EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK

EÖTVÖS JÓZSEF FŐISKOLA * BAJA

MŰEGYETEM 1782

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM GYŐR

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM Pollack Mihály Műszaki Kar

MATEMATIKA I.

PMMANB 311 segédlet a PTE PMMK építőmérnök hallgatói részére

„Az építész- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

MATEMATIKA I.

FEKETE MÁRIA

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
POLLACK MIHÁLY MŰSZAKI KAR
MÉRNÖKI MATEMATIKA TANSZÉK

2007

RÉSZLETES TANTÁRGYPROGRAM		
Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A matematika nyelvének elemei, definíció, tétel, szimbólumok, jelek szerepe. A matematikai logikai alapfogalmai, logikai műveletek, igazságtáblák, logikai áramkörök.
2.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vektor fogalma, vektorok összeadása, kivonása, számmal való szorzása. A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer, a vektor koordinátái.
3.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**Felmérő teszt a középiskolás anyagból.** Két vektor skaláris és vektoriális szorzata, tulajdonságai, kiszámítása koordinátákkal adott vektorok esetén.
4.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vektorok vegyesszorzata, vektorok koordinátageometriai alkalmazásai: sík és egyenes egyenlete.
5.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Valós számsorozat fogalma, megadási módjai. Korlátosság, monotonitás, konvergencia, divergencia fogalma. Műveletek konvergens és divergens sorozatok között. Korlátosság, monotonitás, konvergencia kapcsolatára vonatkozó tételek. Nevezetes sorozatok $a_n=1/n$; $a_n=q^n$; $a_n=(1+1/n)^n$.
6.	SZÜNET	
7.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A leképezés és a függvény fogalma. Egy- és kétváltozós valós függvény megadása, tulajdonságai. Összetett és inverz függvény képzése. Elemi függvények osztályozása.
8.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**1. Zárthelyi dolgozat**. Algebrai és transzcendens függvények tulajdonságai. Egyváltozós függvény végesben és végtelenben vett határértékének fogalma. Jobb- és baloldali határérték.
9.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Függvény adott pontbeli folytonossága, a szakadás fajtái. Folytonos függvényekre vonatkozó tételek. Egyváltozós valós függvény differencia- és differenciál-hányadosának fogalma, geometriai és fizikai jelentése.
10.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A deriváltfüggvény értelmezése. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata. Deriválási szabályok.
11.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Hatványfüggvény deriválása. Összeg-, szorzat-, hányados-, összetett- és inverz függvény deriválási szabálya. Elemi függvények deriválása.
12.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Egyváltozós függvény magasabb-rendű deriváltja. A differenciál-számítás középértéktételei. A l'Hospital-szabály, Taylor-formula.
13.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**2. Zárthelyi dolgozat**. Deriválható függvény monotonitásának és szélsőértékének vizsgálata a derivált segítségével.
14.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont fogalma. Differenciálható függvények esetén ezek kapcsolata a második deriválttal. A teljes függvényvizsgálat lépései.
15.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**Pótlások**

TARTALOMJEGYZÉK

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Alapfogalmak

A matematikában az állításokat, kijelentéseket ítéleteknek nevezzük és az ítéletet alapfogalomnak tekintjük.

A tovább nem bontható, egyetlen állítást tartalmazó ítéleteket elemi ítéleteknek nevezzük. Az összetett ítéletek elemi ítéletekből épülnek fel.

Minden ítélet az alábbi két tulajdonság közül pontosan az egyikkel rendelkezik: vagy igaz, vagy hamis.

Az igaz ítélet logikai értékét	i	-val jelöljük
a hamis ítélet logikai értékét:	h	

Ítélet
- Elemi ítélet (egyetlen állítást tartalmaz)
- Összetett ítélet (elemi ítéletekből épül fel)

PÉLDA

8 osztható 4-gyel	Elemi ítélet;	igaz
A fizika természettudomány	Elemi ítélet;	igaz
Mit csinálsz holnap?	Nem ítélet	
A kutya emlősállat és sin x>2	Összetett ítélet;	hamis
Minden négyszög téglalap	Elemi ítélet;	hamis
Ne kiabálj!	Nem ítélet	

2. Logikai műveletek

2.1 Negáció

DEFINÍCIÓ. Adott A ítélet tagadása a „nem A" ítélet, melyet az A ítélet negációjának nevezünk és κ A-val jelölünk. A κ A ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A hamis.

A negáció művelettáblája ill. értéktáblázata:

A	κ A
i	h
h	i

PÉLDA

A (ítélet):	3 osztója 6-nak	igaz
κ A (ítélet):	3 nem osztója 6-nak	hamis

2.2 Konjunkció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek <u>konjunkciójának</u> nevezzük és AϖB (olv: A és B)—vel jelöljük az „A és B” összetett ítéletet. Az AϖB ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A is igaz, B is igaz.

A konjunkció értéktáblázata:

A	B	AϖB
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

2.3 Diszjunkció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek <u>diszjunkciójának</u> nevezzük és AωB (olv: A vagy B)–vel jelöljük az „A vagy B” (megengedő értelmű vagy) összetett ítéletet. Az AωB ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A és B közül legalább az egyik igaz.

A diszjunkció értéktáblázata:

A	B	AωB
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

2.4 Implikáció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletekekből A előtaggal és B utótaggal képzett <u>implikációnak</u> nevezzük és AΨB–vel jelöljük a „ha A akkor B” összetett ítéletet. Az AΨB ítélet akkor és csak akkor hamis, ha A igaz, B hamis.

Az implikáció értéktáblázata:

A	B	AΨB
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

2.5 Ekvivalencia

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek <u>ekvivalenciájának</u> nevezzük és A]B (olv. A ekvivalens B)–vel jelöljük az akkor és csak akkor A, ha B összetett ítéletet. Az A]B akkor és csak akkor igaz, ha A és B logikai értéke egyenlő.

Az ekvivalencia értéktáblázata:

A	B	A]B
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

2.6 Kidolgozott példák

1. PÉLDA Készítsük el az AΨ(BΨA) formula értéktáblázatát!

Megoldás

A	B	BΨA	AΨ(BΨA)
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i

Tehát a formula értéke mindig igaz

2. PÉLDA Készítsünk értéktáblázatot a κAϖκ (κAωB) formulához!

Megoldás

A	B	κ A	(κ AωB	κ (κ AωB)	κ Aϖκ (κ AωB)
i	i	h	i	h	h
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	h	h
h	h	i	i	h	h

A formula értéke mindig hamis

3. PÉLDA Igazoljuk a következő azonosságot: A]B = (κ AωB) ϖ (κ BωA)!

Megoldás

A	B	κ A	κ AωB	κ B	κ BωA	(κ AωB) ϖ (κ BωA)	A]B
i	i	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	i	i	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i

Mivel (κ AωB) ϖ (κ BωA) és A]B logikai értéke mindig azonos, ezért valóban igaz az azonosság.

II. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

- A halmazelmélet a matematika új fejezete az 1800-as évek 2. felében Cantor német matematikus vezeti be a halmazelméleti alapfogalmakat (halmazok számosságával is foglalkozik)
- A halmazelmélet nagy jelentőségű, mert a matematika minden ágának modellje felépíthető halmazelméleti fogalmakkal.

1. Alapfogalmak

1.1 Alapfogalmak, jelölések

A <u>halmaz alapfogalom</u> a matematikában (bizonyos meghatározott, különböző, valóságos vagy gondolatban kialakított dolgoknak az összesége)

<u>Jelölések</u>:

$$\left.\begin{array}{ll} A, B, C, \ldots, H, \ldots & \text{– halmazokat} \\ a, b, c, \ldots, h, \ldots & \text{– elemeket} \end{array}\right\} \text{jelölnek}$$

$a \in H$ jelentése
- „a” eleme a H halmaznak
- „a” benne van a H halmazban
- H halmaz tartalmazza az „a” elemet

$b \notin H$ jelentése
- „b” nem eleme a H halmaznak

PÉLDA vezessük be a következő jelöléseket

N^+: a pozitív egész számok halmaza
N: a nemnegatív egész számok halmaza
Z: az egész számok halmaza

$3 \in N$ de $0 \notin N^+$, $100 \in Z$
$-1 \notin N$, $-1 \in Z$

1.2 Halmazok megadása

Egy halmazt adottnak tekintünk, ha minden dologról, elemről egyértelműen el tudjuk dönteni eleme-e a halmaznak vagy sem.

A halmazok megadási módjai

a) Analítikus úton: elemeinek felsorolásával (ha „kevés” véges sok elemet tartalmaz), vagy annyi elemének felsorolásával (ha végtelen sok eleme van), hogy abból bármely eleme képezhető legyen.
Pl. A:= {Jóska, Pista, Pali}
B:= {2, 4, 6, …, 2n, …}

b) Szintetikus úton: a halmaz elemeit valamilyen tulajdonságuk alapján adjuk meg (tehát, ha A halmaz azon x dolgok halmaza, melyek τ tulajdonsággal rendelkeznek, akkor ezt A:= $\{x \mid \tau(x)\}$-el jelöljük.
Pl. C: = $\{x, \mid x \in N+, 3 \mid x$ és $x<100\}$
(C a 3-mal osztható, 100-nál kisebb pozitív egész számok halmazát jelenti)

1.3 Halmazok egyenlősége

DEFINÍCIÓ. Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk <u>egyenlőnek</u>, ha elemeik ugyanazok.

Pl: 1) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$

2) $\{1, 2, 3\} \neq \{a, b, c\}$

3) $B := \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$
$C := \{x, \mid x \in N^+, 2 \mid x\}$
$D := \{$a pozitív páros számok halmaza$\}$

$B=C$, de $B \neq D$ $D=\{B\}=\{C\}$

$8 \notin D$ (D-nek egyetlen eleme van!)

1.4 Üres halmaz

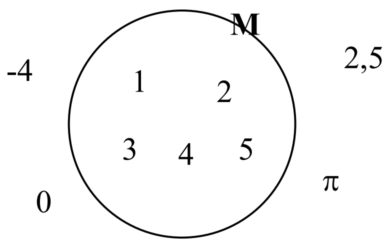
DEFINÍCIÓ. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, <u>üres halmaznak</u> nevezzük, és Ø-val jelöljük.

Pl: Ø= {az egyenlő oldalú tompaszögű háromszögek}

1.5 Venn-diagram

A sík zárt görbevonallal határolt pontjaival szemléltetünk halmazokat.

PÉLDA M: = {a vizsgán kapható osztályzatok}={1, 2, 3, 4, 5}



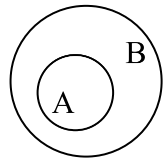
2. Részhalmaz, tartalmazás

DEFINÍCIÓ. Az A halmazt a B halmaz <u>részhalmazának</u> nevezzük, ha A minden eleme B-nek is eleme.

Jele: $A \subseteq B$ v. $B \supseteq A$

DEFINÍCIÓ. Az A halmaz <u>valódi részhalmaza</u> B-nek, ha A része B-nek, de $A \neq B$.

Jele: $A \subset B$ v. $B \supset A$



A⊆B

TÉTEL		Minden A-ra AϕA	reflexivitás
	Ha	AϕB és BϕA, akkor A=B	antiszimmetria
	Ha	AϕB és BϕC, akkor AϕC	tranzitivitás
		Øϕ A, minden A-ra	

TÉTEL		AδA	egyetlen A-ra sem áll fenn
	Ha	AδB, akkor B| A	
	Ha	AδB és BδC, akkor AδC	

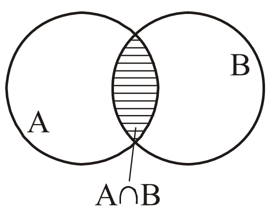
3. Műveletek halmazokkal

3.1 Halmazok metszete

DEFINÍCIÓ. Két halmaz <u>metszetén</u> v. <u>közös részén</u> azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jelölés**:** A és B halmaz metszete A1B

Szemléltetés:



A∩B

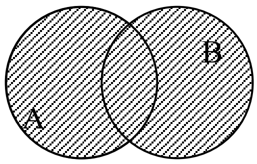
DEFINÍCIÓ. Ha A-nak és B-nek nincs közös eleme, $A \cap B \neq \emptyset$, ekkor az A és B un. <u>diszjunkt</u> halmazok.

3.2 Halmazok egyesítése

DEFINÍCIÓ. Két halmaz <u>egyesítésén</u> v. <u>unióján</u> azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.

Jelölés: A és B halmaz egyesítése $A \cup B$

Szemléltetés:



A♍B

TÉTEL – Tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az

A1B ϕ A ϕ AχB és A1B ϕ B ϕ AχB

tartalmazási kapcsolatok.

– Ha AϕB, akkor A1B = A és AχB = B

3.3 Halmazok metszetének és egyesítésének műveleti tulajdonságai

TÉTEL Tetszőleges A, B, C halmazokra

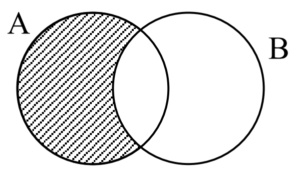
1. A1(B1C) = (A1B)1C	Aχ(BχC) = (AχB)χC	asszociatív
2. A1B = B1A	AχB = BχA	kommutatív
3. A1A = A	AχA = A	idempontens
4. A1(AχB) = A	Aχ(A1B) = A	elnyelési tul.
5. A1(BχC) = (A1B)χ(A1C)	Aχ(B1C) = (AχB) 1(AχC)	disztributív

3.4 Halmazok különbsége

DEFINÍCIÓ. A és B halmazok <u>különbségén</u> értjük A összes olyan elemének a halmazát, amelyek nincsenek a B-ben.

Jele: A(B

Szemléltetés:



A☎B

Képletben: A(B = {x | x0A, de x ⌠B}

TÉTEL – Tetszőleges A, B halmazokra

A\B = A((A1B) = (AχB)(B

– Ha A(B = Ø], ha AϕB

3.5 Komplementer halmaz

DEFINÍCIÓ. A H halmaz valamely A részhalmazának H-ra vonatkozó <u>komplementerén</u> értjük a H(A halmazt.

Jelölése: $\overline{A}_H$ = H(A v. $\overline{A}$ = H(A

TÉTEL – H halmaz tetszőleges A és B részhalmazaira

$\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$

A1 $\overline{A}$ = Ø , Aχ $\overline{A}$ = H

$\overline{A\ 1\ B}$ = $\overline{A}$ c $\overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 7 (de Morgan képletek)

3.6 Hatványhalmaz

DEFINÍCIÓ. Egy H halmaz összes részhalmazai újabb halmazt alkotnak, ezt nevezzük a H <u>hatványhalmazának</u>.

Jele: P(H) — H hatványhalmaza; H halmaz P(H) alaphalmaza
AφH ugyanazt jelenti mint A0 P(H).

PÉLDA H = {1, 2, 3}

Részhalmazok: H_1 = Ø

H_2 = {1} H_3 = {2} H_4 = {3}

H_5 = {1, 2} H_6 = {2, 3} H_7 = {1, 3}

H_8 = H_5 = {1, 2, 3}

H_iφH (i = 1,…, 8)

Most H elemeinek száma: 3
P(H) elemeinek száma: 8 = 2^3

MEGJEGYZÉS: Általában is igaz, hogy ha H elemeinek száma n(véges!), akkor P(H) elemeinek száma: 2^n.

3.7 Halmazok Descartes-szorzata

DEFINÍCIÓ. A H_1 H_2,…, H_n nemüres halmazok <u>Descartes-szorzatán</u> a következő halmazt értjük:

H_1HH_2HH_3…HH_n = {(h_1, h_2,…,h_n} | $h_1$0H_1, $h_2$0H_2,…,h_n0H_n}

SPECIÁLIS DESCARTES-SZORZATOK

1. Ha H_1= |, H_2= |
   H_1HH_2 = |H | = $|^2$ = {(x, y) | x0 |, y0 |}
   $|^2$ — a <u>rendezett</u> valós számpárok halmaza

a rendezettség miatt pl: (2, -1) □ (-1, 2)
(az elemek sorrendje fontos!)
|^2 — szemléltetve: a sík

2. |H |H | = |3 = {(x, y, z) | x0 |, y0 |, z0 |}
|^3 — a rendezett valós számhármasok halmaza
|^3 — szemléltetve: a tér

3.8 Számhalmazok

Természetes számok halmaza Jele: N

N: = {a pozitív egész szám és a 0} = {0, 1, 2, 3, …}
Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás

Egész számok halmaza Jele: Z

Z: = {0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, …}
Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás

Racionális számok halmaza Jele: Q

Q: = {x | x = $\frac{p}{q}$, p0Z, q0Z, q $\neq$ 0}
Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás, osztás (0-val nem osztunk!)
(Tehát a racionális számok, a két egész hányadosaként felírható számok.)
A racionális számok tizedestört alakja: véges v. végtelen szakaszos tizedes törtek.

Pl: 5; -4; 12,47; $\frac{1}{3} = 0,\dot{3}$

Irracionális számok halmaza Jele: Q^*

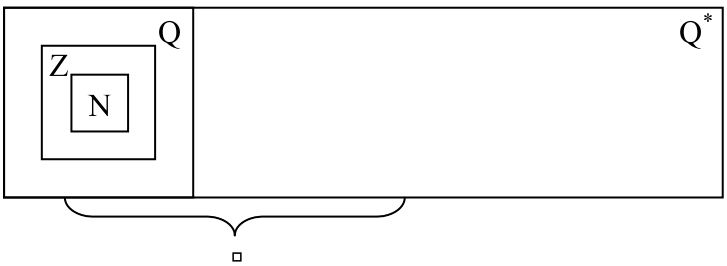
Q^*: = {a végtelen nem szakaszos tizedestörtek}
irracionális szám: nem írható fel két egész hányadosaként

Pl: 5; -4; 12,47; $\sqrt{5}$, 3π, lg3, cos6, $\log_3 4$, $2^{\frac{1}{3}}$ stb.

A valós számok halmaza Jele: |

|: = Q$\chi$$Q^*$

A valós számhalmaz szemléltetése Venn-diagrammal



3.9 Halmazok számossága

Véges sok elem esetén: az elemek száma adja a halmaz számosságát

Végtelen sok elem esetén beszélhetünk:
- megszámlálhatóan végtelen sok
- nem megszámlálhatóan végtelen sok

$\Big\}$ elemű halmazokról

III. VEKTORALGEBRA

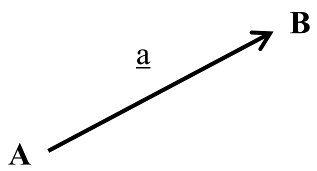
1. Alapfogalmak, alapműveletek

1.1 A vektor fogalma

A vektor fogalma a fizikából származik.
A fizikai mennyiségek lehetnek:

a) skalár jellegű mennyiségek: értékük egyértelműen megadható egyetlen valós számmal
Pl.: távolság, tömeg, idő, hőmérséklet, munka stb.
b) vektor jellegű mennyiségek: irányított szakasszal adhatók meg (melyet nagysága, állása, irányítása határoz meg)
Pl.: elmozdulás, sebesség, erő, gyorsulás stb.

DEFINÍCIÓ. Vektoron irányított szakaszt értünk, melyet hossza, állása és iránya határoz meg.



