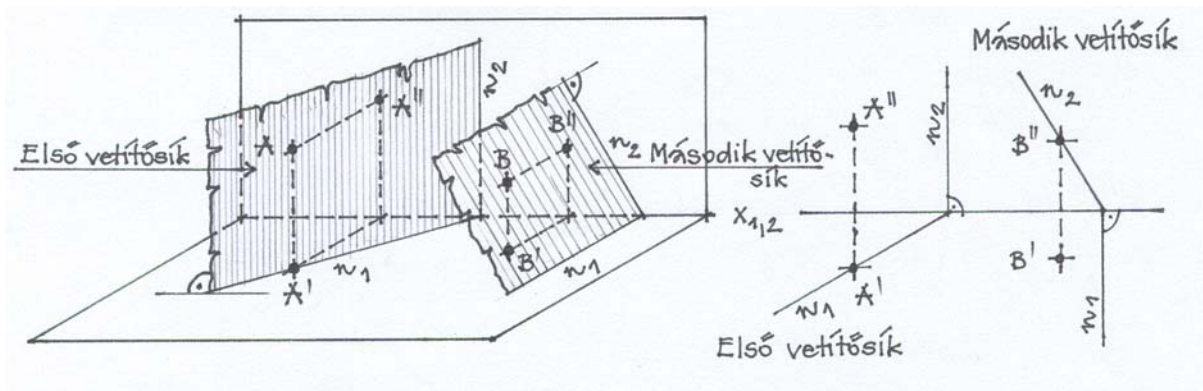
d.) egy egyenes és egy rajta kívül eső pont síkot határoznak meg

A c.) és d.) pontok visszavezethetők az a.) metsződő egyenesek által meghatározott sík esetére.

2.3.2. Különleges helyzetű sík ábrázolása

a.) **Vetítősík:** (Képsíkra merőleges sík)

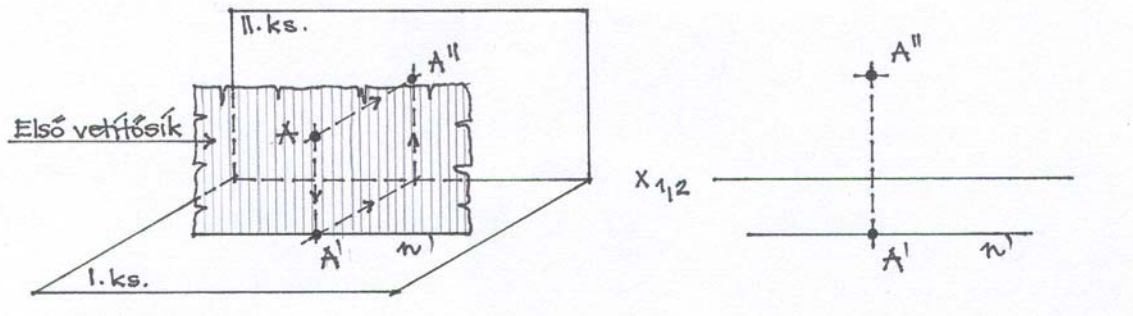
Az egymást metsző, vagy egymással párhuzamos fedőegyenespár a képsíkra merőleges síkot, vetítősíkot határoz meg, vagyis a fedőegyeneseknek közös a vetítősíkjuk.



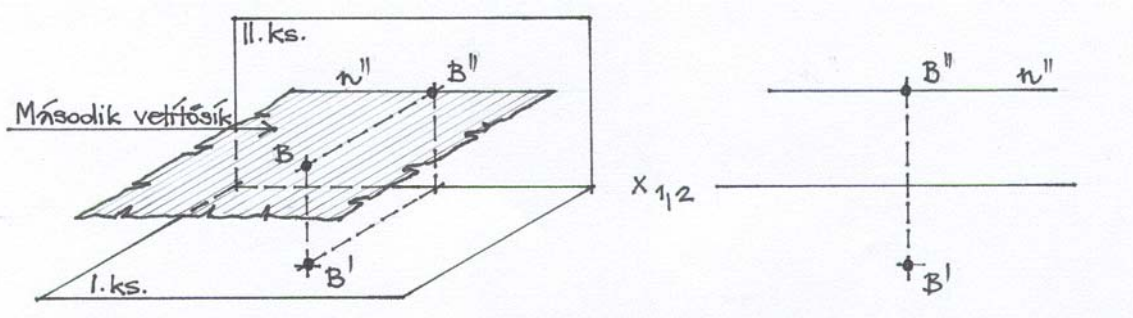
b.) **Főállású sík:** (A képsíkok valamelyikével párhuzamos sík)

Ha a képsíkok valamelyikével párhuzamos a vetítősík, akkor a másik képsíkra merőleges. Ha az első képsíkkal párhuzamos a vetítősík, akkor *második vetítősíkról*, ha pedig a második képsíkkal párhuzamos, akkor *első vetítősíknak* nevezzük.

Első vetítősík:

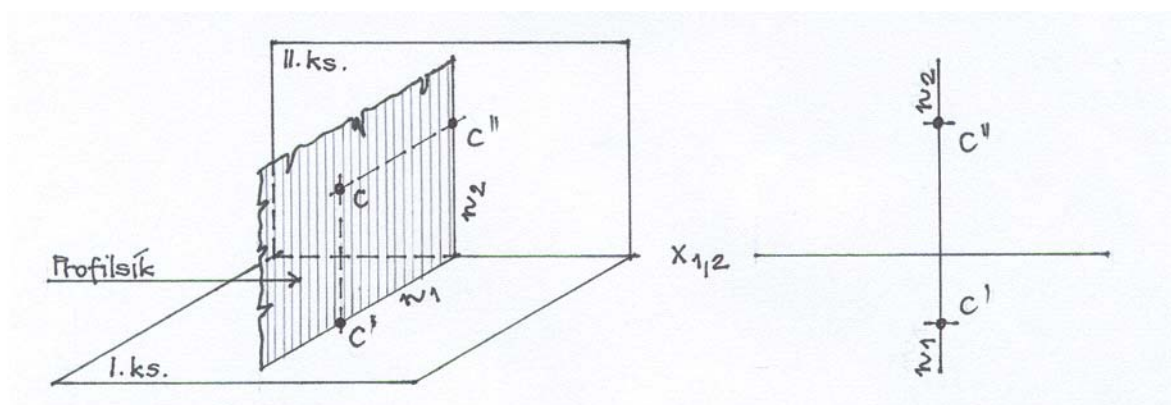


Második vetítősík:



c.) **Profilsík:** (Mindkét képsíkra merőleges vetítősík)

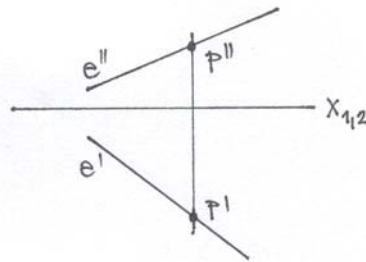
Ha mindkét képsíkra merőleges a vetítősík, akkor *profilsíkról* beszélünk.



2.4. EGYMÁSRA ILLESZKEDŐ TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA

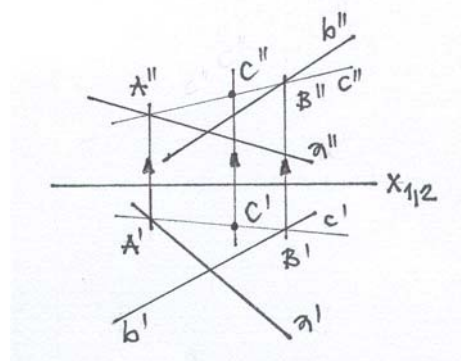
2.4.1. Egyenesre illeszkedő pont ábrázolása:

Ha a pont illeszkedik az egyenesre, az esetben annak első képe az egyenes első képére, második képe az egyenes második képére illeszkedik. A pont képei ugyanarra a rendező-egyenesre illeszkednek.



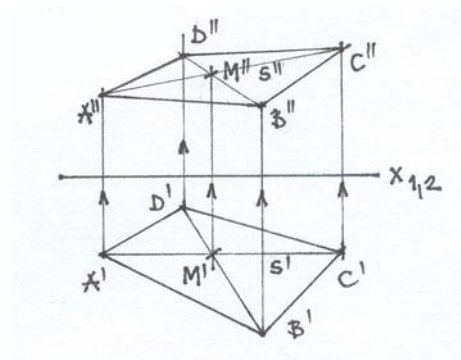
2.4.2. Síkra illeszkedő pont és egyenes ábrázolása:

Az a és b tartó-egyenseivel adott síkban fekvő C pont első képét C' tetszőlegesen vettük fel. A C' ponton át megrajzolt segédegyenessel megkaptuk c' egyenes első képét, mely az „ a ” egyenesen kitűzte az A' metszéspontot, valamint a „ b ” egyenesen a B' metszéspontot. A' és B' képei segítségével az A'' és B'' pontok hiányzó második képét meg tudjuk határozni. Ha az A'' és B'' pontokat összekötjük, megkapjuk a síkban fekvő c egyenes második képét c'' -t.

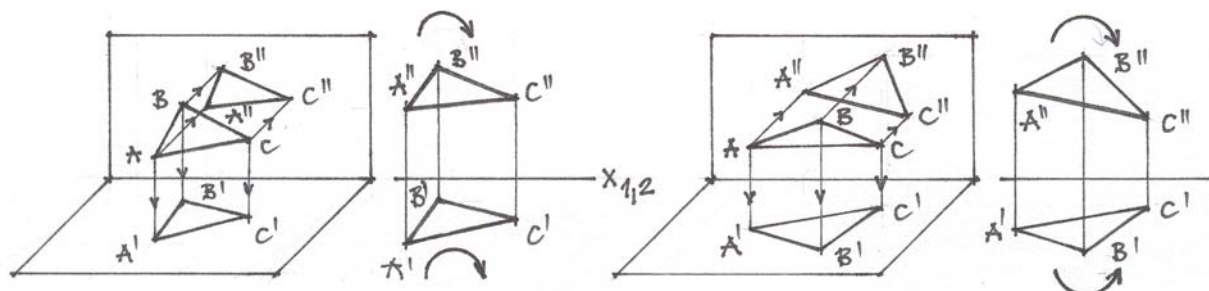


A síkban fekvő C pont első képét C' tetszőlegesen felvettük, majd rendezővel a hiányzó második képét C'' -t is meg tudjuk határozni a c'' egyenesen.

Ha síkbeli négyszöget akarunk ábrázolni, csak 3 pontjának képét vehetjük fel tetszőlegesen. (A síkot 3, nem egy egyenesbe eső pontjával meghatározhatjuk!) A negyedik pont (D) egyik vetületét (pl.: D') felvéve, a másik képét, mint síkban fekvő pont hiányzó képét (D'') segédegyenessel (s) megszerkesztjük.



Általános helyzetű síkidomnak mindkét képén, vagy ugyanazt az oldalát látjuk (lásd baloldali ábrát), vagy két különböző oldalát. A betűzés iránya nyíllal jelölve.

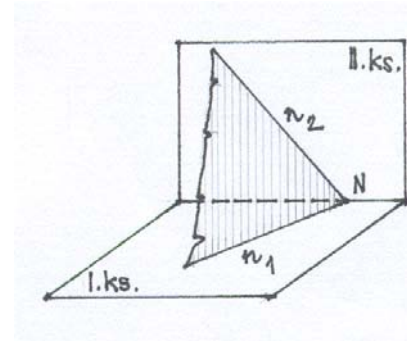


2.4.3. Sík különleges egyenesei:

- a.) nyomvonal
- b.) fővonal
- c.) esésvonal

a.) **Nyomvonal:** a sík és a képsík metszésvonala.

A nyomvonal (n) a síknak olyan egyenese, amely valamelyik képsíkban fekvő egyenes, tehát egyik képe a képtengelyre esik. A nyomvonalak a képtengelyen metszik egymást. A metszéspont a síknak és a képsíknak (tehát 3 síknak) a közös pontja. A képtengelyen lévő pontot a sík tengelypontjának nevezzük és a jele: N . Ez nem más, mint az egyenes nyompontja (az egyenesnek a képsíkkal alkotott metszéspontja = dőléspontja), ebből következik, hogy a sík valamennyi egyenesének nyompontja rajta van a sík nyomvonalán.



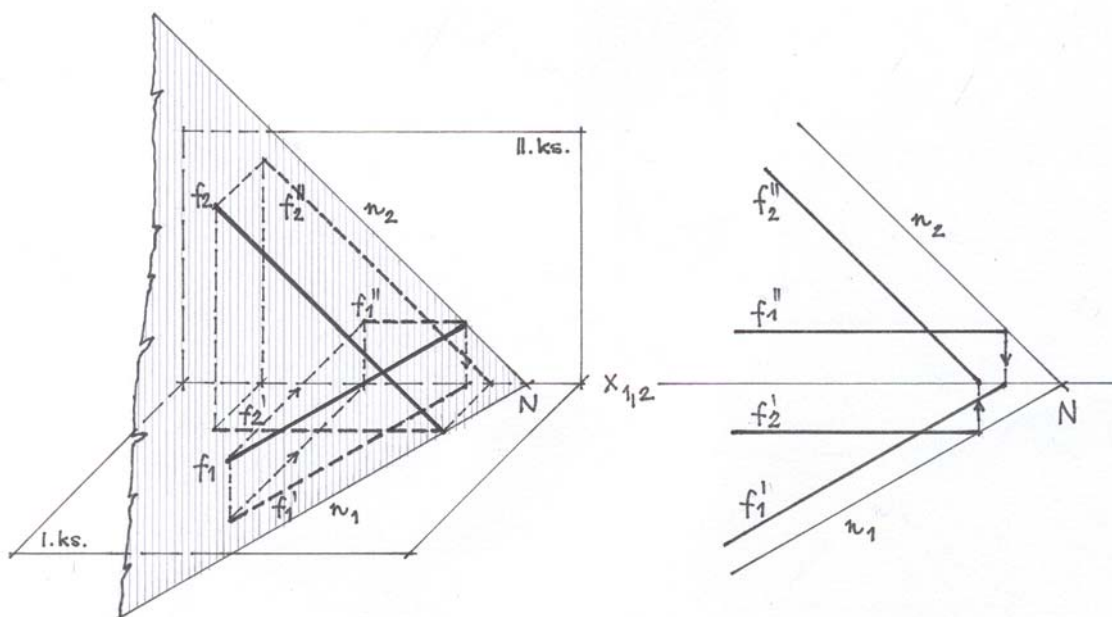
Ennek alapján, ha a sík tartóegyeneseit ismerjük, megszerkeszthetjük a sík nyomvonalait, illetve a nyomvonalával adott sík esetében, bármely a síkra illeszkedő egyenes nyompontjait.

b.) **Fővonal:** (főegyes) a síknak olyan egyenesei, amelyek valamelyik síkkal párhuzamosak.

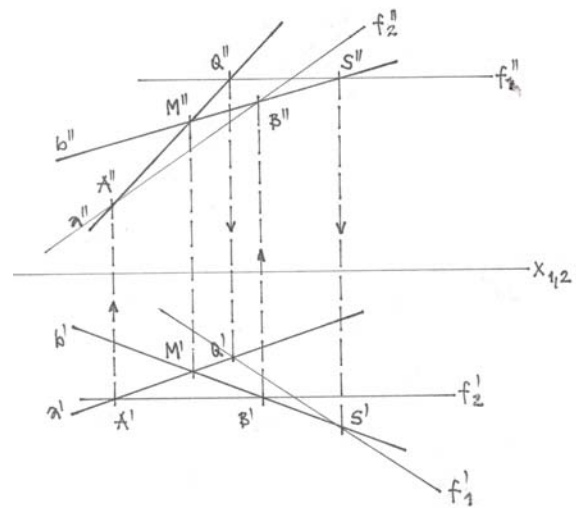
Az első képsíkkal párhuzamos fővonal *első (horizontális) fővonal* a második képsíkkal párhuzamos a *második (vertikális) fővonal*.

Mivel a fővonal a képsíkkal és a nyomvonallal párhuzamos egyenes, ezért egyik vetülete a képtengellyel, másik vetülete a nyomvonallal párhuzamos képegyes. A nyomvonal tulajdonképpen a képsíkra illeszkedő fővonalnak is tekinthető.

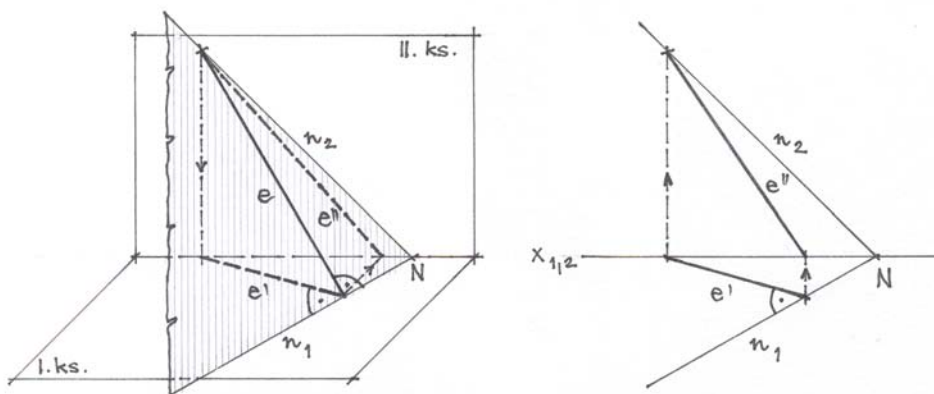
Kivétel a vetítősík, melynek egyik fővonala a képsíkra merőleges egyenes, illetve a profilsík, melynek mind az első, mind a második fővonala merőleges az ellenkező nevű képsíkra.



Az általános helyzetű síkra illeszkedő általános helyzetű egyenes egyik képét tetszőlegesen felvehetjük. Ha a nyomvonalat nem ismerjük, akkor a fővonalat (f'' vagy f') – mivel a képsíkkal párhuzamos egyenes, a képtengellyel párhuzamos vetületét – vesszük fel szabadon, a másik vetületét szerkesztjük.



c). **Esésvonal:** a sík fő-, és nyomvonalára merőleges egyenest esésvonalnak nevezünk.



Az esésvonal lehet *első* és *második esésvonal*. A sík első esésvonalai a sík első fővonalaira és nyomvonalaira merőlegesek. A második esésvonalak ennek megfelelően a sík második fővonalaira és nyomvonalaira merőlegesek.

Mivel az esésvonal képsíkkal párhuzamos egyenesre merőleges, ezért egyik képe a fővonallal párhuzamos képsíkon a fővonal/nyomvonal képére merőlegesen vehető fel. A hiányzó másik képe szerkeszthető.

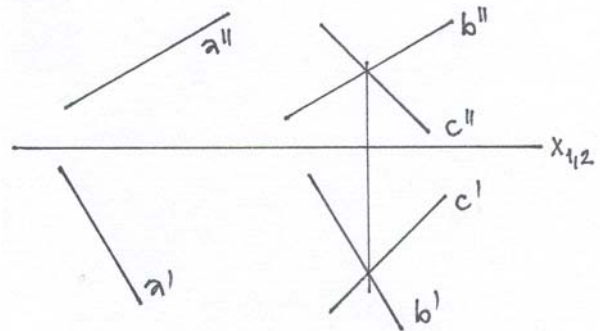
2.5. PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA.

a.) Párhuzamos egyenesek ábrázolása: Lásd: 1/11. oldal 2. pontját, párhuzamos egyenespár.

b.) Egyenessel párhuzamos sík szerkesztése:

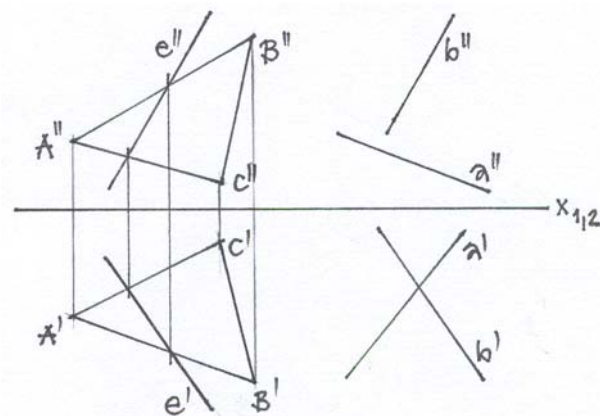
(I. Alaptétel: Egyenes és sík akkor párhuzamos egymással, ha a sík tartalmaz az adott egyenessel párhuzamos egyenest.)

Ezt a tételt felhasználva, az egyenessel párhuzamos sík szerkesztésénél a sík egyik tartóegyenését az adott egyenessel párhuzamosan a másikat kitérően vesszük fel.



c.) Síkkal párhuzamos egyenes szerkesztése:

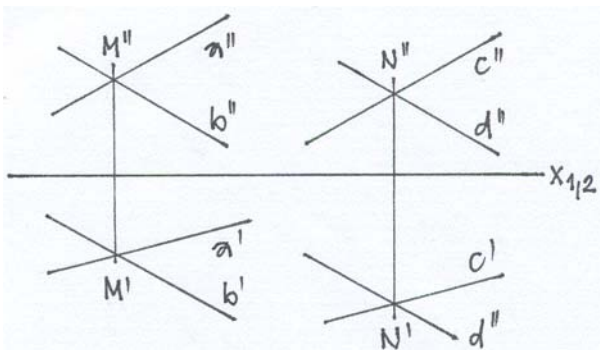
Síkkal párhuzamos egyenest úgy szerkesztjük, hogy a sík bármely egyenesével párhuzamos, de a síkra nem illeszkedő egyenest vesszük fel két képével.



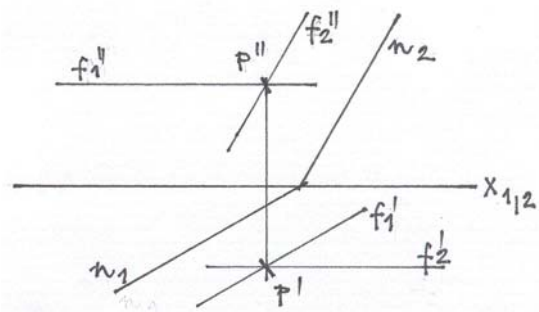
d.) Síkkal párhuzamos sík szerkesztése:

(II. Alaptétel: Két sík akkor párhuzamos egymással, ha az egyik síkban van két olyan egymást metsző egyenes, amely a másik sík két egyenesével párhuzamos.)

d/1. Ezt a tételt felhasználva síkkal párhuzamos síkot úgy szerkesztünk, hogy először az adott síkban felvesszük a két metsződő egyenes képét az I. és II. ks.-ban. Majd a tér bármely pontján keresztül mindkét egyenessel párhuzamos egyenest rajzolunk. E két egyenes meghatározza a párhuzamos síkot.



d/2. Nyomvonalaival adott síkkal szerkesztünk párhuzamos síkot, egy a síkon kívülálló P ponton keresztül.
A párhuzamos síkot az adott sík nyomvonalaival párhuzamos fővonalak határozzák meg.

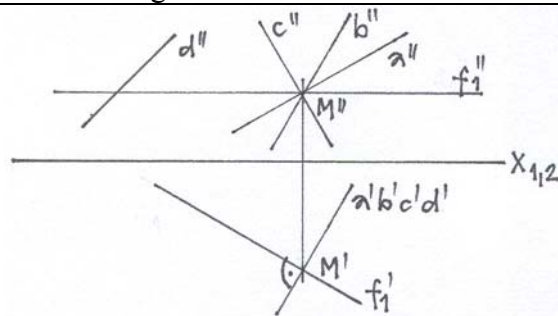


e.) Síkra merőleges egyenes és sík szerkesztése:

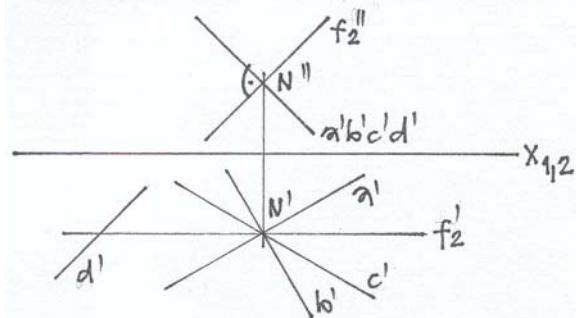
Merőleges vetítés jellemzői: Egymásra merőleges egyenesek szöge a képen csak akkor derékszög, ha a szögszárak közül legalább az egyik párhuzamos a képsíkok valamelyikével, vagy a képsíkban fekszik, tehát fővonal.

Fővonal és rá merőleges egyenes szöge mindig azon a képsíkon látszik derékszögnek, amellyel a fővonal párhuzamos.

1.) Az első fővonalra merőleges és vele kitérő egyenesnek az első képe merőleges a fővonal első képére, a második képe tetszőleges.



2.) Második fővonalra merőleges és vele kitérő egyenesnek a második képe merőleges a fővonal második képére, az első képe tetszőleges.

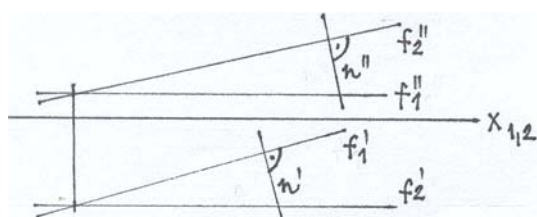


e/1. Sík és egyenes merőlegessége:

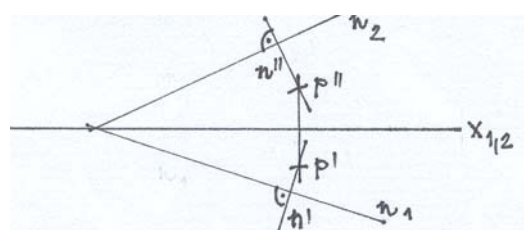
(III. Alaptétel: Sík és egyenes akkor merőleges egymásra, ha a sík két egymást metsző egyenesére külön-külön is merőleges az egyenes.

A sík általános helyzetű egyenesére közvetlenül nem tudunk merőlegest állítani. Tehát a síkra merőleges egyenes, a sík összes egyenesére, így mindkét fővonalára is merőleges, ezért a szerkesztéshez fővonalat használunk. Az f_1 fővonalra merőleges síkban fekvő egyenesek első képe merőleges az f_1' fővonalra. Az f_2 fővonalra merőleges síkban fekvő egyenesek második képe pedig az f_2'' fővonalra merőleges. Mivel az f_1 fővonalra, illetve az f_2 fővonalra merőleges síkok egyben magára az f_1 fővonal és f_2 fővonal által meghatározott síkra is merőlegesek, így metszésvonaluk is merőleges az f_1 fővonal és f_2 fővonal által meghatározott síkra. Ebből következően a síkra merőleges egyenes képei, a sík különfajta fővonalainak megfelelő képeire merőlegesek.

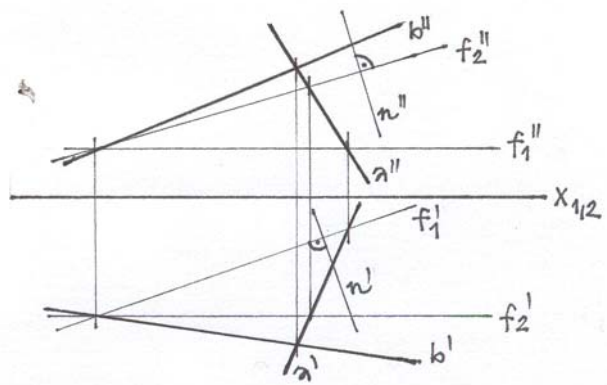
1.) Fővonalaival adott síkra szerkesztettünk egy tetszőleges merőleges egyenest. Ezt a **sík normálisának** is nevezzük.



2.) Nyomvonalaival adott síkra állítottunk merőleges egyenest a síkon kívüli P ponton keresztül.



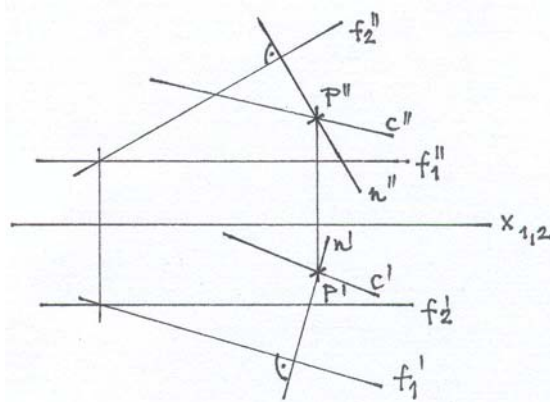
c.) Tartóegyeneseivel adott általános helyzetű síkra szerkesztendő merőleges egyenes esetén, először fel kell venni a sík két fővonalát. Síkon kívüli P pontra illeszkedő merőleges egyenes esetén is ugyanígy szerkesztünk.



e/2. Síkra merőleges sík szerkesztése:

Először az adott síkra merőleges egyenest szerkesztjük meg, ez a normális és egy ezt metsző tetszőleges egyenes az adott síkra merőleges síkot határoz meg.

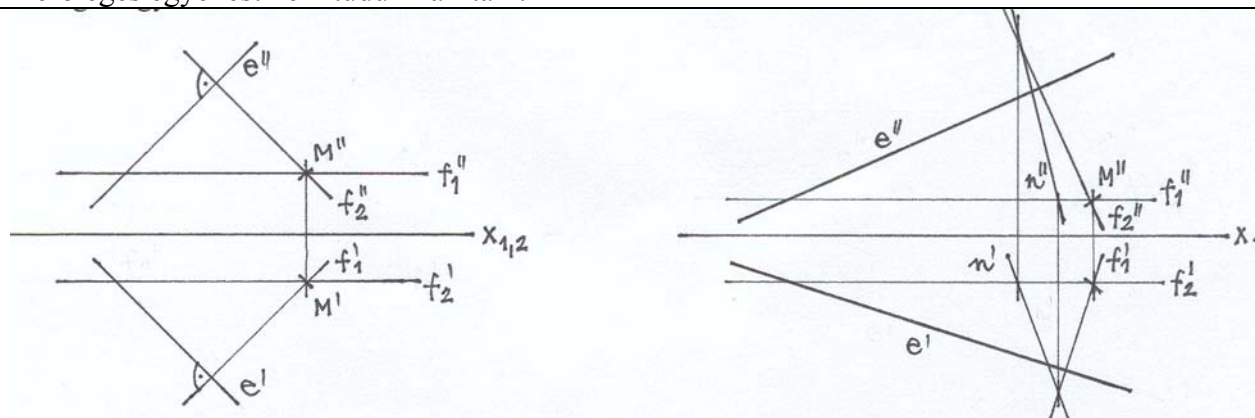
Fővonalpárjával adott síkra P ponton át a lehetséges végtelen sok merőleges sík közül egyet ábrázoltunk, melyet a sík normálisa (n) és az azt metsző egyenes (c) határoz meg.



e/3. Egyenesre merőleges sík szerkesztése:

Az előzőekhez hasonló elven alapul az egyenesre merőleges sík szerkesztése. Itt most az egyenes képei adottak, tehát az egyenes képeire vesszük fel merőlegesen a síkot meghatározó fővonalak megfelelő képeit.

Általános helyzetű egyenesek, síkok esetében közvetlenül sem az egyenesre, sem a síkra merőleges egyenest nem tudunk állítani.



Mindkét feladatot vissza kell vezetni sík és egyenes merőlegességére. Tehát egyenesre merőleges egyenes szerkesztésekor először az adott egyenesre merőleges síkot állítunk, ezután a merőleges síkban felvett bármelyik egyenes merőleges lesz az adott egyenesre.

5. heti előadás

2.6. TRANSZFORMÁCIÓ

(Új képsík alkalmazása)

A szerkesztési feladatok megoldása egyszerűbbé válik akkor, ha valamelyik terelem a képsíkhöz képest különleges helyzetű, alakzatok esetén is ugyanezt fogjuk látni.

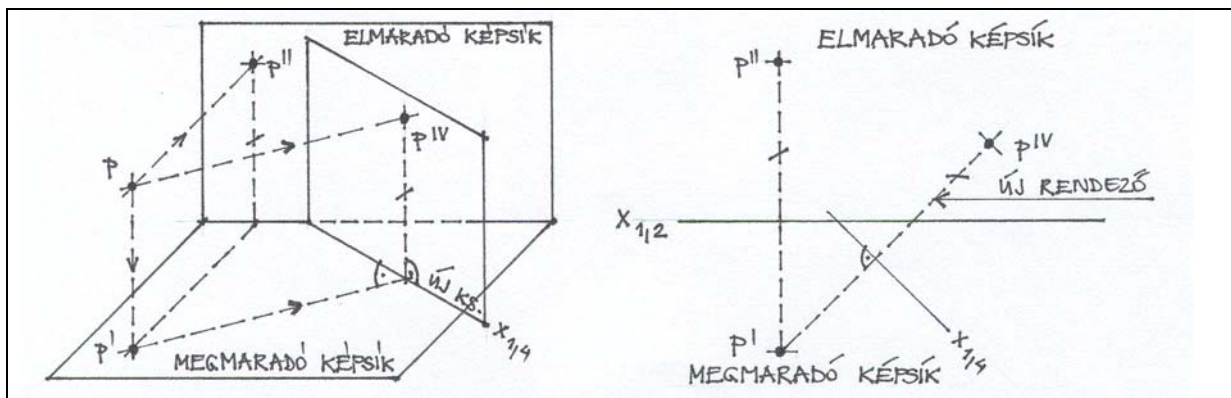
Előfordulhat azonban ennek a fordítottja is, amikor a képsíkokkal szemben különleges helyzetű alakzatokról kell általános helyzetnek megfelelő, ún. Szemléletes (térhatású) képet szerkeszteni. Ebben az esetben nem az alakzat vagy terelem térbeli helyzetét változtatjuk meg, hanem olyan új képsíkot alkalmazunk melyhez viszonyítva az alakzat helyzete olyan, hogy a feladat megoldását megkönnyíti.