Jele: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, …

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, …

A a vektor kezdőpontja
B a vektor végpontja

MEGJEGYZÉS:
A matematikában a vektort szabadnak tekintjük! A kezdőpontja tetszőleges!

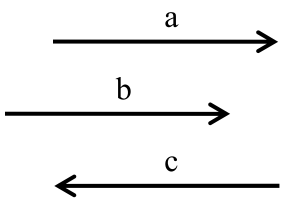
DEFINÍCIÓ. Vektor abszolút értékén a vektort ábrázoló irányított szakasz hosszát (nagyságát) értjük

Jele: $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$, $|\overrightarrow{AB}|$

DEFINÍCIÓ. Két vektor egyező állású, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak.

DEFINÍCIÓ. Két vektor egyenlő, ha abszolút értékük, állásuk és irányuk megegyezik.

Pl.:



$\underline{a} = \underline{b}$

$\underline{a} \neq \underline{c}$

DEFINÍCIÓ. Azt a vektort, melynek abszolút értéke nulla, <u>zérusvektornak (nullvektornak)</u> nevezzük.

A zérusvektor állása és iránya tetszőleges.

Jele: $\underline{0}$; $|\,\underline{0}\,| = 0$

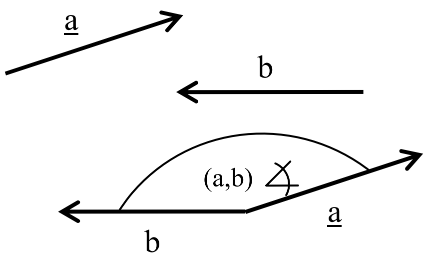
DEFINÍCIÓ. Azt a vektort, melynek abszolút értéke egységnyi, <u>egységvektornak</u> nevezzük.

MEGJEGYZÉS:
A $(\underline{v} \neq \underline{0})$ vektorral azonos állású és irányú egységvektort $\underline{v}_0$-al vagy $\underline{e}_v$-vel jelöljük.

DEFINÍCIÓ. <u>Kollineáris</u> (párhuzamos) két vektor, ha állásuk megegyezik.

DEFINÍCIÓ. <u>Komplanárisak</u> azok a vektorok, amelyek egy síkkal párhuzamosak.

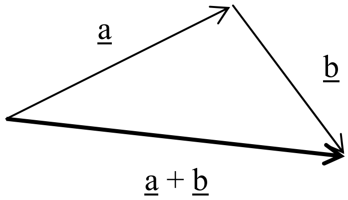
DEFINÍCIÓ. <u>Két vektor szöge</u>, az őket tartalmazó egyenesek 180°-nál nem nagyobb szöge.



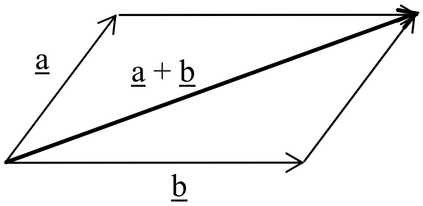
1.2 Vektorok összeadása

DEFINÍCIÓ.

1. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ összegén azt az $\underline{a} + \underline{b}$ –vel jelölt vektort értjük, amely az $\underline{a}$ kezdőpontjából a $\underline{b}$ végpontjába mutat.



2. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ különböző állásúak, akkor $\underline{a} + \underline{b}$ vektort megadja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$-vel (mint oldalakkal) szerkesztett paralelogrammának, a vektorok közös kezdőpontjából induló átlóvektora.



MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

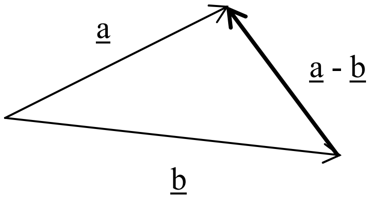
$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ 0 $|^3$ tetszőleges vektorokra

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{c}$$
$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$$
$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$$
$$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$$

(ahol $-\underline{a}$, $\underline{a}$ ellentettje
$|-\underline{a}| = |\underline{a}|$, $-\underline{a} \parallel \underline{a}$, de ellentétes irányúak)

1.3 Vektorok kivonása

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $\underline{a} - \underline{b}$ –vel jelölt különbségén azt a vektort értjük, amelyet $\underline{b}$ –hez hozzáadva az $\underline{a}$-t kapjuk.



Nem kommutatív
$\underline{b} - \underline{a} \neq \underline{a} - \underline{b}$

1.4 Vektor szorzása skalárral (vektor számszorosa)

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}$ vektor és a λ valós szám $\lambda\underline{a}$ -val jelölt szorzatán azt a vektort értjük, amelynek abszolút értéke $|\lambda||\underline{a}|$, állása megegyezik $\underline{a}$ állásával, iránya $\underline{a}$ irányával egyenlő, ha $\lambda \geq 0$, $\underline{a}$ -val ellentétes irányú, ha $\lambda < 0$

Tehát
$$|\lambda\underline{a}| = |\lambda||\underline{a}|$$
$$\lambda\underline{a} \parallel \underline{a}$$

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK:

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda\,\underline{a} = \underline{a}\,\lambda$$
$$\lambda(\mu\,\underline{a}) = (\lambda\,\mu)\,\underline{a}$$
$$(\lambda+\mu)\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a} + \mu\,\underline{a}$$
$$\lambda\,(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\,\underline{a} + \lambda\,\underline{b}$$

$$\underline{a}_e = \frac{1}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a}$$ $\underline{a}$ irányú **egységvektor** , ha $\underline{a} \neq 0$

1.5 Vektorok lineáris kombinációja

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján a

$$\lambda_1\,\underline{a}_1 + \lambda_2\,\underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k$$

vektort értjük, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i=1,\ldots, k$

1.6 Vektorok felbontása

1. TÉTEL

Ha $\underline{a} \neq 0$, akkor bármely $\underline{a}$-val párhuzamos (kollineáris) $\underline{v}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ lineáris kombinációjaként, azaz létezik egyértelműen meghatározott $\alpha \in R$, hogy

$$\underline{v} = \alpha\,\underline{a}$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{v} \parallel \underline{a}$ és $\underline{a} \neq 0$

Ekkor két eset lehetséges

α) $\underline{v}_e = \underline{a}_e$ β) $\underline{v}_e = -\,\underline{a}_e$

α) esetén
$$\underline{v} = \underline{v}_e\cdot|\underline{v}| = \underline{a}_e\cdot|\underline{v}| = \frac{1}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a}\cdot|\underline{v}| = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a}$$

ahol
$$\underline{a}_e = \frac{1}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a}$$

Tehát
$$\underline{v} = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a} = \alpha\cdot\underline{a} \qquad \text{ahol} \qquad \alpha = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}$$

β) esetén $\underline{v} = \underline{v}_e \cdot |\underline{v}| = -\underline{a}_e \cdot |\underline{v}| = -\frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} \cdot |\underline{v}| = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$

Tehát $\underline{v} = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} = \alpha \cdot \underline{a}$ ahol $\alpha = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}$

Ha $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{v} = \underline{0} = 0 \cdot \underline{a}$ áll fenn, azaz $\alpha=0$

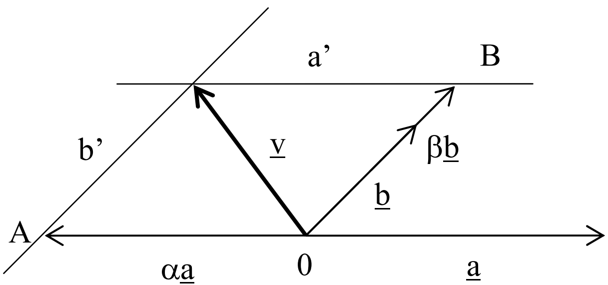
2. TÉTEL Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha legalább egyik a másik számszorosa.

Bizonyítás. Az **1. TÉTEL** és a számmal való szorzás definíciójából adódik.

(Nem végezzük el.)

3. TÉTEL Ha két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak, akkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok síkjába eső bármely $\underline{v}$ egyértelműen előállítható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz létezik olyan α , $\beta \in R$, melyekre

Bizonyítás. Végezzük el a következő szerkesztést!



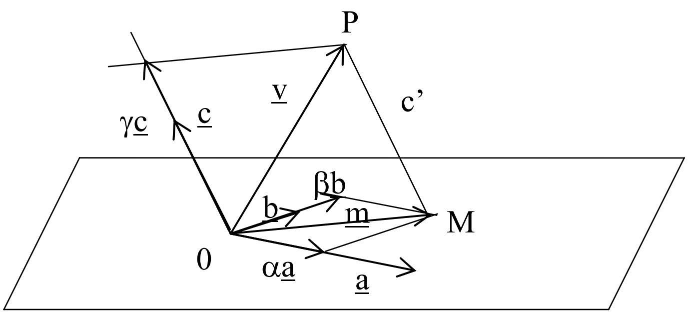
A szerkesztés egyértelműségéből következik, hogy α és β egyértelműen meghatározott.

MEGJEGYZÉS: A **3. TÉTEL** így is megfogalmazható:
Ha $\underline{a}$ ď $\underline{b}$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{v}$ komplanárisak, akkor $\underline{v}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

4. TÉTEL Három vektor akkor és csak akkor komplanáris (egysíkú), ha legalább egyikük a másik kettő lineáris kombinációja. (Nem bizonyítjuk.)

5. TÉTEL Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, nem komplanáris (egysíkú) vektorok, akkor a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen előállítható az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete azonos a **3. TÉTEL** bizonyításával.



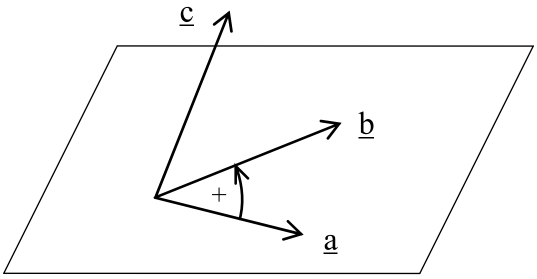
A szerkesztés egyértelműségéből következik, hogy α, β, γ ∈ R valós számok egyértelműen meghatározottak.

$$\underline{v} = \underline{m} + \gamma \cdot \underline{c} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c}$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Két nem párhuzamos vektor a síkot, három nem egysíkú vektor a teret „kifeszíti”, mert lineáris kombinációkkal a sík, ill. a tér minden vektora egyértelműen előállítható.
2. A sík 2 nem párhuzamos vektora a sík egy bázisa, a tér 3 nem komplanáris vektora a tér egy bázisa.

DEFINÍCIÓ. A tér nemkomplanáris, közös kezdőpontból felmért $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok az adott sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha $\underline{c}$ irányából nézve az $\underline{a}$ vektor az óramutató járásával ellenkező 180°-nál kisebb szögű forgatással a $\underline{b}$ irányába forgatható.



MEGJEGYZÉSEK

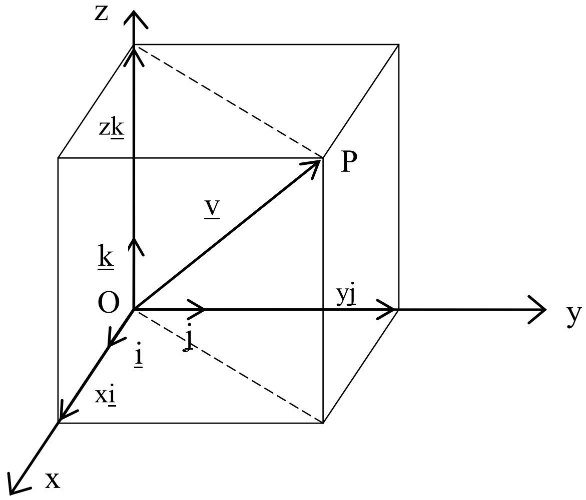
1. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszer ⇒ $\underline{b}$, $\underline{a}$, $\underline{c}$ balrendszer!
2. A jobbrendszert jobbkezünk ujjaival, a balrendszert balkezünk ujjaival szemléltetjük.

1.7 Vektor koordinátái

Vegyünk fel a térben egy O pontot, valamint az O ponttól kiinduló három, páronként egymásra merőleges egységvektort, jelölje őket $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ és alkossanak ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert. Ezeket nevezhetjük bázisvektoroknak. Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ a tér bázisa. (ortonormált bázis!).

Az **5. TÉTEL** értelmében a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Legyen a felbontás

$$\underline{v} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$



DEFINÍCIÓ. Az x, y, z valós számok a $\underline{v}$ vektor koordinátái, az x $\underline{i}$, y $\underline{j}$, z $\underline{k}$ vektorok a $\underline{v}$ vektor komponensei (az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban).

Tehát a $\underline{v}$ koordinátáit egy rendezett számhármassal

a $\underline{v} = (x, y, z)$ – sorvektoros alakban szoktuk kifejezni,

de $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ – oszlopvektoros alakban is használhatjuk.

MEGJEGYZÉS

1. Másik bázist is választhattunk volna!
2. $\underline{v}$ koordinátái függnek a bázisvektorok választásától.
3. A sík, pl. az x, y sík $\underline{v}$ vektorát
   $\underline{v} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j} + 0\cdot\underline{z} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j}$
   alakban állíthatjuk elő, így $\underline{v}$ koordinátái
   $\underline{v} = (x, y, 0)$ $\underline{v} = (x, y)$
   $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ rendezett valós számpár
4. A tér $\underline{v}$ vektorai és a tér P pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt a $\underline{v}$ és P végpontjának koordinátái azonosak.
   A $\underline{v}$ a P pont <u>helyvektora</u>.

1.8 Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal

TÉTEL A $\underline{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és a $\underline{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ adott vektorok esetén $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ egyszerre teljesül.

TÉTEL A $\underline{v} = (x, y, z)$ vektor λ-szorosának $\lambda\underline{v}$ -nek koordinátái $\lambda\underline{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

TÉTEL Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok összegének, különbségének koordinátái:

$$\underline{a} + \underline{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_{2,} a_3 + b_3\right)$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \left(a_1 - b_1, a_2 - b_{2,} a_3 - b_3\right)$$

2. Vektor szorzása vektorral

2.1 Vektorok skaláris szorzata

DEFINÍCIÓ. Két vektor <u>skaláris szorzatán</u> a két vektor abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük.

Jele: $\underline{a}\,\underline{b}$

Képlettel: $\underline{a}\,\underline{b} := |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{b})\angle$

MEGJEGYZÉS: A skaláris szorzat eredménye nem vektor, hanem skalár mennyiség.

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges vektorok $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\,(\underline{a}\,\underline{b}) = (\alpha\,\underline{a})\,\underline{b}$$
$$\alpha\,(\underline{a}\,\underline{b}) = \underline{a}\,(\alpha\,\underline{b})$$
$$(\alpha\,\underline{a})\,(\beta\,\underline{b}) = (\alpha\,\beta)(\underline{a}\,\underline{b})$$
$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{a}$$
$$\underline{a}\,(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\,\underline{b} + \underline{a}\,\underline{c}$$

TÉTEL Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás.

1. rész: Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$, akkor $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ Most ezt bizonyítjuk!

Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$, akkor $(\underline{a}, \underline{b})\angle = 90^\circ$, és $\cos 90^\circ = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

2. rész: Ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, akkor $\underline{a} \perp \underline{b}$

Legyen $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ azaz $|\underline{a}||\underline{b}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{b})\angle = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a} \perp \underline{b}$ Most ezt bizonyítjuk!

Ha $\underline{a} = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a} = \underline{0}$ és a $\underline{0} \perp \underline{b}$

Ha $\underline{b} = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{b} = \underline{0}$ és a $\underline{0} \perp \underline{a}$

Ha $|\underline{a}| \neq 0, |\underline{b}| \neq 0$, akkor $\cos(\underline{a}, \underline{b})\angle = 0$ $\Rightarrow$ $\cos(\underline{a}, \underline{b})\angle = 90^\circ$

PÉLDA $\underline{i}, \underline{j}, \cdot \underline{k}$ alapvektorok (páronként merőlegesek, jobbrendszer)

$$\underline{i}\,\underline{j} = \underline{j}\,\underline{k} = \underline{k}\,\underline{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^{\circ} = 0$$

$$\underline{j}\,\underline{i} = \underline{k}\,\underline{j} = \underline{i}\,\underline{k} = 0$$

$$\underline{i}\,\underline{i} = \underline{j}\,\underline{j} = \underline{k}\,\underline{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^{\circ} = 1$$

TÉTEL Koordinátáival adott két vektor skaláris szorzata:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k})$

$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = (b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k})$, akkor

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Bizonyítás.

$$\underline{a}\,\underline{b} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k})(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) =$$

a megfelelő műveleti tulajdonságot felhasználva

$$(a_1\underline{i})(b_1\underline{i}) + (a_1\underline{i})(b_2\underline{j}) + (a_1\underline{i})(b_3\underline{k}) +$$

$$(a_2\underline{j})(b_1\underline{i}) + (a_2\underline{j})(b_2\underline{j}) + (a_2\underline{j})(b_3\underline{k}) +$$

$$(a_3\underline{k})(b_1\underline{i}) + (a_3\underline{k})(b_2\underline{j}) + (a_3\underline{k})(b_3\underline{k}) =$$

$$= a_1 b_1 \underline{i}^2 + a_1 b_2 \underline{i}\underline{j} + a_1 b_3 \underline{i}\underline{k} +$$

$$a_2 b_1 \underline{j}\underline{i} + a_2 b_2 \underline{j}^2 + a_2 b_3 \underline{j}\underline{k} +$$

$$a_3 b_1 \underline{k}\underline{i} + a_3 b_2 \underline{k}\underline{j} + a_3 b_3 \underline{k}^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

a korábbi eredmények felhasználásával

$\underline{a}$ abszolút értékének kiszámítása

$$\underline{a}\,\underline{a} = \underline{a}^2 = |\underline{a}||\underline{a}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\underline{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^2}$$

$$\underline{a}^2 = \underline{a}_1^{\,2} + \underline{a}_2^{\,2} + \underline{a}_3^{\,2}$$

Tehát $$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}_1^{\,2} + \underline{a}_2^{\,2} + \underline{a}_3^{\,2}}$$

PÉLDA

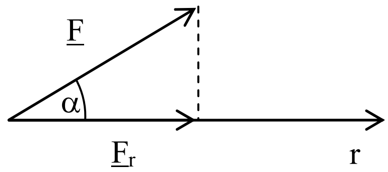
Legyen $\underline{a} = (2,\ 1{,}0)$, $\underline{b} = (\text{-}1,\ 2,\ \text{-}6)$ $\quad \underline{a} \cdot \underline{b} = ?$, $|\underline{a}| = ?$

Megoldás $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot (\text{-}1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a} \perp \underline{b}$

$$\underline{a} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

A FIZIKÁBAN

A <u>munka</u>: egy pontszerű, egyenes pályán mozgó testre ható állandó erő munkája:



$W = |\underline{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\underline{r}| = \underline{F} \cdot \underline{r}$

↑

skaláris szorzat

Tehát: $W = \underline{F} \cdot \underline{r}$

2.2 Vektorok vektoriális szorzata

DEFINÍCIÓ. Két vektor vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amelynek
- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szögük szinuszának szorzata,
- állása mindkét tényezőre merőleges
- iránya pedig olyan, hogy az első tényező, a második tényező és a vektori szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

Jelölés: $\underline{a}$ x $\underline{b}$ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata

$$\left|\underline{a}\times\underline{b}\right| := \left|\underline{a}\right| \cdot \left|\underline{b}\right| \sin\left(\underline{a},\underline{b}\right)\text{Ë}$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges vektorok ; $\alpha, \beta \in R$

$$\underline{a}\times\underline{b} = -\left(\underline{b}\times\underline{a}\right)$$

$$\alpha\left(\underline{a}\times\underline{b}\right) = \left(\alpha\underline{a}\right)\times\underline{b} = \underline{a}\times\left(\alpha\underline{b}\right)$$

$$\alpha\underline{a}\times\beta\underline{b} = \alpha\beta\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)$$

$$\underline{a}\times\left(\underline{b}+\underline{c}\right) = \underline{a}\times\underline{b}+\underline{a}\times\underline{c}$$

$$\left(\underline{b}+\underline{c}\right)\times\underline{a} = \underline{b}\times\underline{a}+\underline{c}\times\underline{a}$$

$$\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\times\underline{c} \neq \underline{a}\times\left(\underline{b}\times\underline{c}\right) \quad !!!$$

TÉTEL Két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos (egyező állású).

Bizonyítás. Legyen a két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$

- Ha $\underline{a} = \underline{0}$ (v. $\underline{b} = \underline{0}$) a tétel triviálisan teljesül

- Ha Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$

1. rész: Ha $\underline{a} \,||\, \underline{b}$, akkor $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0}$

Bizonyítás. Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $(\underline{a},\underline{b})\angle = 0^\circ$ v. 180°,

de ekkor $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin(\underline{a},\underline{b})\angle = 0,$ de

ez azt jelenti, hogy $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0}$

2. rész: Ha $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0}$, akkor $\underline{a} \parallel \underline{b}$

Bizonyítás. $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin(\underline{a},\underline{b})\angle = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin(\underline{a},\underline{b})\angle = 0$,

tehát $(\underline{a},\underline{b})\angle = 0^\circ$ v. 180°

PÉLDA $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok (jobbrendszert alkotnak!)

$\underline{i}\times\underline{i} = \underline{j}\times\underline{j} = \underline{k}\times\underline{k} = \underline{0}$ előző tétel szerint

$\underline{i}\times\underline{j} = \underline{k}$ $\quad \underline{j}\times\underline{k} = \underline{i}$ $\quad \underline{k}\times\underline{i} = \underline{j}$

TÉTEL Koordinátáival adott két vektor vektoriális szorzata:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor

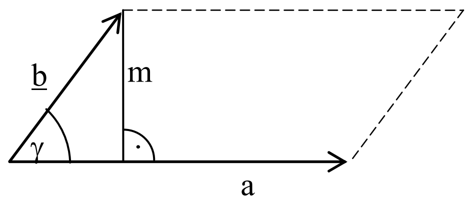
$$\underline{a}\times\underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\underline{a}\times\underline{b} &= (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k})\times(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) = \\
&= a_1b_1(\underline{i}\times\underline{i}) + a_1b_2(\underline{i}\times\underline{j}) + a_1b_3(\underline{i}\times\underline{k}) + \\
&+ a_2b_1(\underline{j}\times\underline{i}) + a_2b_2(\underline{j}\times\underline{j}) + a_2b_3(\underline{j}\times\underline{k}) + \\
&+ a_3b_1(\underline{k}\times\underline{i}) + a_3b_2(\underline{k}\times\underline{j}) + a_3b_3(\underline{k}\times\underline{k}) = \\
&= a_1b_1\underline{k} - a_1b_3\underline{j} - a_2b_1\underline{k} + a_2b_3\underline{i} + a_3b_1\underline{j} - a_3b_2\underline{i} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} - (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \\
&= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{DETERMINÁNS}
\end{aligned}$$

TÉTEL Két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

Bizonyítás.



$T = |\underline{a}| \cdot m = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma$

$T = |\underline{a} \times \underline{b}|$

PÉLDA

Legyen $\underline{a} = (6,\ 1{,}0)$, $\underline{b} = (\text{-}2,\ 1,\ 2)$ $\qquad \underline{a} \times \underline{b} = ?$, $\qquad |\underline{a} \times \underline{b}| = ?$

Megoldás $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-0)\underline{i} - (12-0)\underline{j} - (6+2)\underline{k} = 2\underline{i} - 12\underline{j} + 8\underline{k}$$

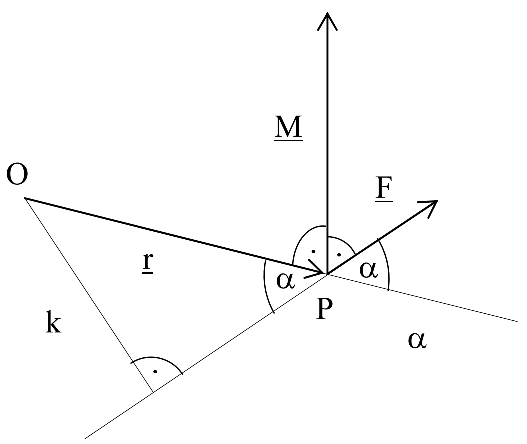
$$\underline{a} \times \underline{b} = 2\underline{i} - 12\underline{j} + 8\underline{k} = (2, -12, 8)$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{4 + 144 + 64} = \sqrt{212}$$

A FIZIKÁBAN

$$\overrightarrow{M} = \underline{r} \times \underline{F}$$

(O pontban rögzített merev testre P pontban $\underline{F}$ állandó erő hat, melynek hatásvonala nem halad át O ponton. Ezen $\underline{F}$ erőnek a testre forgató hatása van, amelyet <u>forgatónyomatéknak</u> nevezünk.)



$\underline{r} = \overrightarrow{OP}$; $\quad (\underline{r}, \underline{F})\angle = \alpha$

k az erő karja

$k = |\underline{r}| \sin\alpha$

$|\underline{M}| = |\underline{r}|\ |\underline{F}| \cdot \sin\alpha$

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

$\underline{M} \perp \underline{r}$; $\qquad \underline{M} \perp \underline{F}$; $\qquad \underline{r}, \underline{F}, \underline{M}$ jobbrendszer

2.3 Vektorok vegyes szorzata

Definíció. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatán az $\underline{a}$ x $\underline{b}$-nek a $\underline{c}$-vel képzett skaláris szorzatát értjük, jele $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

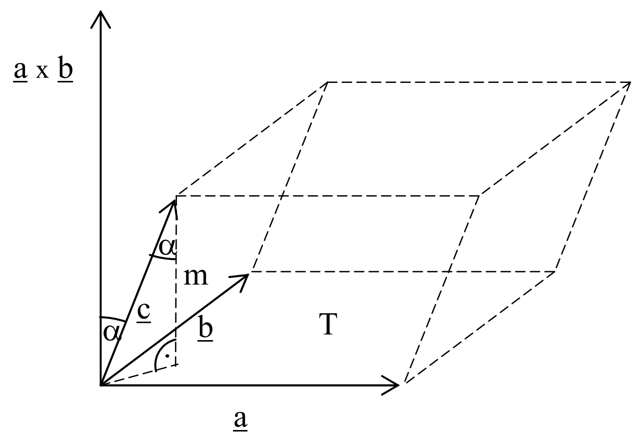
$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\underline{c} = \left|\underline{a}\times\underline{b}\right|\left|\underline{c}\right|\cos\left(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c}\right)\angle$$

A vegyes szorzata geometriai jelentése

Tétel Az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú ferde hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcsából kiinduló 3 élvektora éppen az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektor.

Bizonyítás.

$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})\angle = \alpha$



$T = |\underline{a} \times \underline{b}|$
$m = |\underline{c}| \cdot |\cos \alpha|$

$V = T \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |\cos \alpha| = |(\underline{a} \times \underline{b})\, \underline{c}| = |\, \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\, |$
$V = |\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\, |$

Műveleti tulajdonságok

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tetszőleges vektorok

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a} = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b} \\ 2. & -\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c} = \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = \underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b} \end{array}\right\} \text{A geom. jelentésből köv.}$$

3. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\underline{c} = \underline{a}\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)$

Tétel Három vektor vegyes szorzata akkor és csak akkor zérus, ha a három vektor komplanáris (egysíkú).
(Nem biz.)

Tétel Koordinátáival adott három vektor vegyes szorzata, ha

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ harmadrendű determinánssal egyenlő, azaz

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \left(b_2c_3 - b_3c_2\right)a_1 - \left(b_1c_3 - b_3c_1\right)a_2 + \left(b_1c_2 - b_2c_1\right)a_3$$

TÉTEL Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanárisak, akkor
ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} > 0$
ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ balrendszert alkot, akkor $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} < 0$

MEGJEGYZÉS: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $\underline{c}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok síkjának ugyanazon oldalára mutat és fordítva.

PÉLDA Jobbrendszert alkot-e az
$\underline{a}$ = (2,-1, 5), $\underline{b}$ = (1, 8, 1) és $\underline{c}$ = (-1, 2, -2) vektorhármas?

Megoldás.

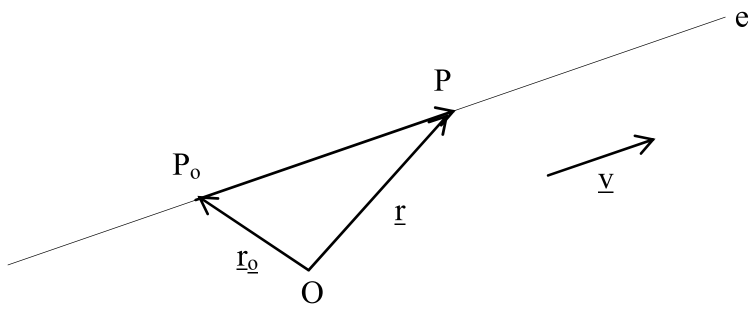
$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left(-16-2\right)\cdot 2 - \left(-2+1\right)\cdot\left(-1\right) + \left(2+8\right)\cdot 5 = -36 - 1 + 50 = 13 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot!

3. Koordinátageometriai alkalmazások

3.1 Az egyenes

Adott $P_o\left(x_o, y_o, z_o\right)$ pont és $\underline{v} = \left(v_1, v_2, v_3\right) \neq \underline{0}$ vektor.
'**e**' egyenes haladjon át $\mathbf{P_o}$ ponton és **e** legyen párhuzamos $\underline{v}$-ral ($\underline{v}$ az egyenes irányvektora!)



$P_o \in e$

e D$\underline{v}$

P(x; y; z) pont akkor és csak akkor van az **e** egyenesen, ha
$\overrightarrow{P_oP} = \underline{r} - \underline{r}_o$ vektor egyező állású (párhuzamos) $\underline{v}$-ral, azaz ha □ olyan $t \in$ ú szám, hogy

$$\underline{r} - \underline{r}_o = t \cdot \underline{v} \qquad t \in \text{ú}$$

Amiből

$$\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \text{ú}$$

TÉTEL Ha egy egyenes adott P_o pontjának helyvektora $\underline{r}_o$, irányvektora pedig $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor az egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \text{ú}$$

alakú, ahol $\underline{r}$ az egyenes valamely P pontjába mutató helyvektor és t paraméter, $t \in \text{ú}$.

<u>Az egyenes paraméteres egyenletrendszere</u>

$P_o(x_o, y_o, z_o)$, $\underline{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ — az egyenes adott pontja és helyvektora
$P(x, y, z)$, $\underline{r} = (x, y, z)$ — az egyenes vm. pontja és helyvektora
$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ — az egyenes irányvektora

ha $\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v}$ $t \in \text{ú}$, akkor

a megfelelő koordináták egyenlőségét felírva

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + t\,v_1 \\ y &= y_o + t\,v_2 \\ z &= z_o + t\,v_3 \end{aligned}\right\} \text{ — } \underline{\textbf{az egyenes paraméteres egyenletrendszere}}$$

Ha $v_1 \neq 0,\quad v_2 \neq 0,\quad v_3 \neq 0$ a 3 egyenletből

$$t = \boxed{\frac{x - x_o}{v_1} = \frac{y - y_o}{v_2} = \frac{z - z_o}{v_3}}$$ <u>az egyenes paraméteres egyenletrendszere</u>

PÉLDA Írjuk fel az $A(2, -3, 1)$ és $B(-5, 7, 2)$ pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

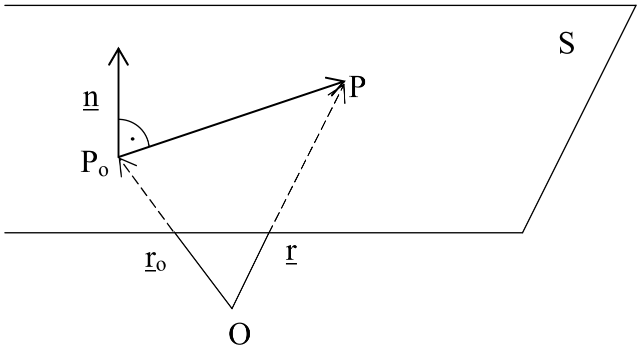
Megoldás irányvektora: $\underline{v} = \overrightarrow{AB} = (-7, 10, 1)$
egy pontja: $A = (2, -3, 1)$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 7t \\ y &= -3 + 10t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\} \qquad t \in \square$$

3.2 A sík

Adott $P_o(x_o, y_o, z_o)$ pont és $\underline{n} = (A, B, C) \neq \underline{0}$
S sík illeszkedjen a $\mathbf{P_o}$ pontra és legyen merőleges $\underline{n}$-ra ($\underline{n}$ a sík <u>normálvektora</u>!)



P (x, y, z) , $\underline{r} = (x, y, z)$
P_o (x_o, y_o, z_o) , $\underline{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$
$\underline{n} = (A, B, C) \neq \underline{0}$

A P pont akkor és csak akkor van az **S** síkon, ha

$\overrightarrow{P_oP} = \underline{r} - \underline{r}_o$ vektor merőleges $\underline{n}$-ra, azaz ha skaláris szorzatuk 0.

$n(\underline{r} - \underline{r}_o) = 0$ (skaláris szorzat)

TÉTEL Ha egy sík adott P_o pontjának helyvektora r_o, normálvektora pedig $\underline{n} \neq \underline{0}$, akkor a sík vektoregyenlete:

$$n(\underline{r} - \underline{r}_o) = 0$$

Az sík általános egyenlete:

$\underline{n} = (A, B, C)$
$\underline{r} = (x, y, z)$ $\underline{r} - \underline{r}_o = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$
$\underline{r}_o (x_o, y_o, z_o)$

A sík vektoregyenletében szereplő skaláris szorzatot a koordinátákkal kiszámítva:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$ a sík általános egyenlete

Ezt átrendezve

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{ahol} \qquad D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$$

a sík általános egyenlete

PÉLDA Írjuk fel azon sík egyenletét, amely illeszkedik a $P(1, -2, 3)$ pontra és párhuzamos a $3x - 4y - 5z - 3 = 0$ egyenletű síkkal!

Megoldás Az adott sík: $\underline{n} = (3, -4, 5)$

A két sík normálvektora azonos!

A keresett sík egyenlete: $3(x - 1) - 4(y + 2)y + 5(z - 3)$

átalakítva: $3x - 4y + 5z = 26$

IV. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY

1. A függvény fogalma (általánosan)

DEFINÍCIÓ. Ha egy A halmaz bizonyos elemeihez hozzárendeljük egy B halmaz egy-egy elemét, akkor az A halmazból a B halmazba vivő függvényt értelmeztük.

Jele: ha f ilyen függvény jele
$f : A \to B$

A halmaz	$f : A \to B$	függvény alaphalmaza
B halmaz	$f : A \to B$	függvény képhalmaza

Ha a0A és f függvény a-hoz az f(a)-t rendeli B-ből, akkor f , a′ helyen felvett helyettesítési értéke f(a)0B.

DEFINÍCIÓ. Az $f : A \to B$ függvény értelmezési tartománya azon A-beli elemek halmaza, amelyekhez f ténylegesen hozzárendeli B valamelyik elemét.

Az f értékkészlete pedig azon B-beli elemek halmaza, amelyeket f hozzárendel, az A-nak legalább egy eleméhez.

Jelölés: f értelmezési tartománya D_f
f értékkészlete R_f

$D_f \subseteq A$ és $R_f \subseteq B$

PÉLDÁK

1. $f : ú \to ú \quad ; \quad f(v) = \sqrt{1^2 - v^2}$ — egyváltozós valós függvény
$D_f = [-1;1] \subset ú \quad ; \quad R_f \subset ú$

2. $f : ú^2 \to ú \quad ; \quad t(a,m) = \dfrac{am}{2}$ — ♠ területe, kétváltozós valós függvény
$D_t = \{(a,m) \mid (a,m) \in ú^2, a > 0, m > 0\} \subset ú^2 \quad , \quad R_t = ú^+ \subset ú$

2. Számsorozatok

2.1 A számsorozat fogalma

DEFINÍCIÓ. Számsorozatnak nevezzük azt a függvényt, amely minden pozitív egész számhoz egy-egy számot rendel (ez a szám lehet valós, de komplex is!)

Jelölése: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$
a_n a sorozat n-edik, v. ált. eleme
$\{a_n\}$ — a sorozat rövid jelölése

MEGJEGYZÉS: A sorozat mint fv. értelmezési tartománya: N^+
A sorozat mint fv. értékkészlete δ | (C)

Sorozatot megadhatunk

1. <u>Képlettel</u>

pl.: a) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ $n0N^+$

b) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $n0N^+$

(a), b): valós sorozatok)

c) $\left\{i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots, i^n, \ldots\right\} = \left\{i^n\right\}$ $n0N^+$ komplex sorozat

2. <u>Rekurzív definícióval</u>

pl.: a) (az un. Fibonacci-féle számsorozat) valós sorozat

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$ ha $n \geqq 3,$ $n0N$

$\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

b) $a_1 = 1$ $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + 1,$ ha $n \geqq 2,$ $n0N$

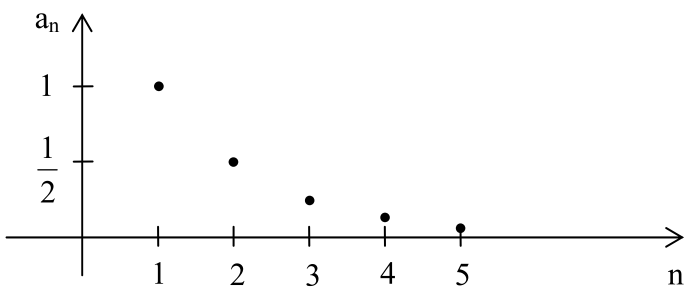
$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}, \ldots\right\}$

3. <u>Képzési utasítással</u>

pl : legyen a_n a π $n-$edik tizedesjegye valós sorozat

$\{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 6, \ldots\}$

4. <u>Grafikusan</u>



$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $n\square N^+$

valós sorozat

MEGJEGYZÉS: Mi valós számsorozatokkal foglakozunk részletesebben!