Minden alkalmazott új képsík a megfelelő (régi) képsíkok valamelyikére merőleges.

Az új képsík és a rá merőleges régi, mint *megmaradó képsík* alkotja az új két képsíkú képrendszert. A fel nem használt másik „régi képsík” az ún. *elmaradó képsík*. Ennek megfelelően és értelemszerűen beszélünk új illetve régi képsíkrendszerről és képtengelyről, új, megmaradó és elmaradó képsíkról, képről és rendezőről.

Az új képsík alkalmazását, a terelemek térbeli alakzatok új képsíkon lévő vetületeinek előállítását **TRANSZFORMÁCIÓNAK** nevezzük. Minden mértani alakzat bizonyos pontok összességének tekinthető, ha a pont transzformációját ismerjük, bármely alakzat transzformált képe megszerkeszthető.

2.6.1. Pont transzformációja:

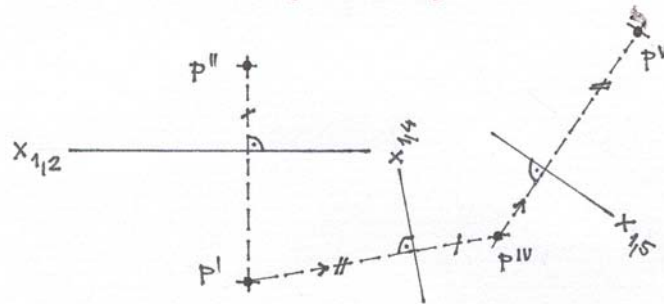


Az ábra alapján belátható, hogy a P^{IV} képpont az $x_{1,4}$ tengelytől (a pont negyedik rendezője) P és P' szakasz első képsík távolságával egyenlő, amely a második képsíkon a pont második rendezőjével ($x_{1,2}$ tengelytől P'' távolságával) egyenlő.

Szerkesztéskor a céljainknak megfelelően (*céltranszformáció*) választott új képtengelyre a megmaradó képpontból merőleges rendezővonalat húzunk. Erre az új képtengelytől felmérjük a pont elmaradó rendezőjét és megkapjuk a pont új képét P^{IV} .

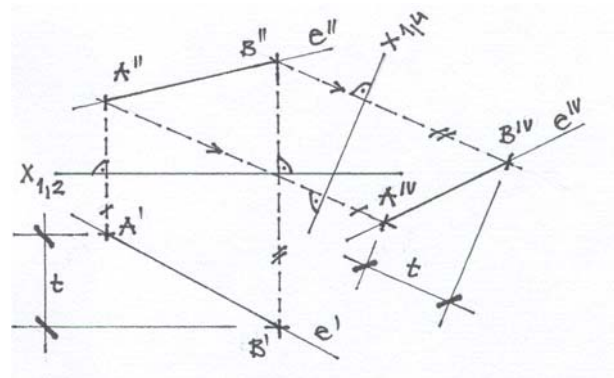
Az alakzat nem minden esetben hozható a kívánt helyzetbe egyszeres transzformációval. Ilyenkor szükség szerint újabb és újabb transzformációkat végezhetünk. Minden újabb transzformációnál az előbbieken ismertetett szerkesztési módszert kell ismételtelen alkalmazni, és be kell tartani, hogy *egyszerre csak egy új képsíkot alkalmazhatunk*. Ez a képsík a meglévő rendszer megmaradó képsíkjára merőleges kell legyen.

Pont kétszeres transzformációja



2.6.2.) Egyenes transzformációja

Általános helyzetű egyenest megfelelő új képsík segítségével szerkesztettük meg. Itt az elmaradó rendezők különbsége egyenlő a negyedik rendezők különbségével.

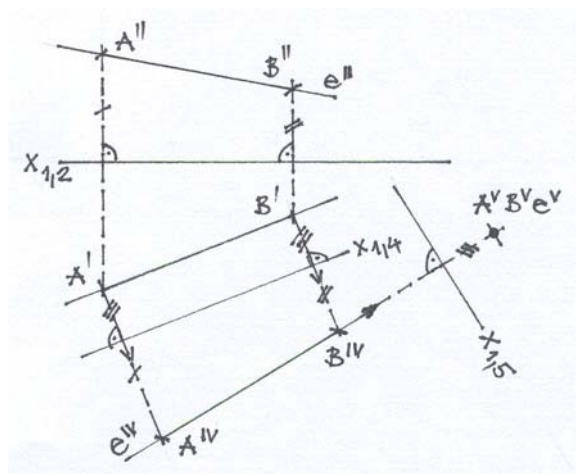


Egyenes kétszeres transzformációja

Az általános helyzetű egyenest megfelelően választott új képsíkrendszerben már különleges helyzetben ábrázoljuk.

Ha az új képsíkot az egyenessel párhuzamosan vesszük fel, akkor az egyenes képsíkkal párhuzamos helyzetét állítjuk elő.

Ahhoz, hogy az egyenest képsíkra merőleges helyzetben ábrázoljuk, újabb képsík felvételére van szükségünk (tehát kétszeri transzformáció szükséges a kívánt eredmény létrehozásához). Az egyenes a IV. képsíkkal párhuzamos, így fel tudunk venni egy V. képsíkot, mely az egyenesre merőleges.



2.6.3.) Sík transzformációja

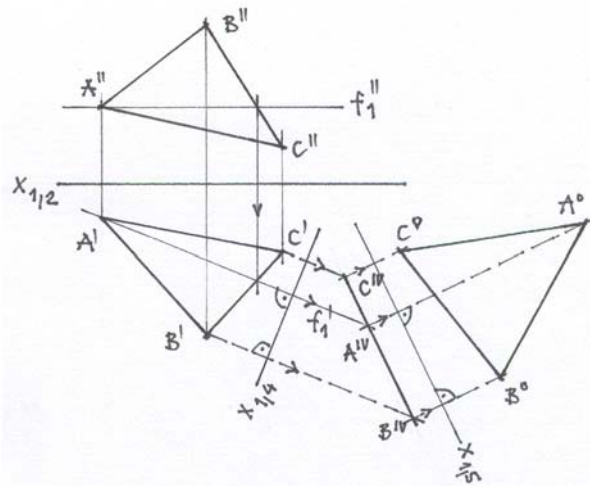
A síkot meghatározó térelemek transzformációjával végezzük. A sík vagy síkidom transzformációjával általában az a célunk, hogy azt az új rendszerben képsíkra merőleges vagy párhuzamos helyzetben ábrázoljuk.

Ha általános helyzetű síkot vetítősíkká akarjuk transzformálni, akkor az új képsíkot a sík valamelyik fővonalára (nyomvonalára) merőlegesen kell felvennünk.

Vetítősík képsíkkal párhuzamos helyzete szintén egyszeri transzformációval elérhető. Ez esetben az új képsíkot a vetítősíkkal párhuzamosan kell felvenni. Az új képtengelyt a sík élben látszódo képével párhuzamosan kell felvenni. Az általános helyzetű sík képsíkkal párhuzamos helyzetét kétszeres transzformációval nyerjük.

Első lépésben a sík valamelyik fővonalára merőleges új képsíkot veszünk fel. (Megerkesztettük az ABC háromszög élben látszódo képét $IV.$ képsík segítségével.)

Második lépésben a síkkal párhuzamos újabb képsíkot alkalmaztuk, a transzformációhoz szükséges $V.$ képsíkot. A háromszög ötödik képe a síkidomot valódi nagyságában mutatja.

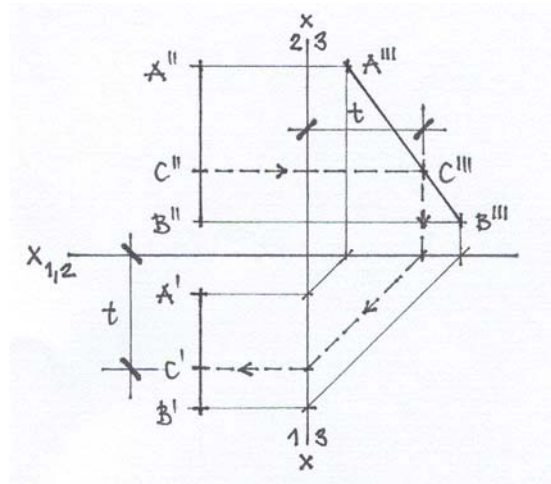


2.6.4.) A régi (I. és II.) képsíkokra merőleges III. képsík

Különös jelentőségű és igen gyakori a műszaki rajzban, mely mind az $I.$, mind a $II.$ képsíkra merőleges, vagyis *profilsík*. Ezt a képsíkot szokás $III.$ képsíknak vagy *oldalnézeti képsíknak*, a rajta képzett vetületet *harmadik képnek* nevezni. Megmaradónak választhatjuk akár az $I.$, akár a $II.$ képsíkot. Itt is a megmaradó és az új képsíkot egyesítve jutunk az új képsíkrendszerhez.

Valamely alakzat új képét a $III.$ képsíkon a már ismert transzformálási eljárások szerint szerkesztjük meg. A $III.$ képsík előnyösen felhasználható olyan feladatok megoldásához, melyek profilegyenesekkel kapcsolatosak.

Az A és B pontjával adott profilegyenes második képén adott a C'' pont. C'' -ből indított rendező kijelöli a C''' képét. Az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan C''' -ből az $x_{2,3}$ tengelyig mért távolság egyenlő az egyenes első képén C' pont helyét megadó távolsággal.

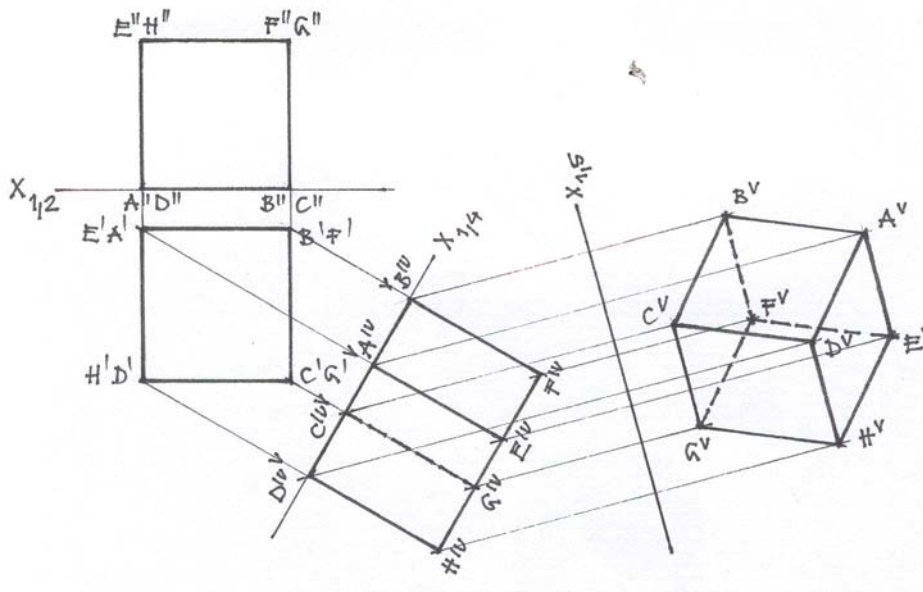


2.6.5.) Síklapú test transzformációja

Valójában a testet határoló síkidomok, egyenes szakaszok és pontok új képét kell megszerkeszteni, a már ismert eljárások szerint.

Példaként nézzünk meg egy a képsíkhoz képest különleges helyzetű kocka általános helyzetének megfelelő térhatású képének szerkesztését.

A kocka adott első és második képén látható, hogy az egymással párhuzamos oldallapok síkjai főállásúak, mindkét képsíkra merőlegesek, profilsíkok. Bizonyos csúcspontok, élek fedik egymást. Ezeket a fedéseket kell megszüntetnünk a transzformációval



Első lépésben a kocka **I.** képsíkra merőleges éleit és a rajtuk lévő csúcspontoknak a **II.** képsíkra jelentkező fedését szüntetjük meg, oly módon, hogy úgy vesszük fel a **IV.** képsíkot, hogy a kocka egyik oldallapjával sem legyen párhuzamos. Az alakzat megszerkesztésével láthatjuk, hogy az alaplap és a fedőlap még mindig fedésben vannak (egyenesként látszódnak), mert a **IV.** képsíkra merőlegesek a kocka élei.

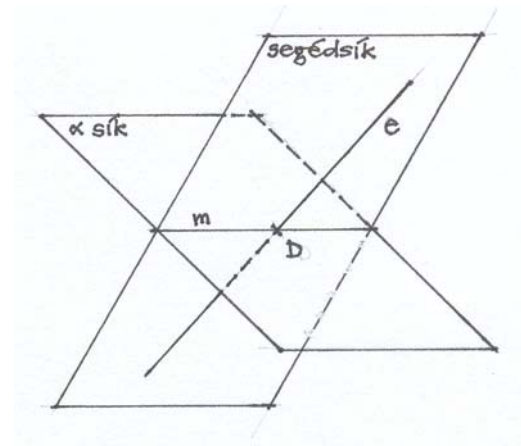
Második lépésben ezek fedését megszüntetendő olyan újabb képsíkot, az **V.** képsíkot vesszük fel, mely az alaplap és a fedőlap síkjával nem párhuzamos és a **IV.** képsíkra merőleges. Ezen az új, **V.** képsíkon az alakzat képét megszerkesztve az élek, csúcspontok fedése megszűnik, így ezen a vetületen már térhatást keltő képet kapunk a kockáról.

2.7. Metszési feladatok

Sík és egyenes dőféspontja: a két térelem közös pontja.

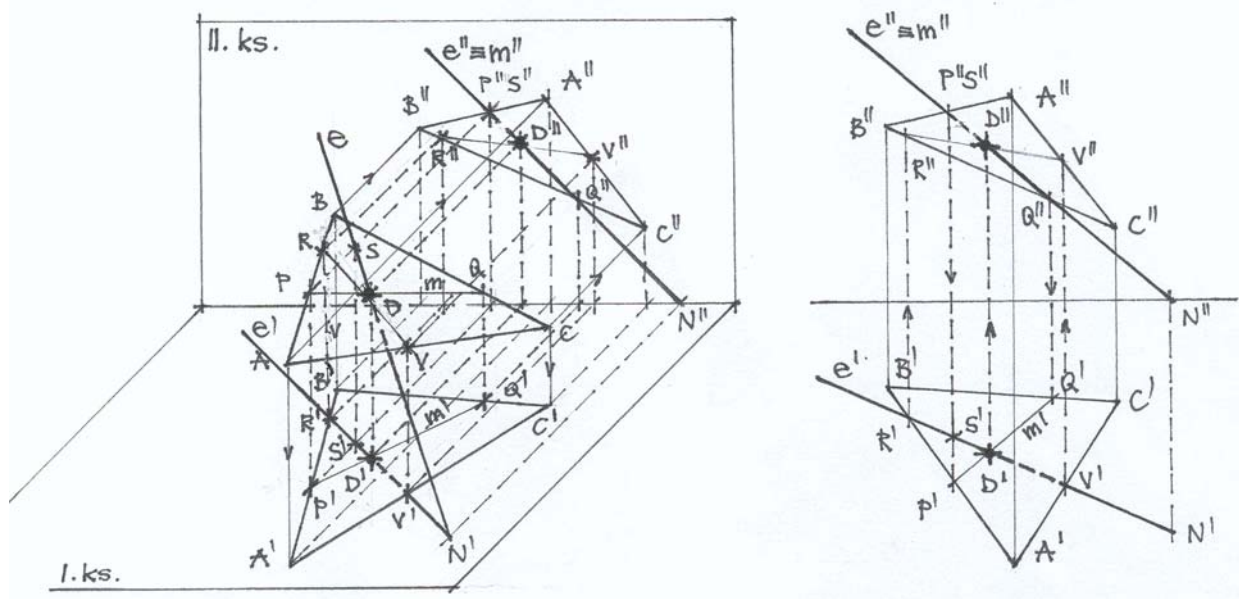
Általános helyzetű sík és egyenes esetében, úgy oldjuk meg a feladatot, hogy az egyenesen tetszőleges segédsíkot fektetünk, amely az adott síkot (α sík) metszi. A metszésvonal (m) és az egyenes (e) közös pontja a keresett dőféspont (D).

Mivel a segédsík tetszőleges állású lehet, a gyakorlatban olyan síkot célszerű választani, melynek a metszésvonala az adott síkkal (α sík) könnyen és gyorsan megszerkeszthető. Ilyen sík az adott egyenesre illeszkedő vetítősík.



2.7.1. Síkidom és egyenes dőféspontjának szerkesztése:

a.) Általános térelemek esetén: általános helyzetű sík és általános helyzetű egyenes

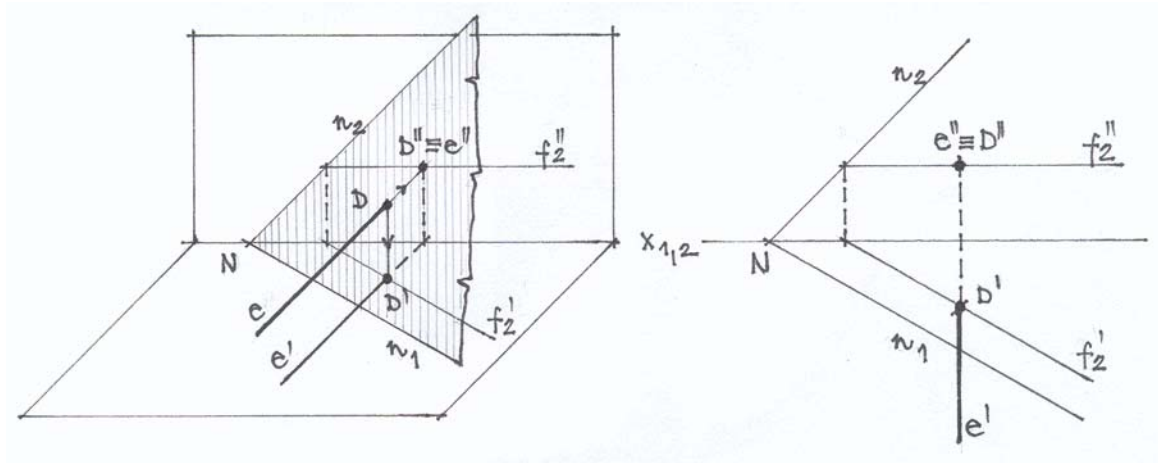


Segédsíkként az egyenesre második vetítősíkot illesztünk. Ennek második képe egybeesik az egyenes második képével. ($P'' + Q'' = m''$) Ez egyúttal a síkidom síkjával alkotott metszésvonalnak is a második képe. Az m metszésvonal első képét (m') mint a síkban fekvő egyenes hiányzó képét szerkesztettük meg. A metszésvonal első képének és az egyenes első képének metszéspontja a keresett D (D') dőféspont első képe. A dőféspont (D'') második képét rendezővel jelöljük ki az e egyenes (e'') második képén.

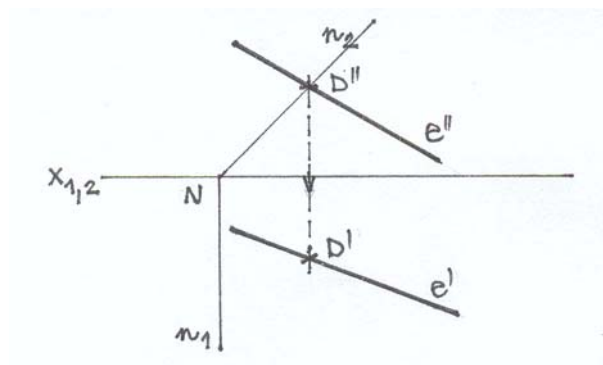
b.) Különleges térelemek esetén:

b/1.) Általános sík és második képsíkra merőleges egyenes

Az első és második képsíkban nyomvonalaival adott az általános helyzetű sík ($n';n''$), az egyenes különleges helyzetű, merőleges a második képsíkra. Ezért az egyenes második képe ponttá fajul. A hiányzó D' dőféspont meghatározásához a sík D'' pontjára illeszkedő fővonalat (f'') használjuk.

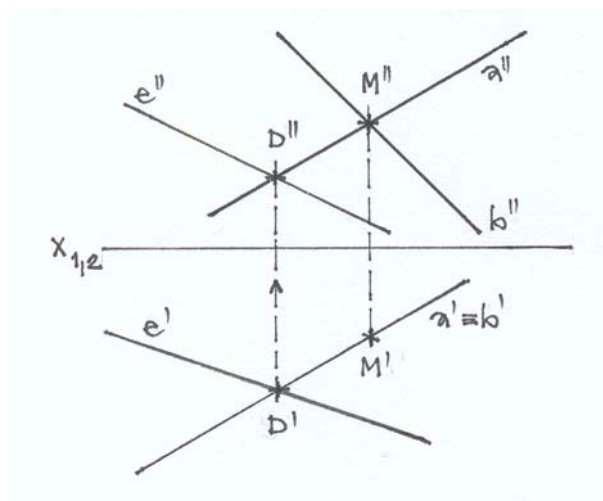


b/2.) Második vetítősík és általános helyzetű egyenes



Nyomvonalaival adott a második vetítősík ($n';n''$) és az e egyenes első és második képe ($e';e''$). A dőféspont a második képsíkon adott (D''), a hiányzó első képe (D') rendezővel kitzítható.

b/3.) Metsződő egyenespár által adott első vetítősík és általános helyzetű egyenes



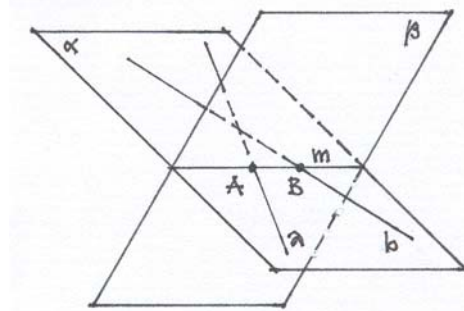
Előzőhöz hasonló a feladat megoldása, csak itt a dőféspont második képe (D'') a hiányzó kép, mely az első képsíkból bocsátott rendezővel szerkeszthetünk meg.

2.7.2. Két sík metszésvonala:

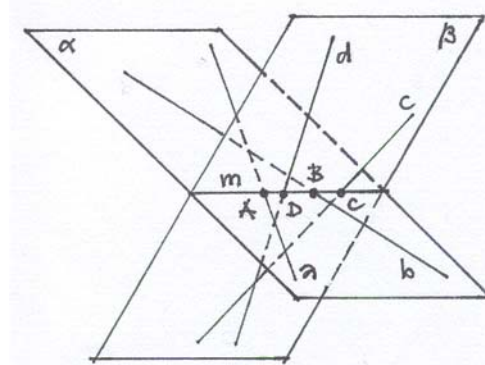
Két sík közös egyenese. A metszésvonal meghatározott, ha két pontja ismert.

Általános esetben két sík metszésvonalának meghatározását visszavezetjük egyenes és sík dőléspontjának meghatározására.

- a.) A két sík közül az egyik, pl. α sík tartóegyeneseinek (**a** és **b** egyenesek) dőléspontját szerkesztjük meg a β síkkal (**A** és **B** dőléspontok). *A két pont egyértelműen meghatározza a két sík metszésvonalát.*

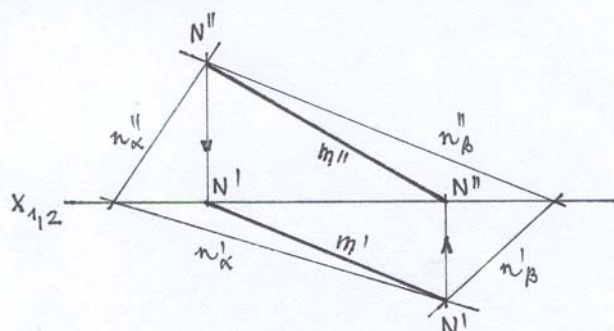
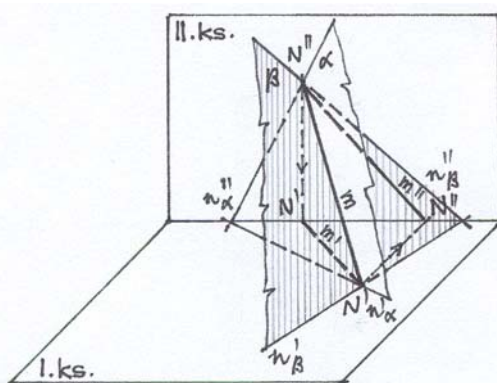


- b.) Az egymást metsző síkok **a**, **b** illetve **c**, **d** tartóegyenesei közül bármelyik kettőnek (pl.: **a** és **b**, **c** és **d**, **a** és **c**, **b** és **d**) megszerkeszthető a dőléspontja a rá nem illeszkedő síkkal. *A dőléspontok (A,B,C,D) mindegyik esetben illeszkednek a metszésvonalra.*

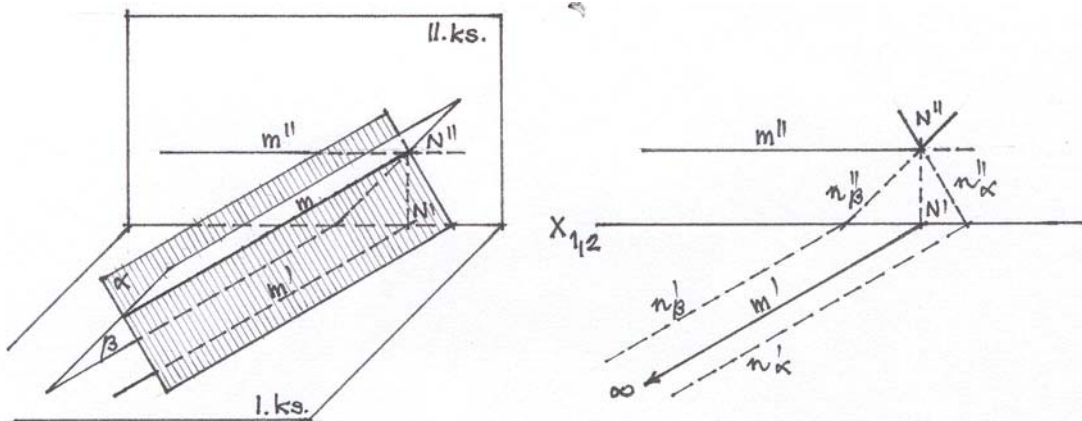


1. Metszésvonal szerkesztése nyomvonalakkal adott síkok esetén:

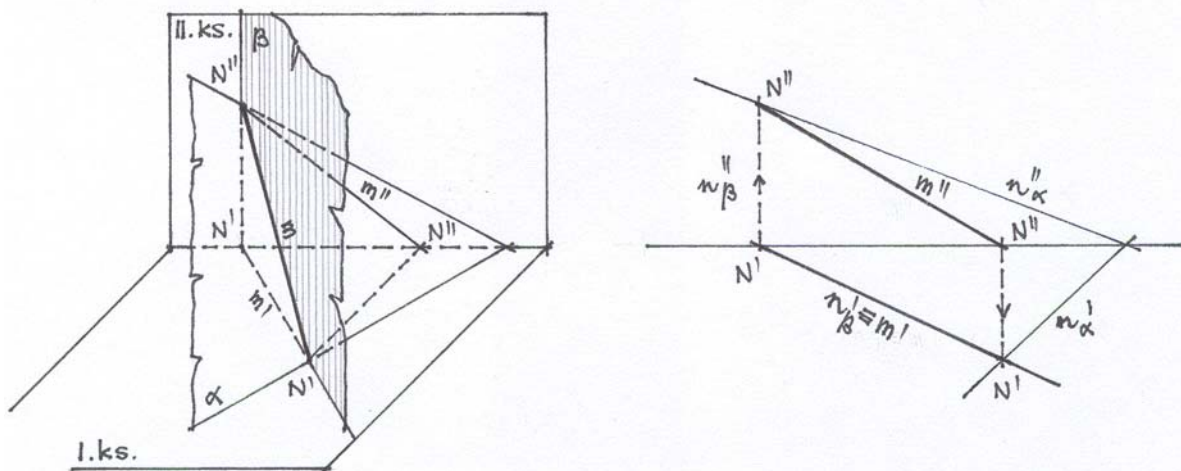
- a.) Egyszerűbb a szerkesztés, ha a síkok (α és β sík) nyomvonalakkal vannak megadva. Ekkor ugyanis a metszésvonalat meghatározó két pont (N_1' és N_2'') az egynevéű nyomvonalak (n_{α}' ; n_{β}' illetve n_{α}'' ; n_{β}'') egy-egy metszéspontja (N_1' ; N_2' illetve N_1'' ; N_2''). *A nyomvonalak metszéspontjai pedig a két sík metszésvonalának nyompontjai.*



- b.) A nyomvonalak metszéspontja lehet a végtelenben is. Ekkor a metszésvonal párhuzamos az egymást végtelenben metsző nyomvonalakkal.

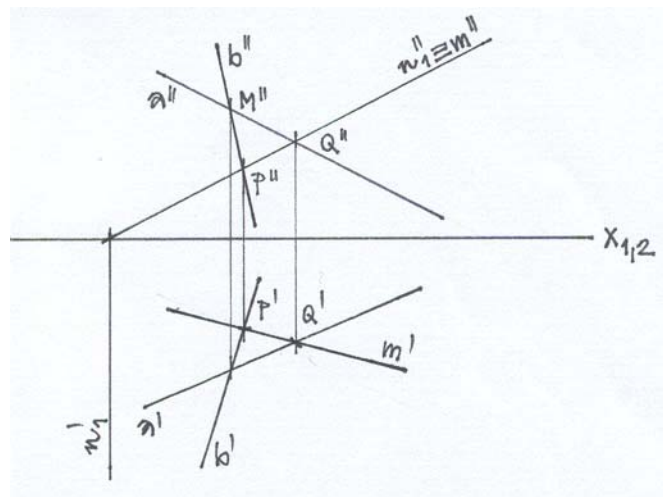


- c.) Ha az egymást metsző síkok egyike vetítősík, akkor is egyszerűen határozható meg a metszésvonal.



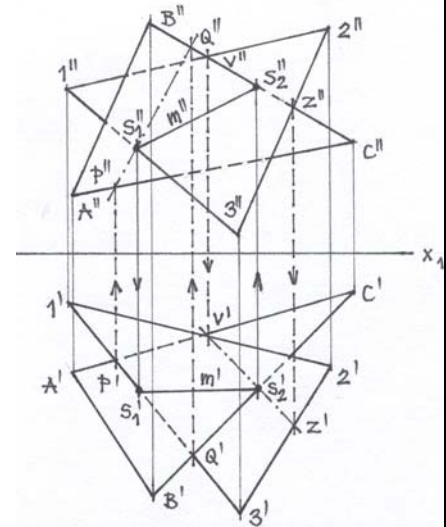
A metszésvonal ez esetben a vetítősík nyomvonalával (képegyenesével $n_{\alpha'}$) fedőegyenest alkot, így képe a vetítősík nyomvonalával (képegyenesével) esik egybe.

Második vetítősík és általános helyzetű tartóegyeneseivel adott sík metszésvonalának szerkesztése.



Két általános helyzetű síkidom metszésvonalá:

A szerkesztés menete leolvasható az ábráról. A két általános síkot három nem egy egyenesbe eső pontjával határoztuk meg. (α síkot: $1,2,3$ pontjával; a β síkot: A,B,C pontjával adtuk meg.) Szerkesztendő a két sík metszésvonalá. Ha megszerkesztjük a metszésvonal két pontját, ezeket összekötve megkapjuk a keresett metszésvonalat. Válasszuk az I. ks.-ban az α sík $1',3'$ élét, mint egyenest és szerkesszük meg az A',B',C' háromszöggel a dőléspontját: az $1',3'$ él metszi az A',C' élet a P' pontban, és metszi a B',C' élet a Q' pontban. Ezeket a metszéspontokat felvetítve a II. ks.-ba, A'',C'' élen P'' pontot, a B'',C'' élen a Q'' pontot kapjuk. A P'' és Q'' pontokat összekötő egyenes metszi az $1'',3''$ élet, ez a metszéspont nem más, mint az $1'',3''$ élnek az A'',B'',C'' síkkal alkotott dőléspontja (S_1''), illetve a keresett metszésvonal egyik pontja. A metszésvonal másik pontjának (S_2'') meghatározásához a II. ks.-ban B'',C'' él, mint egyenes és az $1,2,3$ háromszög, mint sík dőléspontjának szerkesztése az előzőekben leírt módon. Majd I. ks.-ban S_1', S_2' illetve a II. ks.-ban S_1'', S_2'' összekötésével megkaptuk a két adott sík metszésvonalát

**2.7.3.) Azonos dőlésű síkok metszésvonalá: FEDÉLIDOM**

Egyenlő dőlésű síkok metszésvonalának felülnézete a *nyomvonalak szögfelezőjével* esik egybe.

a.) Különleges helyzetű fedélidom

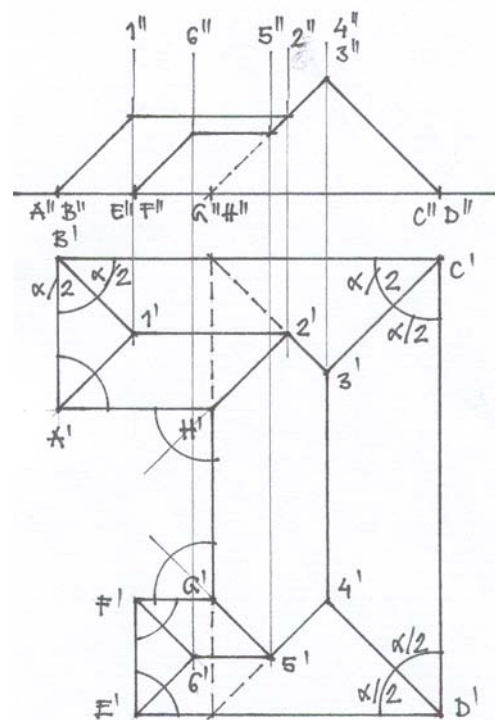
Adott egy U alaprajzú épület ereszvonalaik felülnézete. Az ereszvonalak (nyomvonalak) egy síkban fekszenek, azaz illeszkednek az I. ks.-ra (benne vannak a síkban).