2.2 Monoton és korlátos sorozatok

Monoton sorozatok

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat <u>növekedő</u>, ha $a_n \leqq a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat <u>szigorúan növekedő</u>, ha $a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat <u>csökkenő</u>, ha $a_n \geqq a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat <u>szigorúan csökkenő</u>, ha $a_n > a_{n+1}$

<u>teljesül $\forall n \in N^+$ esetén</u>.

PÉLDÁK

1. $\{0, 2, 4, 6, 8,\ldots\}$ szigorúan növekedő sorozat
2. $\{0, 0, -1, -1, -2, -2, -3, -3,\ldots\}$ monoton csökkenő sorozat
3. $\{-1, 1, -1, 1,\ldots\}$ nem monoton sorozat
4. $\{a_n\} = \left\{\frac{n+3}{2n-1}\right\}$ $n \in N^+$ Milyen monotonitású?

$$a_{n+1} = \frac{n+4}{2n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{2n+1} - \frac{n+3}{2n-1} = \cdots = \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

$\forall n \in N^+$ esetén

Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

<u>Korlátos sorozatok</u>

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat <u>felülről korlátos</u>, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in N^+ - re$ $a_n \leqq K$

Az $\{a_n\}$ sorozat <u>alulról korlátos</u>, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $k \leqq a_n$

Az $\{a_n\}$ sorozat <u>korlátos</u>, ha alulról és felülről is korlátos,

azaz ha $\forall n \in N^+ - re$ $k \leqq a_n \leqq K$

k szám a sorozat alsó korlátja

K szám a sorozat felső korlátja

MEGJEGYZÉSEK:

1. Korlátos sorozatnak végtelen sok alsó, ill. felső korlátja van.
2. A felső korlátok között van legkisebb, az alsó korlátok között van legnagyobb.

DEFINÍCIÓ. Felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat <u>felső határ</u>ának (<u>szuprémumának</u>);

alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat <u>alsó határ</u>ának (<u>infimumának</u>) nevezzük.

PÉLDÁK

1. $\{a_n\} = \{1+2n\}$ n0N$^+$ alulról korlátos sorozat

   mivel $3 \leqq 1+2n \quad \forall n \in N^+ - re$ 3 a sorozat infimuma!

2. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ n0N$^+$ korlátos sorozat

   $0 < \frac{1}{n} \leqq 1 \quad \forall n \in N^+$

   0 infimum

   1 szuprémum

2.3 Sorozatok konvergenciája

Pl.:

1. Legyen $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $\quad \{2 + (-1)^n \frac{1}{n}\}$ n0N$^+$

   $$\left\{2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \frac{17}{8}, \frac{17}{9}, \ldots\right\}$$

   $$a_{1000} = 2 + \frac{1}{1000n} = 2{,}001$$

   n növelésével hogyan viselkednek a sorozat elemei?

   Igaz-e: ha $n = \infty$ $\quad a_n = 2$

   Nem igaz! A <u>∞ nem tényleges mennyiség</u>, hanem egy minden határon túl folytatható <u>folyamat szimbóluma</u>. Tehát itt, ha $n \to \infty$, akkor $a_n \to 2$

   Itt a 2 számot a sorozat határértékének nevezzük.

2. Legyen $b_n = (-3)^n$ $\quad \left\{(-3)^n\right\}$ n0N+

   $\left\{(-3)^n\right\} = \{-3,\ 9,\ \text{-}27,\ 81, \ldots\}$ sorozat esetében úgy gondolhatjuk nincs olyan szám melyet a_n megközelít, ha $n \to \infty$.

   DEFINÍCIÓ (1)**.** <u>Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens</u>, ha □ olyan A0| szám, hogy A □ környezetébe a sorozatnak véges sok eleme kivételével minden eleme beletartozik és ekkor az A számot a <u>sorozat határértékének</u> nevezzük.

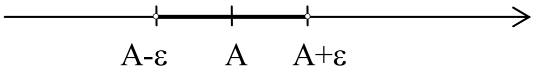
   DEFINÍCIÓ (2)**.** . Az <u>$\{a_n\}$ sorozat konvergens</u> és <u>határértéke</u> az A szám, ha □ ε>0-hoz, meghatározható olyan N_o természetes szám (N_o ε–tól függő), hogy ha $n>N_o$ akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ |.

Az A szám az $\{a_n\}$ határértéke, jelben:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{v.} \quad a_n \to A \text{, ha} \quad n \to \infty$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Az A szám ε sugarú környezetén (ε>0) az
   $]A\text{-}\varepsilon;\ A+\varepsilon[$ nyílt intervallumot értjük, azaz
   $]A\text{-}\varepsilon;\ A+\varepsilon[\ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ A\text{-}\varepsilon < x < A+\varepsilon\}$



2. $|\ a_n\text{-}A\ | < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{-}\varepsilon < a_n\text{-}A < \varepsilon$
   $A\text{-}\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$

3. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergenciájára adott két definíció ekvivalens.

1. TÉTEL Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van. (Nem bizonyítjuk!)

DEFINÍCIÓ. Az olyan sorozatot, amelynek nincs határértéke divergensnek nevezzük.

PÉLDÁK

1. Divergens sorozatok:
   $\{(-3)^n\} = \{-3, 9, -27, 81, \ldots\}$
   $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
2. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\dfrac{1+2n}{2+n}\right\}$ sorozat konvergens!

Megoldás

$$\left\{1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \frac{11}{7}, \ \ldots, \underset{a_{98}}{\frac{197}{100}}, \ \ldots, \underset{a_{1000}}{\frac{2001}{1002}}, \ldots, \underset{a_{10000}}{\frac{20001}{10002}}, \ \ldots\right\}$$

Sejtés: a határérték A=2
A 2. definícióval igazoljuk, hogy a határérték 2.
Írjuk fel és oldjuk meg az $|a_n\text{-}A| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget n-re, majd elemezzük a megoldást.

$$\left|\frac{1+2n}{2+n} - 2\right| < \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon > 0, \quad n \in N^+$$

$$\left|\frac{-3}{2+n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|-3|}{|2+n|} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{2+n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\varepsilon} - 2 < n$$

Itt $N_o = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right]$. Tehát ha $n > N_o = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right]$, akkor $|a_n-2| < \varepsilon$, azaz a sorozat teljesíti a 2. definíciót, így $\left\{\frac{1+2n}{2+n}\right\}$ konvergens és határértéke 2.

Jelben: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n}{2+n} = 2$$

A konvergencia bizonyítás vége!

A sorozat azon elemei melyekre $n>N_o$, a $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ intervallumban, azaz a 2 ε sugarú környezetében vannak. Véges sok elem: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{No}$ esik csak kívül a 2 ε sugarú környezetén.

Pl.: legyen $\bar{\varepsilon}=3\cdot 10^{-3}$ $\quad \bar{N}_o=\left[\frac{3}{3\cdot 10^{-3}}-2\right]=998$ küszöbszám!

Tehát

a 2 0,003 sugarú környezetén kívül eső elemek: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{998}$

a 2 0,003 sugarú környezetébe eső elemek: $a_{999}, a_{1000}, a_{1001}, \ldots$— végtelen sok

2. TÉTEL Ha $\{a_n\}$ konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

A konvergencia definíciójával bizonyítunk.

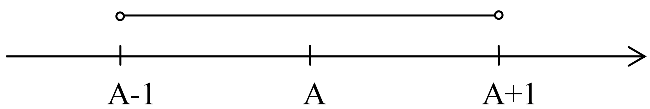
Ekkor pl.: $\varepsilon=1$-hez is $\exists\, N_o \in N^+$, hogy ha $n>N_o$, akkor $|a_n-A| < 1 \Rightarrow A-1<a_n< A+1$

A sorozat azon elemei, melyre $n>N_o$, teljesítik a fenti egyenlőtlenséget.

A sorozat $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_{No}$ elemei vannak kívül az $]A-1, A+1[$ intervallumon.

Válasszunk alsó korlátot: $k = \min\{A-1, a_1, a_2, \ldots, a_{No}\}$

Válasszunk felső korlátot: $K = \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_{No}\}$



Minden n-re $k \leqq a_n \leqq K$ tehát a sorozat korlátos!

MEGJEGYZÉS: Az előző tétel <u>megfordítása nem igaz</u>, azaz van olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens!

DEFINÍCIÓ. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot az $\{a_n\}$ <u>torlódási pontjának</u> nevezzük, ha α □ környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

PÉLDA $\{(-1)^n\}=\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$

Két torlódási pont: -1 és 1

De: a sorozat divergens!

2.4 Konvergenciakritériumok

- A konvergencia definíciója alapján gyakran nehéz bizonyítanunk konvergens-e az adott sorozat, ehhez ugyanis ismernünk kellene a sorozat határértékét!
- Előfordulhat nem is vagyunk kíváncsiak a határértékre, csupán az érdekel bennünket, konvergens-e a sorozat (azaz van-e határértéke!)
- Fontos olyan kritériumok ismerete, melyek segítségével a konvergencia egyértelműen eldönthető.

Külön megadhatunk a konvergenciára

1. szükséges
2. elégséges
3. szükséges és elégséges

feltételeket!

2.4.1 A konvergencia szükséges feltétele

TÉTEL A konvergencia szükséges feltétele a korlátosság. (Másképp fogalmazva: Ha $\{a_n\}$ konvergens, akkor korlátos.) (Korábban biz.!)

MEGJEGYZÉSEK

1. A nem korlátos sorozatok divergensek
2. Ha a sorozat korlátos, még nem biztos, hogy konvergens is!

PÉLDÁK

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ $\quad \lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \;\Rightarrow$ a sorozat korlátos

$\left\{n^2\right\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ nem korlátos (nincs felső korlát) $\Rightarrow$ divergens sorozat

$\left\{(-1)^n\right\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ korlátos, de divergens sorozat

2.4.2 A konvergencia elegendő feltétele

TÉTEL Ha az $\{a_n\}$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

(Másképp: Az $\{a_n\}$ sorozat konvergenciájához elegendő, hogy a sorozat monoton és korlátos legyen.)
(Nem bizonyítjuk!)

2.4.3 A konvergencia szükséges és elégséges feltételei

1. TÉTEL Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos és csak egyetlen torlódási pontja van.
(Nem bizonyítjuk!)

2. TÉTEL Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha □ $\varepsilon>0$-hoz □ N_o természetes szám (N_o ε-tól függő), hogy ha n, m $>N_o$, akkor $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(Cauchy-féle konvergenciakritérium!)

2.5 Végtelenhez tartó sorozatok

(Ezen sorozatok divergensek!)

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat a $+\infty$-hez tart, ha □ k>0 számhoz □ N_o 0 N^+, hogy ha $n>N_o$, akkor $a_n>K$.

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ill. $a_n \to \infty$, ha $n \to \infty$

DEFINÍCIÓ. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ akkor az $\{a_n\}$ sorozat a $-\infty-$hez tart.

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ v. $a_n \to -\infty$, ha $n \to \infty$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3\right) = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3^n\right) = -\infty$

2.6 Néhány nevezetes konvergens sorozat

1. $\{a\}$ $a \in$ ú $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$
2. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

$\Big\}$ a konvergencia definícióval biz.

3. $\{q^n\}$ $q \in$ ú mértani sorozat q a kvóciense

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |q|<1 \\ 1, \text{ ha } q = 1 \\ \text{divergens, minden egyéb esetben} \end{cases}$$

de $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, ha q>1

4. $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ $a \in$ ú$^+$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$
5. $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
6. $$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{2,\ \frac{9}{4},\ 2,\dot{3}7\dot{0},\ 2,441...,\ 2,48832,\ \ldots,\ 2,7048...,\ \ldots\right\}$$

□

a_{100}

Mutassuk meg, hogy teljesül a fenti sorozatra a konvergencia elégséges feltétele, azaz monoton és korlátos.

a) <u>A sorozat monotonitásának bizonyítása</u>

Sejtés: a sorozat monoton növekedő (a néhány első elem ezt sugallja!)
A bizonyításhoz felhasználjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ legyenek nemnegatív valós számok,

ahol $k \in N^+$

ekkor

$$\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

(mértani k.) (számtani k.)

(Ha $a_1 = a_n \ldots = a_k$, akkor és csak akkor egyenlő a két oldal.)

Tekintsük a következő n+1 db számot

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \quad db}, \quad 1$$

Írjuk fel a fenti (n+1) szám számtani és mértani közepét!

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$ ś n 0 N^+esetén igaz

□ □

$$a_n < a_{n+1},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekedő

b) <u>A sorozat korlátosságának bizonyítása</u>

Mivel $a_1 < a_2 < \ldots a_n < a_{n+1} < \ldots$ ezért a sorozat alulról biztosan korlátos. Alsó határ: a_1=2.

Tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy felülről is korlátos.

Tekintsük a következő n+2 db számot

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \quad db}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Írjuk fel a fenti (n+2) szám számtani és mértani közepét!

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}$$

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2}=1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4} < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad \forall\, n \in N^+\text{-re teljesül}$$

Tehát $a_n < 4$ $\forall\, n \in N^+$-re így a sorozat felülről is korlátos, azaz

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad \forall\, n \in N^+\text{-re}$$

A konvergencia elegendő feltétele teljesül a sorozatra (szig., monoton nő és korlátos), azaz az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, tehát van határértéke.

Kimutatták, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke irracionális szám, melyet e-vel jelölünk.

DEFINÍCIÓ. Az `e` valós számot az

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

határértékkel definiáljuk.

$e \approx 2{,}7182818285\ldots$

DEFINÍCIÓ. Az `e` alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezzük.

A $x \in R^+$ szám természetes logaritmusának jelölése ln x.

MEGJEGYZÉS:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k \quad , \quad \text{ha } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad , \quad k \in R$$

2.7 Műveletek konvergens sorozatokkal

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok összegén azt a $\{c_n\}$ sorozatot értjük amelynek n-edik eleme:

$$c_n = a_n + b_n$$

MEGJEGYZÉS: Hasonlóan értelmezhető két sorozat különbsége, szorzata, hányadosa.

TÉTEL Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozat konvergens és
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, akkor

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot A$ ś c 0 ú esetén
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A\cdot B$
4. ha $B \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$

Csak a 2. állítást bizonyítjuk.

Bizonyítás.

A konvergencia definíciója alapján bizonyítjuk.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens, így mindkét sorozatra teljesül a konvergencia definíciója, miszerint ś $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz □ N_1, ill. □ N_2 term. szám, hogy

$$\left|a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{ha} \quad n > N_1$$

$$\left|b_n - B\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{ha} \quad n > N_2$$

Mi azt akarjuk bizonyítani, hogy $\left(a_n + b_n\right) \to \left(A + B\right)$

Mutassuk meg, hogy az $(a_n + b_n)$ sorozatra is teljesül a konvergencia definíciója, miszerint

$\left|\left(a_n + b_n\right) - \left(A + B\right)\right| < \varepsilon$, ha $n > N_o$ ahol (ε tetsz. + szám)

$$\left|\left(a_n + b_n\right) - \left(A + B\right)\right| \leqq \underbrace{\left|a_n - A\right|}_{\substack{\vee \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ha } n > N_1}} + \underbrace{\left|b_n - B\right|}_{\substack{\vee \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ha } n > N_2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ha $n > N_o = \max\left(N_1, N_2\right)$

Tehát

$\left|\left(a_n + b_n\right) - \left(A + B\right)\right| < \varepsilon$, ha $n > N_o$, ahol ś $\varepsilon > 0$ szám

ami igazolja a tétel állítását.

TÉTEL (Rendőrelv!) Ha $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, valamint véges sok n kivételével $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ teljesül, akkor $\{b_n\}$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

(Nem biz.)

MEGJEGYZÉS:

1. Divergens sorozatokkal végzett műveletek eredményeként kapott sorozatok lehetnek konvergensek és divergens is!

   Mindig a konkrét eset vizsgálata szükséges!

2. Semmi biztosat nem mondhatunk a

   $$\infty-\infty \quad ; \quad 0\cdot\infty \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad 1^{\infty} \quad ; \quad \infty^{0} \quad ; \quad 0^{0}$$

   típusú határértékekről.

2.8 Példák sorozatok határértékének kiszámítása

A konvergens sorozatokra vonatkozó tételek és a nevezetes konvergens sorozatok határértékének felhasználásával számolunk határértékeket.

Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2+5\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}=0$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1}{n^3+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-12\frac{1}{n}+6\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^3}{1+3\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^3}=8$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2^n+4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot 3^n}{2^n+\frac{1}{4}\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}}=0$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+\frac{3}{2}\cdot 2^n}{\frac{1}{3}\cdot 3^n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}+9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

   Divergens! Két torlódási pontja van: -3 és 3

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{(-1)^n}{n}\right)=2$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+6}+n}{\sqrt{n^2+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6-n^2}{\sqrt{n^2+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n^2+6}+n}=0$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=e^3$$

8. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n}\right]^2 = \left(\frac{e^{\frac{5}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}}\right)^2 = \left(e^2\right)^2 = e^4$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}$$

Rendőrelv segítségével!

$$\sqrt[n]{2} \quad < \quad \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} \quad < \quad \sqrt[n]{4}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1$$

Tehát $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} = 1$

3. Egyváltozós valós függvény alaptulajdonságai

3.1 A függvény fogalma, megadása

DEFINÍCIÓ. Egyváltozós valós függvényen olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmazának valamely részhalmaza

Függvények jelölése: f, g, h,…, φ, ψ,…stb.

Ha egy függvényt a matematikai fogalma alapján pontosan akarunk megadni, akkor megadjuk az értelmezési tartományát, a képhalmazát és a hozzárendelés szabályát.

PÉLDÁK

1. f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad ,x\to\sqrt{3x-7}$

$D_f\subseteq\mathbb{R}$ $\qquad$ itt $\qquad D_f=[\frac{7}{3};\infty[$

$R_f\subseteq\mathbb{R}$ $\qquad\qquad R_f=[0;\infty[$

vagy

$f(x)=\sqrt{3x+7}$, $D_f=[\frac{7}{3};\infty[$, $R_f\subseteq\mathbb{R}$ $\quad R_f=[0;\infty[$

2. $g(x)=\frac{1}{x-3}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $R_g\subseteq\mathbb{R}$ $\quad R_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

MEGJEGYZÉS: Ha az f függvény x helyen vett helyettesítési értéke képlettel megadható és f-nek csak alaphalmazát és képhalmazát adjuk meg (itt | mindkettő), akkor D_f és R_f megállapítása számítással jár. Ilyenkor D_f a | azon legbővebb részhalmaza, amelyeknek elemeihez a képlet függvényértéket rendelhet.

<u>Egyváltozós függvény szemléltetése</u>

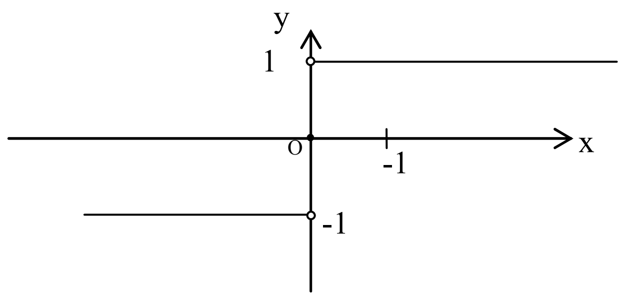
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$

f függvény síkbeli derékszögű koordináta rendszerben, az y = f(x) egyenletű geometriai alakzattal ábrázoljuk, miközben x befutja a D_f halmaz elemeit. Az y = f(x) egyenletű geometriai alakzatot az <u>f függvény grafikonjának</u> nevezzük.