A fedélsíkok a vízszintessel (I. ks.-kal) 40° -os szöveget zárnak be.

Szerkesszük meg a fedélidom felülnézetét és előlnézetét!

1. A szerkesztést az I. ks.-on kezdjük. Szerkesszünk az ereszvonalaik töréspontjaiban szögfelezőket.
2. A párhuzamos ereszvonalaikra illeszkedő fedélsíkok metszésvonalá az ereszvonalaikkal párhuzamos és a két ereszvonaltól egyenlő távolságra van, azaz a két ereszvonala közötti távolság felében. A szerkesztés menete az ábráról leolvasható.

pl. ha a $H'G'$ ereszvonala meghosszabbítjuk az $E'D'$ ereszvonalaig és megszerkesztjük a szögfelezőt, a G' töréspontban megrajzolt szögfelező, illetve az $5'6'$ gerincél kitézi a $4'5'$ ferde gerincél hosszát.

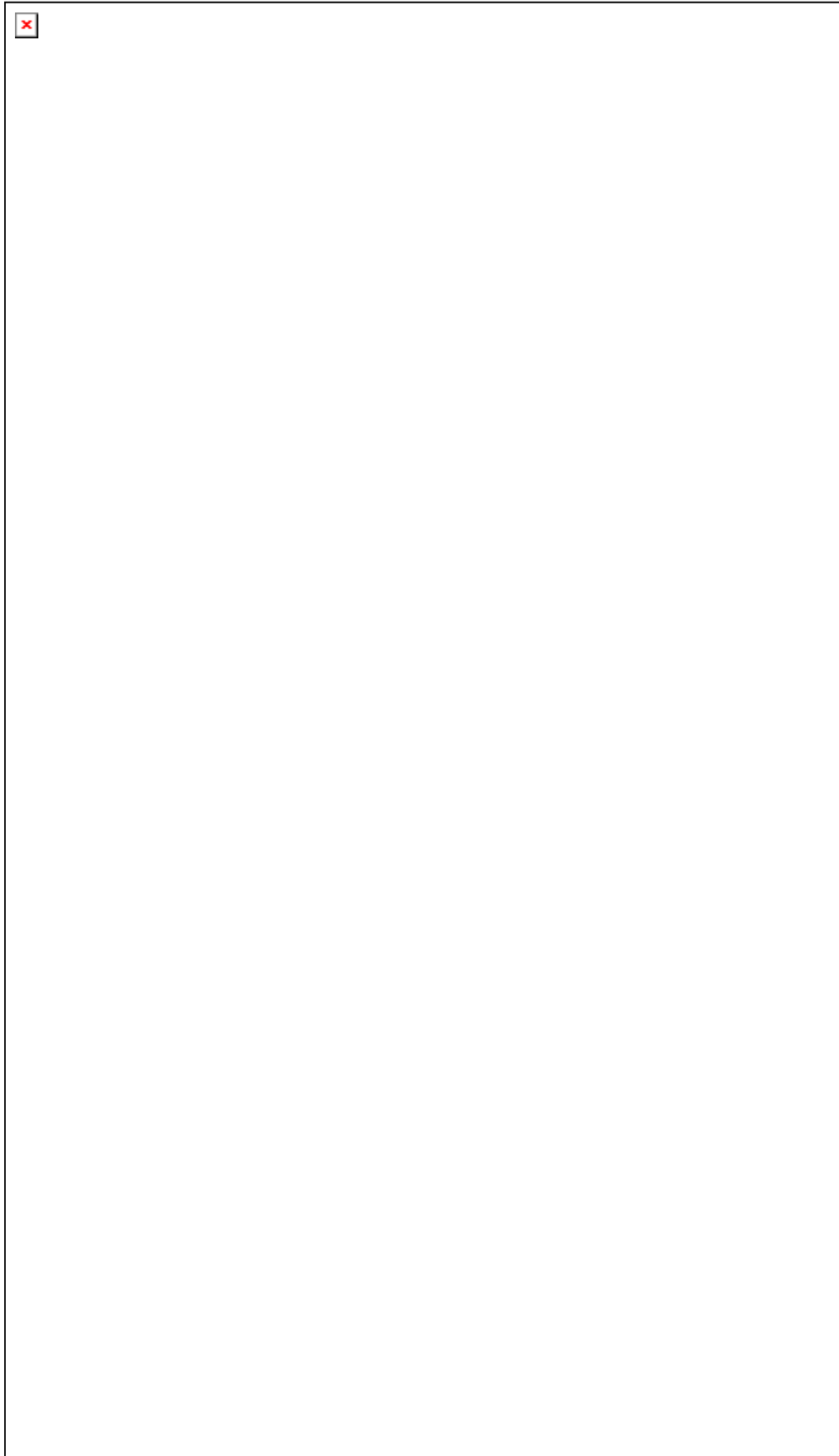


b.) Általános helyzetű fedélidom

Adott egy szabálytalan sokszög alaprajzú épület ereszvonalaik felülnézete. Az ereszvonalak illeszkednek az **I. ks.**-ra. A fedélsíkok hajlásszöge (**I. ks.**-kal bezárt szöge) 60° . Szerkesszük meg a fedélidom felülnézetét (első képét) és előlnézetét (második képét)!

1. A szerkesztést az **I. ks.**-on kezdjük. Szerkesszünk az ereszvonalaik töréspontjaiban szögfelezőket.
2. Az **A'** és **B'** szögfelezői metszik egymást az **1'** pontban
3. Most szerkesszük meg az **A'G'** és a **B'C'** ereszvonalaikra illeszkedő síkok metszésvonalát **1'2'** szakaszt. Ha meghosszabbítjuk az **A'G'** és **B'C'** ereszvonalaik, a két egyenes metszi egymást. Megszerkesztjük a szögfelezőjüket, az **1'**-es metszésponton kell átmennie. Ez az egyenes (**1'2'**) a két sík metszésvonala (**A'G'** és **B'C'** ereszvonalaikra illeszkedő síkok metszésvonala), egyben kitűzi **C'** ferde él hosszát is (**2'** metszéspont).
4. Ha meghosszabbítjuk a **C'D'** és a **G'F'** ereszvonalaik, és ennek a két metsződő egyenesnek is megszerkesztjük a szögfelezőjét, megkapjuk a **G'** szögfelezőjének a hosszát (**3'**) és a **3'4'** élgerincet. Vagyis a **C'D'** és **G'F'** ereszvonalaikra illeszkedő két fedélsík metszésvonalát.
5. A **2'3'** ferde él hosszát az előző két lépésben megkaptuk, így ha összekötjük, akkor a **C'D'** és az **A'G'** ereszvonalaikra illeszkedő síkok metszésvonalát is megkaptuk.
6. A **D'** és **E'** szögfelezői is metszik egymást. A **C'D'** és az **F'E'** ereszvonalaikra illeszkedő síkok metszésvonalát, a két ereszvonalaik meghosszabbítása által adott metszéspont szögfelezője adja, és egyben a **4'** ferde él hosszát is kitűzi. Kész a fedélidom felülnézete.
7. A **II. ks.**-on folytatjuk a szerkesztést. Az $x_{1,2}$ tengelyre merőlegesen felvetítjük az **A',B',C',D',E',F',G'** töréspontokat. Mindegyik pont rajta van a tengelyen, mert az ereszvonalaik benne vannak az **I. ks.**-ban.
8. Felvetítjük a metszésvonalak töréspontjait (**1',2',3',4',5'**) is a **II. ks.**-ba. Ezek hosszát még nem tudjuk.
9. Válasszuk, pl. az **A'G'** ereszvonalaik, a már meghosszabbított részén tetszőleges távolságban rajzoljunk egy rá merőleges egyenest (legyen ez az $x_{1,4}$ tengely). A metszéspontunktól a tető hajlásának irányában mérjük fel és rajzoljuk meg a 60° -os szöget. Az **A'G'** eresszel párhuzamosan vetítjük ide az **1'; 2'** és **3'** gerinc töréspontjait, ahol metszik a vetítőegyenesek a 60° -os egyenesünket ($\mathbf{m}_1; \mathbf{m}_2; \mathbf{m}_3$), onnan visszamérve az $x_{1,4}$ tengelyig a távolságot, megkapjuk a gerincvonal **1'**-es **2'**-es illetve a **3'**-as pontjának valódi magasságát az **I. ks.**-tól. Ezt a távolságot kell a **II. ks.**-on az **1'**-es, **2'**-es, **3'**-as pontok vetítőegyenésére felmérni az $x_{1,2}$ tengelytől. Ha a többi töréspontnak is megszerkesztettük a valódi magasságát, és a megfelelő vetítőegyenésekre felmértük, összekötve a kapott pontokat megkapjuk a tető élgerincvonalát.

Ezután a láthatóság figyelembe vételével megrajzoljuk a ferde éleket, a megfelelő eresztöréspontokat összekötjük a gerinc megfelelő töréspontjaival.



7. heti előadás

3. SÍKLAPÚ TESTEK

3.1. Síklapú testek származtatása

Síklapú testnek, poliédernek a tér síkszögekkel körülhatárolt részét nevezzük. A síklapú testet **lapjai**, lapjait **élei**, az éleket pedig a síklapú test **csúcsai** határolják. A lapok sokszögek, melyeknek belső szögei a poliéder **élszögei**. Az egy élben találkozó két lap által bezárt szög a poliéder **lapszöge**. Az egy csúcspontot alkotó lapok **testszögletet** alkotnak. A testszöglet nyitott alakzat.

A síklapú testeket **éleik és csúcspontjaik vetületeivel** ábrázoljuk.

A műszaki gyakorlatban a leggyakrabban előforduló síklapú test a **hasáb** és a **gúla**.

Ha egy sokszög vonal pontjain át egy, a sokszög síkjával nem párhuzamos egyeneseket fektetünk, akkor ezek összessége végtelen hasábfelületet alkot, a felület, pedig végtelen hasábtestet határol. A végtelen hasábtestet a sokszög síkjával és egy, azzal párhuzamos síkkal elmeteszve **hasábot kapunk**, melynek egybevágó alaplapjait a síkok metszik ki a hasábtestből.

A **hasáb** alaplapja és fedlapja egymással párhuzamos és egybevágó. Az **egyenes hasáb** oldalélei merőlegesek az alaplap síkjára. A szabályos egyenes hasáb alaplapja szabályos sokszög. A **ferde hasáb** oldalélei az alaplap síkjával ferde (hegyes) szöget zárnak be.

Ha egy sokszög vonal síkján kívül eső pontból a sokszög vonal pontjaira félegyeneseket illesztünk, akkor azok összessége végtelen gúlafelületet alkot, a felület, pedig végtelen gúlát határol. A végtelen gúlát egy síkkal, pl. a sokszög vonal síkjával elmeteszve kapjuk a gúlatestet vagy röviden a **gúlát**.

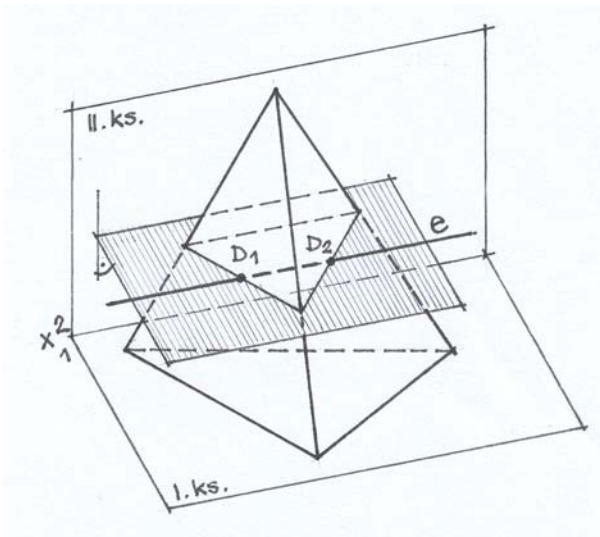
A **gúla** alaplapja (alapsokszöge) oldalegyenesei a gúla **alapélei**. Az alapsokszög csúcspontjaira illeszkedő és a gúla csúcsa közé eső oldalélek a gúla **alkotói**. A **gúla** oldallapjai **háromszögek**. **Szabályos a gúla**, ha alaplapja szabályos sokszög és ennek a sokszögnek a középpontjában emelt merőleges a gúla csúcspontján megy keresztül.

3.2. Síklapú testek metszése egyenessel

A síklapú testek **egyenessel való dőfése** esetében a szerkesztés elvileg megegyezik a sík és egyenes dőféspontjának szerkesztésével. Az egyenesen ez esetben is valamelyik képsíkra merőleges, azaz különleges helyzetű segédsíkot fektetünk. Megszerkesztjük a segédsík és a síklapú test síkmetszetét. A síkmetszet oldalainak és az egyenesnek a közös pontjai a keresett dőféspontok.

- **Síklapú testek egyenessel való dőfése**

A szerkesztés menete: az egyenesre, egy a II. ks.-ra merőleges segédsíkot illesztünk, a segédsík a test lapjait egyenesekben metszi (a segédsík az egész testet elmetesz, ezért megszerkesztjük a teljes metszetsokszöget), ezek a metszsvonalak kijelölik az egyenesen a dőféspontokat. Egyszerű gúla és hasábok esetében az egyenesek a testet két pontban dőfik. Az egyik síklapon behatol az egyenes a testbe (**D₁**), egy másik síklapján pedig elhagyja azt (**D₂**).



• **Síklapú testek egyenessel való dőfése a két rendezett vetületével**

- Adott az alaplapjával az első képsíkon álló háromszög alapú gúla és egy általános helyzetű egyenes.

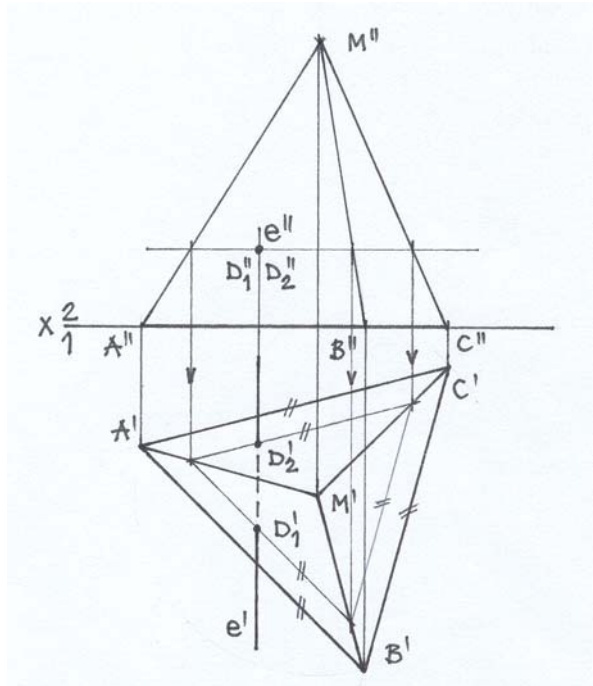
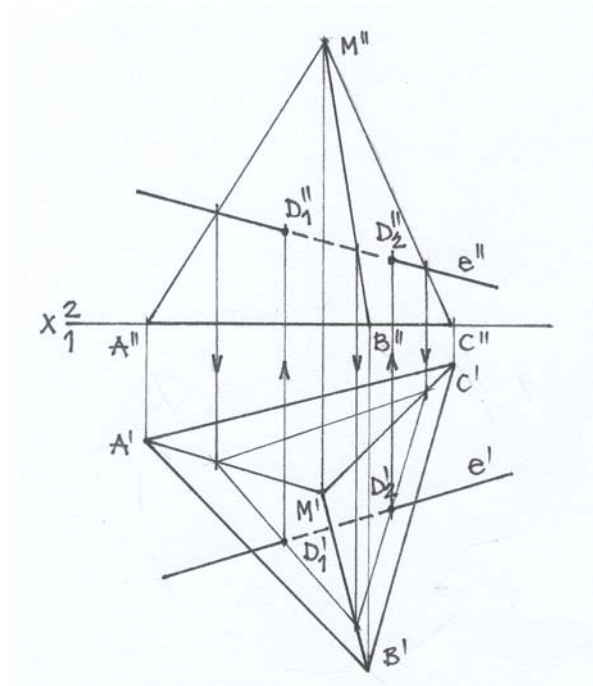
- Adott az alaplapjával az első képsíkon álló háromszög alapú gúla és egy a II. ks.-ra merőleges egyenes.

Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.

1. Az általános helyzetű egyenesre egy a második képsíkra merőleges segédsíkot fektetünk. Ha a II. ks.-ra merőleges a segédsík, akkor itt egy egyenes lesz a képe (sík élben látszó képe) és illeszkedik az egyenesre (e'').
2. Az I. ks.-ban ez a segédsík a gúlát háromszögben metszi. Tehát megszerkesztjük a gúla síkmetszetét.
3. A síkmetszet első képe kijelöli az egyenesen (e') a dőféspontokat (D_1' ; D_2').
4. Az I. ks.-ból visszavetítjük a II. ks.-ra a dőféspontokat (D_1'' ; D_2'').

Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.

1. Az egyenesre most egy az I. ks.-kal párhuzamos síkot fektetünk, ennek a síknak a II. ks.-on a képsíktengellyel párhuzamos egyenes lesz a képe (sík élben látszó képe).
2. Itt is mint az előző feladatban az I. ks.-ban a síkmetszet egy háromszög lesz. Mivel a segédsík párhuzamos az első képsíkkal, így az alaplaphoz hasonló, csak kisebb háromszög lesz a síkmetszet. Elegendő a síkmetszet I. képének egyetlen oldalát megszerkeszteni, a többi megrajzolható, mert oldalai párhuzamosak az alapháromszög oldalaival.
3. A síkmetszet első képe kijelöli az egyenesen (e') a dőféspontokat (D_1' ; D_2').
4. Az I. ks.-ból visszavetítjük a II. ks.-ra a dőféspontokat (D_1'' ; D_2'').

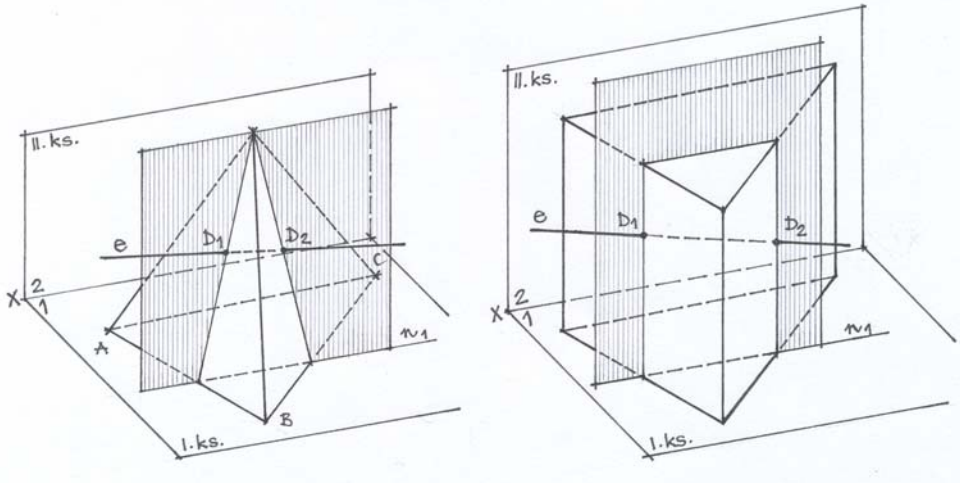


Tehát a szerkesztés egyszerűvé válik, ha segédsíkként vetítésíkot alkalmazunk.

- *Egy másik szerkesztési módszer*

Ha a metszősíkot úgy vesszük fel az egyenesen keresztül, gúla esetében, a gúla csúcspontján keresztül, hasáb esetében, a hasáb oldalélével párhuzamosan, akkor az így felvett segédsík mind a gúla felületéből, mind a hasáb felületéből két alkotót metsz ki. Az alkotók és az egyenes közös pontjai a keresett dőféspontok.

A segédsík a gúlából háromszöget, a hasábból paralelogrammát metsz ki. Ezeket az adott egyenes a keresett dőféspontokban metszi.



Gúla és egyenes dőféspontjának szerkesztése rendezett vetületeivel.

Adott: alaplapjával az I.ks.-ra illeszkedő háromszög alapú gúla, és az általános helyzetű egyenes I. és II. vetülete.

Szerkesztendő: a gúla és az egyenes dőféspontja.

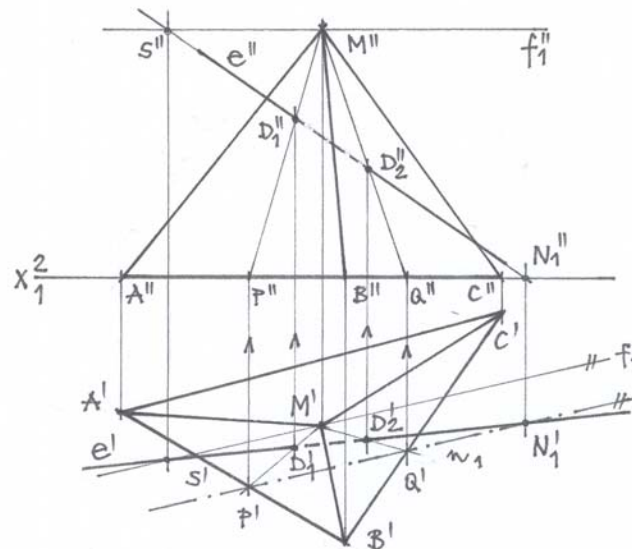
1. *A segédsík nyomvonalának megszerkesztése:*

A segédsíkot tartóegyeneseivel határozzuk meg. Egyik tartóegyenese legyen az adott egyenes, másik tartóegyenese ez esetben a gúla csúcspontjára illeszkedő és az adott egyenest metsző f_1'' fővonal. A segédsík és a gúla alaplapjának metszésvonala a segédsík első nyomvonal (n_1). Ennek egy pontja az e egyenes első nyompontja (N_1'), iránya pedig az f_1' fővonallal megegyezik (párhuzamosak egymással !!!)

2. *Megszerkesztjük a segédsík és a gúla oldallapjának metszésvonalát,* ami nem más, mint az oldallap alkotója. Az n_1 nyomvonal metszi a gúla alaplapjának $A'B'$ és $B'C'$ élét. Vagyis a gúla alaplapjának $A'B'$ oldaléle és az n_1 nyomvonal metszéspontját összekötjük a gúla csúcsával. Megkaptuk a segédsík és a gúla egyik oldallapjának a metszésvonalát. A metszésvonal és az adott egyenes közös pontja az egyenes és a gúla egyik (D_1') dőféspontja. A másik alkotó megszerkesztésével megkapjuk a másik (D_2') dőféspontot.

3. *A II. ks.-on is megszerkesztjük az alkotókat.* Az alapél és a nyomvonal metszéspontjait felvetítjük a II. ks.-ba (gúla alaplapjának egyik pontja, rajta van az $x_{1,2}$ tengelyen!), a gúla csúcsával összekötjük. Az adott egyenessel metsződve, itt is megkapjuk a dőféspontokat ($D_1''; D_2''$).

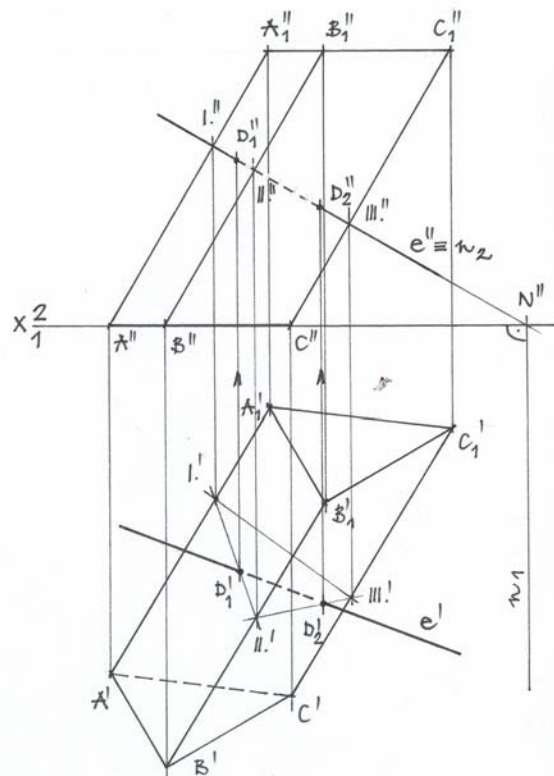
4. *Ellenőrzés:* ha pontosan szerkesztettünk, akkor a két ks.-on a dőféspontok egy rendezőre esnek.



Hasáb és egyenes dőfspontjának szerkesztése rendezett vetületeivel.

Adott: alaplapjával az I.ks.-ra illeszkedő háromszög alapú ferde hasáb, és az általános helyzetű egyenes I. és II. vetülete.

Szerkesztendő: a hasáb és az egyenes dőfspontja.



3.3. Síklapú testek metszése síkkal.

A síklapú test felületét a metszősík sokszögvonalaiban, a testet sokszögben metszi. A sokszögnek annyi csúcspontja és oldala van, ahány éllet, illetve lapot metsz a metszősík.

A sokszögmetszet, röviden *síkmetszet* megszerkesztéséhez a:

- a.) ÉLMÓDSZERT, és a
- b.) LAPMÓDSZERT használjuk.

a.) ÉLMÓDSZER:

Az élmódszer alkalmazásakor a *metszősík és az él metszéspontjait (döféspontjait)* szerkesztjük meg. (Sík és egyenes döféspontjára vezetjük vissza a szerkesztést! Lásd: **Metszési feladatok 1.5.3. G jelű fejezetét!**)

A metszéspontok (döféspontok) a *síkmetszet csúcspontjait* adják. A csúcspontokat összekötő szakaszok adják a síkmetszet oldaléleit.

b.) LAPMÓDSZER:

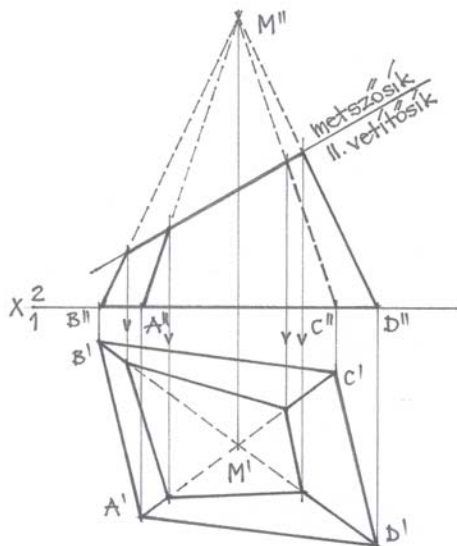
A lapmódszer alkalmazásakor a metszősík és a lapok metszéspontjait szerkesztjük meg. (Azaz két sík metszéspontjait szerkesztjük!). A metszéspontok adják a síkmetszet oldalait.

- *Gúla ill. hasáb síkmetszete:*

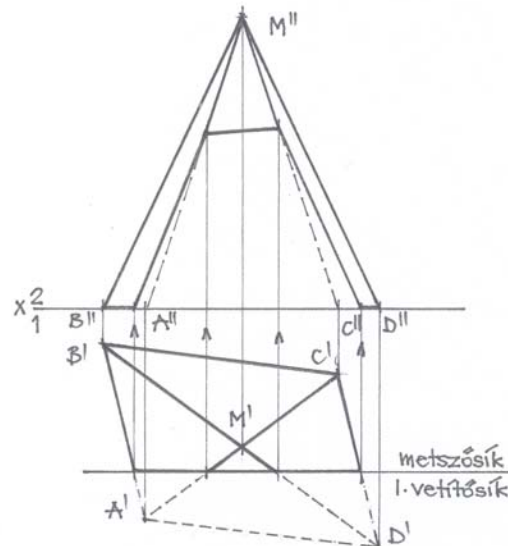
1. A metszősík vetítősík:

Ebben az esetben a szerkesztés a legegyszerűbb, ugyanis az élrk és a sík döféspontjainak egyik képe közvetlenül adódik, a másik képe rendező egyenesek segítségével megszerkeszthető.

A metszősík II. vetítősík



A metszősík I. vetítősík

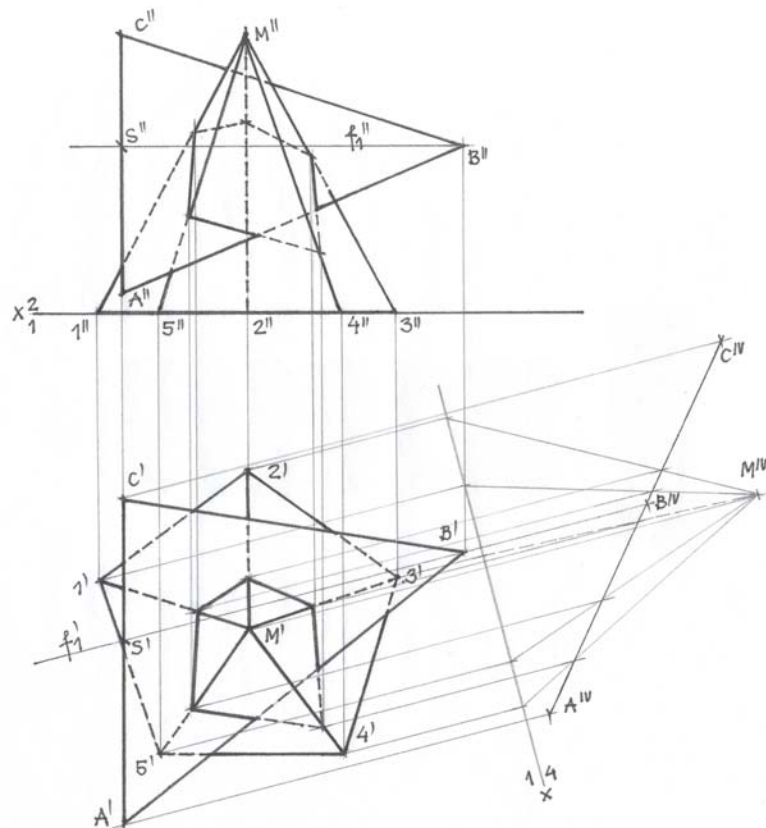


2. A metszősík általános helyzetű (három illetve 4 pontjával megadva)

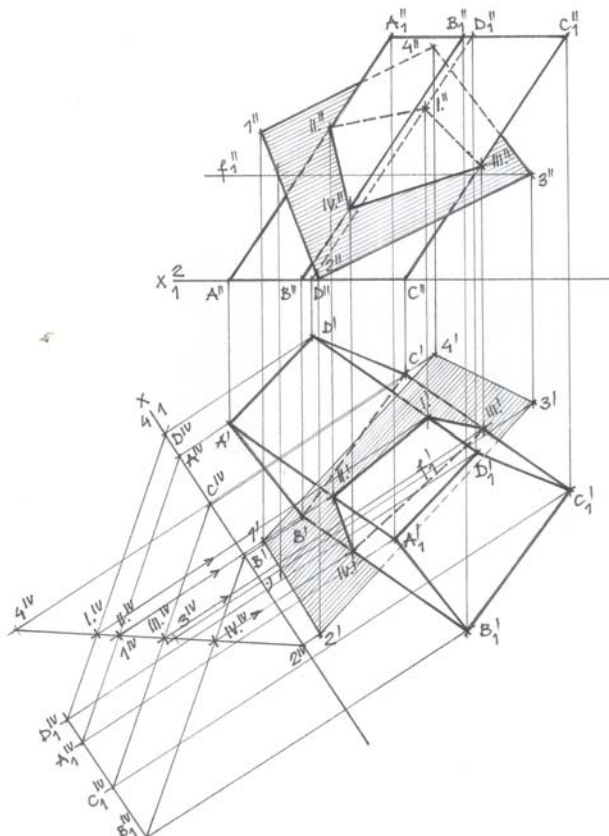
Ha általános helyzetű a metszősík, akkor transzformáció segítségével végezhetjük el a szerkesztést. Ebben az esetben úgy vesszük fel az új (segéd) ks.-ot, hogy a metszősíkra merőleges legyen (sík élben látszódnó képe!!!). Így a legegyszerűbb szerkesztési módhoz, az előzőekben ismertetett szerkesztéssel tudunk eljutni a megoldáshoz.