PÉLDA $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ -1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$ = sgn x

előjelfüggvény

Ábrázoljuk



y = sgn x

$R_f \{-1,\ 0,\ 1\}$

3.2 Függvények jellemzése, függvénytani alapfogalmak

3.2.1 Korlátosság

DEFINÍCIÓ. Az f függvényt <u>felülről korlátos</u>nak nevezzük, ha › K ∈ ú szám, hogy
$\forall\, x \in D_f - \text{re} \qquad f(x) \leq K$,

Az f függvény <u>alulról korlátos</u>, ha › k ∈ ú szám, hogy
$\forall\, x \in D_f - \text{re} \qquad k \leq f(x)$

Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz
$k \leq f(x) \leq K \qquad \forall\, x \in D_f - \text{re}$

felső határ : legkisebb felső korlát (sup f (x))
alsó határ : legnagyobb alsó korlát (inf f(x))

PÉLDÁK

1. $f(x) = \sin x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ Korlátos fv , mert
$R_f \subseteq \mathbb{R}$
$-1 \leqq f(x) \leqq 1 \qquad \forall x \in D_f - \text{re}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0;\infty[$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$, $R_f = [0;\infty[$

$0 \leqq \sqrt{x}$, $\forall x \in D_f - \text{re}$

f nem korlátos, mert csak alulról korlátos.

3.2.2 Páros, páratlan függvények

DEFINÍCIÓ. Az f függvényt, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra páros függvénynek nevezzük, ha $\forall x \in D_f - \text{re}$ $f(-x) = f(x)$, és páratlan függvénynek, ha $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS Ábrázolható függvények esetén, ha f páros, grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, ha páratlan, a képe az origóra szimmetrikus.

PÉLDA Legyen $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$, $D_f =$ ú Milyen paritású f függvény?

Megoldás D_f origóra szimmetrikus

$$f(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{3^x} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = -\frac{3^x - 1}{3^x + 1} = -f(x)$$

Tehát , $\forall x \in D_f - \text{re}$ $\quad f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow$ f páratlan

3.2.3 Periodikus függvények

DEFINÍCIÓ. Az f függvény periodikus, ha › olyan p>0 szám, hogy teljesül a következő 2 feltétel:

1. $\forall x \in D_f - \text{re} \qquad (x + p) \in D_f$
2. $\forall x \in D_f - \text{re} \qquad f(x + p) = f(x)$

A p>0 szám az f fv periódusa.

PÉLDÁK

1. $f(x) = \sin(x)$ $\quad D_f =$ ú
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \forall x \in D_f - \text{re}$
f legkisebb periódusa 2π

2. $g(x) = \cos(x)$ $\quad D_g =$ ú

$\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ $\quad \forall x \in D_f - re \quad 2\pi$ per.

3. $h(x)=tg(x) \quad D_f = ú\ (\ \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$tg(x+\pi)=tg(x)$ $\quad \pi$ per.

4. $k(x)=c\,tg(x) \quad D_f = ú\ (\ \{k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$

$c\,tg(x+\pi)=c\,tg(x)$ $\quad \pi$ per.

3.2.4 Monoton függvények

DEFINÍCIÓ. az f függvényről akkor mondjuk, hogy ez a függvény az értelmezési tartományán

<u>monoton növekvő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$

<u>monoton csökkenő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$

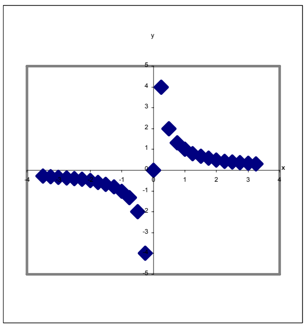
<u>szig. monoton növekvő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

<u>szig. monoton csökkenő, ha</u> $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

a D_f minden (x_1, x_2) elempárjára.

PÉLDA $f(x)=\frac{1}{x}$, $D_f = ú\ (\ \{0\}$ Monoton-e?

Megoldás



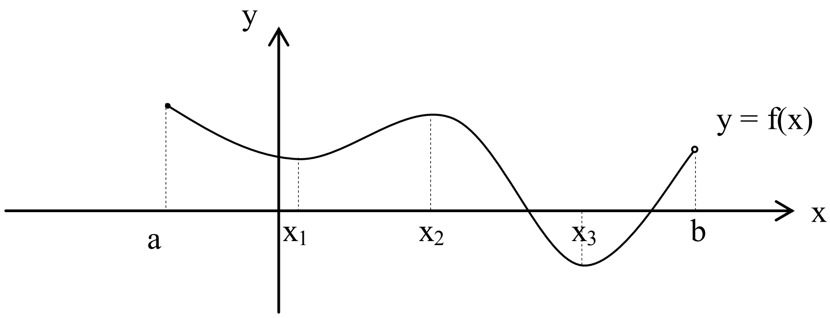
$y = \frac{1}{x}$ Nem monoton!

3.2.5 Függvények szélsőértéke

DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>helyi minimuma</u> van, ha › az x_o – nak olyan környezete, hogy ha $x \in$ ezen környezetnek, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>helyi maximuma</u> van, ha › az x_o – nak olyan környezete, hogy ha $x \in$ ezen környezetnek, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

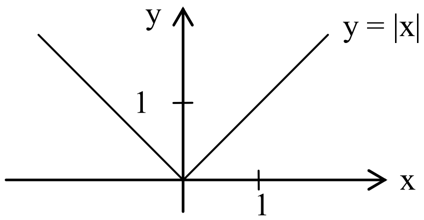
PÉLDA



$f : [a\,; b[\to \mathbb{R}$
$D_f = [a\,; b[$

$x = a$	helyen	f-nek	abszolút (totális) maximuma van
x_1	helyen	f-nek	helyi minimuma van
x_2	helyen	f-nek	helyi maximuma van
x_3	helyen	f-nek	helyi minimuma van, ami egyben abszolút minimum is

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x|$



$x = 0$	helyen	helyi minimuma van és egyben abszolút minimuma is van.
f-nek	maximuma nincs	

3.2.6 Függvény zérushelye

DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>zérushelye</u> van, ha $f(x_0) = 0$

PÉLDÁK

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \quad , \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x-3)}$

   Adjuk meg f függvény zérushelyét!

Megoldás Oldjuk meg az f (x) = 0 egyenletet D_f-en!

$$\frac{x^2 - 1}{(x-1)(x-3)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Tehát f-nek az $x = -1$ helyen van a zérushelye.

2. $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cos(x)$ zérushelyeit adjuk meg!

Megoldás $\cos(x) = 0$

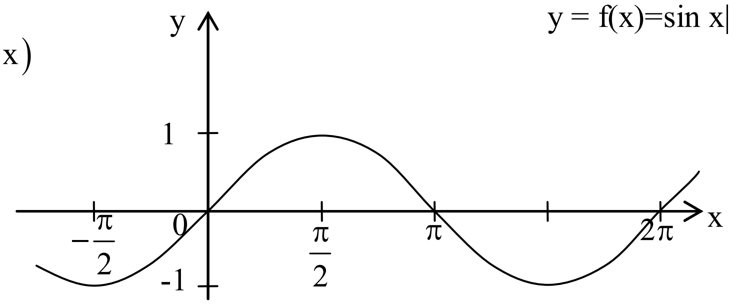
$$x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$ ezek a zérushelyek! (végtelen sok van!)

3.3 Műveletek függvényekkel

3.3.1 Függvények leszűkítése

DEFINÍCIÓ. Legyen $H \subset D_f$, $H \neq \emptyset$. Ekkor az f függvény H halmazra való leszűkítésén azt a g függvényt értjük, melyre $D_g = H$, és $\forall$ $x \in H$ esetén g(x) = f(x).

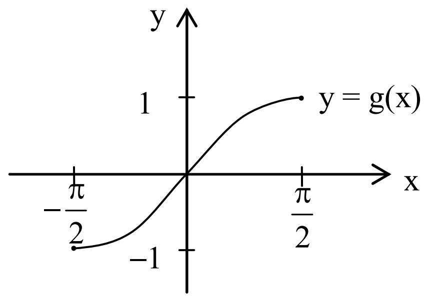
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$



Legyen $H = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

g legyen f fv leszűkítése H – ra

$D_g = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \sin x$, ha $x \in H$



3.3.2 Függvények összege, különbsége, szorzata, hányadosa

Legyen f és g két olyan függvény melyekre $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.
Z_g legyen a g függvény zérushelyeinek halmaza.

DEFINÍCIÓ. Az f és g függvények összegén, különbségén, szorzatán rendre azt a F, G, H függvényt értjük melyekre

$$D_F = D_f \cap D_g \quad \text{és} \quad F(x) = f(x) + g(x)$$
$$D_G = D_f \cap D_g \quad \text{és} \quad G(x) = f(x) - g(x)$$
$$D_H = D_f \cap D_g \quad \text{és} \quad H(x) = f(x) \cdot g(x)$$

DEFINÍCIÓ. Az f és g függvények hányadosán azt az ú függvényt értjük melyre

$$D_R = \left(D_f \cap D_g\right) (\ Z_g \qquad \text{és} \qquad R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

PÉLDA

Legyen $D_f = [4\,;\infty[\quad , \quad f(x) = \sqrt{x+4}$

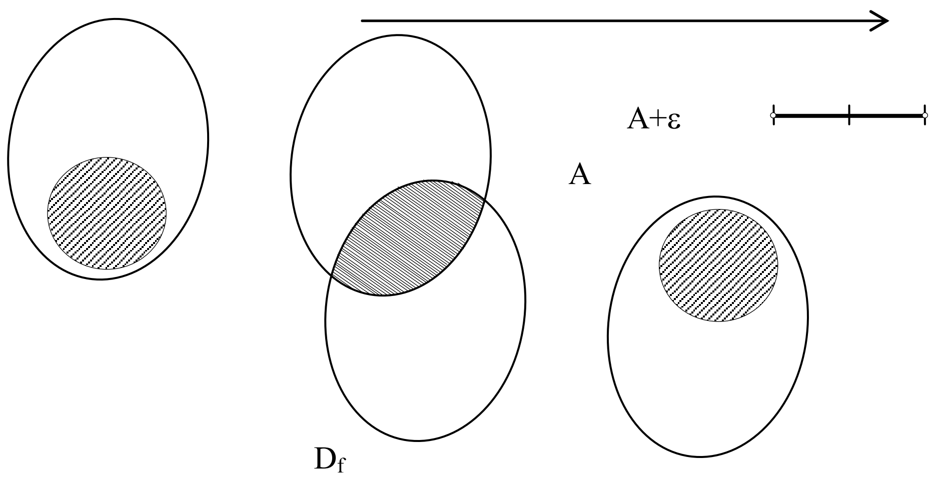
$D_g = R^+ \quad , \quad g(x) = \lg x$

$Z_g = \{1\}$, mert $\lg 1 = 0$

1. $F(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+4} + \lg x \quad , \quad D_F = D_f \cap D_g = \text{ú}^+$
2. $G(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+4} - \lg x \quad , \quad D_G = D_f \cap D_g = \text{ú}^+$
3. $H(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+4} \cdot \lg x \quad , \quad D_H = D_f \cap D_g = \text{ú}^+$
4. $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\lg x} \quad , \quad D_R = \left(D_f \cap D_g\right) \setminus Z_g = \text{ú}^+ \setminus \{1\}$

3.3.3 Függvények összetétele

DEFINÍCIÓ. Az f és g két olyan függvény, amelyekre $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Az <u>f külső és g belső függvényből képzett összetett függvényen</u> értjük azt a h függvényt, amelynek értelmezési tartománya a g értelmezési tartományának azon része, ahol g olyan értékeket vesz fel, melyeken f értelmezett. A h összetett függvény hozzárendelési törvénye: $h(x) = f(g(x))$.



PÉLDA

$h(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$ Elemzzük a szerkezetét!

Adjuk meg h függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

külső függvény $f(x)=\sqrt{x}$ $D_f=[0;\infty[$, $R_f=[0;\infty[$

belső függvény $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ $D_g=]0;\infty[$, $R_g=$ ú

R_g 1 $D_f=[0;\infty[\neq\emptyset$

h értéktart. meghat. $\log_{\frac{1}{2}} x \geqq 0$

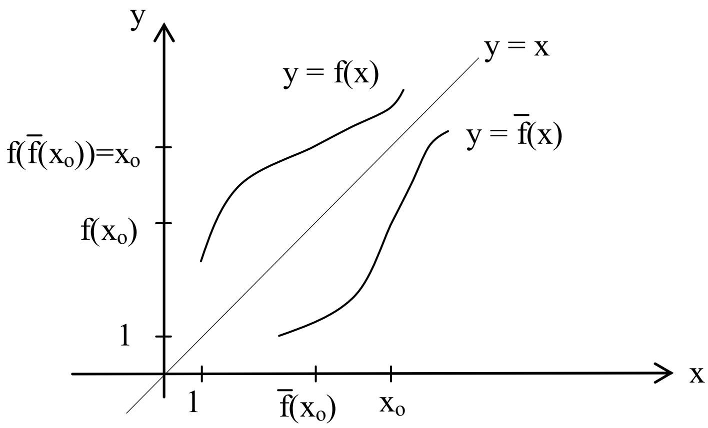
$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} 1$

$0 < x \leqq 1$

$D_h = D_{f_o g} =]0;1] \subset D_g$

3.3.4 Függvények inverze

DEFINÍCIÓ. Legyen az f függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű. Az f függvény inverz függvényén értjük azt az $\bar{f}$ függvényt, melynek értelmezési tartománya az f értékkészlete és hozzárendelési törvénye: egy $x_o \in D_{\bar{f}}$ értékhez azt az $\bar{f}(x_o)$ értéket rendeli, melyre $f(\bar{f}(x_o)) = x_o$



MEGJEGYZÉSEK

1. Az f függvény az értelmezési tartományának H részhalmazán kölcsönösen egyértelmű leképzését valósít meg, ha f a H halmaz különböző elemeihez különböző értékeket rendel az értékkészletéből, azaz ha $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in H$ esetén.
2. Mivel minden szigorúan monoton függvény kölcsönösen egyértelmű leképzést valósít meg, így a szigorúan monoton függvényeknek mindig létezik az inverz függvényük.
3. Van olyan invertálható függvény, amely nem monoton!

PÉLDA Legyen $D_f=$ ú , $f(x)=1-3^{x+2}$

Adjuk meg az inverz függvényét!

Megoldás Vizsgáljuk meg f monotonitását!

$3^x \nearrow \rightarrow 9 \quad 3^x = 3^{x+2} \nearrow \rightarrow -3^{x+2} \searrow \rightarrow 1-3^{x+2} \searrow$

Mivel f szig. mon. csökkenő $\Rightarrow$ invertálható

R_f meghat.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 3^{x+2} \\ 0 > -3^{x+2} \\ 1 > -3^{x+2} + 1 \end{array}\right\} \quad R_f =]-\infty;1[$$

Az inverz fv. hozzárendelési törvénye: $f(\bar{f}(x)) = x$

Most: $f(\bar{f}(x)) = 1 - 3^{\bar{f}(x)+2} = x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = ?$

$$3^{\bar{f}(x)+2} = 1 - x$$

$$\bar{f}(x) + 2 = \log_3(1-x)$$

$$\bar{f}(x) = \log_3(1-x) - 2$$

$D_{\bar{f}} =]-\infty;1[$

$R_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

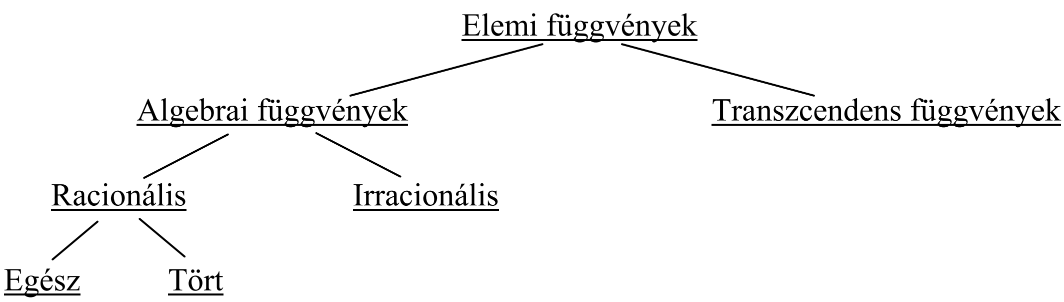
$\bar{f}(x) = \log_3(1-x) - 2$ Az f függvény inverz függvénye

3.4 Egyváltozós elemi függvények

Az elemi függvények osztályát a

- konstans függvények
- hatványfüggvények
- trigonometrikus függvények
- logaritmikus függvények

és az ezekből véges számú összeadással, kivonással, szorzással, osztással, összetett és inverzfüggvény képzéssel előállítható függvények alkotják.



Algebrai függvények: azok a függvények, melyek konstansokból és a változóból véges számú összeadás, kivonás, szorzás, osztás és egész kitevőjű gyökvonás útján jönnek létre.

Racionális függvények:azok az algebrai függvények, melyek leképzéséhez a gyökvonást nem kell felhasználni.

Racionális egész függvények v. polinomfüggvények:

n-edfokú $f := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$ $D_f = \mathbb{R}$

ahol $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ adottak

Racionális törtfüggvények:

Olyan törtfüggvény, amelynek számlálója és nevezője is polinomfüggvény.

<u>Transzcendens függvények:</u> azok az elemi függvények, melyek nem algebrai függvények (trigonometrikus, logaritmus függvények és ezek inverzei).