Gúla

Alaplapjával az I. ks.-on álló, szabályos ötszög alapú gúla, három pontjával adott általános helyzetű metszősík.

**Hasáb**

Alaplapjával az I. ks.-on álló, ferde hasáb, négy pontjával adott általános helyzetű metszősík.



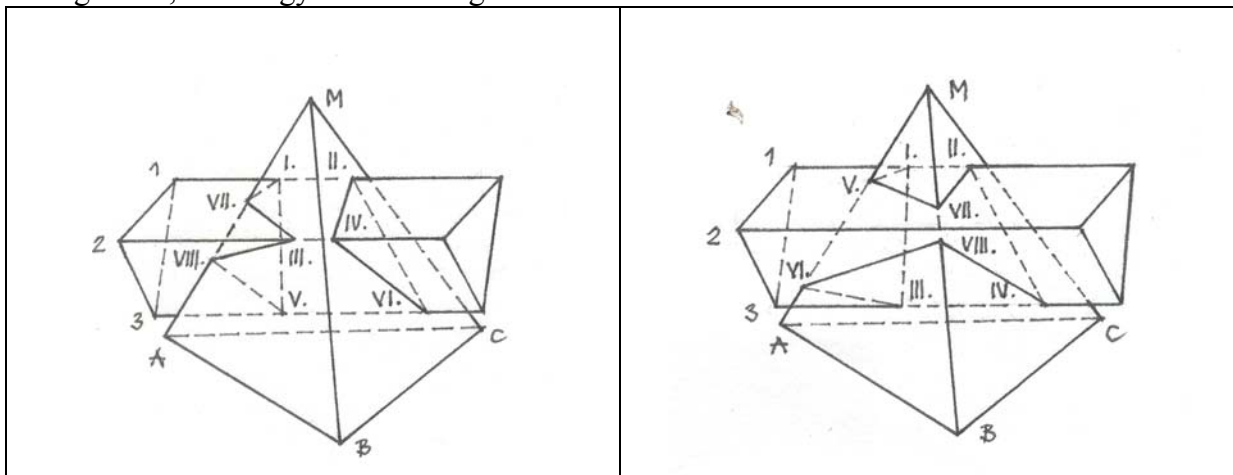
8. heti előadás

3.4. Síklapú testek áthatása

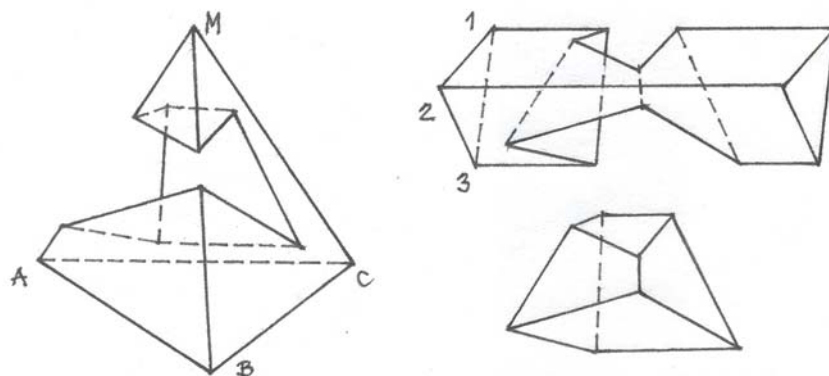
Ha két síklapú test a térben úgy helyezkedik el, hogy *van közös részük, közös pontjaik*, a síklapú testek **áthatásáról** beszélünk.

A testek egyes élei metszik a másik test egyes lapjait. A metszéspontok összekötése a felületek metszévonalai. Általában egyenes szakaszokból álló térbeli sokszöget kapunk, ez a testek *áthatási szöge*.

Az áthatásoknak két jellegzetes típusa van. Egyik esetben az egyik test átlyukasztja a másikat, ez esetben az áthatási sokszög két részből áll. A másik esetben a testek egymásba vágódnak, ekkor egyetlen sokszög keletkezik.



A testek felülete által közrezárt, mindkét test közös pontjait, *közös testnek, közös résznek* is nevezzük. Síklapú testek közös része ugyancsak síklapú test, amelyet síksokszögek határolnak. A síksokszögek oldalai és csúcsai adják az áthatási vonalat, melynek töréspontjai (csúcsai) az áthatásban résztvevő élek és határoló lapok dőléspontjai. Mindkét test ugyanazon határoló lapjára illeszkedő dőléspontok összekötése adja a zárt térsokszög egy-egy oldalát.



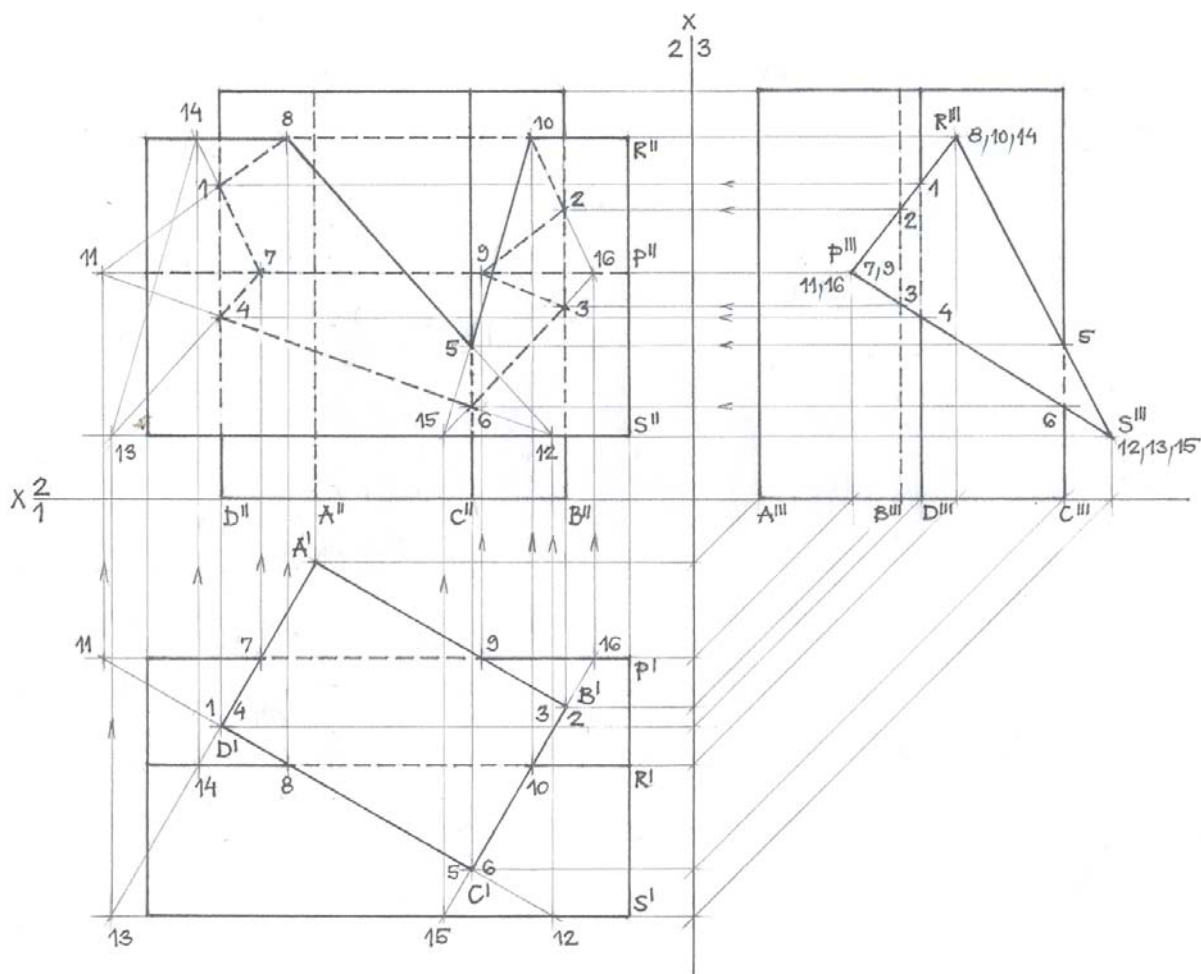
Az áthatási sokszöget úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk mindkét test élének a másik test lapjaival alkotott dőléspontjait, és a dőléspontokat a megfelelő sorrendben összekötjük. Az áthatási sokszög megszerkesztése után feltüntetjük a testek láthatóságát. Az egyes testek láthatósága mellett figyelembe kell venni azt is, hogy a testek részben egymást is eltakarhatják. Az áthatási sokszögből csak az látszik, ami mind a két testnek a látható lapján van.

Ha egy látható él a másik test nem látható lapját dőfi, akkor nem a dőféspontig látszik, hanem csak az őt eltakaró lapot határoló élen kívül.

Próbáljuk a láthatóságot először szemlélet alapján eldönteni, ha nem sikerül, használjuk a fedőpontokat.

A gúla és hasábok áthatásának szerkesztését célszerűen megválasztott segédsíkok használatával egyszerűsíthetjük. Egy-egy segédsíkot úgy választunk meg, hogy illeszkedjen az áthatásban részt vevő testek egyikének valamelyik oldalélére, és ha a másik testet metszi, akkor abból alkotókat metsz ki. A segédsíkra illeszkedő oldalél és a kimetszett alkotók metszéspontja adja az áthatási sokszögvonal egy-egy csúcspontját. Ha a segédsík oldalélen vagy alkotón megy keresztül, gúla esetén tartalmazza a gúla csúcspontját, hasáb esetén a hasáb oldaléléivel párhuzamos.

4/1. Hasáb – hasáb áthatása I.



Adott: a két egymást metsző hasáb I., II., III. képe rendezett vetületeivel. A téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai első vetítésíkok (alaplappja illeszkedik az I. ks.-ra, oldallapjai merőlegesek az I. ks.-ra). Az öt metsző háromoldalú hasáb oldalélei merőlegesek a III. ks.-ra.

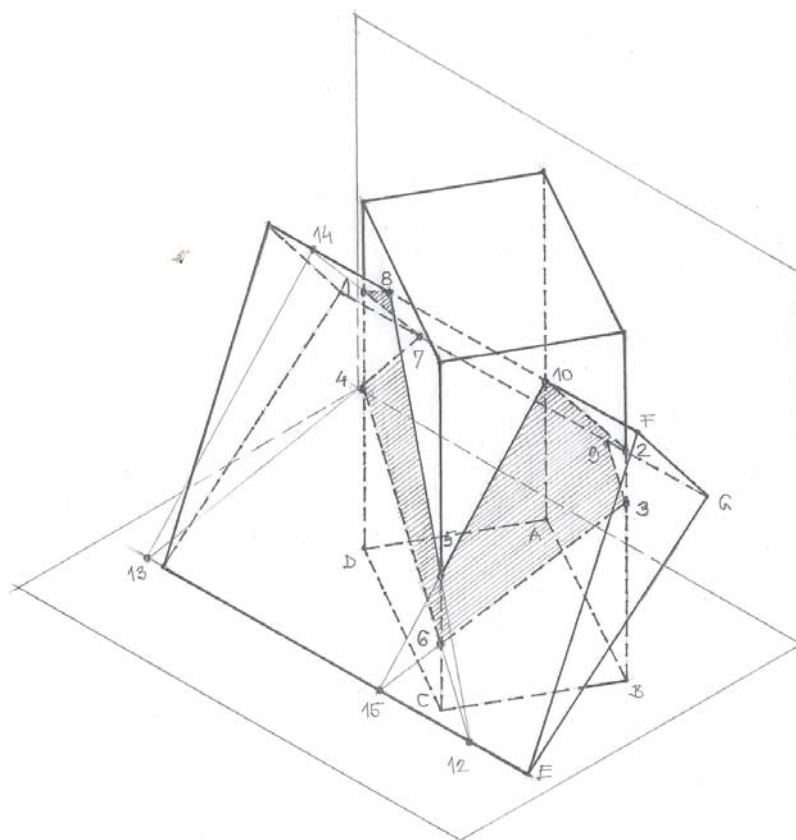
A (60; 90; 100)
 B (100; 67; 100)
 C (85; 41; 100)
 A₁ (60; 90; 165)

P (110; 75; 136)
 R (110; 58; 158)
 S (110; 34; 110)

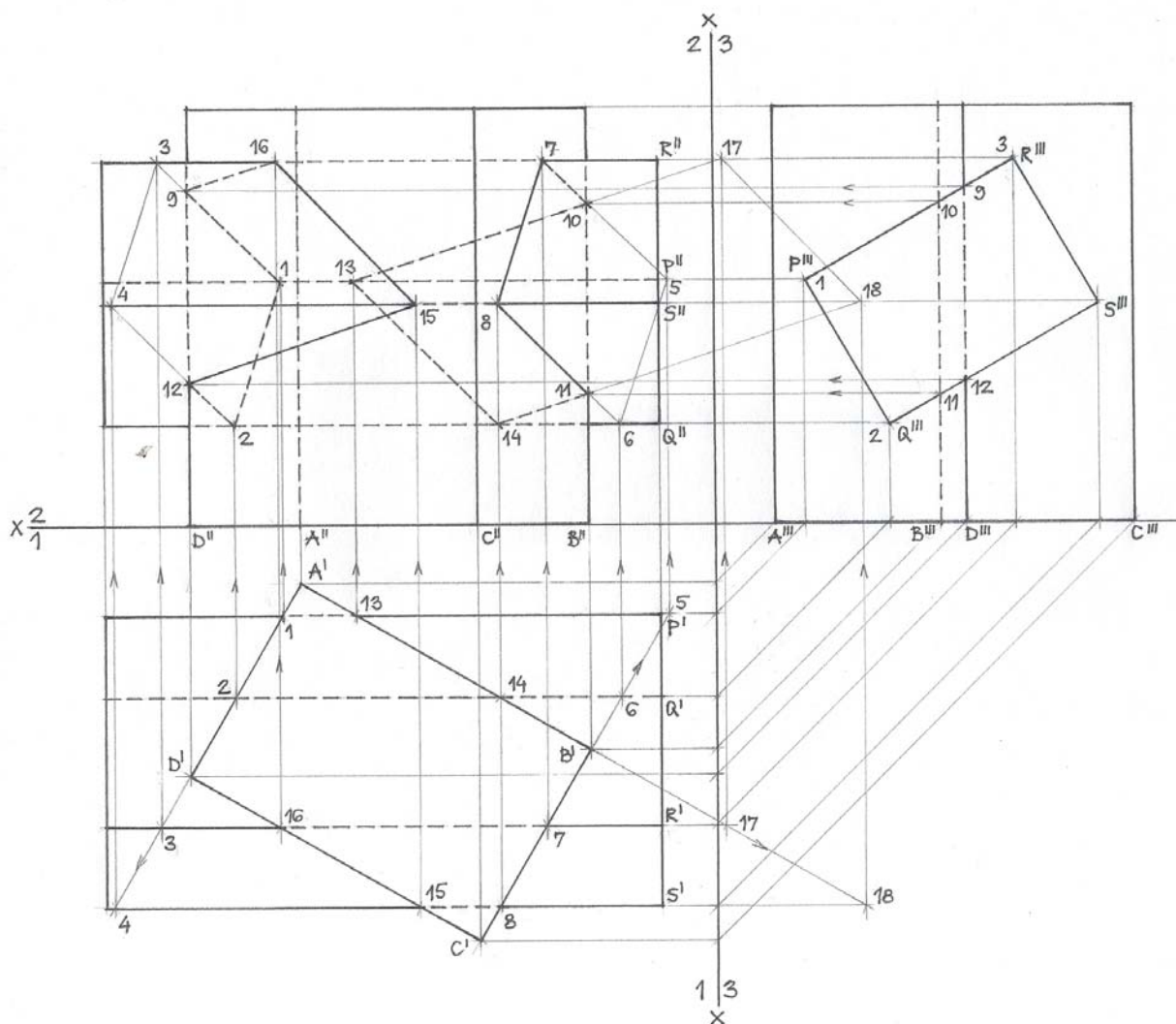
Szerkesztendő: a két hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

- A harmadik képen adva van a négyoldalú hasáb három függőleges oldalának dőfspontja a háromoldalú hasáb felületén. Ezekből a pontokból (1 – 4; 2 – 3; 5 – 6) a második képre bocsátott rendezők kitűzik a metszetek csúcsait adó pontok egy részét.
- A négyoldalú hasáb oldallapjai első vetítősíkok. Az első képen adva vannak a háromoldalú hasáb oldaléleinek a be-, és kilépő pontjai (7 – 9; 8 – 10). Rendezőkkel ezeket a pontokat is kitűzzük a második képen.
- Az egy felületre eső áthatási pontokat össze lehet kötni. Ez természetesen nem egyszerű feladat. A pontok összekötését nagy odafigyeléssel kell végezni. A metszéspontokat összekötése után meghatározzuk a láthatóságot.
- **Ellenőrzés:** Az első képen a négyoldalú hasáb oldallapjait mindkét irányban meghosszabbítjuk (rövidebb, hosszabb oldaléleket). A két keskenyebb oldallapnak a meghosszabbított felületét a háromoldalú hasáb minden oldaléle dőfi (7 – 14 – 13; 16 – 10 – 15). A dőfspontok az első képen adottak. A második képen a dőfspontok összekötése két egybevágó háromszöget eredményez. Ezeknek a háromszögoldaloknak fedni kell a már kihúzott metszévonalakat. Hosszabbítsuk meg a felénk forduló hosszabb oldallapot is két irányban. A háromoldalú hasáb ezt a síkot is három pontban (11 – 8 – 12) metszi, dőfi. Az első képen ez a három pont adott. Rendezőkkel a második képen kitűzve ezeket a pontokat, egy széles háromszög képét kapjuk. Ennek a háromszögnek az oldalélei is illeszkednek a hasábfelület metszévonalaira. A második képen kapott háromszögek oldalait a négyoldalú hasáb oldalélei metszik.



Az áthatás axonometrikus képe.

4/2. Hasáb – hasáb áthatása 2.

Adott: a két egymást metsző hasáb I., II., III. képe rendezett vetületeivel. Az egyik téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai első vetítősíkok (alaplappja illeszkedik az I. ks.-ra, oldallapjai merőlegesek az I. ks.-ra). Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai harmadik vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a III. ks.-ra).

Álló hasáb pontjai

A (55; 194; 198)

B (115; 158; 198)

C (92; 118; 198)

A₁ (55; 194; 295)

Fekvő hasáb pontjai

P (125; 185; 256)

R (125; 144; 280)

S (125; 128; 250)

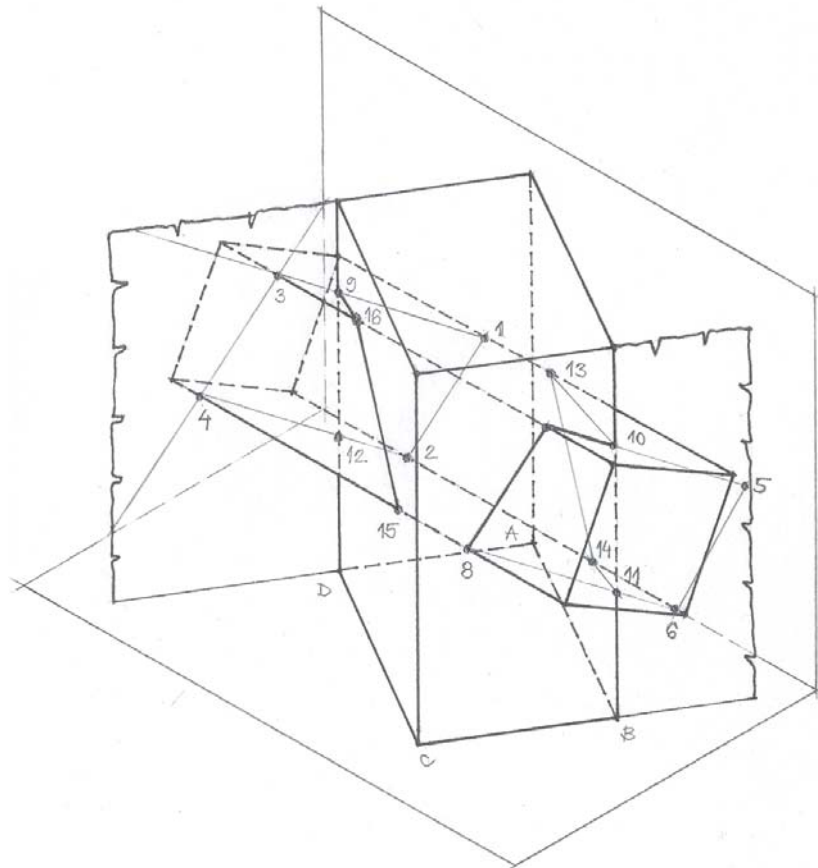
fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a két hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

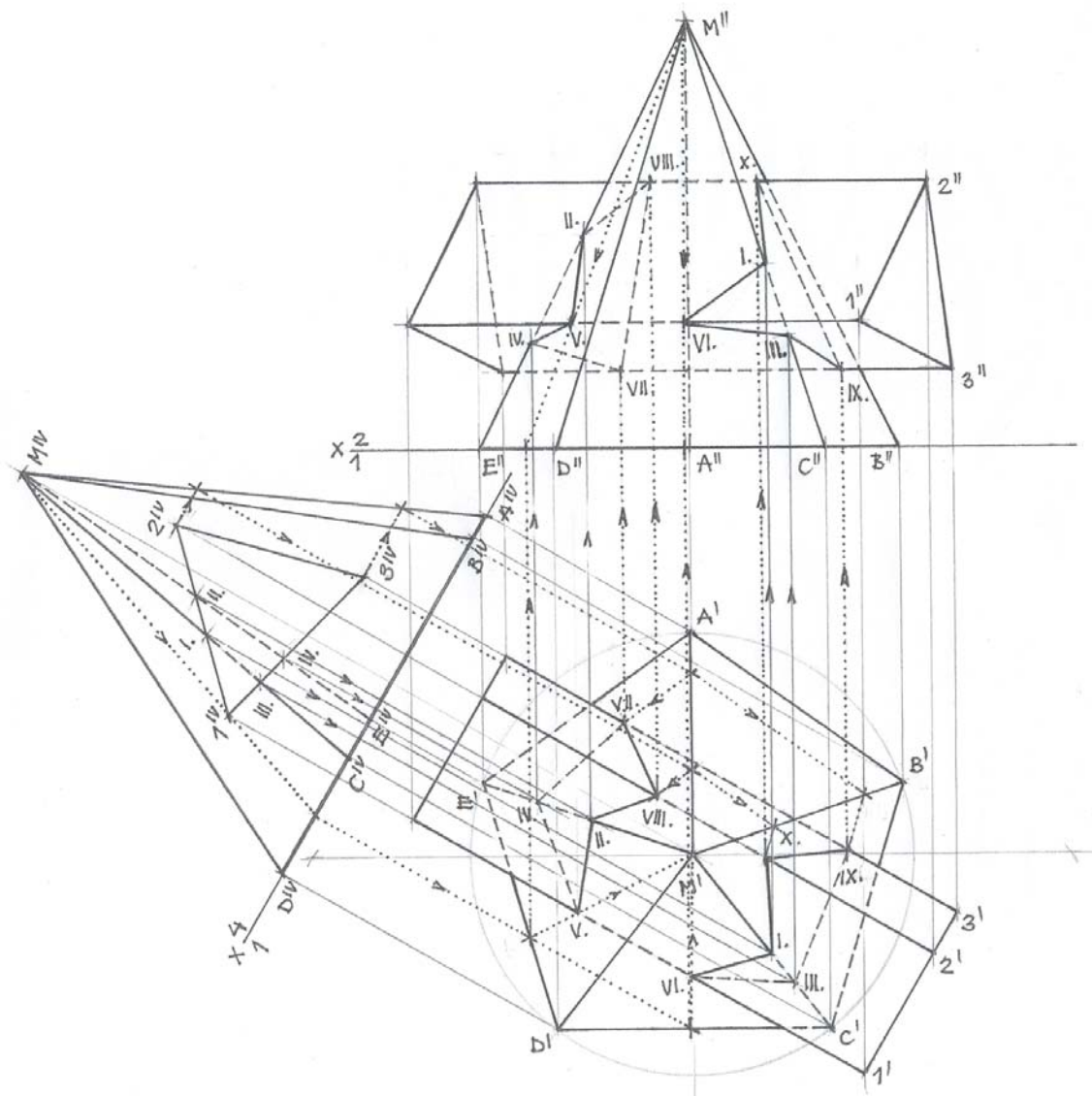
- Az álló hasáb (mely alaplapjával az I. ks.-ra illeszkedik) két függőleges éle behatol a fekvő hasáb felületeibe. A fekvő hasáb harmadik képén, az oldallapok egyenes vetületein ez a négy pont adott (9; 10; 11; 12). Rendezőkkel ezek a pontok a második képen kitzúzhatók, A B' és D' pontokra állított függőleges éleken. A másik két függőleges él nem metszi a hasábot.

- Az álló hasáb oldallapjai első vetítősíkok. Képük az első képen egyenes, ott kapjuk közvetlenül a fekvő hasáb oldaléleinek be-, és kilépő pontjait (1 – 13; 2 – 14; 16 – 7; 15 – 8). A második képüket e pontokra állított rendezőkkel kapjuk.
- Az egy felületre eső áthatási pontokat össze lehet kötni. A pontok összekötését nagy odafigyeléssel kell végezni, majd a láthatóságot meg kell határozni.
- Ellenőrzés: Ellenőrizzük a kialakuló éleken megtörő metszésvonalakat. Terjesszük ki az álló hasáb felületeit az I. ks.-on olyan nagyra, hogy törésmentes szelvényeket kapjunk. A jobboldali keskenyebb oldallapba befűrődik az R', S' pontra illeszkedő hasáb oldalél. Az áthatási pontokat 7-es, 8-as szám jelöli. A másik két él csak a kiterjesztett oldalfelületen hatol át. A pontok szám jele 5 és 6. Ha a kapott pontokat összekötjük egy paralelogramma szelvény második képét kapjuk (5; 6; 7; 8), mely illeszkedik a jól rajzolt metszésvonalakra. Ugyanígy megrajzolhatjuk a szemben lévő függőleges felületen az előbbivel egybevágó paralelogramma szelvényt is. Ennek csúcsait 1-es; 2-es; 3-as; 4-es számok jelölik. Kiterjeszthető a két szélesebb hasábfelület is. Újabb paralelogramma szelvényeket kapunk, melyek az előbbieket a függőleges oldalélekben metszik.



Az áthatás axonometrikus képe.

4/3. Gúla–hasáb áthatása.



Adott: a szabályos ötszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. Az ötszögalapú gúla alaplappjával az I. ks.-on áll, az egyenlő oldalú háromszög alapú, egyenes hasáb oldalélei az első képsíkkal párhuzamosak.

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

- A hasáb az I. és II. ks.-on is általános helyzetű, ezért IV. ks. segítségével szerkesztjük meg az áthatást.
- A IV. ks. tengelyét úgy választjuk meg, hogy a hasáb oldalélei merőlegesek legyenek rá, vagyis oldallapjai negyedik vetítő helyzetű síkok legyenek.. Itt a hasáb képe egy egyenlő oldalú háromszög lesz.
- A gúla C^{IV} oldaléle metszi, dőfi a hasáb 1 – 2 alapélére illeszkedő oldallapját (I.-es pontban) és az 1 – 3 alapélre illeszkedő oldallapját is (III.-as pontban).

- A gúla E^{IV} oldalélei is metszi az előző két oldallapot (II.-es és IV.-es pontok).
- Ezeket a metszéspontokat (döféspontokat) megszerkesztjük az I. ks.-ban a C' és E' gúla oldalélekre, illetve a II. ks.-ban is meg tudjuk határozni.
- A hasáb 1^{IV} -es oldaléle viszont metszi (döfi) a gúla $D^{IV}C^{IV}M^{IV}$ és $D^{IV}E^{IV}M^{IV}$ oldallapját. Ezeket a döféspontokat alkotó segítségével szerkesztjük meg. Az M^{IV} és 1^{IV} pontok összekötése megadja az alkotót, mely metszi a gúla $D^{IV}C^{IV}$ és $E^{IV}D^{IV}$ alapélét. Megszerkesztjük az alkotók I. ks.-beli nézetét. Itt az alkotók és a hasáb $1'$ -es élének metszéspontjai (V.-ös és VI.-os pontok) megadják a hasáb $1'$ -es oldalélének a gúla oldallapjain be-, és kilépő pontjait. II. ks.-on is megszerkesztjük az alkotók nézetét, itt is a hasáb $1''$ -es oldalélével való metszéspont megadja a két döféspontot.
- A hasáb 2^{IV} -es és 3^{IV} -as oldalélének döféspontjait a gúla oldallapjain az I. ks.-kal párhuzamos segédsíkok alkalmazásával szerkesztjük meg. Ha a hasáb 2^{IV} -es és 3^{IV} -as oldalélén keresztül fektetünk egy-egy metszősíkot, akkor a gúla A^{IV} -es oldalélét egy-egy pontban metszi. Az első képsíkban tudjuk ennek a két élnek a gúlával alkotott döféspontját megszerkeszteni. Rendezőkkel kitűzzük az A' oldalélen ezt a két metszéspontot. Ha képzeletben a gúlát ebben a két magasságban elmetszenénk, akkor az első képsíkban a metszetük szabályos ötszöget adna, csak az alaplapoz képest arányaiban kisebbet, vagyis az alaplap oldaléleivel párhuzamosak lennének. Az A' -től az $A'E'$ alapéllal párhuzamosan megrajzoljuk a vetítő egyeneseket a $2'$ és $3'$ oldalélekig (VII.-es és VIII.-as pontok). Ugyanígy az $A'B'$ alapéllal párhuzamosan is megrajzoljuk a vetítő egyeneseket, de a B' oldalél nem metszi a hasábot, ezért a vetítő egyeneseket tovább kell rajzolni a $B'C'$ alapéllal párhuzamosan itt is a $2'$ -es és $3'$ -as oldalélekig (IX.-es és X.-es pontok). Ezután megszerkesztjük a II. ks.-ban is ezeket a pontokat.
- Mindkét képsíkon, I. és II. ks.-on a pontok összekötésével megkapjuk a két test áthatási sokszögét, láthatóságot is eldöntve kihúzzuk és megoldott a feladat.

4/4. Gúla– hasáb áthatása.

Adott: a szabályos háromszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. A gúla alaplapjával az I. ks.-on áll. Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai második vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a II. ks.-ra).

Gúla pontjai

A (19; 115; 154)

B (145; 138; 154)

M (- ; - ; 264)

Fekvő hasáb pontjai

1 (53; - ; 227)

2 (119; - ; 244)

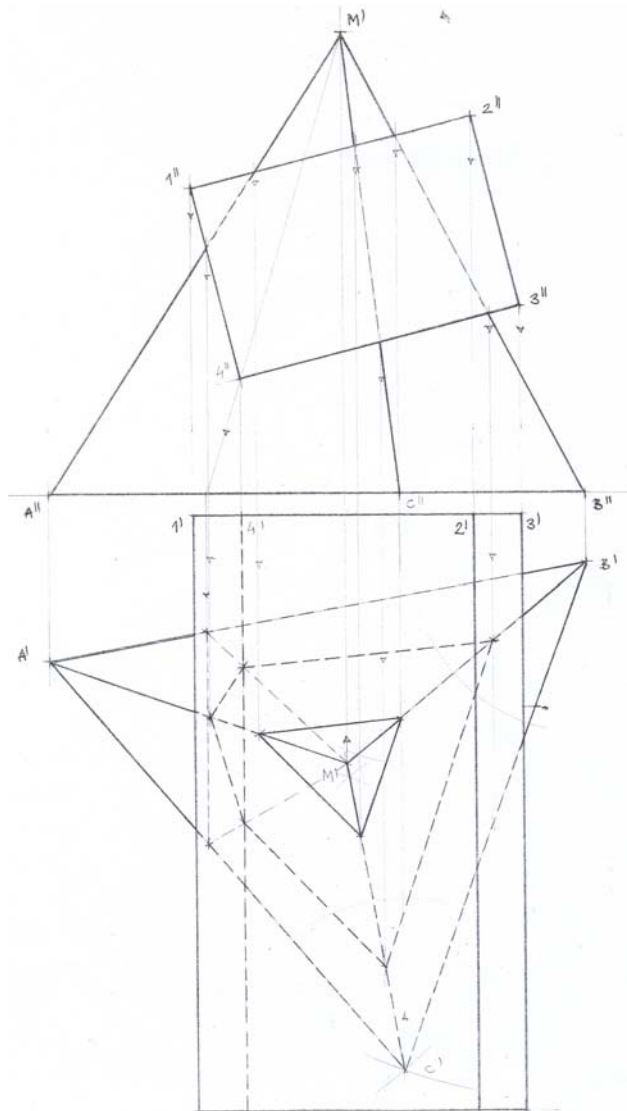
3 (130; - ; 199)

fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

Az előző feladatok alapján az ábráról leolvasható.



4/5. Gúla– hasáb áthatása.

Adott: a szabályos ötszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. A gúla alaplapjával az I. ks.-on áll. Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai második vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a II. ks.-ra).