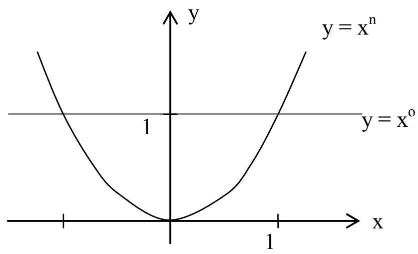
<u>Hatvány függvények:</u>

a) $D_f = ú$, $f(x) = x^n$, $n \in N$

Ha n páros

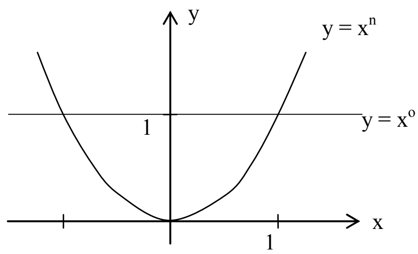
$R_f = [0;\infty[$

f páros



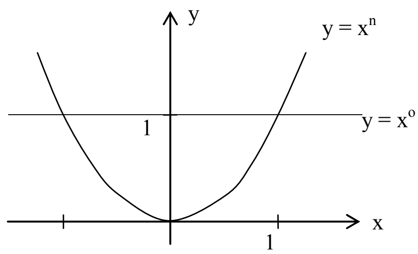
b) $D_f = ú$, $f(x) = x^n$, $n \in N^+$ n páratlan

$R_f = ú$



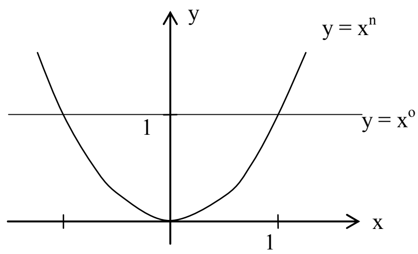
c) $D_f = ú (\{0\}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in N^+$ n páros

$R_f = ú^+$



d) $D_f = ú (\{0\}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in N^+$ n páratlan

$R_f = ú (\{0\}$

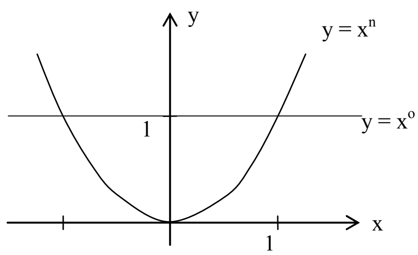


<u>Gyökös függvények (Irracionális függvények)</u>

$\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, ..., \sqrt[2n]{x} ...$, $h \in Z$

$D_f = [0;\infty[$

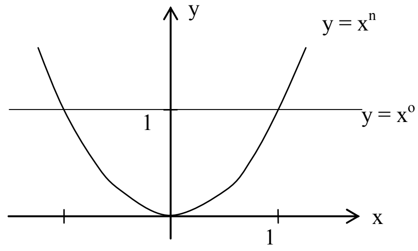
$R_f = [0;\infty[$



$\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \ldots, \sqrt[2n+1]{x} \ldots \quad , \quad h \in Z$

$D_f =$ ú

$R_f =$ ú

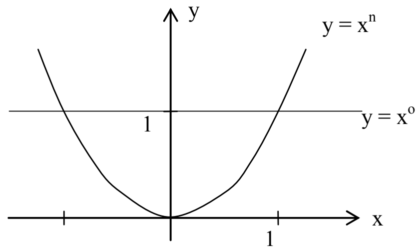


Exponenciális függvények

$f(x) = a^x \qquad D_f =$ ú

$a > 0 , a \neq 1 \qquad R_f =$ ú$^+$

(kitevőkhöz hatványfüggvényeket rendel)



Logaritmus függvények

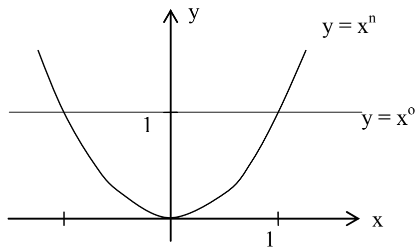
$f(x) = \log_a x \qquad D_f =$ ú$^+$

$a > 0 , a \neq 1 \qquad R_f =$ ú

(hatványértékekhez kitevőt rendel)

a^x és $\log_a x$

egymás inverz függvényei!



Trigonometrikus függvények

(A szögeket radiánban adjuk meg!)

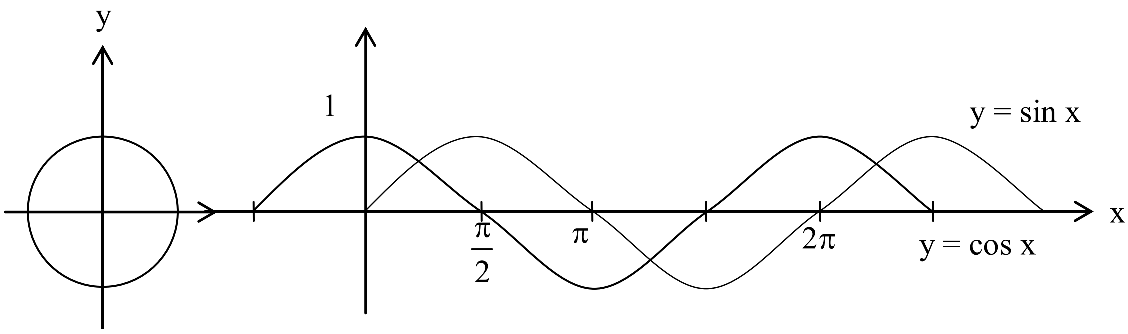
Radián: az egységsugarú körben az adott középponti szöghöz tartozó ívhossz mérőszáma.

$$360^\circ = 2 r \pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi \qquad \text{radián}$$

$$180^\circ = \pi \quad , \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \qquad \text{stb.}$$

A szinusz és a koszinusz függvény

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{i}$ egységvektor x szögű elforgatottjának első koordinátája az x szög koszinusza, második koordinátája az x szög szinusza.



Mindkét fv-re : $D_f = ú$

$R_f = [-1;1]$

Periódikusak 2π szerint : $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ $\forall\, x \in D_f -$re

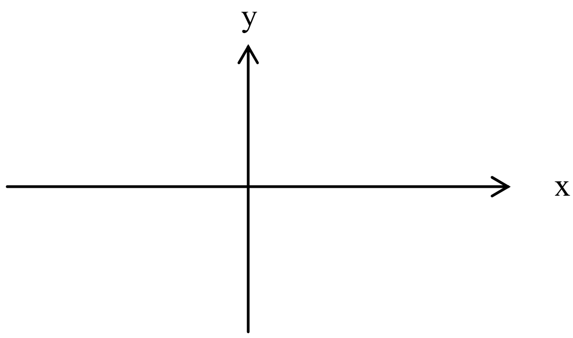
$\cos x = \cos(x + 2\pi)$

<u>A tangens függvény</u>

DEFINÍCIÓ. $\mathrm{tgx} := \frac{\sin x}{\cos x} =$ $\Rightarrow$ $D_f = ú \;(\; \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ,\, k \in Z \right\}$

$R_f = ú$

Periódikus π szerint : $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x + \pi)$, $\forall\, x \in D_f -$re

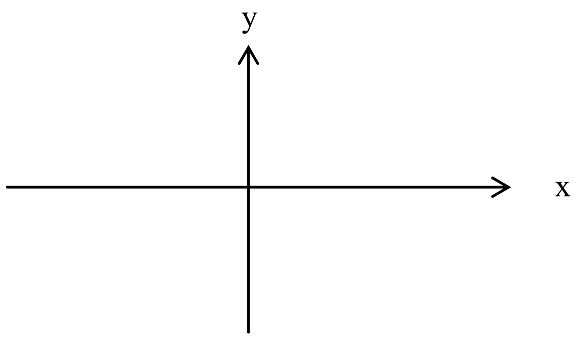


<u>A kotangens függvény</u>

DEFINÍCIÓ. $\mathrm{ctgx} := \frac{\cos x}{\sin x} =$ $\Rightarrow$ $D_f = ú \;(\; \{ k\pi ,\, k \in Z \}$

$R_f = ú$

Periódikus π szerint : $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x + \pi)$, $\forall\, x \in D_f -$re



Ciklometrikus függvények vagy arkuszfüggvények

A trigonometrikus függvények inverz függvényei. Mivel a trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományban nem invertálhatók, azonban alkalmasan választott intervallumokon szigorúan monotonok, tehát invertálhatóak is!

Az arc sin x függvény

Mivel a $\sin x$ függvény a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$-on szigorúan monoton nő és a teljes értékkészletét kimeríti, így ez az intervallum alkalmas invertálásra.

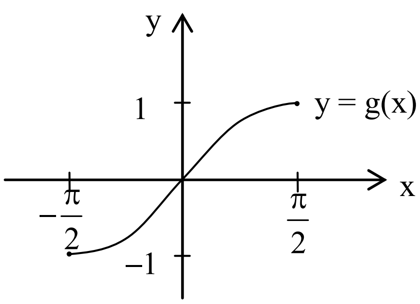
DEFINÍCIÓ. Az $f(x)=\arcsin x$ függvény a $\sin x$ fv $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való leszűkítésének inverze.

$D_f=[-1;1]$

$R_f=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin x$ azt a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-ba eső szöget jelenti, melynek szinusza x, azaz $\sin(\arcsin x)=x$

PÉLDA



$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ mert $\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ mert $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

Az arc cos x függvény

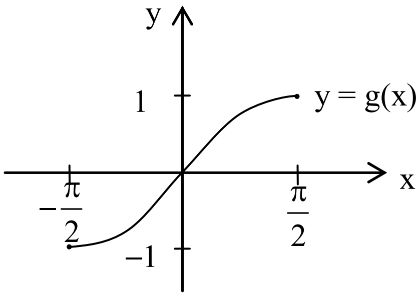
DEFINÍCIÓ. Az $f(x)=\arccos x$ függvény a $\cos x$ fv $[0;\pi]$ intervallumra való leszűkítésének inverze.

$D_f=[-1;1]$

$R_f=[0;\pi]$

$\arccos x$ jelenti azt a $[0;\pi]$-ba eső szöget, melynek koszinusza x, azaz $\cos(\arccos x)=x$

PÉLDA



$\arc\cos 1 = 0$ mert $\cos 0 = 1$

$\arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, mert $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Az arc tg x függvény

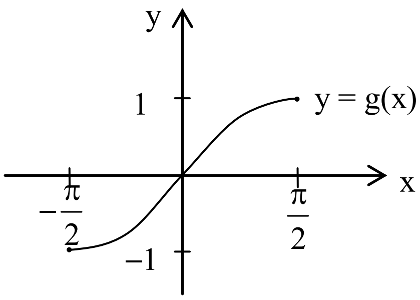
DEFINÍCIÓ. Az $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\,x$ függvény a $\mathrm{tg}\,x$ fv $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ -ra való leszűkítésének inverze.

$D_f = $ ú

$R_f = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\mathrm{arc\,tg}\,x$ jelenti azt a $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ -ba eső számot, melynek tangense x, azaz $\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}\,x) = x$

PÉLDA



$\mathrm{arc\,tg}\,0 = 0$, mert $\mathrm{tg}\,0 = 0$

$\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, mert $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Az arc ctg x függvény

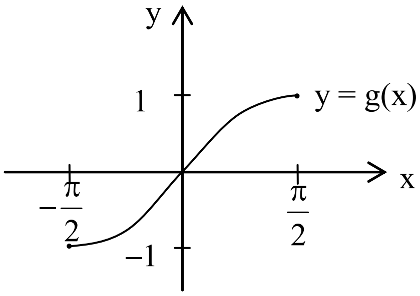
DEFINÍCIÓ. Az $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\,x$ függvény a $\mathrm{tg}\,x$ fv $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ -ra való leszűkítésének inverze.

$D_f = $ ú

$R_f =]0;\pi[$

$\mathrm{arc\,ctg}\,x$ jelenti azt a $]0;\pi[$ -ba eső számot, melynek cotangense x, azaz $\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}\,x) = x$

PÉLDA



$\operatorname{arc\,ctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, mert $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arc\,ctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, mert $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$

Hiperbolikus függvények

Ezen függvények az e^x és $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ függvényekből képzett fv.-ek

Definíció. Szinusz hiperbolikusznak nevezzük és sh-val jelöljük a $\forall x \in$ ú esetén értelmezett,

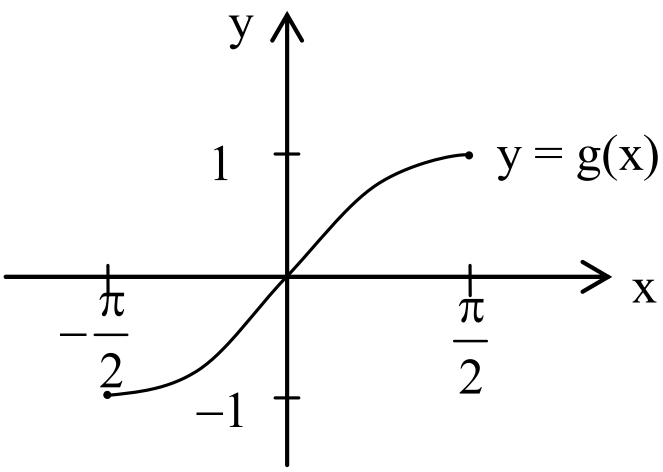
$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

képlettel meghatározott függvényt.

Koszinusz hiperbolikusznak nevezzük és ch-val jelöljük a $\forall x \in$ ú esetén értelmezett,

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

képlettel meghatározott függvényt.



$f(x) = \operatorname{sh} x$

$D_f =$ ú

$R_f =$ ú

$g(x) = \operatorname{ch} x$

$D_g =$ ú

$R_g = [1;\infty[$

Azonosságok:

$$\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^x$$
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$
$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,2x + 1\right)$$
$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,2x - 1\right) \quad \text{stb.}$$

DEFINÍCIÓ. Tangens hiperbolikusznak nevezzük és th-val jelöljük a

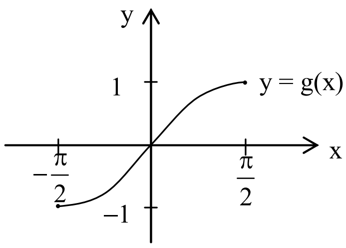
$$\mathrm{th}\,x := \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$$

képlettel meghatározott függvényt, mely a | számhalmazon értelmezett.

Kotangens hiperbolikusznak nevezzük és cth-val jelöljük a

$$\mathrm{cth}\,x := \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$$

képlettel meghatározott függvényt.



$$f(x) = \mathrm{th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad g(x) = \mathrm{cth}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$D_f = \text{ú} \qquad D_g = \text{ú} \ (\ \{0\}$$

$$R_f = \left]-1;1\right[\qquad R_g = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;\infty\right[$$

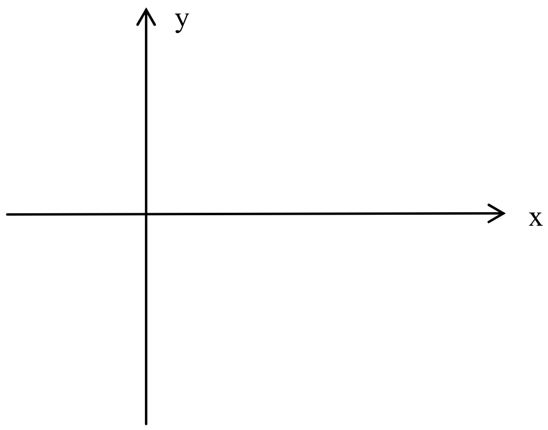
MEGJEGYZÉS:

Az

$$\left.\begin{aligned} x &= a\ \mathrm{ch}\,t \\ y &= a\ \mathrm{ch}\,t \end{aligned}\right\} \qquad a, b \in \text{ú}^+ \quad ; \quad t \in \text{ú}$$

paraméteres egyenletrendszer egy hiperbola egyik ágának egyenletrendszere.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \mathrm{ch}^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} &= \mathrm{sh}^2 t \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

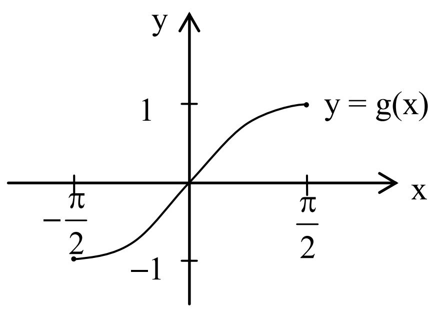


Area függvények

A hiperbolikus függvények inverz függvényei.

DEFINÍCIÓ. Az arsh x függvény a sh x függvény inverz függvénye mely $\forall x \in$ ú esetén értelmezett, hozzárendelési törvénye : $\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x$.

DEFINÍCIÓ. Az arch x függvény a ch x fv $[0;\infty[$-ra való leszűkítésének inverze, amely az $[1;\infty[$ -on értelmezett hozzárendelési törvénye: $\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x$.

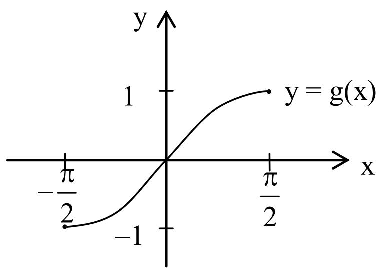


$f(x) = \operatorname{ar sh} x$
$D_f =$ ú
$R_f =$ ú

$g(x) = \operatorname{ar ch} x$
$D_g = [1;\infty[$
$R_g = [0;\infty[$

DEFINÍCIÓ. Az arth x függvény a th x függvény inverz függvénye, mely a $]-1;1[$ -on értelmezett, hozzárendelési törvénye : $\operatorname{th}(\operatorname{arth} x) = x$.

DEFINÍCIÓ. Az arcth x függvény a cth x fv inverze, melynek értelmezési tartománya, $]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$, hozzárendelési törvénye $\operatorname{cth}(\operatorname{arcth} x) = x$.



$f(x) = \operatorname{arth} x$
$D_f =]-1;1[$
$R_f =$ ú

$g(x) = \operatorname{arcth} x$
$D_g =]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$
$R_g =$ ú ($\{0\}$

MEGJEGYZÉS: Az area függvények logaritmikus függvénnyel a következőképpen fejezhetők ki:

$$\operatorname{arsh}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arch}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

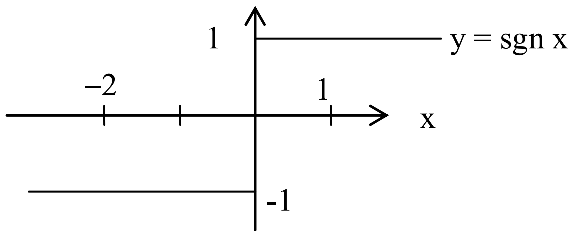
$$\operatorname{arth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1+x}$$

$$\operatorname{arcth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$$

3.5 Függvények határértéke

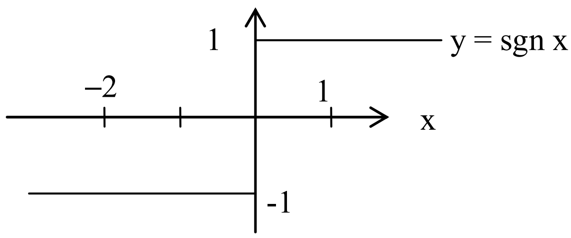
3.5.1 Függvény véges helyen vett véges határértéke

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$



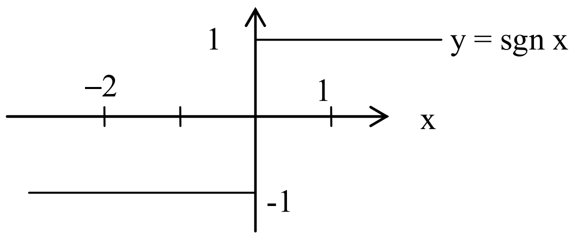
Legyen $x_o = -2$ ś $x_n \to -2$ esetén $\operatorname{sgn} x_n \to -1$
$x_n \neq -2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



Legyen $x_o = 1$ ś $x_n \to 1$ esetén $\dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} \to 2$
$x_n \neq 1$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$



Legyen $x_o = 2$ ś $x_n \to 2$ esetén $-\dfrac{1}{x} \to -\dfrac{1}{2}$
$x_n \neq 2$

A fenti példákban ha $x_n \to x_o$, akkor $f(x_n) \to A$
$x_n \neq x_o$

DEFINÍCIÓ. (Heine-f.) Legyen f(x) fv az x_o hely valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) fv-nek az x_o helyen a határértéke A szám, ha $\forall x_n \to x_o \left(x_n \in D_f \,,\, x_n \neq x_o \right)$ sorozatra teljesül az, hogy a függvényértékek $\left\{ f\left(x_n \right) \right\}$ sorozata A-hoz konvergál, azaz

$$\begin{array}{lll} \forall x_n \to x_o & \text{esetén} & f\left(x_n\right) \to A \\ x_n \neq x_o & & \\ x_n \in D_f & & \end{array}$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_o} f\left(x\right) = A$

A példákban: a) $\lim\limits_{x \to -2} \operatorname{sgn} x = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \to 2$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(-\dfrac{1}{x} \right) = -\dfrac{1}{2}$

DEFINÍCIÓ. (Cauchy-f.) Legyen f(x) az x_o hely valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) fv-nek az x_o helyen a határértéke az A szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám hogy ha $0 < \left| x - x_o \right| < \delta$, akkor $\left| f\left(x\right) - A \right| < \varepsilon$ |.