Gúla pontjai

A (169; 141; 166)

M (199; 95; 258)

Fekvő hasáb pontjai

1 (182; 154; 176)

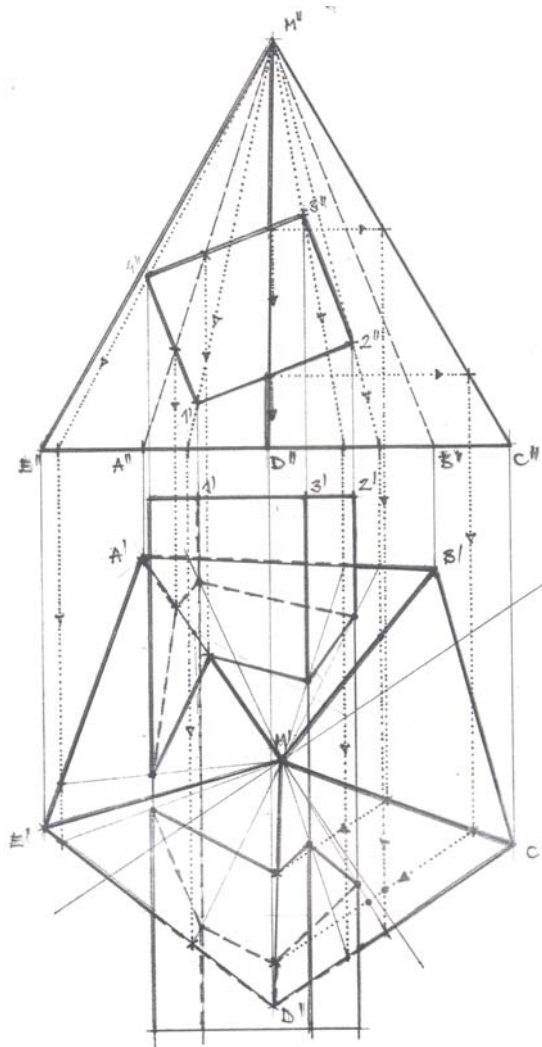
2 (217; 154; 189)

3 (206; 154; 218)

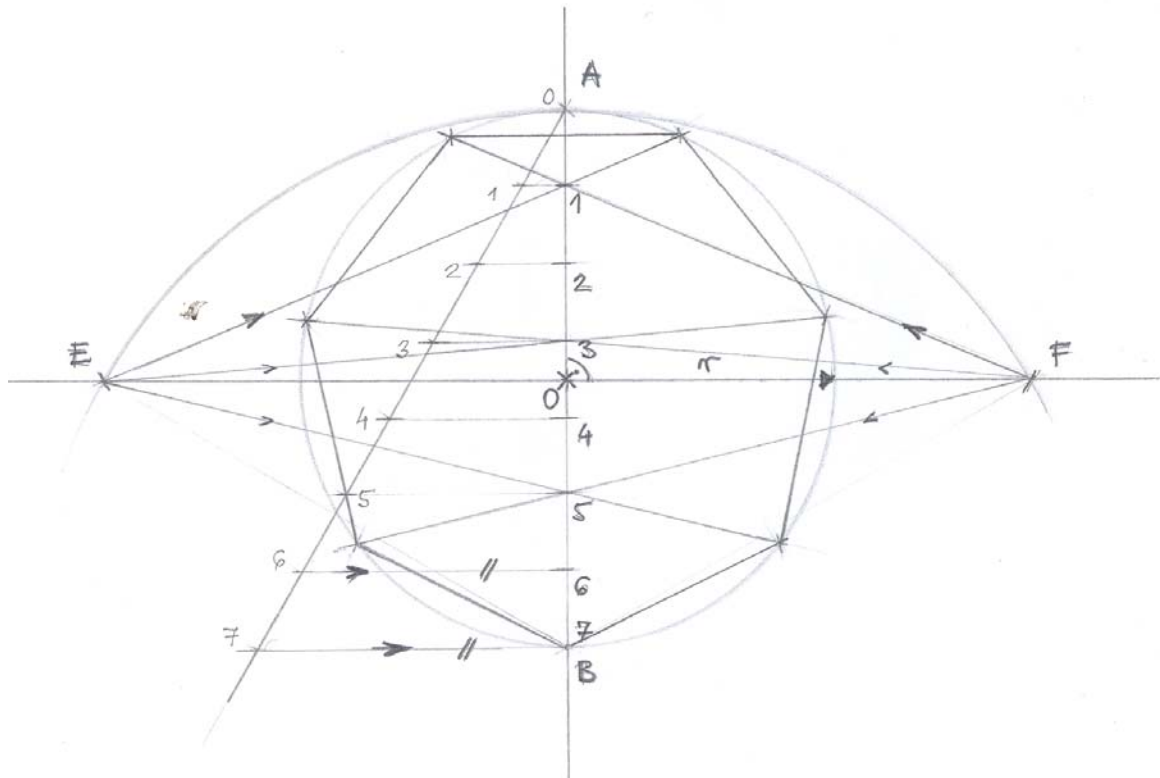
fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete: Az előző feladatok alapján az ábráról leolvasható.



4/6. Páratlan oldalú szabályos sokszög szerkesztése.



Szerkesztés menete:

- Fekvő A/4-es lap közepére rajzoljunk két egymásra merőleges tengelyt és egy tetszőleges sugarú kört **O** középponttal. Itt most egy **szabályos 7 szög** szerkesztését mutatja be a feladat, de bármilyen páratlan számú (5, 7, 9, 11, 13, stb.) sokszög ugyanígy megszerkeszthető.
- Graduáljuk a függőleges átmérőt. A függőleges átmérő **A** pontjából húzzunk egy tetszőleges egyenest. Erre az egyenesre mérjük fel hét egységet, a hetedik egység végét kössük össze a függőleges átmérő **B** pontjával. Ezzel az egyenessel párhuzamos egyeneseket rajzolunk a tetszőleges egyenesen lévő osztásokból az átmérőre (**A** és **B** szakaszra).
- A **B** pontból körzőnyílásba vesszük **A** szakasz hosszát, ezzel a sugárral körívet rajzolunk, a vízszintes átmérő meghosszabbított egyenesén kapunk két metszéspontot **E** és **F** pontokat.
- Az **E** pontot kössük össze az átmérő **1** jelű osztásával, a körön a jobboldalon kapunk egy metszéspontot. Kössük össze az **F** pontot is az **1** jelű ponttal, a kör baloldalán is kapunk egy metszéspontot. Minden második osztással (**3, 5**) végezzük el ugyanezt a lépést.
- A körön kapott metszéspontok összekötésével megkaptuk a kívánt páratlan számú szabályos sokszöget, itt most a szabályos hét szöget.
- Ha a páros számú osztásokat (**2, 4, 6**) kötjük össze az **E** és **F** pontokkal, akkor az **A** pont adja a sokszög egyik csúcspontját.

9. heti előadás

4. CÉLORIENTÁLT MÉRŐSZÁMOS ÁBRÁZOLÁS

A műszaki rajzgyakorlatban használunk úgynevezett *mérőszám*os vetületeket. *Ebben az esetben a merőleges sugarú vetítési rendszernek csak egy, vízszintes képsíkja van.* Főleg tereprajzok, térképek készülnek ezzel a vetítési rendszerrel. A minden irányban erősen tagolt terepfelületekről a többképsíkös vetítési rendszer rajzi eszközeivel képet készíteni nem lehet. A többképsíkös ábrázolás vetületei közül ez a rendszer a felülnézeti képet tartja meg. Egy kép csak két kiterjedésű geometriai elem ábrázolására jó. A harmadik kiterjedést eddig egy másik képsík segítségével ábrázoltuk.

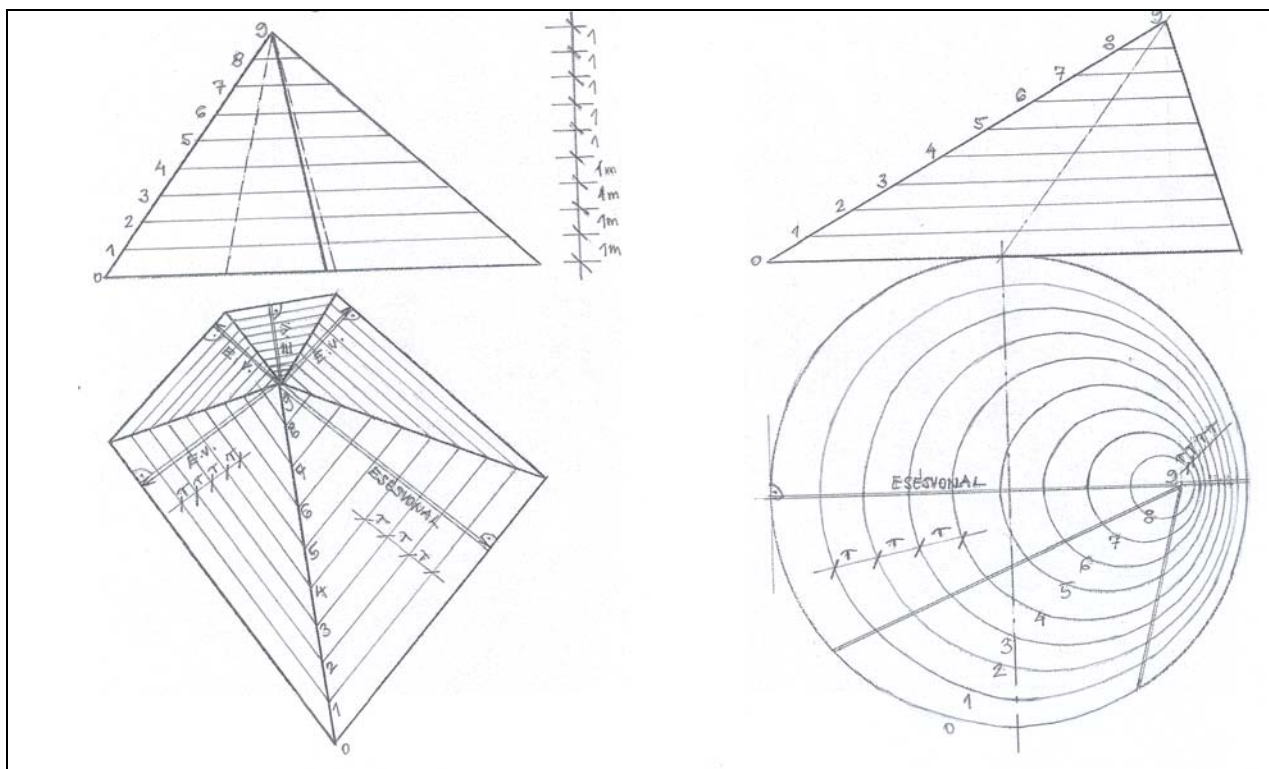
A mérőszám, vagy kótás vetület a pontok képsík feletti magasságát a képük mellé írt számmal adja meg. Innen ennek a vetítési rendszernek az elnevezése.

A feladatok megoldása igazolja, hogy lényegében nem különálló vetítési rendszerről beszélünk, hiszen a merőleges sugarú vetítés minden törvényszerűsége itt is érvényes.

Ismerkedjünk meg néhány új fogalommal.

Képsík helyett itt nullás szintsíkról vagy másképpen *nívósíkról* beszélünk. A nullás nívósíktól (tengerszinttől) mérik a terep-felszín pontjainak magasságát. Kétféle tengerszint feletti magasságot használ a műszaki gyakorlat, a Balti tenger feletti és az Adria feletti magasságot. Ezt abszolút magasságnak nevezik.

A terepfelületet vízszintes nívósíkokkal (I. vetítősíkokkal) képzeletben felszeleteljük. A terep felszínén e síkok szintvonalakat metszenek ki. A részletes térképeken a rajzolt szintvonalakat *rétegvonalaknak* is szokás nevezni.



A szintsíkok egymástól egyenlő távol fekszenek. Ha a terep lejtős síkfelület, a szintsíkok e felületen egymástól egyenlő távol fekvő, vízszintes egyeneseket metszenek ki. Ezek a szintvonalak, sík terepfelület esetében egyenesek (első fővonalak), görbe felületen természetesen görbe vonalak lesznek. Ilyen egyenes-vonalú rétegződés a valóságban alig létezik, a terepfelületek általában görbe felületek.

Tehát a mérőszámos ábrázolást terepfelületek rajzi rögzítésére használjuk. Ez a vetítési rendszer is része a mérőleges sugarú vetítési rendszernek. Több képsík helyett csak egy (vízszintes) képsíkot használ. Erre a képsíkra mérőleges sugarakkal vetíti a térbeli elemek pontjait. A pontok képsík feletti magasságát számok jelzik.

A tereprajzokon a valóságos terep kicsinyített vetülete látható. A kicsinyítés mértékét (*léptékét*) a rajzokon külön feltüntetett *arányszám* ($m=1:200$; $m=1:40000$; stb.) vagy *rajzolt lépték* (adott a rajzi 1m hossza). A terepet egymástól egyenlő távolságban fekvő vízszintes síkokkal képzeletben elmetszük. A síkok metszésvonalai a rétegvonalak vagy szintvonalak. Ezek adják a rajzban a terepfelület plasztikai hatását. Segítségükkel látjuk a terepfelszín domborzati sajátosságait.



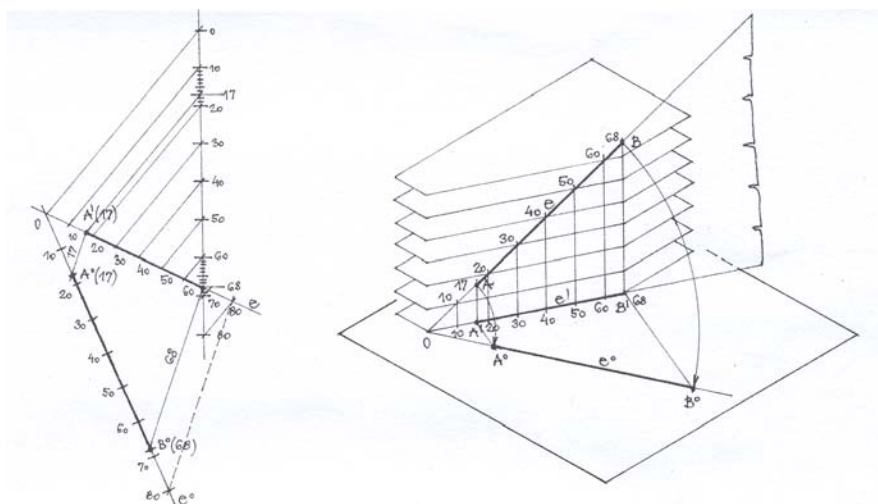
A szintvonalak, rétegvonalak a terep azonos magasságában fekvő pontjait kötik össze. Sík terepfelületen egyenesek és egymástól egyenlő távol fekszenek. Homorú, domború, henger felületeken a szintvonalak lehetnek egyenesek, de egymástól mért távolságuk változó. Szabálytalan görbe felületek szintvonalai szabálytalan görbék. Állandó irányváltoztatással követik a terepfelület görbületeit. A szintvonalak természetesen nem metszhetik egymást. A sűrű szintvonalak meredek terepfelületet mutatnak, a függőleges sziklafalak szintvonalai fedik egymást. A vízszintes alföldi felületen alig van szintvonal, ezek is nagyon távol helyezkednek el egymástól, jelezve a kis halmokat, horpadásokat.

A tereprajzok szilárd vázát a szintvonalak és a rájuk mérőleges esésvonalak alkotják. Ilyen szintvonalas térképfelületekre készülnek az út-, és vasútépítési tervrajzok (út-nyomvonalak kijelölése, tereprendezések, töltések, bevágások, stb.). A tereprajzok képezik a városfejlesztési-rendezési tervek alapját. Tereprajz kell az egyes épületek számára kijelölt terepfelület rendezési terveinek elkészítéséhez is. A vízgazdálkodással, szabályozással, mezőgazdasággal, erdőgazdasággal kapcsolatos tervrajzok is mérőszámos, úgynevezett nyerstérképekre készülnek.

4.1. EGYENESSEL KAPCSOLATOS MÉRŐSZÁMOS SZERKESZTÉSEK.**a.) EGYENES GRADUÁLÁSA**

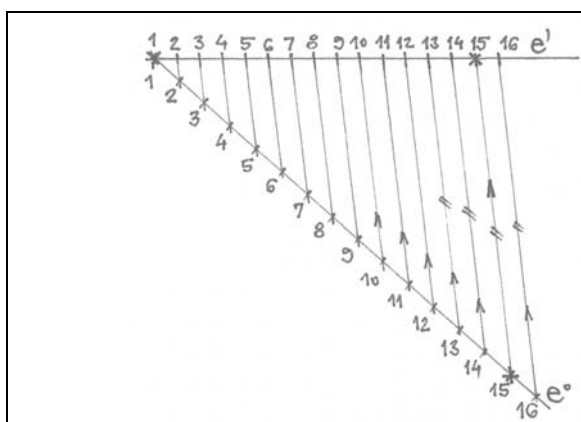
a/1. **Adott:** az általános helyzetű egyenesen AB szakasz, A pont első képsík feletti magassága 17 mm, B pont magassága 68 mm.

Szerkesztendő: a két pont közé eső kerek m-eket.



a/2. **Adott:** az általános helyzetű e' egyenes 1m és a 15m magasságú pontjai.

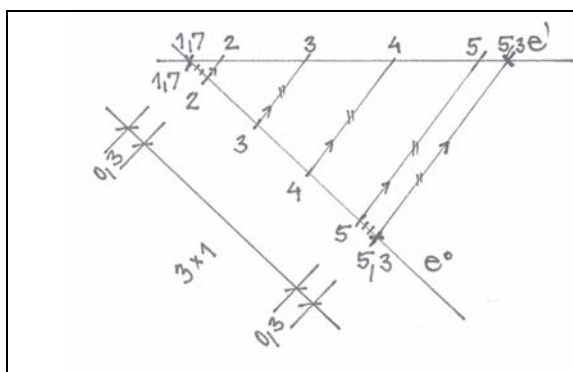
Szerkesztendő: a két pont közé eső kerek m-eket.

**Szerkesztés menete:**

Az 1m-es pontból húzzunk egy tetszőleges irányú egyenest. Erre mérjük fel $(15-1)=14$ egységet. Az e^0 egyenes 15. egységét kössük össze az eredeti e egyenes 15m-es pontjával. Ezzel az egyenessel párhuzamosokat húzva az e^0 egyenes kerek egységeiből, kitűzhetjük az eredeti e' egyenesen az egész méter magasságú pontokat.

a/3. **Adott:** az általános helyzetű e' egyenes 1,7m és a 5,3m magasságú pontjai.

Szerkesztendő: a két pont közé eső kerek mm-ek.

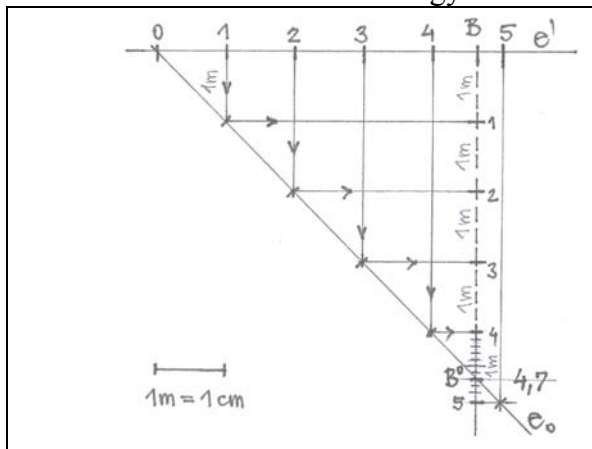
**Szerkesztés menete:**

Az 1,7m-es pontból húzzunk egy tetszőleges irányú egyenest. Mérjük fel erre az egyenesre $0,3+(3 \times 1)+0,3$ egységet. Az utolsó egységét kössük össze az eredeti e' egyenes 5,3m-es pontjával. Ezzel az egyenessel párhuzamosokat húzva az e^0 egyenes kerek egységeiből, kitűzhetjük az eredeti e' egyenesen az egész méter magasságú pontjait.

b.) EGYENESEN LÉVŐ PONT MAGASSÁGÁNAK MEGHATÁROZÁSA (FORGATÁSSAL)

b/1. Adott: az általános helyzetű e' egyenes 0, 1, 2, 3, 4, 5 m-es kerek magasságú pontjai, és az 1 m rajzi hossza.

Szerkesztendő: az egyenesen lévő B pont magassága.

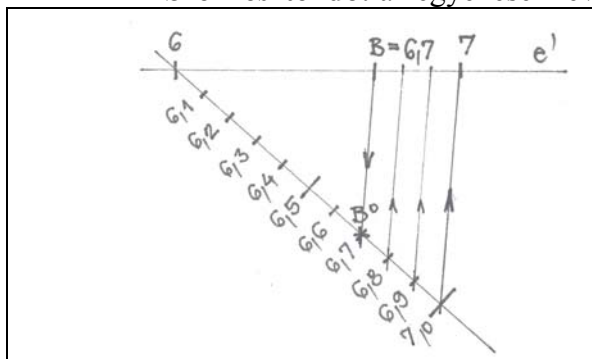


Szerkesztés menete:

Az e' egyenes 1 m magasságú pontjából merőlegest állítunk, erre felmérjük a rajzi 1 m-t (pl.: 1 m=1 cm). A kapott pontot összekötjük a 0 m magassági ponttal, ezáltal megkapjuk az e' egyenes leforgatott képét e^0 -t. A B pontból is merőlegest húzunk, mely metszi az e^0 egyenest és kitűzi a B^0 pontot. Erre a merőleges egyenesre B-től felmérjük a rajzi 1 m-t annyiszor, hogy az utolsó egység B^0 ponton túl legyen. A pont magassága leolvasható.

b/2. Adott: egy másik megoldás, ha tudjuk, hogy keresett B pont magassága a 6 és 7 m magassági pontok közé esik.

Szerkesztendő: az egyenesen lévő B pont magassága.



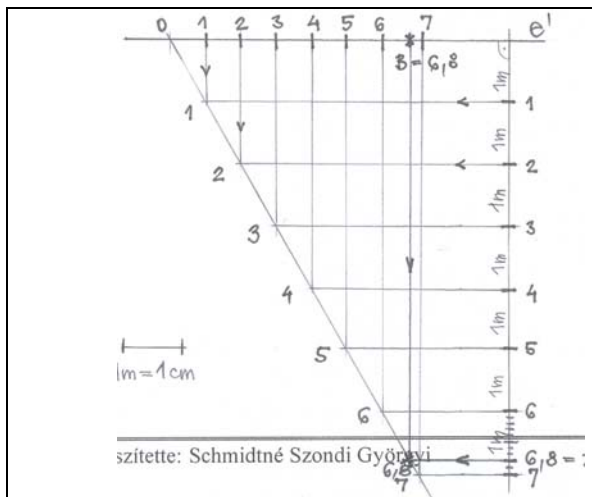
Szerkesztés menete:

Az e' egyenesen lévő 6 m-es pontból tetszőleges egyenest húzunk, erre az egyenesre felmérünk 10 egységet, az utolsót összekötjük az e' egyenesen lévő 7 m magasságú ponttal. A B pontból ezzel párhuzamost húzunk, mely kitűzi a B^0 pontot az e^0 egyenesen. És a pont magassága leolvasható.

c.) ADOTT MAGASSÁGÚ PONT MEGHATÁROZÁSA

c/1. Adott: az általános helyzetű e' egyenes 0, 1, 2, 3, ..., 7, 8 m-es kerek magasságú pontjai, és az 1 m rajzi m hossza.

Szerkesztendő: az e egyenesen lévő 6,8m magasságú pont.

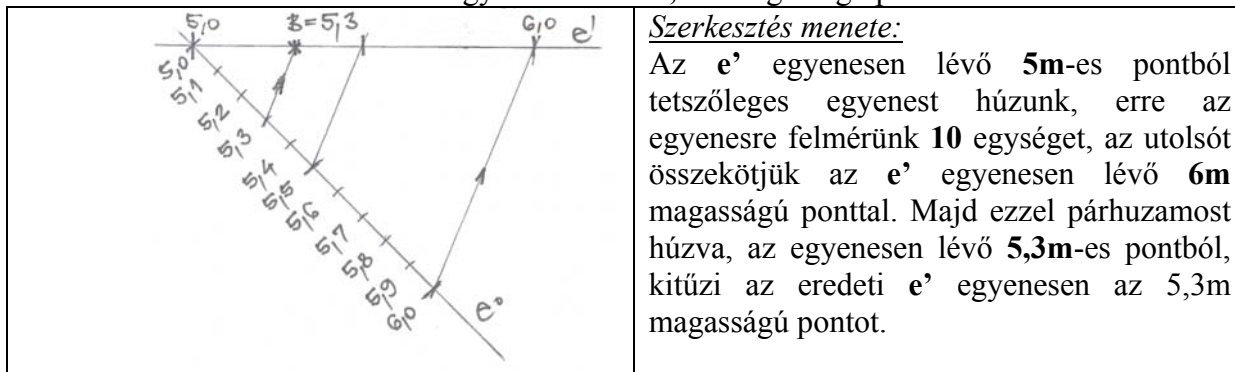


Szerkesztés menete:

Meghatározzuk az e' egyenesen leforgatott képét e^0 -t (mint előző feladatnál!). Az e' egyenesre tetszőleges helyen merőlegest állítunk, erre az egyenesre felmérjük a rajzi 1m-t, annyiszor, hogy a 6,8m-t is tartalmazza. Ez kitűzi az e^0 egyenesen a 6,8m magasságú pontot. Innen merőleges egyenest húzunk az eredeti e egyenesre, mely kitűzi a 6,8m magasságú pontját.

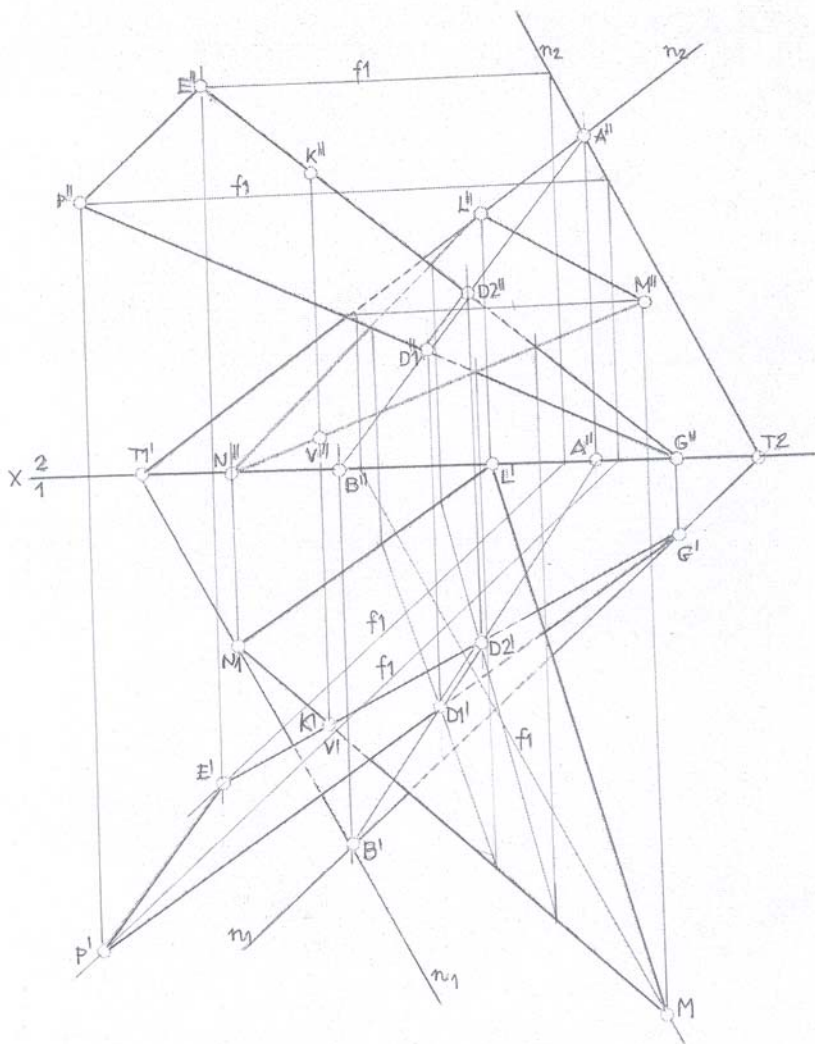
c/2. Adott: egy másik megoldás, ha tudjuk, hogy keresett **B** pont magassága **5,3m**. Ez a magasság az 5 és 6 m magassági pontok közé esik.

Szerkesztendő: az e' egyenesen lévő **5,3m** magasságú pont.



4.2. EGYENESSEL ÉS SÍKKAL KAPCSOLATOS MÉRŐSZÁMOS SZERKESZTÉSEK.

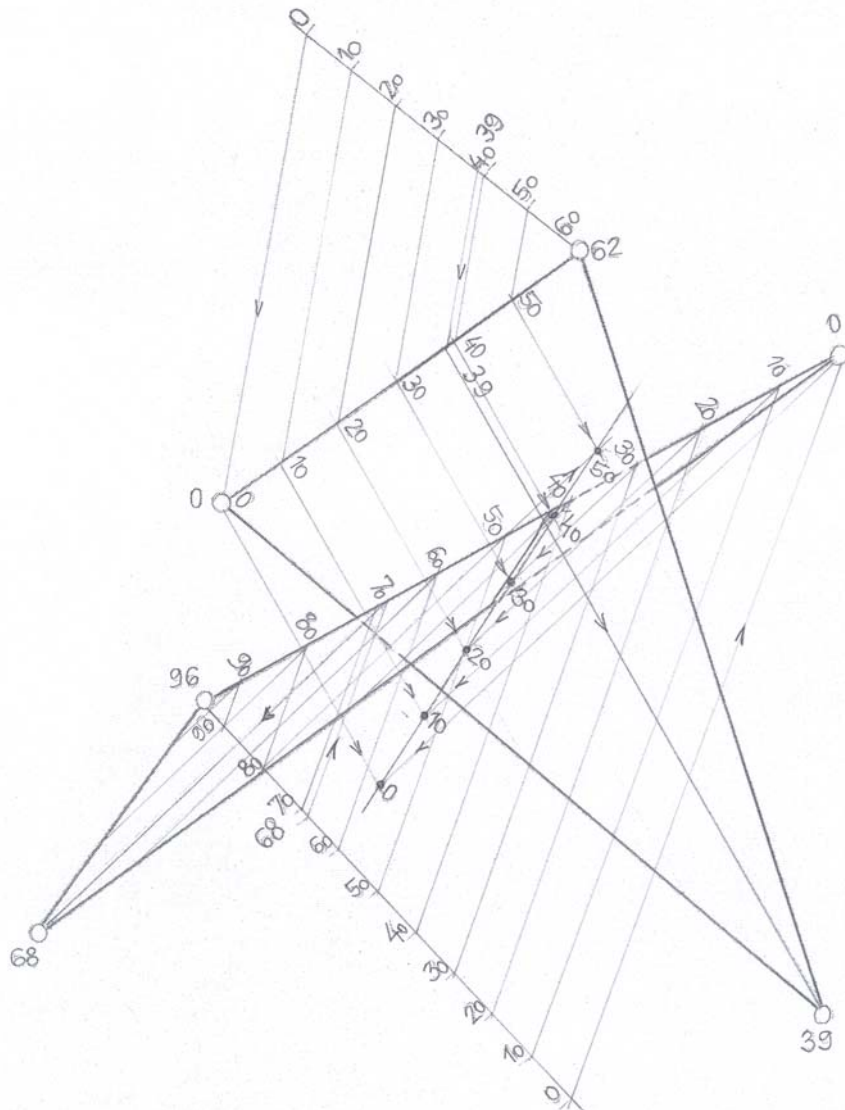
A következő ábra már ismerős, két sík metszésvonalának szerkesztése. Más megfogalmazásban a két sík közös pontjainak szerkesztése. Az ábra a szokásos két képsíkos rendszerben történő szerkesztést mutatja.



2/1. Nézzük meg, hogy mérőszámós ábrázolással hogyan tudjuk megoldani a feladatot.

A szerkesztés menete:

Mindkét háromszög (sík) esetében graduálni kell a legmagasabb és legalacsonyabb pontok közé eső oldalakat. Az egész számú osztásokra szintvonalakat rajzolunk. Az azonos magasságú szintvonalak metszik egymást. A metszéspontok összekötésével megkapjuk a két síkidom közös egyenesét. Így rajzoljuk meg a metsződő sík terepfelületek metszévonalát.

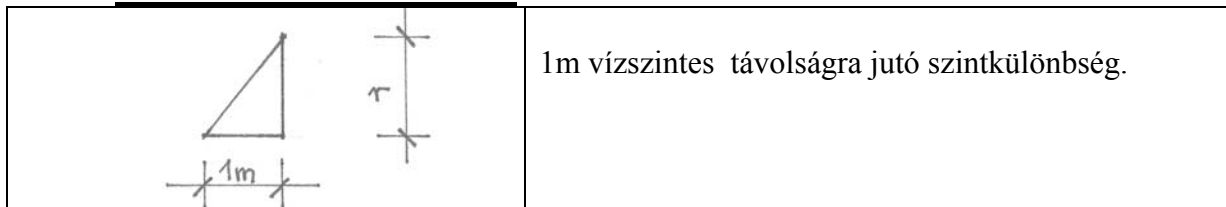


2/2. Rézsűszerkesztés vízszintes tengelyű úthoz.