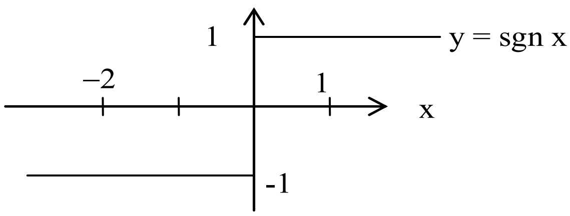
MEGJEGYZÉSEK

1. A fenti 2 definíció ekvivalens (Bizonyítható!)
2. A Cauchy-féle definícióban szereplő

   ha $0 < \left| x - x_o \right| < \delta$ akkor $\left| f\left(x\right) - A \right| < \varepsilon$ egyenlőtlenségek

   ekvivalensek az alábbi egyenlőtlenségekkel:

   ha $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, akkor $A - \varepsilon < f\left(x\right) < A + \varepsilon$

3. 

$\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2 \right)$

$\left(\text{Az ábrán} \quad \delta_1 = \delta_2 \right)$

PÉLDÁK

1. Legyen $f\left(x\right) = 2^{\frac{1}{x}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   $\lim\limits_{x \to o} 2^{\frac{1}{x}} = ?$

Megoldás (A Heine-féle definícióval biz.)

1. Legyen $\left\{ x_n \right\}$ olyan sorozat , melyre $x_n > 0$ és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

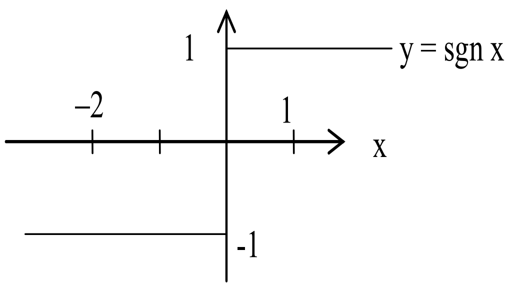
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{x_n}}=\infty$$

2. Legyen $\{x_n\}$ olyan sorozat , melyre $x_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{x_n}}=0$$

Tehát $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}$ nem létezik, mert különböző 0-hoz konvergáló változósorozatok esetén $f\{x_n\}$ határértéke különböző!

Ábrázoljuk az x_o hely környezetében a $2^{\frac{1}{x}}$ függvényt!



2. Bizonyítsuk be a Cauchy-féle definícióval, hogy $\lim_{n\to -\frac{1}{2}}(2x-1)=-2$

Megoldás Írjuk fel és oldjuk meg az $|f(x)-A<\varepsilon|$ egyenlőtlenséget!

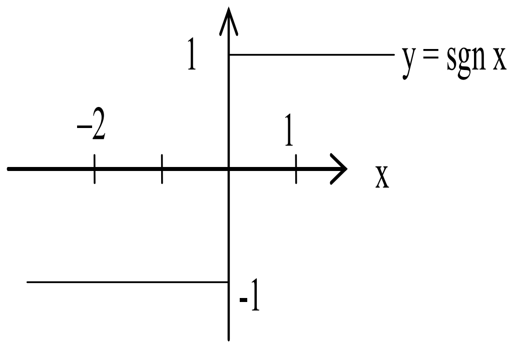
$$|2x-1-(-2)|<\varepsilon \qquad ś\ \varepsilon>0$$

$$|2x+1|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<2x+1<\varepsilon$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<x<\varepsilon-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Kaptuk: ha a $-\frac{1}{2}$ $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezetéből választjuk az x-et, ezen x-hez tartozó fv értéknek a -2-től való eltérése abszolútértékben kisebb mint ε. Tehát az ε -hoz tartozó $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Ezzel beláttuk hogy $\lim_{n\to -\frac{1}{2}}(2x-1)=-2$



Féloldali határértékek (Bal- és jobboldali hat.ért.)

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) az x_o pont valamely jobb, ill. bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) x_o pontbeli jobb, ill. bal oldali határértéke az A szám, ha $\forall x_n \to x_o \quad \left(x_o \in D_f, x_n \neq x_o\right)$.

és $x_n > x_o$ ill. $x_n < x_o$ sorozatra $f\left(x_n\right) \to A$, azaz

ś $x_n \to x_o$, $x_n > x_o$ esetén $f\left(x_n\right) \to A$

ill. ś $x_n \to x_o$, $x_n < x_o$ esetén $f\left(x_n\right) \to A$

Jelölések: jobboldali határérték: $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = A$

baloldali határérték: $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = A$

PÉLDA $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\quad x_o = 0$

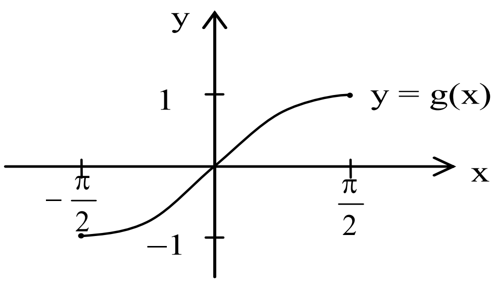
$\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$

TÉTEL Az f(x) fv-nek az x_o helyen akkor és csak akkor létezik a határértéke, ha ott létezik a jobb és baloldali határértéke és ezek egyenlőek, azaz

$$\lim_{x \to x_o + 0} f\left(x\right) = \lim_{x \to x_o - 0} f\left(x\right) = \lim_{x \to x_o} f\left(x\right)$$

PÉLDA $\lim\limits_{x \to x_o} \operatorname{sgn} x$ nem létezik

3.5.2 Függvények x_o helyen vett végtelen határértéke



$f\left(x\right) = \dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$, $D_f =$ ú ($\{0\}$

$x_o = 1$ hely környezetében vizsgáljuk meg

Ha $\quad x_n \to 1 \quad \Rightarrow \quad (x_n - 1)^2 \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{(x_n - 1)^2} \to \infty$

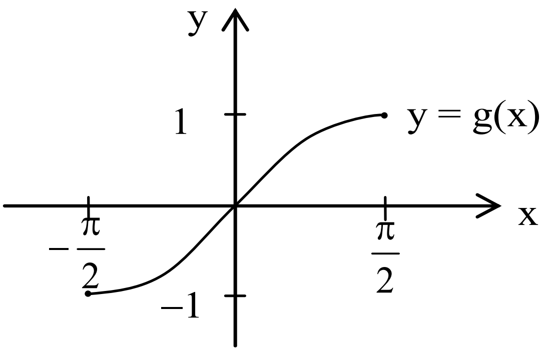
DEFINÍCIÓ. Legyen az f(x) fv az x_o pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. <u>Az f(x) </u>fv-nek az x_o helyen a határértéke $+\infty\,(v. -\infty)$, ha $\forall x_n \to x_o \quad (x_o \in D_f\,, x_n \neq x_o)$ sorozatra $f(x_n) \to \infty\,(v. -\infty)$.

Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \infty$ v. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nem létezik

3.5.3 Függvények végtelenben vett véges határértéke



$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, $D_f =$ ú ($\{2\}$

Ha $x_n \to \infty$, $= \frac{1}{x-2} + 1 \to 1$

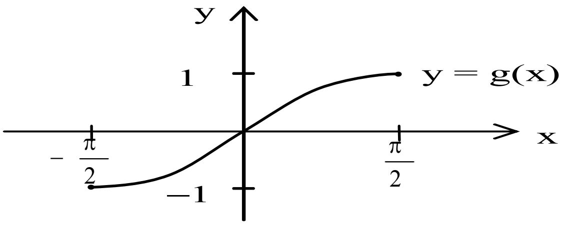
DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) a megfelelő félegyenesen értelmezett.
Az <u>f(x) fv-nek a +4-ben (-4-ben) vett határértéke A szám,</u> ha $\forall x_n \to \infty \quad (x_n \in D_f) \quad (x_n \to -\infty)$ esetén $f(x_n) \to A$.

Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ v. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-2} + 1\right) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sgn} x = -1$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2} = 3$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ nem létezik

3.5.4 Végtelenben vett végtelen határérték



$f(x) = \sqrt{x+5}$, $D_f = [-5;\infty[$

ś $x_n \to \infty$ esetén $\sqrt{x_n + 5} \to \infty$

DEFINÍCIÓ. Az f(x) függvénynek a <u>+4-ben (-4-ben) vett</u> határértéke +4 ill. -4, ha $\forall x_n \to \infty$ $\left(x_n \in D_f\right)$ $\left(\text{ill. } x_n \to -\infty\right)$ esetén $f\left(x_n\right) \to \infty$ ill. $f\left(x_n\right) \to -\infty$.

Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ stb.

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+5} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$

3.5.5 A határértékszámítás műveleti szabályai

TÉTEL Ha $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = B$, akkor

1. $\lim\limits_{x\to x_o} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = c\, A$, $\forall c \in$ ú
2. $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to xo} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = A \pm B$
3. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to xo} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to xo} g(x) = A\cdot B$
4. Ha $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Nem bizonyítjuk!

MEGJEGYZÉS A tétel akkor is igaz, ha x_o helyére $+\infty$-t, vagy $-\infty$-t írunk

3.5.6 Nevezetes határértékek

1. $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (Később igazoljuk)
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{k}{x})^x = e^k$, $\forall k \in$ ú
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (Később igazoljuk!)

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{-4}{4} = -1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \cos x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin x}{x}} \cdot \cos x = 3$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}\right]^2 = \left(\dfrac{e^2}{e}\right)^2 = e^2$

3.6 Függvények folytonossága

DEFINÍCIÓ. Az f(x) függvénynek az x_o helyen folytonos, ha

1. x_o helyen értelmezett
2. x_o helyen véges határértéke van
3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

PÉLDA:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1}, & \text{ha} \quad x \neq -1, x \neq 1 \\ 2, & \text{ha} \quad x = -1, x = 1 \end{cases} \qquad D_f \in \mathbb{R}$$

Vizsgáljuk meg f(x) fv-t az $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ helyeken folytonosság szempontjából!

Megoldás

$x_1 = -1$ helyen vizsg.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{de} \quad f(-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\text{f(x) fv a } -1 \text{ helyen} \\ \text{nem folytonos}\end{array}$$

$x_1 = 1$ helyen vizsg.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x-1} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1} f(x) \text{ nem létezik,} \\ \text{tehát f(x) fv az 1 helyen} \\ \text{nem folytonos}\end{array}$$

DEFINÍCIÓ. Az f(x) fv az <u>x_o helyen jobbról folytonos</u>, ha f(x) értelmezett az x_o jobboldali környezetében és

$$\lim_{x \to x_o + 0} f(x) = f(x_o)$$

Az f(x) fv az <u>x_o helyen balról folytonos</u>, ha f(x) értelmezett az x_o baloldali környezetében és

$$\lim_{x \to x_o - 0} f(x) = f(x_o)$$

DEFINÍCIÓ. Az <u>f(x) függvény egy nyílt intervallumban folytonos</u>, ha az intervallum minden pontjában folytonos.

Az <u>f(x) fv egy zárt intervallumon folytonos</u>, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a bal végpontban jobbról, a jobb végpontban balról folytonos.

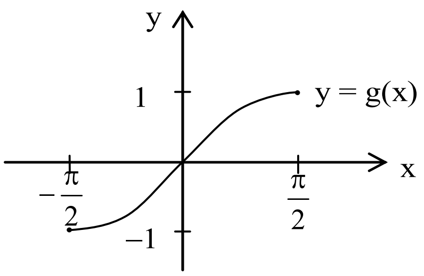
DEFINÍCIÓ. Egy <u>függvényt folytonosnak</u> mondanak, ha az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

1. TÉTEL Ha két függvény folytonos az x_o- helyen, akkor összegük, különbségük, szorzatuk is folytonos az x_o pontban. Hányadosuk is folytonos, ha a nevezőben levő fv az x_o pontban 0-tól különböző.

2. TÉTEL Ha g belső függvény folytonos x_o helyen és az f külső fv folytonos $g(x_o)$-ban, akkor az $f \circ g = f(g)$ <u>összetett függvény folytonos az x_o</u> helyen.

3. TÉTEL Ha f az [a;b]-n szigorúan monoton folytonos fv, akkor az inverze $\overline{f}$ is folytonos az $[\alpha\,;\beta]$ intervallumon, ahol

$\alpha = \min\big(f(a), f(b)\big)$, $\beta = \max\big(f(a), f(b)\big)$.



Az ábrán

$\alpha = f(a)$

$\beta = f(b)$

3.6.1 Az elemi függvények folytonosságáról

Az elemi függvények az értelmezési tartományukon folytonos függvények.

3.6.2 Szakadásos függvények

DEFINÍCIÓ. Az f(x) fv-nek <u>x_o pontban szakadási helye van,</u> ha a fv x_o-ban nem folytonos, de az x_o valamely környezetében folytonos.

Ha $x_o \neq 0$ Mind a négy függvény folytonos x_o-ban

Ha $x_o = 0$ helyen csak az utolsó folytonos, az első 3 fv-nek a 0 helyen szakadása van.

Ha $x_o \neq \frac{1}{x}$ fv x_o-ban folytonos

$x_o = 0$ helyen nem folytonos

0-helyen nem megszüntethető szakadási pólusa van a 0-ban

A szakadások típusai

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_0-ban hézagpontja van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ létezik $(A \in \text{ú})$ de f x_o-ban nem értelmezett.

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_o-ban megszüntethető szakadása van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ létezik, de $A \neq f(x_o)$.

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_o-ban nem megszüntethető szakadása van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ nem létezik.

Speciálisan, ha $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = \infty$, akkor $f-$nek x_o-ban pólusa van.

V. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

A differenciálszámítás kialakulását geometriai és fizikai problémák siettették.

Pl.:
- Valamely y = f(x) görbe P_o pontbeli érintőjének meghatározása
- Valamely mozgó test sebességének meghat.

1. A differenciálhányados értelmezése a deriváltfüggvény

1.1 A differenciahányados értelmezése

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) függvény az x_o pont valamely környezetében értelmezett, és x legyen e környezet olyan eleme, melyre $x \neq x_o$. Ekkor az

(1) $$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

függvényt, az f(x) függvény az x_o helyéhez tartozó differenciahányadosának (differenciahányados függvényének) nevezzük.

A differenciahányados más ablakban:

Ha $x - x_o = \Delta x \Rightarrow x = x_o + \Delta x$

$$(2) \qquad \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \qquad \Delta x \neq 0$$

MEGJEGYZÉS mivel x_o rögzített valós szám, ezért az x_o pontbeli differenciahányados (1) ablakban az x, (2) ablakban a Δx függvénye.

A differenciahányados geometriai jelentése

Az f függvény x_o pontbeli differenciahányados fv-ének értékei az f fv grafikonjának $P_o(x_o; f(x_o))$ pontján átmenő szelők iránytangenseivel egyenlők

$$tg\alpha = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad x \neq x_o$$

1.2 A differenciálhányados értelmezése

DEFINÍCIÓ. Ha az $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ $(x \neq x_o)$ differenciahányados-függvénynek x_o helyen a határértéke valós szám, akkor ezt a határértéket az f(x) fv x_o pontbeli differenciálhányadosának nevezzük és azt mondjuk, hogy az f(x) függvény az x_o pontban differenciálható.

Jelölések: f(x) fv x_o pontbeli differenciálhányadosa:

$$f'(x_o);\ f'(x)_{|x=x_o};\ \frac{df}{dx}_{|x=x_o}$$

A definíció értelmében:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad (1)$$

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x\to x_o} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \qquad (2)$$

A differenciálhányados geometriai és fizikai jelentése

1.

Az $f(x)$ függvény x_o pontbeli differenciálhányadosa, $f'(x_o)$, annak a szögnek a tangense, amelyet az f fv grafikonjához a $P_o(x_o; f(x_o))$ pontban húzott érintő az x tengely pozitív felével bezár.

$$tg\alpha_o = f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad x \neq x_o$$

2. Az $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ differenciahányados megmutatja, hogy az $[x_o, x]$ intervallumon átlagosan milyen mértékben változik a fv érték a független változó megváltozásához viszonyítva.

Az $f'(x_o)$ differenciálhányados az f fv x_o pontbeli pillanatnyi megváltozásának mértéke.

A fizikában: a sebesség az út idő szerinti differenciálhányadosa

$$v = \frac{ds}{dt}_{|t_o}$$

a gyorsulás a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa

$$a = \frac{dv}{dt}_{|t_o}$$

PÉLDA Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1}$ függvény $x_o = 1$ pontbeli differenciálhányadosát!

Megoldás Az $x_o = 1$ pontbeli differenciahányados függvény:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{3}{4}}{x-1} = \frac{8x+4-(9x+3)}{4(3x+1)(x-1)} = \frac{1-x}{4(3x+1)(x-1)} = \frac{-1}{4(3x+1)}$$

$$x \neq 1$$

Az $x_o = 1$ pontbeli differenciálhányados:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{4(3x+1)} = -\frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \text{f az} \quad x_o = 1 \quad \text{helyen differenciálható és}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{16}$$

1.3 Jobb- és baloldali differenciálhányados

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) az x_o hely megfelelő féloldali környezetében értelmezett.

- Ha a $\lim\limits_{x\to x_o+0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ valós szám, akkor ez a határérték az f(x) függvény x_o pontbeli jobboldali differenciálhányadosa.
- Ha a $\lim\limits_{x\to x_o-0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ valós szám, akkor ez a határérték az f(x) függvény x_o pontbeli baloldali differenciálhányadosa.

Jelölések: $f'_+(x_o)$; $f'_-(x_o)$

TÉTEL Az $f'(x_o)$ akkor és csak akkor létezik, ha $f'_+(x_o)$ és $f'_-(x_o)$ léteznek és egyenlőek, ekkor

$$f'_+(x_o) = f'_-(x_o) = f'(x_o)$$

PÉLDA Számítsuk ki az $f(x) = |x|$ függvény $x_o = 0$ helyhez tartozó jobb- és baloldali differenciálhányadosát!

Megoldás A jobboldali differenciálhányadosa:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

A baloldali differenciálhányadosa:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

Tehát $f(x) = |x|$ fv az $x_o = 0$ pontban nem differenciálható, mert $f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ nem létezik.

Geometriailag: A $P_o(0;0)$ pontban az f(x) = x grafikonjának nincs érintője.

1.4 A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Az előző példában: $f(x) = |x|$ függvény az $x_o = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható! $\Rightarrow$ A folytonosság nem elég a differenciálhatósághoz.