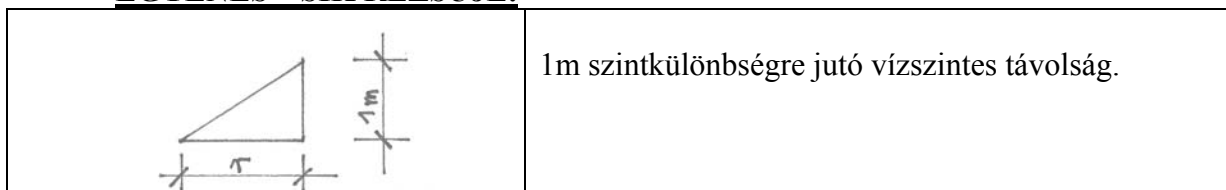
Adott egy terepfelület nyerstérképe. Erre a rétegvonalas térképre, a lejtős terepfelületen egy műút nyomvonalát került kitézésre. Adott az útfelület szélessége: 8m, és az útfelület tengerszint feletti magassága: 115m. A rajz sarkában található a lépték. Az út nyomvonalát vízszintes, a terep lejtős. Tehát az útfelület részben töltésen fekszik, részben bevágáson halad át. Az út és a terep közös szintje a 115m-es magasság, előtte az út szintje a terepszint felett van, itt feltöltést, utána a terep szintje van az út szintjétől magasabban, itt pedig bevágást kell kialakítani.

A bevágások és feltöltések felülete ferde sík. A rézsú dőlésszögét a műszaki gyakorlat nem fokokban, hanem olyan törttel fejezi ki, melynek a nevezője 4. A feltöltések rézsúja 6/4-es, a bevágásoké 4/4-es. Vagyis a felületek meredekségét a kialakított felületek dőlésszögének cotangensével fejezhetjük ki.

EGYENES – SÍK LEJTŐJE:



EGYENES – SÍK RÉZSÚJE:



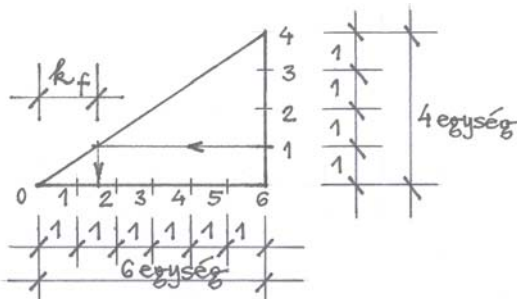
FELTÖLTÉS OSZTÓKÖZÉNEK SZÁMÍTÁSA, SZERKESZTÉSE:

$r = 6/4$ -es rézsú: ha $m = 1 : 100$

Léptékek megfelelően változó!

Számítás: osztóköz = $k_f = 6/4 * 1/100 = 0,015m = 15 \text{ mm}$ (=1 rajzi m)

Szerkesztés:



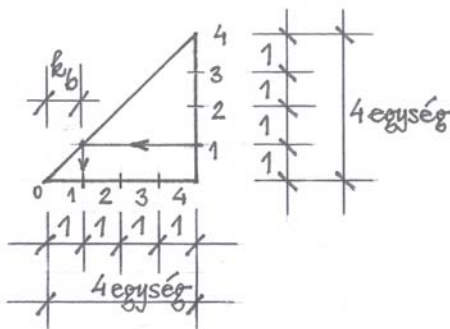
BEVÁGÁS OSZTÓKÖZÉNEK SZÁMÍTÁSA, SZERKESZTÉSE:

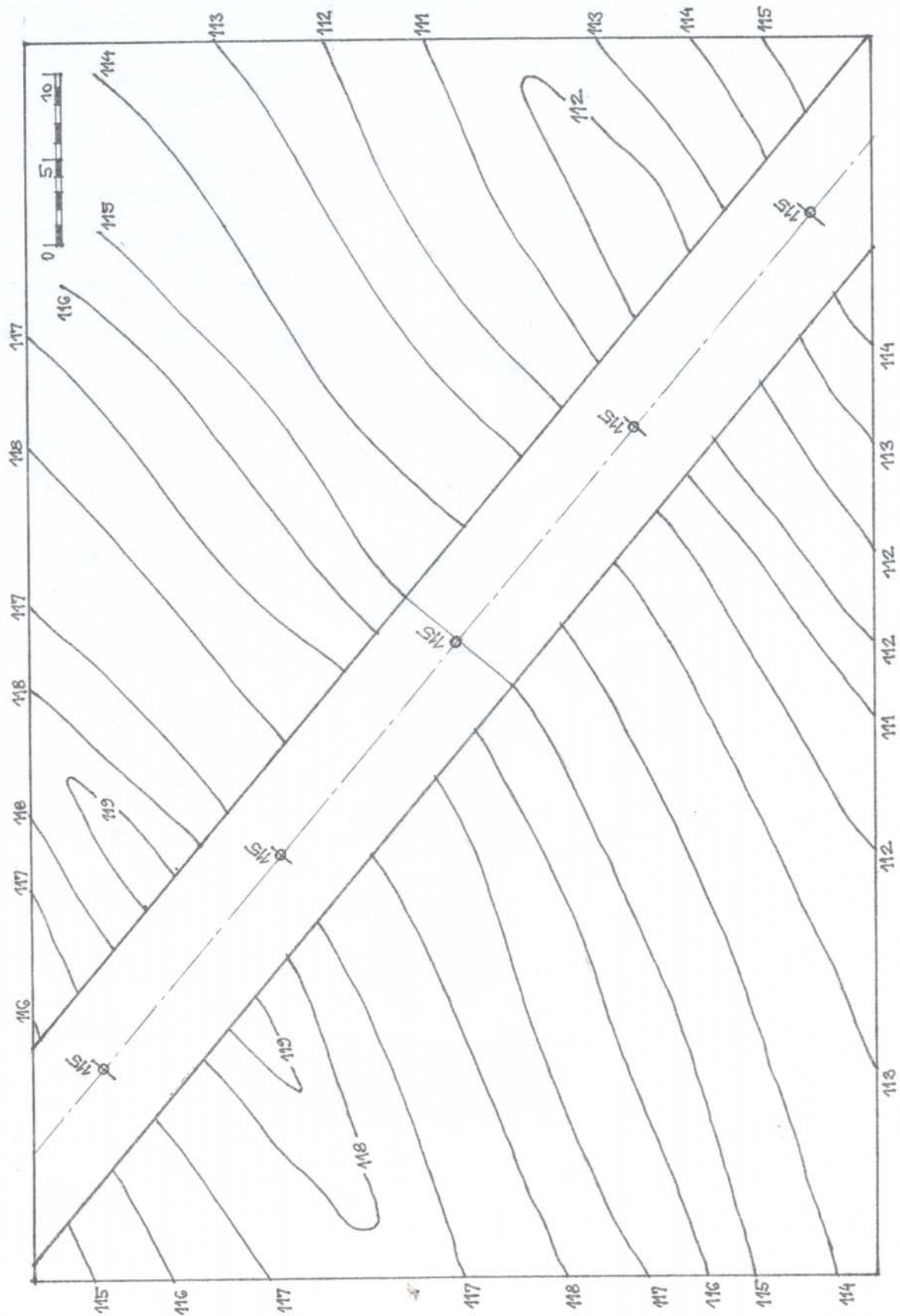
$r = 4/4$ -es rézsú: ha $m = 1 : 100$

Léptékek megfelelően változó!

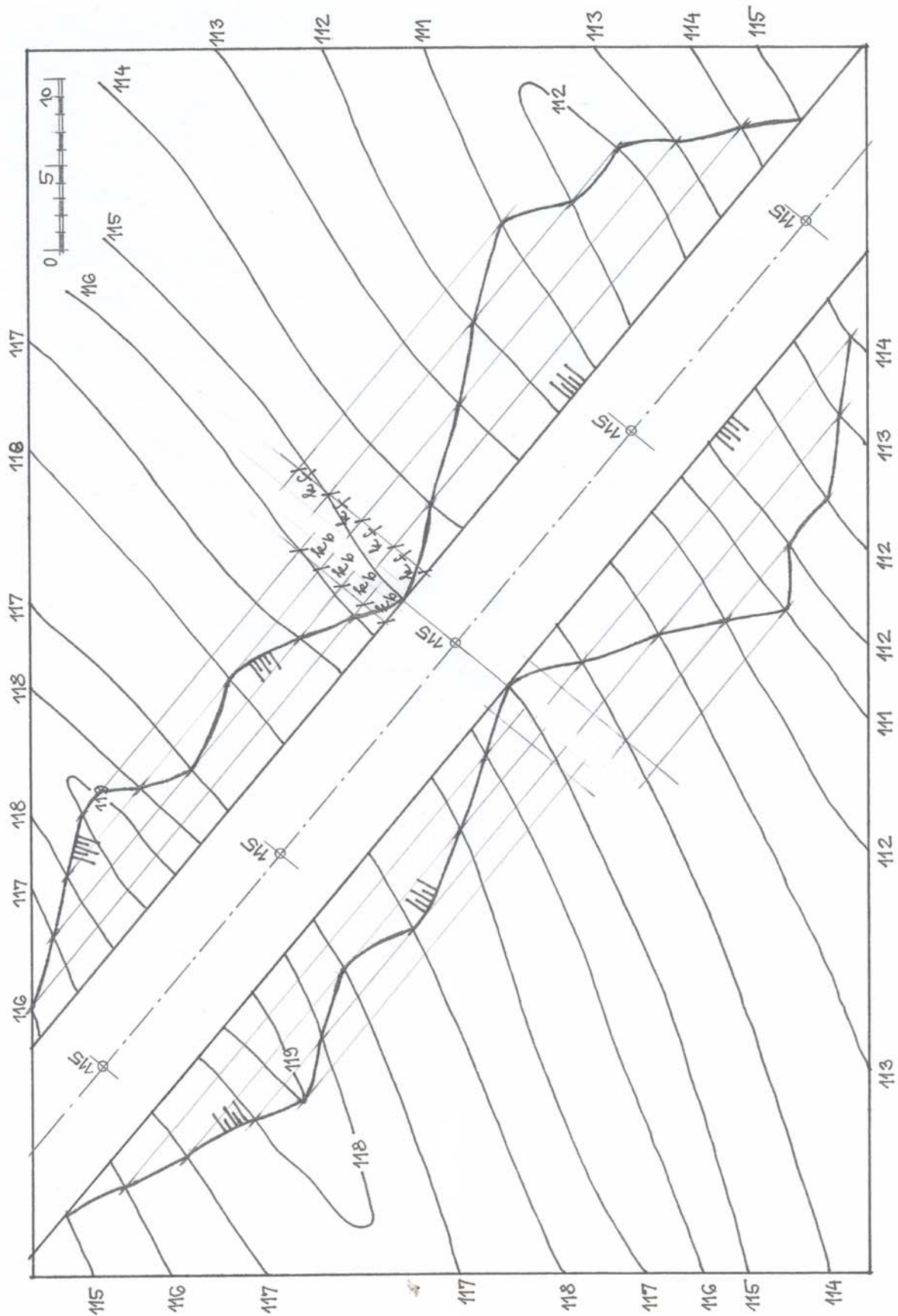
Számítás: osztóköz = $k_b = 4/4 * 1/100 = 0,01m = 10 \text{ mm}$ (=1 rajzi m)

Szerkesztés:





Rétegvonalas térkép és a műút nyomvonala



Feltöltés és bevágás felületeinek szerkesztése

2/3. Rézsűszerkesztés egyenletesen változó tengelyű úthoz.
(10m-ként 1m-t emelkedő úthoz)

Feltöltés:

$$r = 6/4\text{-es rézsű: ha } m = 1 : 100 \\ \text{osztóköz} = k_f = 6/4 * 1/100 = 0,015\text{m} = 15 \text{ mm } (=1 \text{ rajzi m})$$

Léptékek megfelelően változó!

Bevágás:

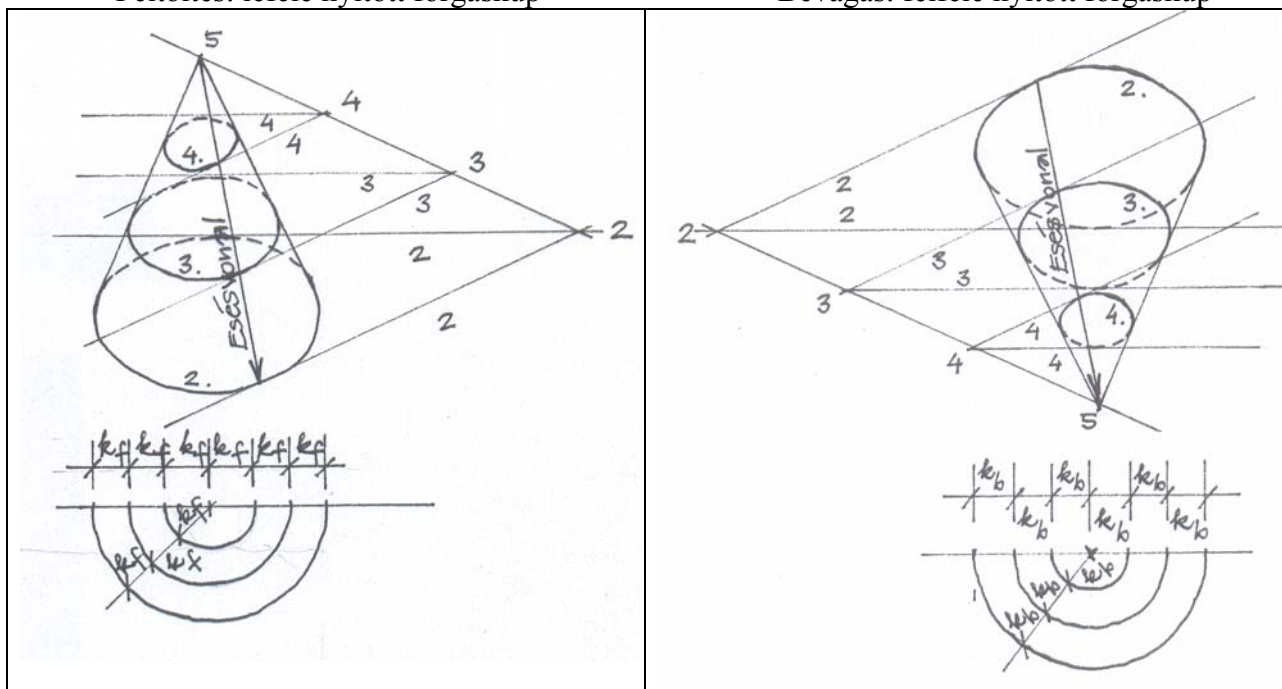
$$r = 4/4\text{-es rézsű: ha } m = 1 : 100 \\ \text{osztóköz} = k_b = 4/4 * 1/100 = 0,01\text{m} = 10 \text{ mm } (=1 \text{ rajzi m})$$

Léptékek megfelelően változó!

A szerkesztést forgáskúp segítségével végezzük.

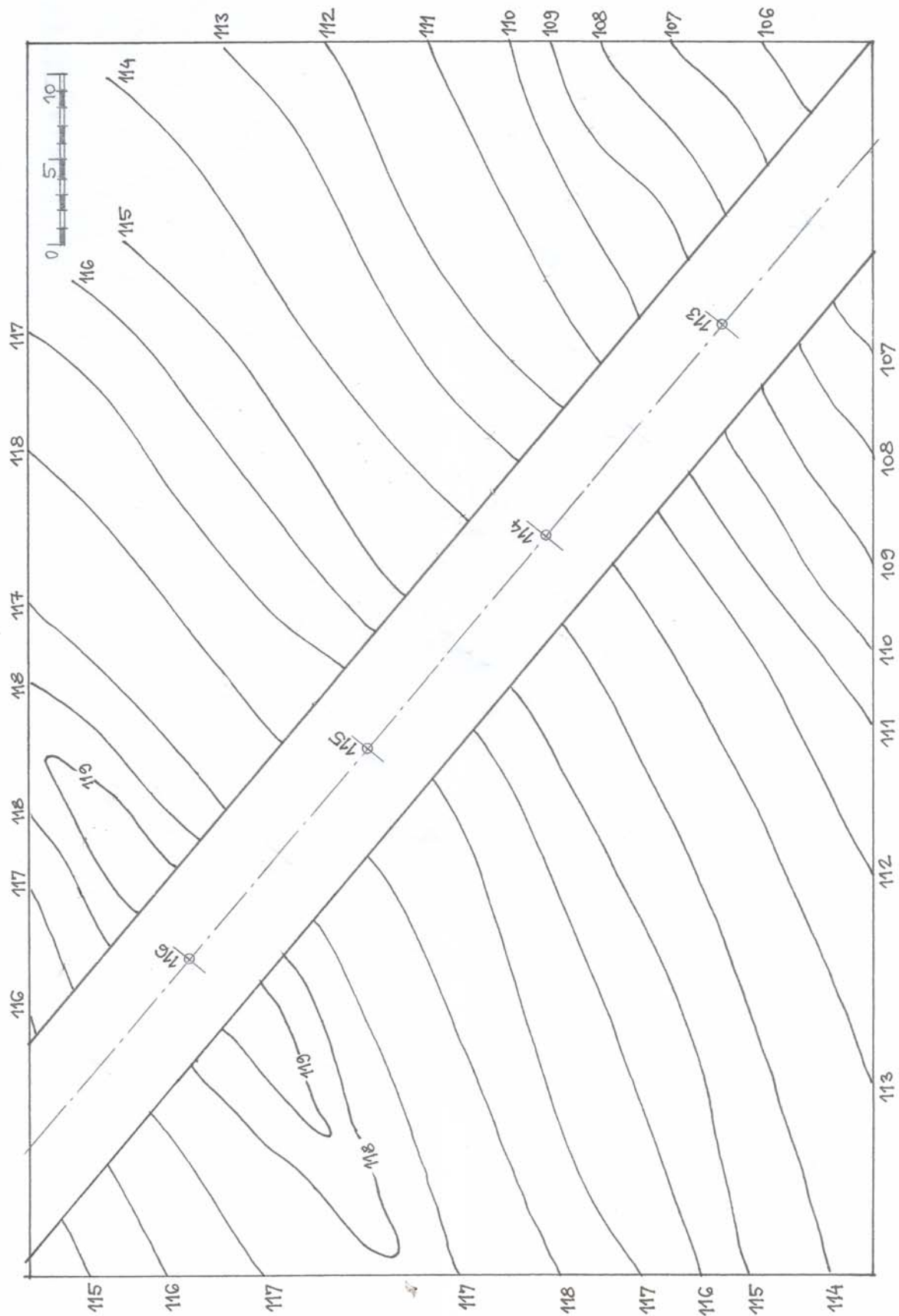
Feltöltés: lefele nyitott forgáskúp

Bevágás: felfele nyitott forgáskúp

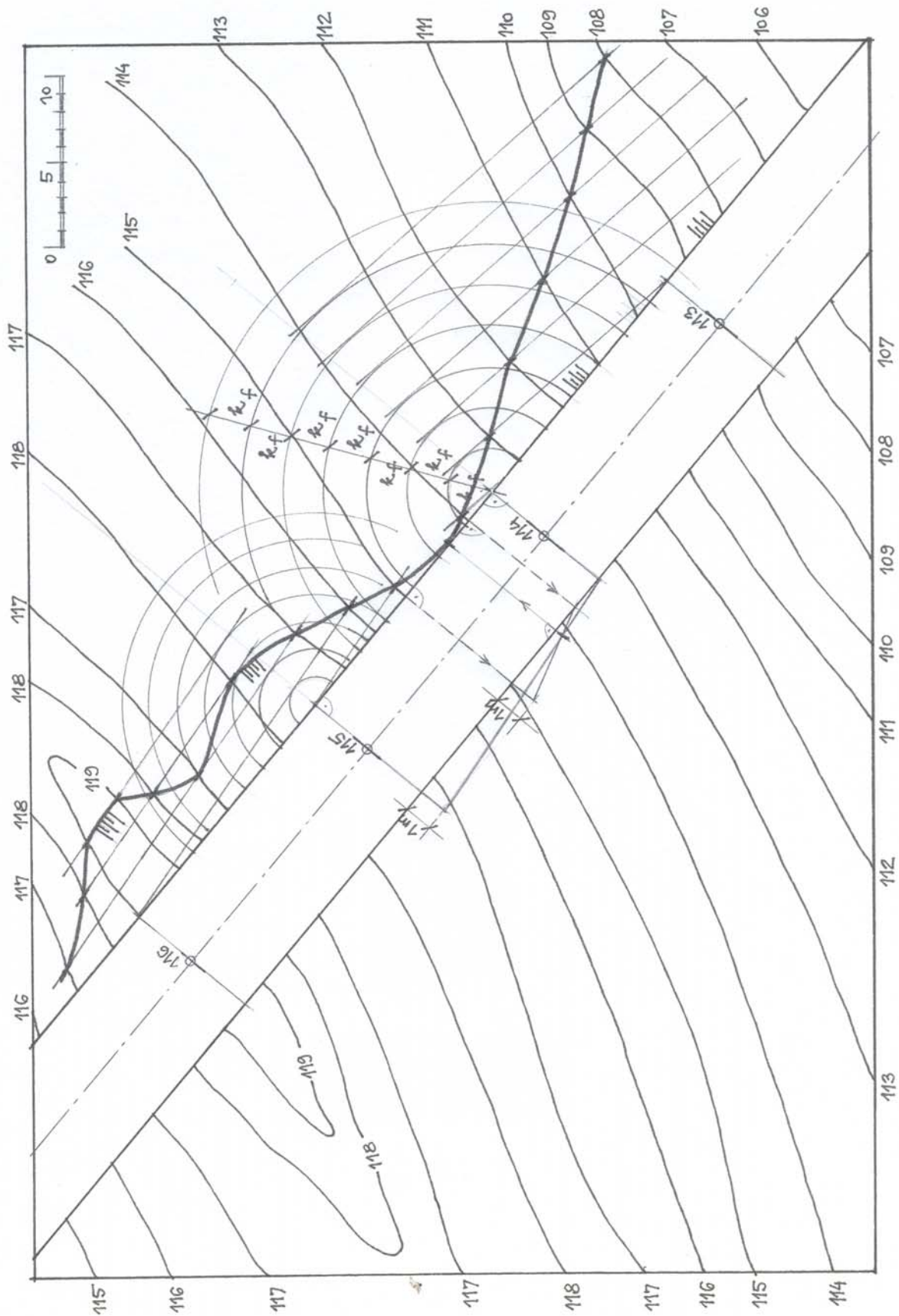


Szerkesztés menete:

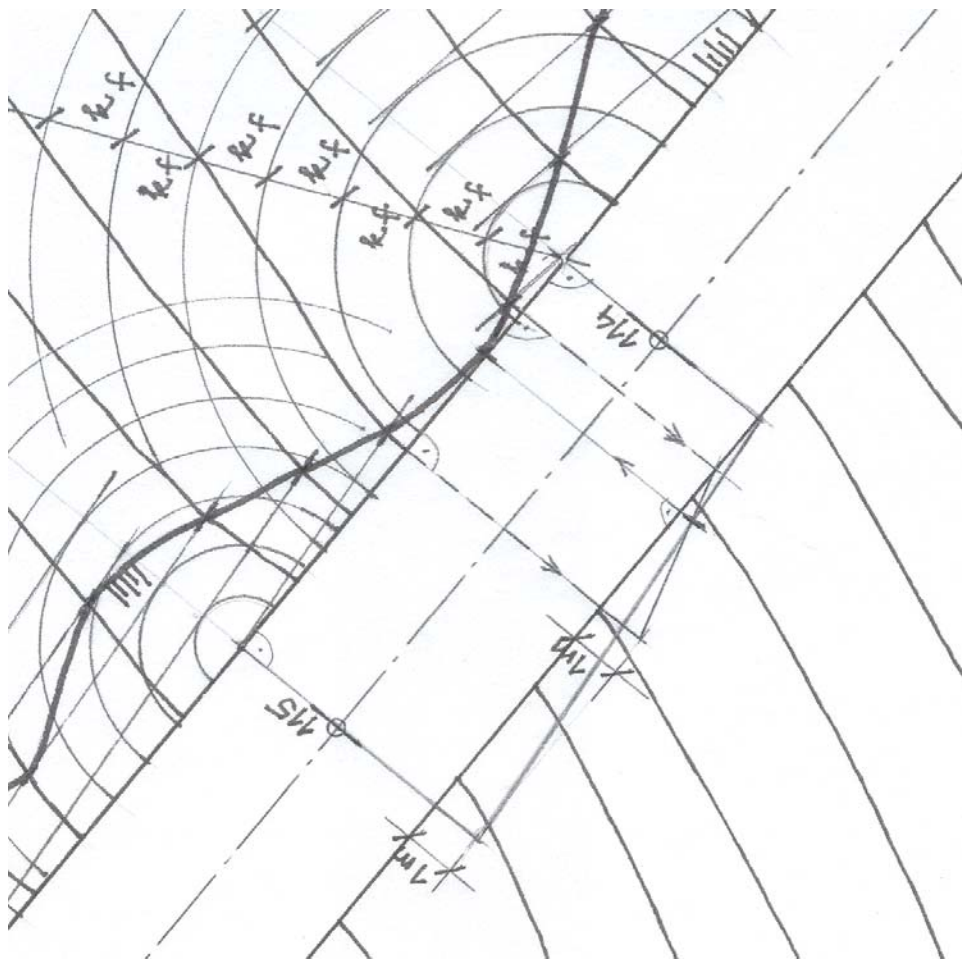
- *Feltöltés szerkesztése:* A lefele nyitott forgáskúp csúcsát az út 114m-es magassági pontjára illesztjük. A forgáskúpot vízszintes síkokkal elmetszve, felülnézetben koncentrikus körök nézetét kapjuk. A koncentrikus körök sugara mindig egy osztásközzel nagyobb lesz. Az első körrel a 113m-es magassági szintet határoztuk meg. Az út 113m magasságú pontjából ehhez a körhöz érintőt rajzolunk. Az érintő metszi a 113m magasságú rétegvonalat, ez a metszősík és a terep közös pontja. Ezt a lépést ismételjük míg az utolsó rétegvonalon is megkaptuk a közös pontot a metszősíkunkkal. (Koncentrikus körökhöz húzott érintők egymással párhuzamosak!). A kúp csúcsából, mint nullkörhöz is meghúzzunk az érintőt, ez kitézi a 114m-es terepvonalunk és metszősík közös pontját.
- *Bevágás szerkesztése:* A felfele nyitott forgáskúpot az út 115m-es magassági pontjára illesztjük. A szerkesztés megegyezik a feltöltésnél leírtakkal, csak az első körhöz az út 116m-es magasságú pontjából rajzoljuk a körhöz érintőt.



Rétegvonalas térkép és a múút nyomvonala



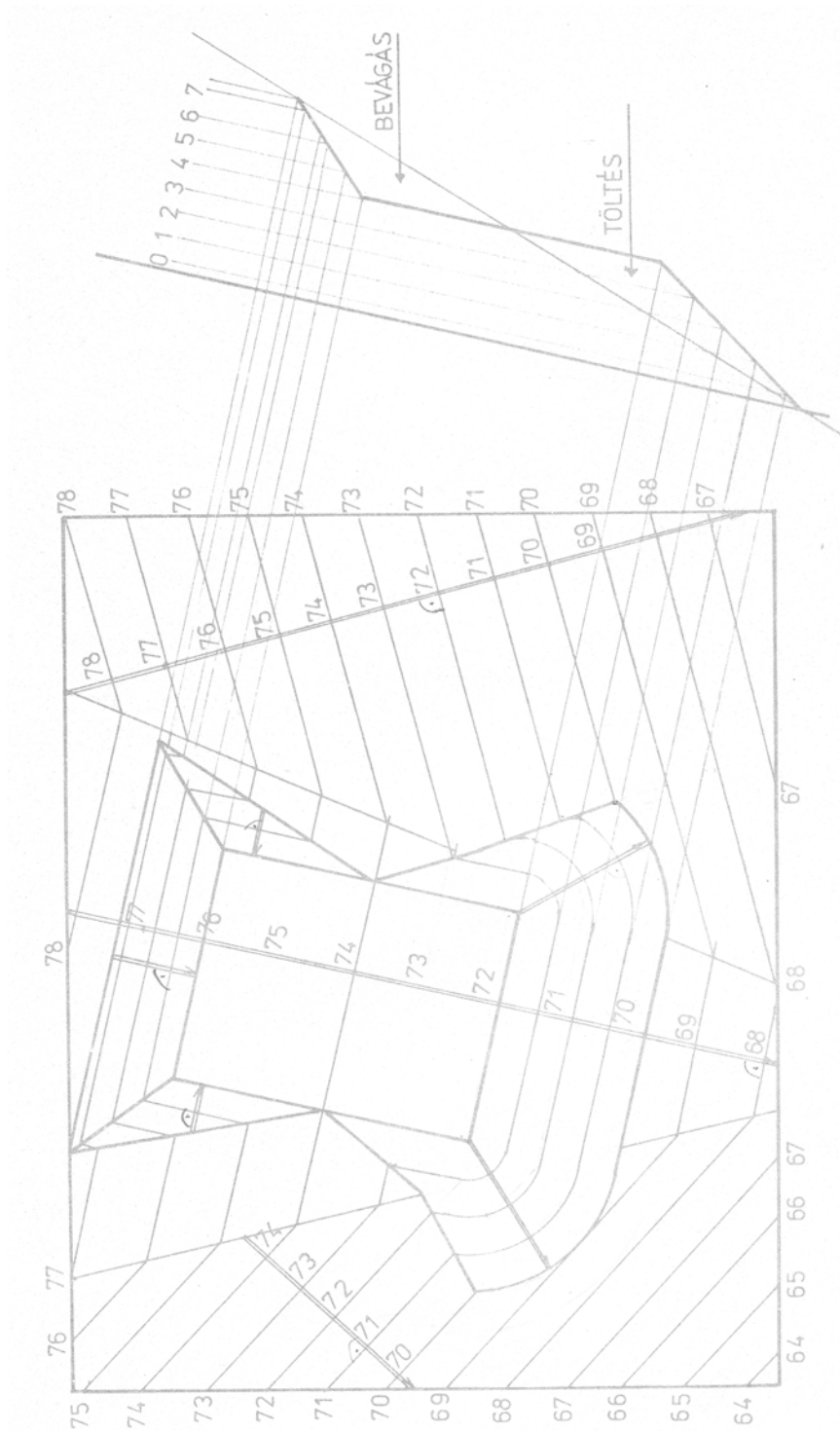
Feltöltés és bevágás felületeinek szerkesztése



- A 114m-es és a 115m-es terepvonalak között a terep és az út közös pontjának szerkesztése. Az út széle legyen a 114m-es szintsík. Az út a 114m és a 115m közötti 10m-en 1m-et emelkedik. Megszerkesztjük ennek az emelkedésnek az oldalnézetét (az út síkjának az élben látszó képet). A terep is a 114m-es és a 115m-es rétegvonalak között 1m-et emelkedik. Ennek az emelkedésnek is megrajzoljuk az oldalnézetét (a terep élben látszó képet). A két síkot egyenessé redukáltuk, a két egyenes metszéspontja az út és a terep közös pontja ezen a szakaszon.

2/4. Rézsűszerkesztés egy vízszintes téglalap alakú felülethez, platóhoz.

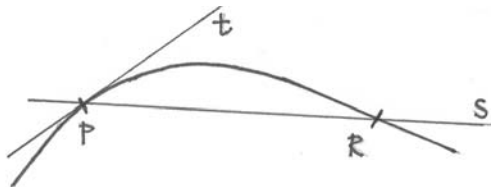
- A rajzon egy leegyszerűsített terepfelület látunk. Adva van három síkfelület graduált esésvonalakkal, az esésvonalakra merőlegesek a szintvonalak. A szintvonalak metsződésével kapjuk a síkok közötti metszésvonalakat. A valóságban ilyen terepfelület nincs. A három síkfelület megközelítően egy domboldalt ábrázol. A felületeket a metszésvonalak határolják. E dombfelületen kell földmunkával egy vízszintes, téglalap alakú felületet kialakítani.



10. heti előadás

5. GÖRBE VONALAK, KÖR VETÜLETE

A görbe vonal olyan egy dimenziós alakzat, hogy a rajta mozgó pontnak bármely kettő, közvetlenül egymás melletti helyzetében a mozgásiránya különböző. Egy görbe két pontjának pl. P és R összekötő egyenese a *szelő*.



Ha egy görbe minden pontja ugyanarra a síkra illeszkedik, akkor *síkgörbéről*, ezen feltétel hiánya esetén *térgörbéről* beszélünk.

5.1. Kör ábrázolása, vetülete:

A kör *síkgörbe*. Minden pontja és érintője egy síkban van a görbe síkjában. Ezért a kör pontjainak és érintőinek képeit is megszerkeszthetjük úgy, hogy a kör síkját lefordítjuk, a lefordításban megrajzoljuk a kört, a pontjait és érintőit onnan visszafordítjuk.

A kört a térben három jellemzője határozza meg:

- síkja
- középpontja
- sugara.

A kör *vetülete ellipszis*. A kör középpontjának vetülete a képellipszis középpontja, a kör pontjainak vetületei a képellipszis pontjai, a kör átmérőinek vetületei a képellipszis átmérői lesznek.

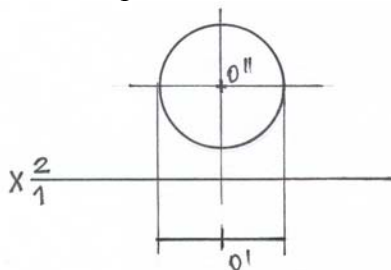
Általános helyzetű síkban fekvő kör átmérői a képsíkhöz különböző szögben hajolnak, vetületben különböző mértékben rövidülnek. Ha van egy olyan átmérő, amely valamelyik képsíkkal párhuzamos, ez azon vetületben nem rövidül, a vetületátmérők közül a leghosszabb lesz. Ez az átmérővetület lesz az *ellipszis nagytengelye*. Az erre merőleges átmérő rövidül a legnagyobb mértékben, ez lesz az *ellipszis kistengelye*.

Elsősorban a tengelyek megszerkesztésére törekszünk, mert a tengelyek ismeretében síkmértani módszerrel az ellipszispontok sokaságát szerkeszthetjük meg.

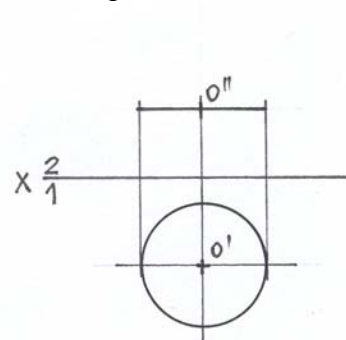
a.) Képsíkkal párhuzamos síkú kör ábrázolása:

Ebben az esetben a legegyszerűbb az ábrázolás

II. ks.-kal párhuzamos a kör síkja



I. ks.-kal párhuzamos a kör síkja



Mindkét esetben azon a képsíkon, amelyikkel párhuzamos a síkja, az eredetivel azonos sugarú kör a vetülete. A másik vetülete egyenes szakasz lesz, melynek hossza a kör átmérőjével megegyező.

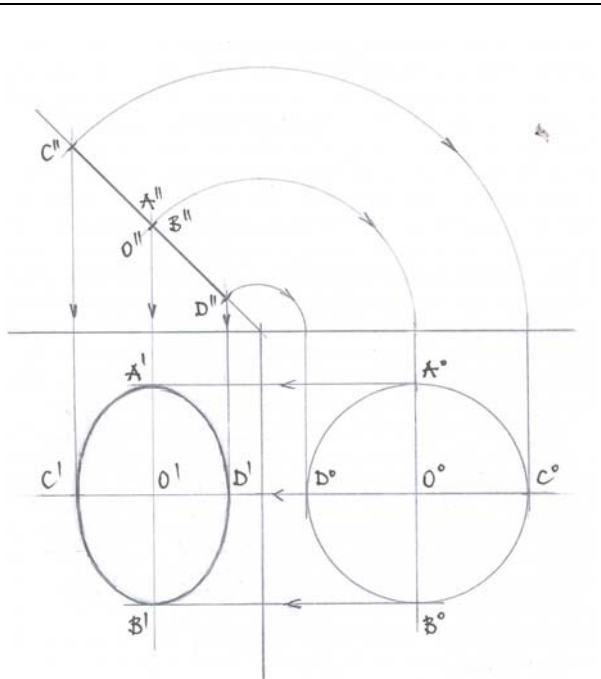
b.) Vetítésikban fekvő kör ábrázolása:

b/1. Forgatással szerkesztve.

Ez esetben is az egyik vetülete a körátmérő hosszúságú szakasz, a másik képe *ellipszis*. A kör középpontjának vetülete a képellipszis középpontja, a kör pontjainak vetületei a képellipszis pontjai. A kör átmérőinek vetületei a képellipszis átmérői lesznek.

Az ábrán egy a II. ks.-ra merőleges síkban fekvő kör képét szerkesztettük meg. A kör II. képe körátmérő hosszúságú egyenes szakasz. A kör középpontjának II. képe a szakaszt felezi. A kör egyikátmérője párhuzamos a II. ks.-kal, képe egybe esik a kör vetületének képével, a rá merőleges átmérő ennek következtében a II. ks.-ra merőleges egyenes lesz, melynek képe az O'' pont.

A II. ks.-ra merőleges síkot, a II. ks.-ra merőleges t egyenesét körül az I. képsíkkal párhuzamos helyzetbe fordítjuk. Az O pont lefordítottját az O'' -ből a t' forgástengelyre bocsátott merőlegesen találjuk meg. A forgástengelytől olyan messze van, amilyen messze a valóságban is van. Ezt a távolságot a második képen látjuk eredeti nagyságban. A forgatott képen megrajzoljuk a kört. A kör $A'B'$ átmérője párhuzamos a forgástengellyel, eredeti nagyságban látszik, az első képen a *képellipszis nagytengetyét* szerkesztettük meg. A $C'D'$ átmérő a forgástengelyre merőleges, a II. ks.-kal párhuzamos, ezért a II. képen valódi nagyságban látszik. Első ks.-ban hossza a vetületével azonos, így a $C'D'$ szakasz az I. ks.-ban a *képellipszis kistengelye* lesz.

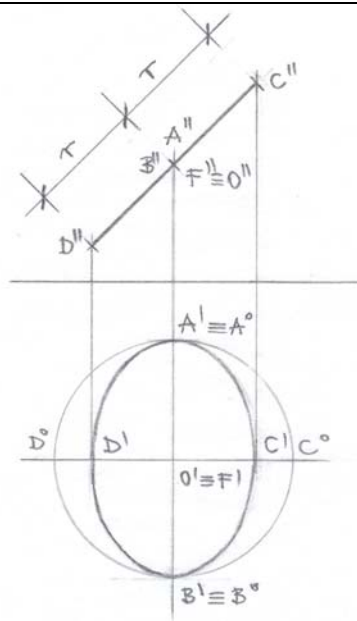


b/2. Forgatás nélkül szerkesztve.

Forgatás nélkül is megszerkeszthető a képellipszis kis-, és nagytengetye. Az ábrán ilyen szerkesztést láthatunk.

Forgatás segítségével a kör tetszőleges pontjainak vetületét, az ellipszispontokat is megszerkeszthetjük.

Elegendő azonban a kis-, és nagytengety ismerete, mert ezek ismeretében az ellipszispontokat síkmértani szerkesztéssel meghatározhatjuk.

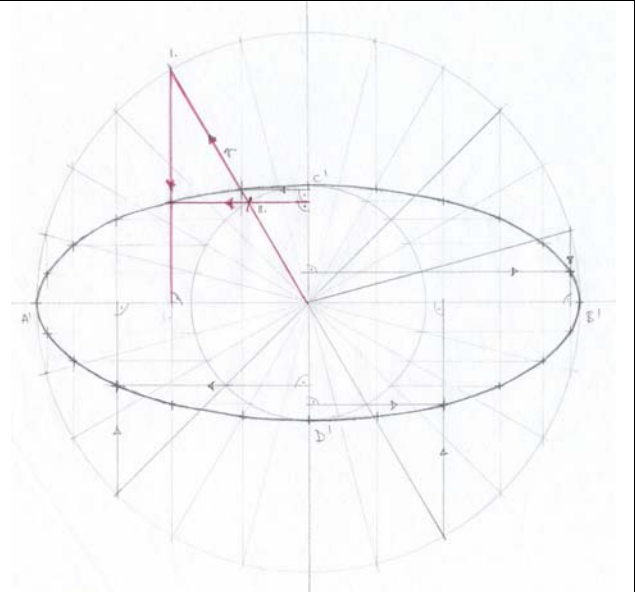


c.) Ellipszis szerkesztése.

A nagy- és a kistengely fölé, mint átmérők fölé rajzolt körök segítségével szerkesztünk ellipszispontokat.

A körben tetszőleges sugarakat rajzolunk, ez metszi a nagy és a kis kört. A nagykörrrel alkotott metszéspontokon át a nagytenyelyre, a kis körrrel alkotott metszéspontokon át a kistengelyre merőleges egyeneseket rajzolunk, ezek metszéspontjai az ellipszis pontjai. Ha ezeket összekötjük megkapjuk az ellipszist.

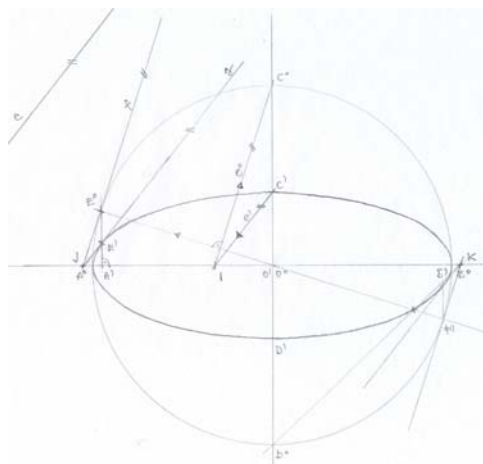
Minél több sugarat rajzolunk annál jobban kirajzolódik az ellipszis.

**c/1. Ellipszishez adott egyenessel párhuzamos érintők szerkesztése.**

Adott: az ellipszis kis-, és nagytenyelyével és egy általános helyzetű e egyenes.

Szerkesztés menete:

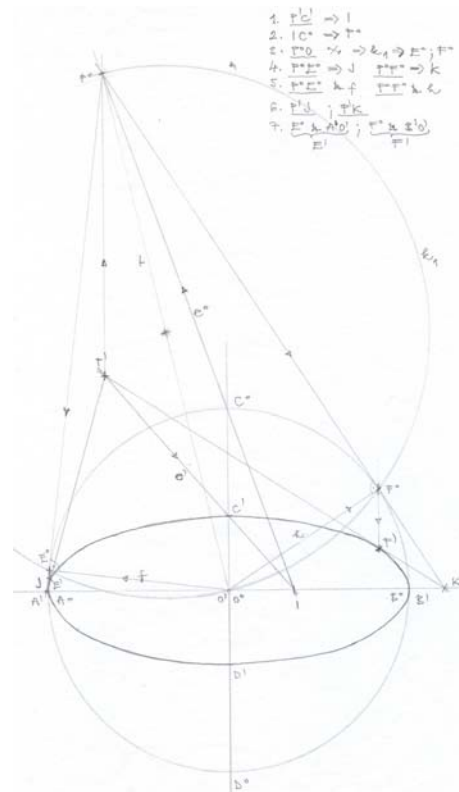
- A kistengely C' végpontján át rajzolunk az e egyenessel párhuzamos egyenest (i'). Ez az egyenes a forgástengelyt H' pontban metszi. Az egyenes forgatottja $H' \equiv H^0$ és a C^0 pontokat összekötő egyenes (i^0).
- Ezzel (i^0) az iránnyal párhuzamosan megszerkesztjük a körérintőket, és visszaforgatjuk.
- Az i^0 -al párhuzamosan megszerkesztett érintő metszi a forgástengelyt H_1' és H_2' pontokban.
- A $H_1'T_1'$ és $H_2'T_2'$ pontok által meghatározott egyenesek az ellipszishez húzott érintők, melyek az adott e egyenessel párhuzamosak.

**c/2. Ellipszishez rajta kívül eső pontból érintők szerkesztése.**

Adott: az ellipszis kis-, és nagytenyelyével és a P pont képe.

Szerkesztés menete:

- A kistengely C' pontjának megszerkesztjük a forgatott képét C^0 ($A'O'$ sugarú körív).
- P' pontot összekötjük a C' ponttal. Az összekötő egyenes H' pontban metszi a forgástengelyt, forgatott képe a $H' \equiv H^0$ és a C^0 pont összekötése adja. Ezen az egyenesen lesz a P^0 pont.
- A P^0 pontból a körhöz húzott két érintő t_1^0 és t_2^0 kimetszi a forgástengelyen a H_1 és a H_2 pontokat.
- A $H_1' P'$ illetve a $H_2' P'$ egyenes lesz az adott ellipszishez a P' pontból húzott két érintő képe.



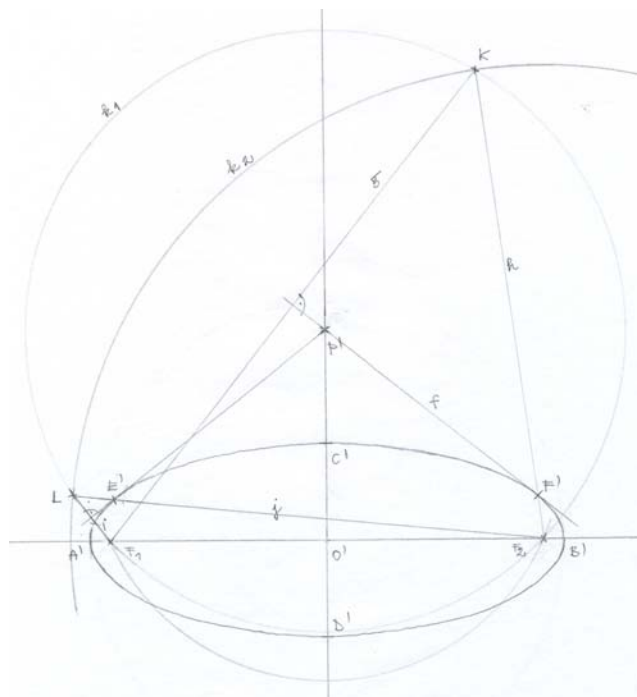
c/3. Ellipszishez kistengelyén lévő pontból érintők szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytengelyével és a P pont képe.

Szerkesztés menete:

- $A'O' \equiv B'O'$ sugárral a kistengely C' pontjából körívet rajzolunk, ez metszi az $A'B'$ ellipszis nagytengelyét F_1 és F_2 pontokban.
- A $P'F_1 \equiv P'F_2$ sugárral (k_1 körív) a P' pontból szintén kört rajzolunk.
- F_2 pontból $A'B'$ sugárral rajzolt körív (k_2), metszi a k_1 kört L és K pontokban.
- A K pontot F_1 -gyel összekötve megkapjuk a g egyenest, K pontot F_2 -vel összekötve a h egyenest.
- Az L pont és F_1 összekötésével az i egyenest, az L és F_2 összekötésével a j egyenest kapjuk meg.

- A P' pontból merőlegest húzunk g egyenesre, illetve az i egyenesre. Ez a két merőleges metszi j egyenest E' , illetve a h egyenest F' pontokban. Ez a két pont E' és F' az ellipszis érintőpontjai, a két egyenes e' és f' pedig a P' pontból az ellipszishez húzott érintők.

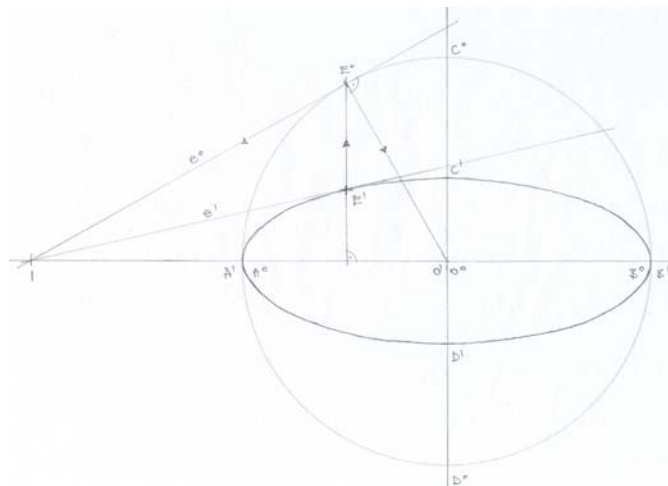


c/4. Ellipszis adott pontjához érintő szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytengelyével és a E' pont képe.

Szerkesztés menete:

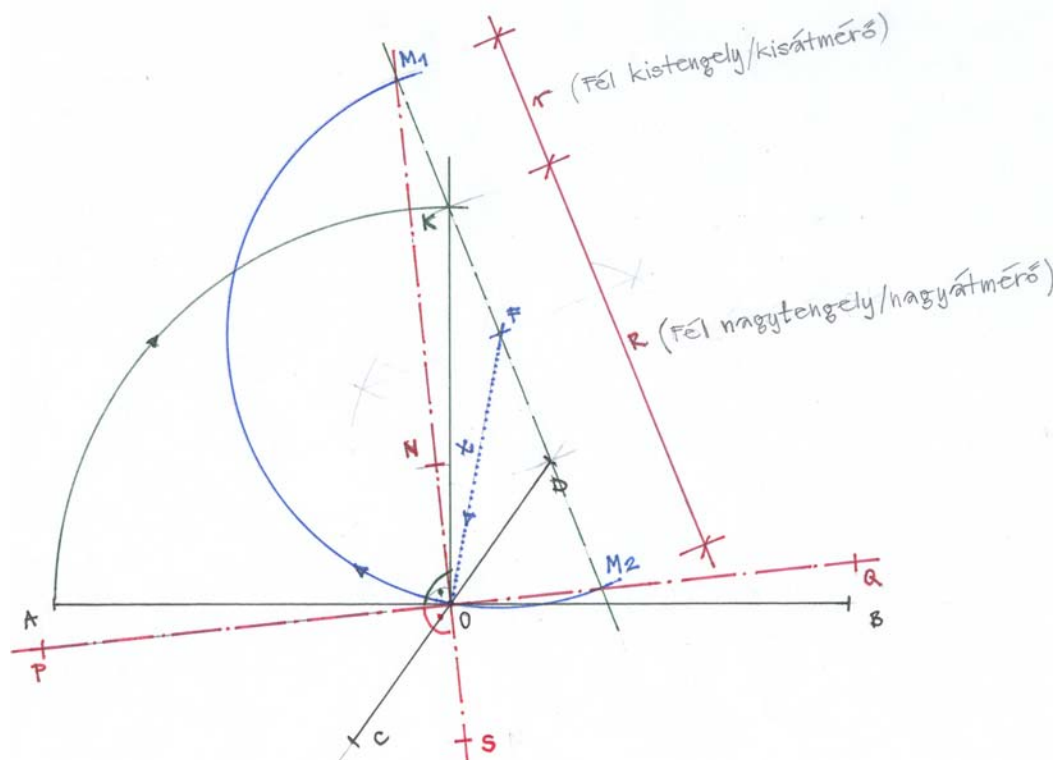
- Megszerkesztjük E' forgatott képét E^0 -t.
- E^0 és O pontokat összekötjük, erre az egyenesre merőlegest rajzolunk az E^0 ponton keresztül (körhöz húzott érintő), ez a merőleges egyenes e^0 az érintő forgatott képe. Ez metszi az ellipszis nagytengelyének egyenesét H^0 pontban.
- $H^0 \equiv H'$ ponttal, összekötve az E' ellipszisponttal, megkapjuk az adott E' ponthoz húzott érintő e' egyenesét.



c/5. *Kapcsolt átmérők alapján az ellipszis egymásra merőleges kis-, és nagytengelyének szerkesztése. Rytz-féle szerkesztéssel.*

Szerkesztéseink során nem mindig az egymásra merőleges két tengelyt, kis-, és nagytengelyt, kapjuk meg az ellipszis vetületein. A kör két merőleges átmérőjének vetületét úgynevezett „kapcsolt átmérőinek” nevezzük, ezek az átmérők az ellipszis különleges átmérői. A kapcsolt átmérők végpontjaihoz húzott érintők egy, a kör köré rajzolt négyzetet alkotnak. Ez a négyszög a kör érintőnégyzetének vetülete: paralelogramma, a két átmérő a paralelogramma két középvonala.

Adott: az ellipszis kapcsolt átmérői **AB** és **CD**.



Szerkesztés menete:

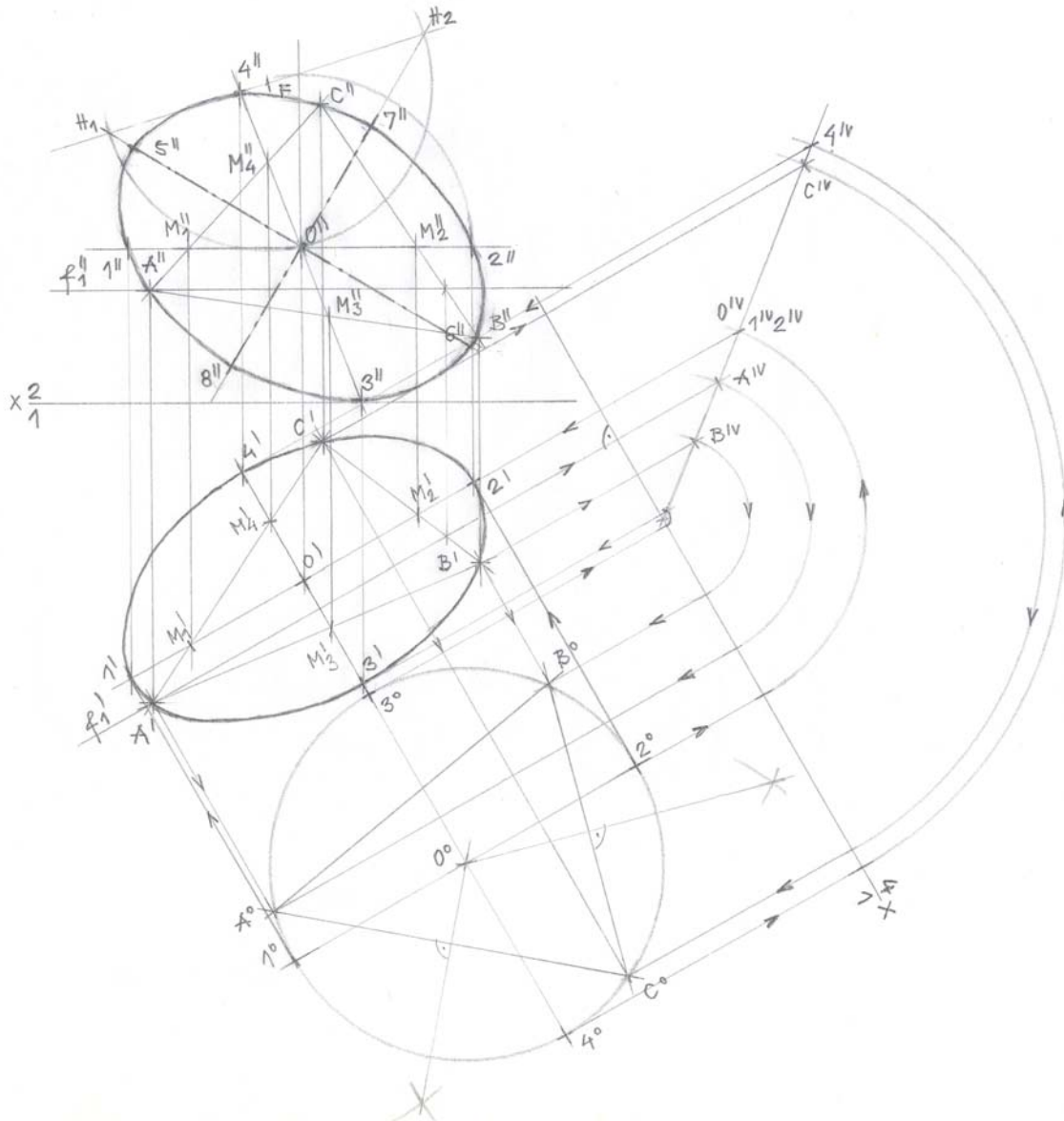
- Az egyik átmérőt, a nagytengely végpontját A' -t 90° -kal elforgatjuk, **K** pont szerkesztése.
- Az **K** pontot (A forgatott képét) összekötjük a másik tengely, a kistengely, végpontjával D' -vel. Szerkesszük meg az **KD'** szakasz felezőpontját **F**-et.
- **FO** (t) sugárral körívet rajzolunk. Ez a körív metszi az **KD'** egyenest **M₁** és **M₂** pontokban.
- **M₁** és **M₂** pontokat összekötve az **O** ponttal, a kapott egyenesek merőlegesek egymásra, és ezek az egyenesek az ellipszis kis-, és nagytengelyeinek egyenesei.
- Az **M₁** és **M₂** szakaszt a **D'**, **F** és **K** pontok négy részre osztják. Az **M₁K** szakasz egyenlő az **M₂D'** szakasszal, ennek a szakasznak a hossza a fél kistengely hosszát határozza meg. Az **M₁D'** szakasz egyenlő az **M₂K** szakasszal, ennek a hossza a fél nagytengely hosszát határozza meg.
- Ezeket a hosszakat rámérve a két, egymásra merőleges tengelyre, megkapjuk a keresett ellipszis kis-, és nagytengelyének hosszát.

A fenti szerkesztések, tételek helyességének bizonyítása más tankönyvekben megtalálható.

d.) Általános síkban fekvő kör ábrázolása:

Adott: három pontjával az általános sík.

Szerkesztendő: a háromszög köré írható kör I., II. ks.-beli nézete.



Szerkesztés menete:

- Megszerkesztjük a három pontjával adott sík élben látszó képét f_1 főegyenessel, forgatással a háromszög valódi méretét (A^0 ; B^0 ; C^0). Megrajzoljuk a háromszög köré írható kört, az oldalfelezők megadják a kör középpontját (O^0). Megrajzoljuk a főegyenessel párhuzamos és a rá merőleges két tengelyt (1^0 ; 2^0 ; 3^0 ; 4^0).
- Visszaforgatással I. ks.-ban megszerkesztjük az ellipszis két tengelyét (1^1 ; 2^1 ; 3^1 ; 4^1) és középpontját (O^1). Megszerkesztjük az ellipszist.
- Vetítéssel a II. ks.-ban is megszerkesztjük az ellipszis két tengelyét (1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2) és középpontját (O^2). A szerkesztés menete leolvasható az ábráról. Itt kapcsolt átmérőként megszerkesztjük az egymásra merőleges kis-, és nagytengelyt, majd itt is megszerkesztjük az ellipszist.

11. heti előadás

5.2. GÖRBEFELÜLETEK, FORGÁSTESTEK

A görbe felületeket is elsősorban meghatározó adataik vetületeivel ábrázoljuk. A meghatározó adatok mellett ábrázoljuk a felület csúcsait, éleit és minden esetben a felület képét határoló vonalat, a felület vetületének körvonalát, más szóval képhatárát.

Ha egy tetszés szerinti síkidomot valamilyen síkbeli vonal határol, ez a vonal lehet görbe vonal (kör), lehet egyenes szakaszok összessége (sokszög), de lehet egyenes szakaszok és görbe ívek együttese (körcikk), **képhatárnak** nevezzük. A körvonal pontokat a képsíkra merőleges vetítő egyenesek jelölik ki a képsík felületén.

5.2.1. EGYENESVONALÚ FELÜLETEK:

A görbe felületeket igen sokféle szempont szerint osztályozhatjuk. Az osztályozás alapja lehet a leírógörbe alakja, vagy a mozgás milyensége.

Az **egyenesvonalú felületek**, melyeket egyenes ír le, az alak szerinti osztályozás nagy csoportját képezik. Az egyenesvonalú felületek bármely pontján át legalább egy felületi egyenes fektethető, ezek az egyenesek a felület **alkotói**.

Az egyenesvonalú felület síkba teríthető, ha ugyanazon alkotójának más-más pontjához a felület ugyanazon érintősíkja tartozik. Ellenkező esetben az egyenesvonalú felület torz felület.

Az egyenesvonalú felületek közül csak a kúp-, és a henger felületekkel foglalkozunk.

5.2.1.1. KÚPFELÜLETEK

Ha egy félegyenes kezdőpontját rögzítjük, és a félegyeneset olyan tetszőleges síkgörbe mentén mozgatjuk, melynek síkja a félegyenes kezdőpontjára nem illeszkedik, **végtelen kúpfelületet** kapunk. Ha ezt a síkgörbe síkjával elmetszük, akkor **kúpfelületet** kapunk. A síkgörbe a kúp vezérgörbéje, az általa határolt síkidom a kúp **vezérgörbéje**, az általa határolt síkidom a kúp **alapja**. A félegyenes kezdőpontja a kúp **csúcspontja**. A felület félegyeneseseinek a csúcspont és a vezérgörbe közé eső szakaszai a kúp alkotói.

Ha a kúpfelület vezérgörbéje kör, **körkúpot** kapunk. A vezérgörbe síkjának középpontjába emelt merőleges a kúp csúcspontján megy át, egyenes körkúpról beszélünk. Egyenes körkúp forgatással is származtatható, részletese a forgáskúp tárgyalásánál.

Ha a vezérgörbe kör, de a kúp csúcspontja és a kör középpontját összekötő középvonal nincs rajta a kör középpontjában a síkjára állított merőleges egyenesen, és nincs benne a kör síkjában, **ferde körkúpról** beszélünk. A ferde körkúp nem forgásfelület (forgatással nem állítható elő), hanem vonalfelület.

a.) Egyenes körkúp felületén fekvő pont, érintősík és normális ábrázolása

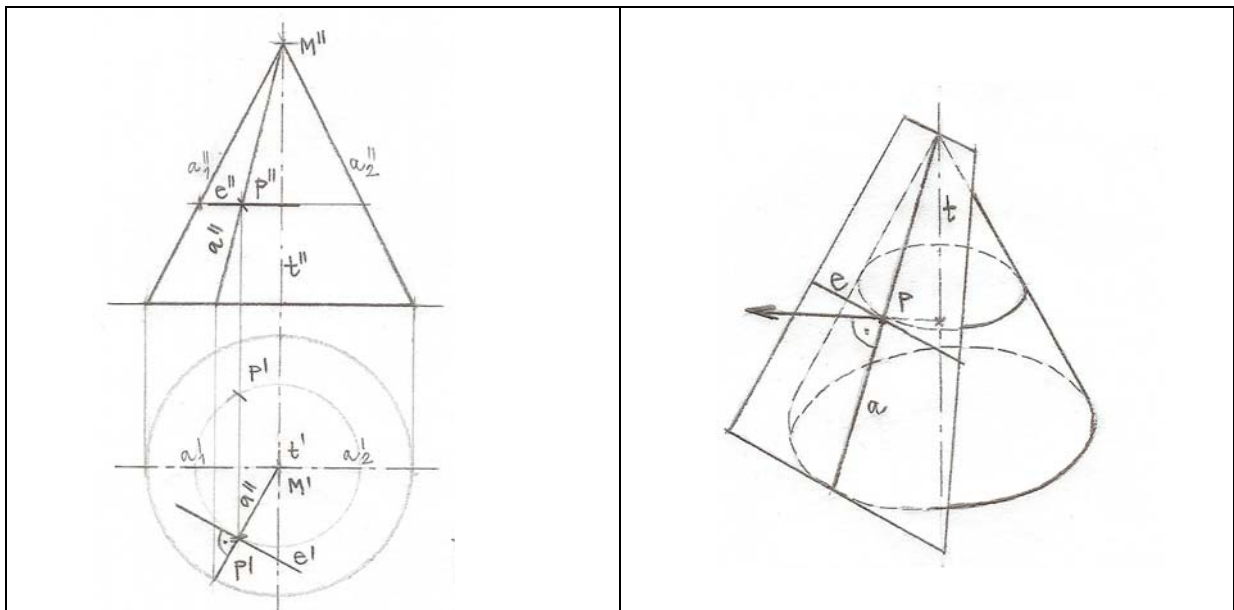
a/1. Kúpfelületen fekvő pont.

Ha kúpfelületen fekvő pontot akarunk ábrázolni, csak az egyik képét vehetjük fel szabadon.

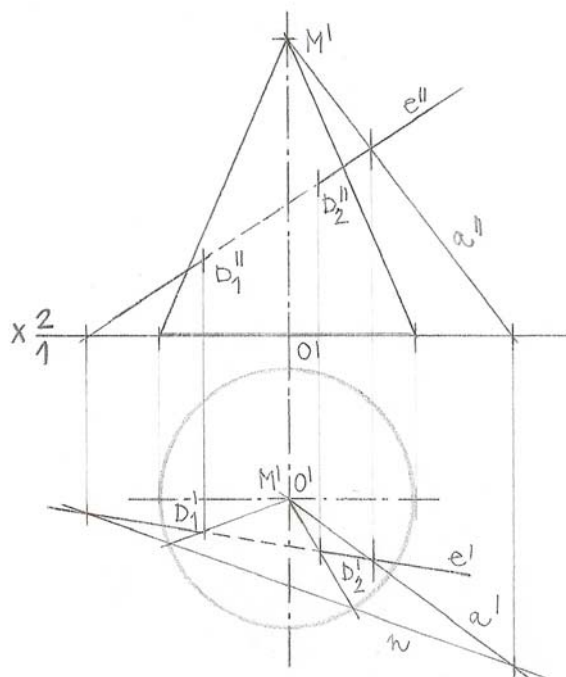
Pl.: A kúp **P** pontjának második képét vettük fel. Megrajzoljuk a kúp pályagörbéjének második képét, ez a **t''** tengelyre merőleges egyenes szakasz. A pályagörbe első képe kör, sugarát a második képen mérhetjük le. Megrajzoljuk a kör első képét és a **P** pontot rendezővel kijelöljük rajta. A kör első képét a rendező két pontban metszi, tehát a kúpnek két olyan pontja van, amelynek második képe az adott **P''** pont. Az egyik a kúp felénk eső oldalán a másik a kúp hátsó oldalán van.

a/2. Kúpfelülethez érintősík szerkesztése.

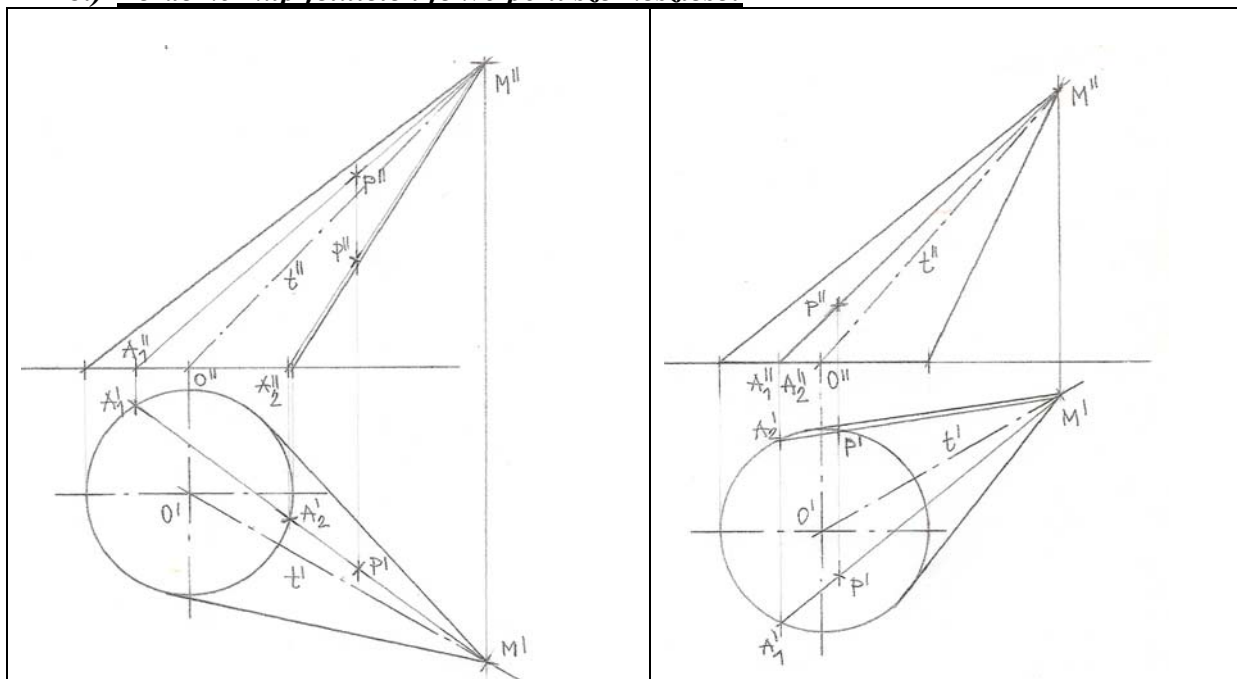
Szerkesszünk a kúphoz az adott P pontban érintősíkot. Az érintősíkot a P ponton áthaladó leírógörbe érintője és a P pont pályagörbéjének érintője határozza meg. A P ponton átmenő leírógörbe egyenes, az egyenes érintője önmagának. Tehát az érintősík egyik egyenese a kúpnak a P ponton átmenő alkotója. Az érintősíkot meghatározó másik egyenes a P pont pályagörbéjének P pontbeli érintője. A kúp P ponthoz tartozó érintősíkja a P ponton áthaladó alkotó mentén végig érinti a kúpot. A kúpot minden érintősíkja egy alkotó mentén érinti. Az ábrán megrajzoltuk a P ponthoz tartozó felületi merőleget, illetve a sík normálisát is.

**a/3. Kúpfelület és egyenes metszéspontjainak szerkesztése:**

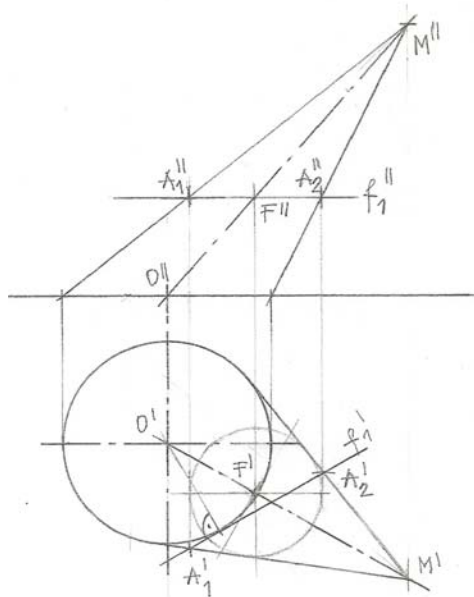
A szerkesztéshez olyan segédsíkot használunk, amely átmegy az egyenesen és a kúp csúspontjára is illeszkedik. Ez a sík a felületet két alkotóban metszi, melyeknek az egyenessel közös pontjai a keresett dőféspontok. A feladat elvi megoldása a gúlánál bemutatott feladathoz hasonlóan történik.



b.) Ferde körkúp felületén fekvő pont szerkesztése:



b/1. Ferde körkúp és egyenes metszéspontjainak szerkesztése



5.2.1.2. HENGERFELÜLETEK

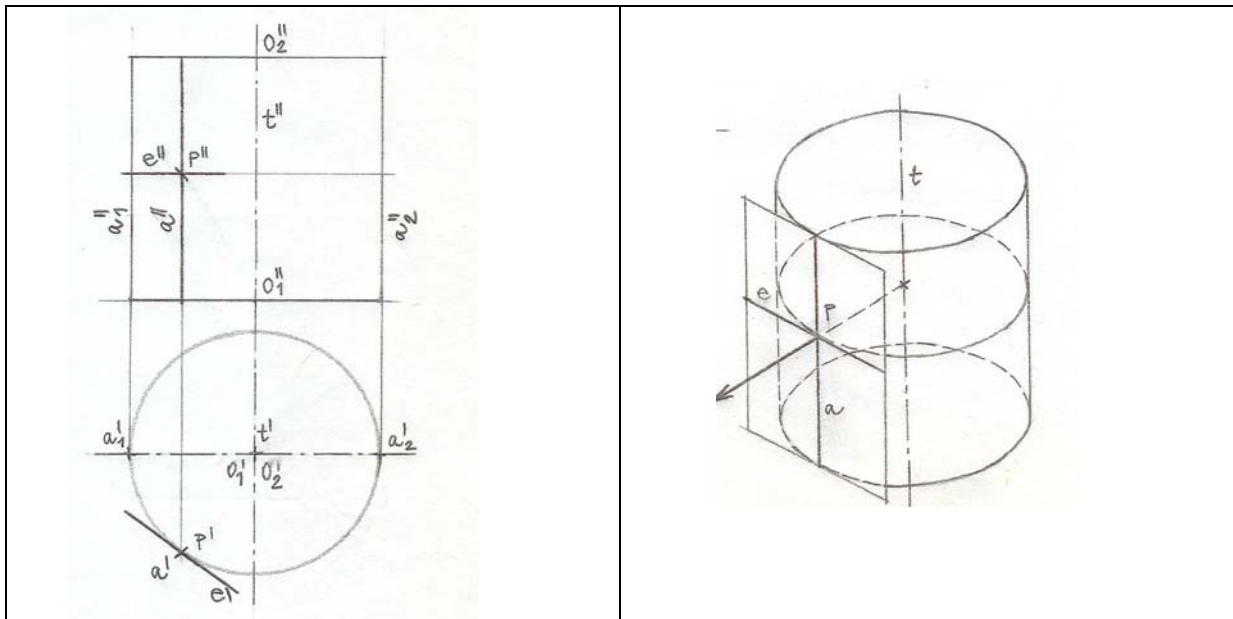
Ha egy egyenest úgy mozgatunk egy tetszőleges síkgörbe mentén, hogy mozgás közben mindig párhuzamos legyen egy, a síkgörbe síkjával nem párhuzamos egyenessel, **végtelen hengerfelületet** kapunk. Ezt a végtelen hengerfelületet elmetaszve két olyan párhuzamos síkkal mely a síkgörbe síkjával párhuzamos, hengerfelületet kapunk.

A síkgörbe a henger **vezérgörbéje**. A párhuzamos síkokban lévő lapok a henger **alaplappjai**. A két párhuzamos sík közé eső hengerfelület a **henger palástja**, a palást egyenesei a **henger alkotói**, melyek egymással párhuzamosak.

Ha a vezérgörbe kör és ennek a görbének a síkjára merőlegesek az alkotók egyenes körhengerről beszélünk. A körhenger is származtatható forgatással, részletesen ott ismertetjük.

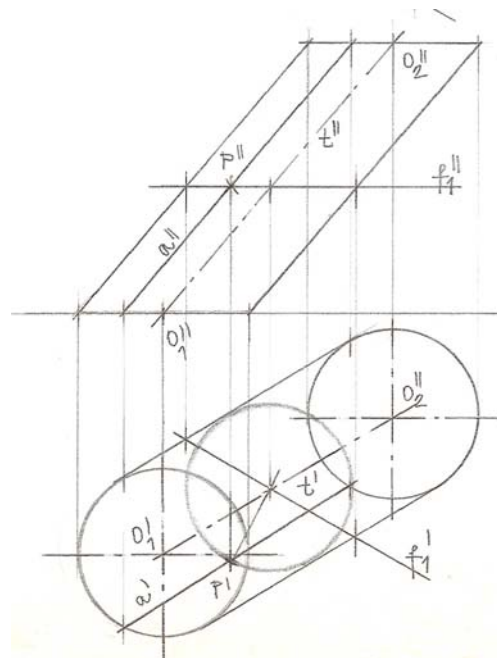
Ferde körhengerről akkor beszélünk, ha a vezérgörbe síkjára az alkotók nem merőlegesek. A vezérgörbe síkjával párhuzamos síkok azonos sugarú köröket metszenek ki a henger palástjából.

a.) Egyenes körhenger felületén fekvő pont, érintősík és normális ábrázolása



b.) Ferde körhenger felületén fekvő pont, érintősík és normális ábrázolása

b/1. Ferde körhenger és egyenes metszéspontjainak szerkesztése



Ha a ferde körhengert az alkotókra merőleges síkkal metszük el, ellipszis lesz a síkmetszet.

12. heti előadás

5.2.2. FORGÁSFELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA, METSZÉSÜK SÍKKAL ÉS EGYENESSEL

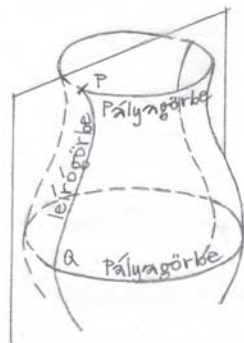
A leírógörbe mozgásának milyensége alapján osztályozott felületek közül a leíró görbe tengely körüli forgatásával előállított felületek a **forgásfelületek**. Ezen felületek közül csak a forgáskúp-, forgáshenger-, és gömbfelülettel foglalkozunk.

Ha egy tengely körül egy egyenest vagy egy görbe vonalat forgatunk, **forgásfelület** keletkezik. A forgatott görbét a felület **leírógörbéjének** nevezzük. A leírógörbe minden pontja forgatás közben a forgástengelyre merőleges síkban fekvő kört ír le. Ezek a körök az egyes pontok **pályagörbéi**. A síkok egymással párhuzamosak (mert síkjuk merőleges a tengelyre), ezért ezeket a köröket a **felület párhuzamos köreinek** is nevezzük. Tehát a pontok pályagörbéi **paralelkörök**, és középpontjuk egy forgástengelyen sorakoznak.

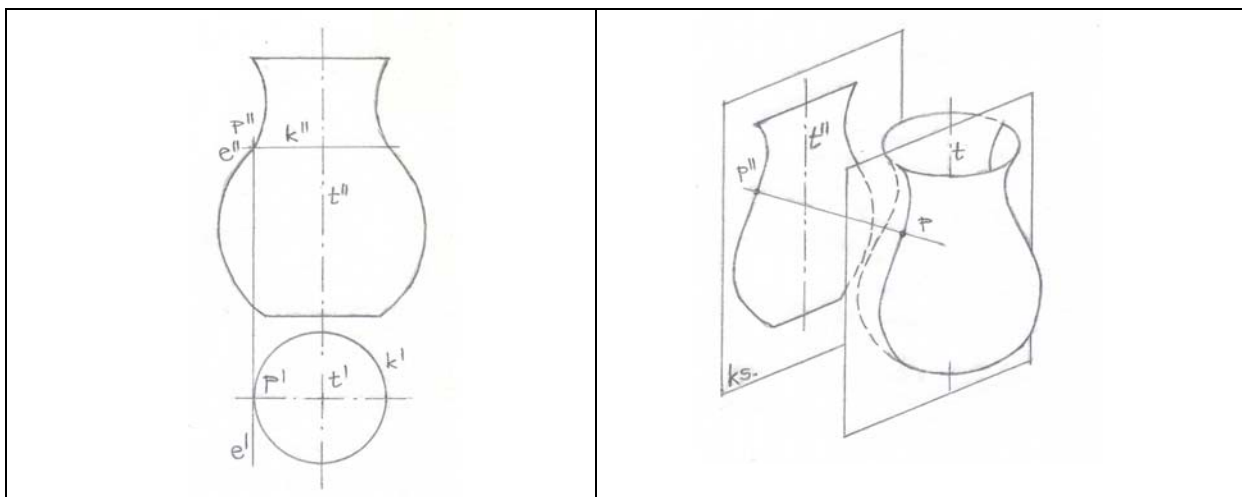
A felület leírógörbéje akármilyen térbeli görbe lehet. Ha a forgásfelületet egy, a tengelyét is tartalmazó síkkal elmetszük, ez a sík, a felületet egy síkgörbében metszi, amelyet a tengely körül forgatva, ugyanazt a felületet kapjuk. A görbe felület kétméretű (két dimenziós) pontalakzat.

Azt a síkot, amelyet a forgástengelyen át fektetünk, kitüntetett síkként „**meridiánsíknak**”, azt a leírógörbét mely a felületet metszi „**meridiángörbének**” nevezzük.

A forgásfelület valamely pontjához tartozó érintősíkot a ponton átmenő meridiángörbe és a paralelkörhöz szerkesztett érintő határozza meg. (lásd Egyenesvonalú felületek)



Eszerint minden forgásfelület előállítható a felület tengelyét tartalmazó síkban fekvő leírógörbe forgatásával.



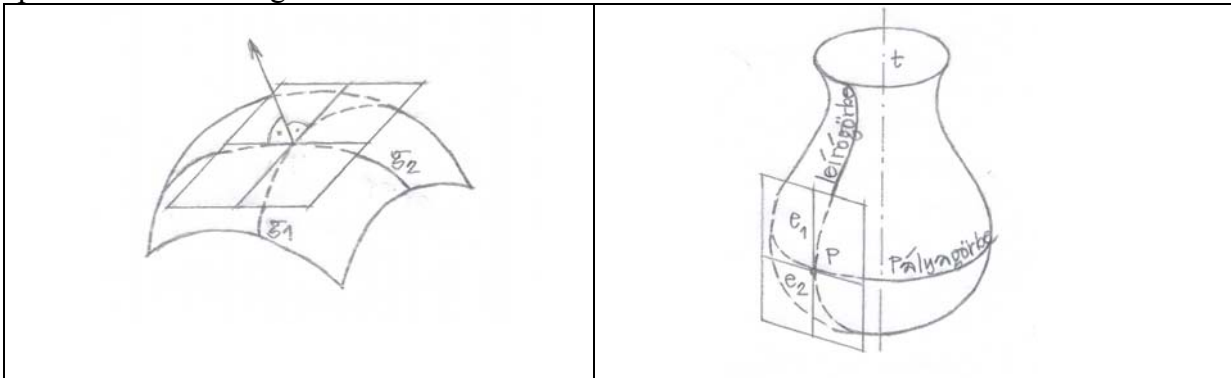
Ha a felület tengelyét első képsíkra merőlegesen, és a tengelyét tartalmazó síkot a második képsíkkal párhuzamosan vesszük fel, akkor ebben a síkban (II. ks.-ban) fekvő leírógörbe második képe eredeti alakban látszik.

Vegyünk fel ezen a görbén egy tetszőleges P pontot. Forgás közben a P pont a t tengelyre merőleges síkban egy olyan kört ír le, melynek sugara a P pont és a t tengely távolságával egyenlő. Ez a kör az I. ks.-kal párhuzamos síkban van, felülnézte kör. A P pont ennek a körnek a „szélső pontja”, így a II. ks.-ra vetítő e egyenes a kört érinti, így a felületet is érinti. A II. ks.-ra merőleges vetítő egyenes P érintési pontja a felület II. ks.-hoz tartozó körvonalának egy pontja, a P'' a felület második képhatárán van. Ez az adott görbe vonal minden pontjára igaz, az adott görbe valóban a felület második képhatára, vagy másképpen kontúrja.

A görbe felület valamely P pontján átmenő összes felületi görbe (pl: g_1 és g_2) P pontbeli érintői érintik a felületet is, és egyetlen síkra illeszkednek. Ez a síkfelület a P ponthoz tartozó **érintősíkja**, melyet az érintők közül bármely kettő meghatároz.

Forgásfelület érintősíkját legegyszerűbben úgy szerkeszthetjük meg, hogy a kiválasztott pontban nem két tetszés szerinti felületi görbét veszünk fel, hanem a ponton átmenő leírógörbéjével és a ponthoz tartozó pályagörbéjével határozzuk meg az érintősíkot.

A P érintési pontban síkra emelt merőleges a görbe felület normálisa, vagy másképpen a P pont felületi merőlegesének is nevezzük.



Görbe felület síkmetszete általában görbe vonal. A síkmetszetgörbe pontjai a felületnek és a metszősíkknak közös pontjai. A síkmetszet pontjait segédsíkok alkalmazásával szerkesztjük meg. A segédsíkot célszerűen úgy választjuk meg, hogy a felületet egyszerűen szerkeszthető vonalban metsze. Ilyenek a forgástengelyre merőleges segédsíkok, mert ezek a felületet paralelkörökben metszik.

Ez a szerkesztési eljárás a „szelitelő módszer”.

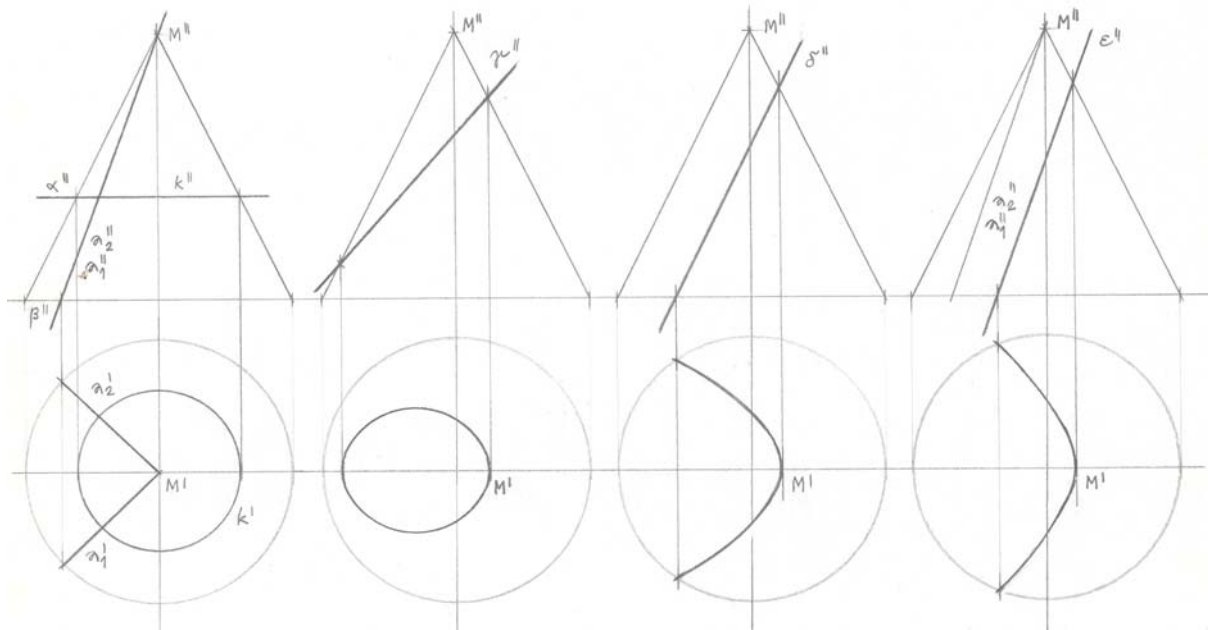
Ezzel a szerkesztési eljárással a ferde körkúp és a ferde körhenger síkmetszete is megszerkeszthető. Ugyanis a vezérkör síkjával párhuzamos segédsíkok mindkét felületből köröket metsz ki, melyek a metszetgörbe szerkesztését könnyen elvégezhetővé teszi.

5.2.2.1. FORGÁSKÚP (EGYENES KÖRKÚP)

A forgáskúpot egy a forgástengelyt metsző, rá nem merőleges egyenes írja le, tehát leíró vonala egyenes. A forgáskúp minden alkotója a tengellyel ugyanazt a szöget zárja be, ez a szög a kúp félnyílása. Az alkotóknak az alapsíkkal bezárt szögét a kúp dőlésszögének nevezzük, és ez a szög a felnyílás pótszögével megegyező.

a.) A kúp metszetgörbéi:

A forgáskúp síkmetszeteit a metszősíkknak a forgáskúp alkotóihoz, vagy tengelyéhez viszonyított helyzete szerint határozzuk meg.



a/a.)

a/b.)

a/c.)

a/d.)

a/a.) Ha a metszősík a kúp minden alkotóját metszi, és ez a sík merőleges a forgástengelyre, **a síkmetszet kör.**

a/b.) Ha a metszősík a kúp minden alkotóját metszi, de a forgástengelyre nem merőleges, és a kúp félnyílás szögénél nagyobb a metszősík és a forgástengely szöge, **a síkmetszet ellipszis.**

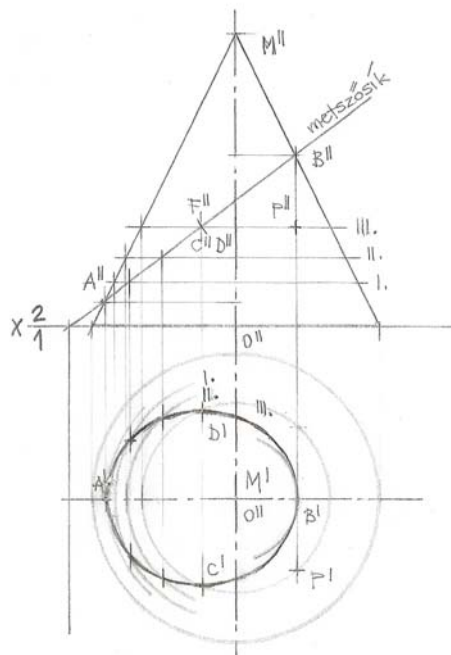
a/c.) Ha a metszősík a kúp egyetlenegy alkotójával párhuzamos, a metszősík és a forgástengely által bezárt szög egyenlő a kúp félnyílás szögével, **a síkmetszet parabola.**

a/d.) Ha a metszősík a kúp két alkotójával párhuzamos, ilyen a kúp csúcsponjtján átmenő metszősík is. Ebben az esetben a metszősík és a forgástengely szöge a kúp félnyílás szögénél kisebb, **a síkmetszet hiperbola.**

A kúp metszetgörbéit (kör, ellipszis, parabola, hiperbola) **kúpszeleteknek** is nevezzük, tulajdonságaikat a síkmértani tanulmányok alapján ismertek.

b.) A körkúp síkmetszetének szerkesztése

b/1.) Ha a metszősík vetítő helyzetű



b/2.) Ha a metszősík általános helyzetű:

- Új képsík felvétele úgy, hogy a metszősík vetítőhelyzetű legyen (IV. ks.).
- A metszetgörbének a felület képhatárán fekvő pontjainak megszerkesztése (a metszősík és a felület közös szimmetriasíkjában fekvő pontok, a metszetgörbe különleges pontjainak a megszerkesztése).
- A szeletelő módszer alkalmazásával a síkmetszet megszerkesztése I. és II. ks.-ban.

c.) A körkúp és egyenes dőféspontjának szerkesztése

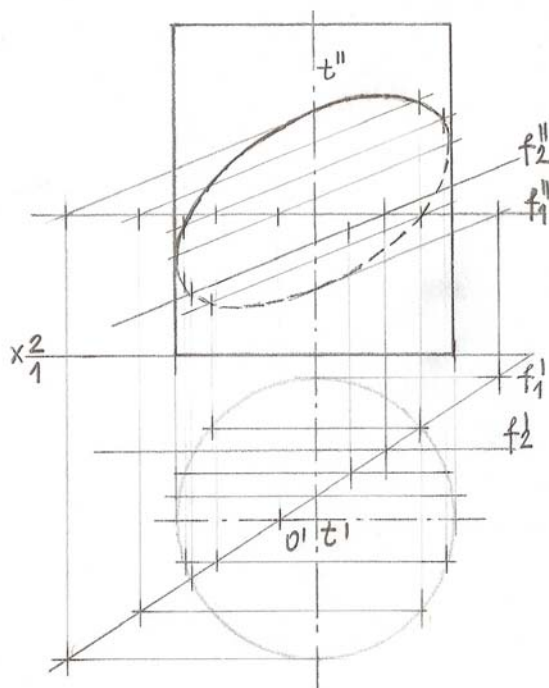
A szerkesztéshez olyan segédsíkot alkalmazunk, mely illeszkedik az adott egyenesre és a kúp csúcsára (lásd gúlánál!). Ez a segédsík alkotókat metsz ki a kútból. Az adott egyenes és a kimetszett alkotók metszéspontjai a keresett dőféspontok. Ha a segédsík nem metszi a kúpot, az egyenes sem dőfi a kúpot. Ha érinti, akkor az egyenes a kúp érintője. (lásd előző részben: Egyenesvonalú felületek)

5.2.2. FORGÁSHENGER (EGYENES KÖRHENGER)

A forgáshengert egy, a forgástengellyel párhuzamos egyenes írja le, azaz a leirógörbe vonala a forgástengellyel párhuzamos. Ha a forgástengely valamelyik képsíkra merőleges, a forgáshenger ábrázolása ebben az esetben a legegyszerűbb, mert az alkotók első vetítősugarak, a henger pedig vetítőhenger. A henger tengelyirányú vetületén a palást körnek látszik, így a paláston fekvő minden pont és vonal tengelyirányú vetülete rajta van ezen a körön. Hiányzó másik képe szerkeszthető rendezővel, vagy vetítősík segítségével. Tehát ebben az esetben a felületi pontok ábrázolása, dőféspontok szerkesztése, valamint a síkmetszetek meghatározása egyszerűvé válik.

a.) Vetítőhelyzetű henger síkmetszete

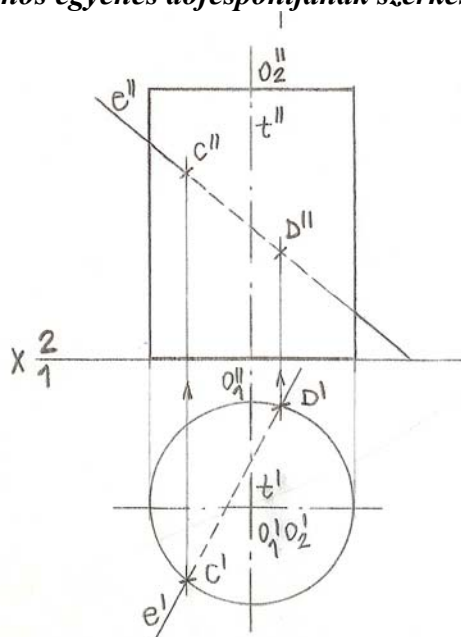
I. ks-ra merőleges egyenes henger



b.) Általános helyzetű henger síkmetszete

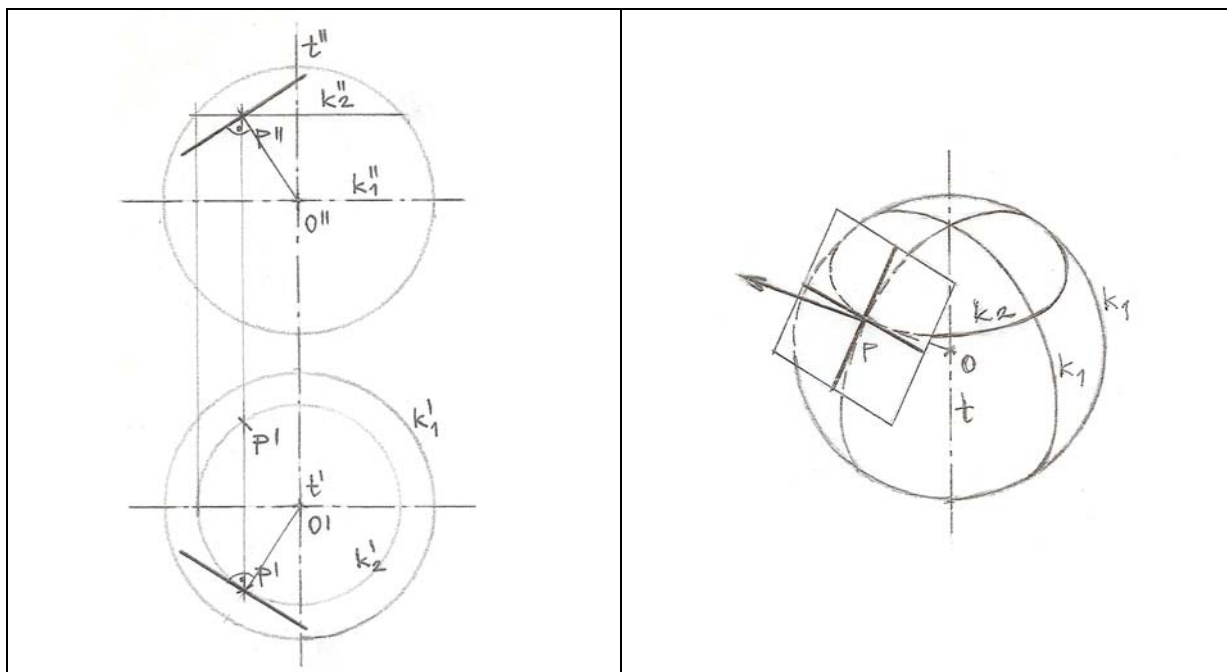
A szerkesztési módszerek a kúpnál ismertetett eljárások a forgáshengerre is alkalmazhatók.

a.) Henger és általános egyenes dőléspontjának szerkesztése



2/3. GÖMB:

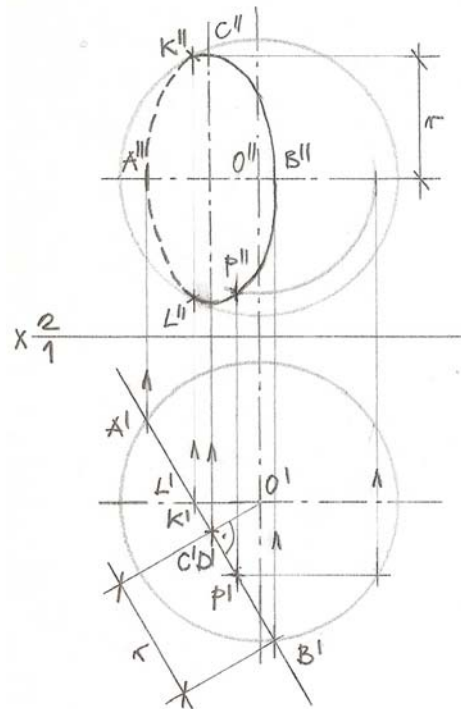
Ha felvesszünk egy forgástengelyt tartalmazó síkot és ebben a síkban egy olyan kört, amelynek középpontja a forgástengelyen van, és a kört a tengely körül forgatjuk **gömböt** ír le. A gömb leírógörbéje olyan kör, melynek síkja és középpontja a forgástengelyre illeszkedik.



A gömböt a sík körben metszi. A gömb középpontján átmenő metszősík a gömböt főkörben metszi, melynek sugara és középpontja a gömb sugarával és középpontjával azonos. A gömb kontúrja, körvonala főkör, melynek síkja a képsíkkal párhuzamos, a főkörrel azonos sugarú.

a.) Gömb síkmetszete, ha a metszősík vetítőhelyzetű

Ebben az esetben egyszerű a szerkesztés. A kimetszett kör vetülete egyenes szakasz, másik vetülete ellipszis. (lásd: kör vetületeinél !) Az ellipszis nagytengelye a vetítősugáron van, kistengelyének végpontjait rendezővonalakkal tudjuk kijelölni. Az ellipszis képkontúrra eső pontjai a metszősík és a képsíkkal párhuzamos síkú főkör metszéspontjai. Az ellipszis többi pontjait szeleteléssel szerkesztjük meg.



b.) Gömb síkmetszete, ha a metszősík általános helyzetű

Ebben az esetben a metszősíkot először vetítősíkká transzformáljuk, a szerkesztés további menete megegyezik az előzőben leírtakkal.

c.) Gömb és általános helyzetű egyenes dőféspontja

Legegyszerűbb a szerkesztés, ha az egyenes képsíkkal párhuzamos, azaz főegyenes. A keresett dőféspontok az egyenesen átfektetett főállású sík által a gömbből kimetszett körnek és az egyenesnek a közös pontjai. Ha az egyenes általános helyzetű, akkor főegyenessé transzformáljuk az adott egyenest, innen a szerkesztés megegyezik az előzőben leírtakkal.