TÉTEL Ha f(x) differenciálható az x_o pontban, akkor ott folytonos is.
(Másképp: a folytonosság a differenciálhatóság szükséges feltétele.)

Bizonyítás Mivel f $x_o -$ban differenciálható:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$$

$$\lim_{x \to x_o} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \lim_{x \to x_o}(x - x_o) =$$

$$= f'(x_o) \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Ami azt jelenti, hogy $f(x)$ $x_o -$ban pontban folytonos.

1.5 A deriváltfüggvény (differenciálhányados-függvény)

DEFINÍCIÓ. Legyen H az f függvény értelmezési tartományának valamely részhalmaza. Ha az f függvény a H minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk hogy <u>f a H halmazon differenciálható.</u>

DEFINÍCIÓ. Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon x_o pontok halmaza, ahol az f függvény differenciálható , és amely függvénynek értéke egy ilyen x_o pontban az f függvény x_o pontbeli differenciálhányadosa, az f függvény <u>differenciálhányados-függvényének</u> , v. <u>deriváltfüggvényének</u> nevezzük.

Jelölése: $\quad f' ; \quad f'(x) ; \quad \dfrac{df}{dx}$

MEGJEGYZÉS f' értelmezési tartománya f értelmezési tartományának nem üres részhalmaza, azaz $D_f{}' \subseteq D_f \quad , \quad D_f{}' \neq 0.$

2. Differenciálási szabályok

2.1 Általános differenciálási szabályok

1. TÉTEL Ha f(x) differenciálható x_o-ban, akkor c f(x) is differenciálható x_o-ban és

$$\left(c\, f(x)\right)'_{|x=x_o} = c \cdot f'(x_o) \qquad \left(\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ esetén}\right)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o} \frac{c\,f(x) - c\,f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} c \cdot \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = c \cdot \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = c \cdot f'(x_o)$$

2. TÉTEL Ha f(x) és g(x) x_o-ban differenciálható, akkor

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)'_{x=x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(f(x) \pm g(x)\right) - \left(f(x_o) \pm g(x_o)\right)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \left(\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \pm \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right) =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \pm \lim_{x\to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o)$$

MEGJEGYZÉS 1. Összeget ill. különbséget tagonként differenciálunk.

2. A 2. tétel 2-nél több tag esetén is igaz.

3. TÉTEL Ha f(x) és g(x) differenciálható x_o-ban, akkor $f(x) \cdot g(x)$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(f(x)\, g(x)\right)'_{|x=x_o} = f'(x_o)\, g(x_o) + f(x_o)\, g'(x_o)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\,g(x)-f(x_o)\,g(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\,g(x)-f(x_o)\,g(x)+f(x_o)\,g(x)-f(x_o)\,g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}g(x)+f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot\lim_{x\to x_o}g(x)+\lim_{x\to x_o}f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)\,g(x_o)+f(x_o)\,g'(x_o)$$

Mivel f és g x_o – ban differenciálható és g x_o – ban folytonos.

MEGJEGYZÉS Kettőnél több tényezőből álló sorozat differenciálása a szorzás asszociatív tulajdonsága alapján visszavezethető két tényezős szorzat differenciálására.

4. TÉTEL Ha g(x) differenciálható x_o-ban és $g(x_o)\neq 0$, akkor $\frac{1}{g(x)}$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{|x=x_o}=-\frac{g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

Bizonyítás Az előzőekhez hasonlóan a definíció alapján!

5. TÉTEL Ha f(x) és g(x) differenciálható az x_o-ban és $g(x_o)\neq 0$, akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{|x=x_o}=\frac{f'(x_o)\,g(x_o)-f(x_o)\,g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$$

Bizonyítás

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{|x=x_o}=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'_{|x=x_o}=f'(x_o)\frac{1}{g(x_o)}-f(x)\frac{g'(x_o)}{(g(x_o))^2}=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g(x_o)}{(g(x_o))^2}$$

A szorzat függvény deriválási szabálya alapján.

6. TÉTEL Ha g(x) differenciálható x_o-ban és f(x) differenciálható $g(x_o)$-ban, akkor az $(f\ o\ g)(x)$ $(f\ g(x))$ összetett függvény differenciálható x_o-ban és

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(x_o)\right)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(x_o)\right)}{g(x)-g(x_o)}\cdot\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=$$

mivel $g(x)$ x_o-ban differenciálható $\Rightarrow$ g x_o-ban folytonos is,

tehát ha $x\to x_o$ $\Rightarrow g(x)\to g(x_o)$, átjelölve

$$g(x):=u \quad , \quad g(x_o):=u_o$$

$$=\lim_{u\to u_o}\frac{f(u)-f(u_o)}{u-u_o}\cdot g'(x_o)=f'(u_o)\cdot g'(x_o)=f'\left(g(x_o)\right)\cdot g'(x_o)$$

MEGJEGYZÉS Az összetett függvény deriválási szabályát láncszabálynak nevezzük.

7. TÉTEL Legyen $\bar{f}(x)$ az f(x) függvény inverze. Ha f(x) differenciálható $\bar{f}(x_o)$ helyen, akkor $\bar{f}(x)$ differenciálható x_0 pontban és

$$\left(\bar{f}(x)\right)'_{|x=x_o}=\frac{1}{f'\left(\bar{f}(x_o)\right)} \quad , \quad \text{ha} \quad f'\left(\bar{f}(x_o)\right)\neq 0$$

Nem bizonyítjuk!

Mivel az előző tételekben x_0 az f és g függvények értelmezési pontjának bármely olyan pontja lehet, ahol f és g differenciálható, így a deriváltfüggvényekre érvényesek a következők:

$$\left(c\,f(x)\right)'=c\,f'(x)$$

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

$$\left(\bar{f}(x)\right)'=\frac{1}{f'\left(\bar{f}(x)\right)}$$

2.2 Elemi függvények differenciálása

1. TÉTEL Konstansfüggvény deriváltja az azonosan 0 függvény.

Bizonyítás

$$f(x) = C \qquad (\forall\, C \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{C - C}{x - x_o} = 0$$

$$(C)'_{|x = x_o} = 0 \quad , \quad \text{de ez} \quad \forall\, x_o \in \mathbb{R} \ \text{esetén igaz,}$$

tehát

$$C' \equiv 0$$

2. TÉTEL (Hatványfüggvény deriválása)

$$\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1} \quad , \quad \forall\, n \in N^+ \quad \text{és} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{esetén}$$

Bizonyítás $n = 1$ esetén $\left(x^1\right)' = 1 \cdot x^0 = 1$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = 1$$

$n \geqq 2$ esetén

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x^n - x_o^n}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\left(x - x_o\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_o + x^{n-3} \cdot x_o^2 + \ldots + x \cdot x^{n-2} + x_o^{n-1}\right)}{x - x_o}$$

$$\lim_{x \to x_o} \left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_o + \ldots + x \cdot x_o^{n-2} + x_o^{n-1}\right) = n \cdot x_o^{n-1}$$

Mivel x_o tetszőleges volt $\Rightarrow$ $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

Felhasználtuk az:

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$ azonosságot és

$f(x) = x^n$ függvény folytonosságát

MEGJEGYZÉS A fenti tétel tetszőleges α kitevő esetén is igaz!
(Ezt később bizonyítjuk.)

3. TÉTEL Bármely valós x-re $(\sin x)' = \cos x$

Bizonyítás

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{x \to xo} \frac{2\cos\dfrac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Felhasználtuk a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$ azonosságot

az $f(x) = \cos x$ függvény folytonosságát

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ határértéket , itt $h = \frac{\Delta x}{2}$

MEGJEGYZÉS A fenti tétel tetszőleges α kitevő esetén is igaz!
(Ezt később bizonyítjuk.)

4. TÉTEL Bármely valós x-re $(\cos x)' = -\sin x$

Bizonyítás $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x$$

Felhasználtuk:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(-x)' = -1$$

5. TÉTEL

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in \text{ú} \left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}\right.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad x \in \text{ú} \left(\{k\pi,\ k \in Z\}\right.$$

Bizonyítás Az előző tételek és a hányadosfüggvény differenciálási szabálya alapján

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

6. TÉTEL

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad |x| < 1$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad |x| < 1$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Bizonyítás A bizonyításhoz az előző tételeket és az inverz függvény differenciálási szabályát használjuk fel!

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x|<1$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x|<1$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg} x)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

7. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (a>0\,,\, a\neq 1)$$

Bizonyítás

Legyen $x>0$, $x+\Delta x>0$ $\Delta x \to 0$ esetén

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Tetszőleges, de rögzített $x>0$ esetén , ha $\Delta x \to 0$, $\left|\frac{x}{\Delta x}\right| \to \infty$,

tehát $\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to e$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$$

felhasználtuk az $\ln x$ függvény folytonosságát!

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (a>0 \;,\; a\neq 1)$$

8. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $a>0\,,\, a\neq 1$

Bizonyítás

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \cdot \ln a$$

felhasználtuk az inverz függvény deriválási szabályát

9. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$$

Bizonyítás

$$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

10. TÉTEL

$$\left(\operatorname{th} x\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{esetén}$$

$$\left(\operatorname{cth} x\right)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{esetén}$$

11. TÉTEL

$$\left(\operatorname{ar\,sh} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \left(\operatorname{ar\,ch} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \in \left]1\,;\infty\right[$$

$$\left(\operatorname{ar\,th} x\right)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \left(\operatorname{ar\,cth} x\right)' = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$|x| < 1 \qquad\qquad |x| > 1$$

PÉLDÁK

1. $\left(\dfrac{x^5+5x^3}{3}\right)' = \left[\dfrac{1}{3}(x^5+5x^3)\right]' = \dfrac{1}{3}\left(5x^4+15x^2\right)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\left[\left(5+6x\right)\left(4-3x\right)\right]' = 6\left(4-3x\right)+\left(5+6x\right)\left(-3\right) = 9-36x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\left[\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)\right]' = \left(2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)' = 2\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+(-1)\,x^{-2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}^+$

4. $\left(x \arcsin 2x\right)' = 1\cdot\arcsin 2x + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2$ $\quad |x| < \dfrac{1}{2}$

5. $\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)' = \qquad\qquad = -\dfrac{2}{(\sin x-\cos x)^2}$

6. $(\ln 8x)' = \dfrac{1}{8x}\cdot 8 = \dfrac{1}{x}$

7. $(\ln\ln x)' = \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln x}$

2.3 Speciális differenciálási szabályok

2.3.1 Logaritmikus differenciálás

Legyen $h(x)=f(x)^{g(x)}$ ahol $f(x)>0$

mivel $f(x)>0 \Rightarrow h(x)=f(x)^{g(x)}>0$

Képezzük $\ln h(x)-\text{et}!$

$$\ln h(x)=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$$ Deriváljuk mindkét oldalt!

$$\frac{1}{h(x)}h'(x)=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

$$h'(x)=h(x)\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$h'(x)=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

A következő tételben felhasználjuk ezt az eredményt!

TÉTEL ś $x\in$ ú esetén , ha $x>0$

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Bizonyítás Legyen $f(x)=x^{\alpha}$, $x>0$

$$\ln f(x)=\alpha\cdot\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=f(x)\cdot\alpha\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

PÉLDA

$$f(x)=(\sin 2x)^{\ln x} \qquad (x>0 \quad \text{és} \quad \sin 2x>0)$$

Képezzük a deriváltfüggvényét!

Megoldás $\ln f(x) = \ln x \ln \sin 2x$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x} \ln \sin 2x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{\ln \sin 2x}{x} + \frac{2 \ln x \cdot \cos 2x}{\sin 2x}\right]$$

$$f'(x) = (\sin 2x)^{\ln x}\left[\frac{\ln \sin 2x}{x} + \frac{2 \ln x \cdot \cos 2x}{\sin 2x}\right]$$

2.3.2 Paraméteres alakban adott függvény deriváltja

Az

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad , \quad t \in H$$

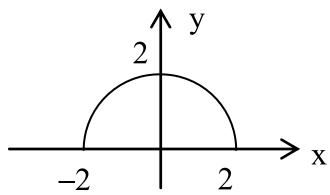
paraméteres egyenletrendszer az xy sík valamely görbéje egyenletének un. paraméteres alakja.

Ha a $\varphi(t)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű (φ invertálható fv) és $D_\varphi = D_\psi$, akkor a fenti egyenletrendszer un. <u>paraméteres megadású</u> f <u>függvényt</u> határoz meg, melyre $D_f = R_\varphi$.

PÉLDA

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

egyenletrendszer függvényt ad meg, grafikonja:



TÉTEL

Az $\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$ $t \in D_\varphi$ és φ invertálható függvény

paraméteres alakban adott f függvény differenciálható az $x_o = \varphi(t_o) -$ ban

ha $\dot{\varphi}(t_o) = \frac{d\varphi}{dt}_{|t_o}$, $\dot{\psi}(t_o) = \frac{d\psi}{dt}_{|t_o}$ és $\dot{\varphi}(t_o) \neq 0$, és

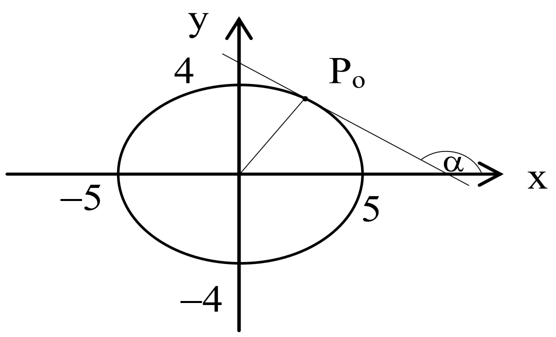
$$f'(x_o) = \frac{\dot{\psi}(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)}$$ Nem bizonyítjuk!

PÉLDA Határozzuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x &= 5\cos t \\ y &= 4\sin t \end{aligned}\right\} \quad t \in [0\,;2\pi]$$

paraméteres alakban adott ellipszisnek a $t_o = \dfrac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó pontjához húzott érintője iránytangensét!

Megoldás Nem fv-t adunk meg mert $5\cos t$ $t \in [0\,;2\pi]$ nem kölcsönösen egyértelmű leképezés.



$t_o = \dfrac{\pi}{4}$ $t_o \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ – ezen intervallumon a $\cos t$ fv kölcs. egyért. leképezés

tehát $$\left.\begin{aligned} x &= 5\cos t \\ y &= 4\sin t \end{aligned}\right\} \quad t_o \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

f függvényt ad meg. $x_o = 5\cos\dfrac{\pi}{4} = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\dot{\varphi}(t) = -5\sin t \qquad \dot{\varphi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -5\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \neq 0$$

$$\dot{\psi}(t) = 4\cos t \qquad \dot{\psi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

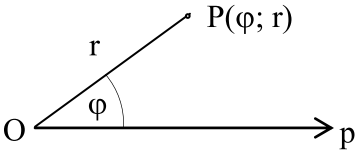
$$m = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_o) = f'\left(5\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{-5\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{4}{5}$$

2.3.3 Polárkoordinátás alakban adott függvény differenciálása

Polárkoordináta-rendszer esetén a sík tetszőleges P pontjához a $(\varphi;r)$ számpárt rendeljük, ahol

φ: az x tengely pozitív felétől az O-ból induló és a P-n átmenő félegyenesig mért pozitív forgásszög.

r: a pontnak az origótól mért távolsága.



Legyen adott az $r(\varphi)$ függvény. $\left(\text{Pl:}\ r(\varphi)=\dfrac{\varphi}{2}+1\right)$

$$r=\frac{\varphi}{2}+1 \qquad \begin{matrix} P_0(x_0;y_0) \\ P_0(\varphi_0;r_0) \end{matrix}$$

A derékszögű és a polárkoordináták közötti kapcsolat

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\varphi)\times\cos\varphi &&= g(\varphi) \\ y&=r(\varphi)\times\sin\varphi &&= h(\varphi) \end{aligned}\right\}\ \varphi\in H$$

paraméteres alakban adott f fv, ha g invertálható, $D_f=R_\varphi$

Ha $g'(\varphi_0)\neq 0$ és $h'(\varphi_0)$ léteznek, akkor

$$f'(x_0)=f'(g(\varphi_0))=\frac{r'(\varphi_0)\sin\varphi_0+r(\varphi_0)\cos\varphi_0}{\varphi'(\varphi_0)\cos\varphi_0-r(\varphi_0)\sin\varphi_0}$$

PÉLDA Adott az $r(\varphi)=1+\cos\varphi$ $(0\leq\varphi\leq 2\pi)$ polárkoordinátákkal adott függvény. Számítsuk ki a deriváltját a $\varphi_0=\dfrac{\pi}{6}$ helyen!

Megoldás

Az $r(\varphi)=1+\cos\varphi$ egy un. kardioid-ot ad meg a derékszögű koordinátarendszerben

$$\left.\begin{aligned} x&=(1+\cos\varphi)\cos\varphi &&= g(\varphi) \\ y&=(1+\cos\varphi)\sin\varphi &&= h(\varphi) \end{aligned}\right\}\quad \varphi\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\varphi_0=\frac{\pi}{6}$$

$$x_0=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

paraméteres alakban adott f fv

$$f'(x)=\frac{-\sin\varphi\sin\varphi+(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-\sin\varphi\cos\varphi+(1+\cos\varphi)(-\sin\varphi)}=-\frac{\cos2\varphi+\cos\varphi}{\sin2\varphi+\sin\varphi}$$

$$f'(x_0)=-\frac{\cos2\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}}=-1=\mathrm{tg}\alpha$$

2.3.4 Implicit alakban adott függvény differenciálása

Az ilyen alakban megadott függvény differenciálhányadosát megkapjuk, ha a függvényt megadó egyenlet mindkét oldalát differenciáljuk, s közben alkalmazzuk az összetett függvény deriválási szabályát!

PÉLDA Határozza meg az $x^4y+5y^2x-4=0$ implicit alakban adott fv deriváltját, az $x_0=1$ helyen!

Megoldás

$$y(x)$$

$$4x^3y+x^4\times y'+10yy'x+5y^2=0$$

$$y'=-\frac{y(5y+4x^3)}{x(x^3+10y)}$$

$$x_0=1 \qquad y_0+5y_0^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad y_{01}=\frac{4}{5} \qquad y_{02}=-1$$

$$P_1\left(1;\frac{4}{5}\right) \qquad P_2=(1;-1)$$

$$y'(P_1)=-\frac{\frac{4}{5}\left(5\times\frac{4}{5}+4\right)}{1+10\times\frac{4}{5}}=-\frac{32}{45}$$

$$y'(P_2)=-\frac{-1(-5+4)}{1+10(-1)}=\frac{1}{9}$$

3. Differenciálható függvény differenciálja

DEFINÍCIÓ. Ha $f(x)$ függvény az x_o-ban differenciálható, akkor az $f'(x_o)\cdot(x-x_o)$ elsőfokú kifejezést az <u>f függvény x_o pontbeli differenciáljának</u> nevezzük.

Jelölése: $df_{|x=x_o}$; v df , $df=f'(x_o)(x-x_o)=f'(x_o)\Delta x$

Speciálisan: Ha $f(x) = x$

$$df = dx = 1 \cdot (x - x_o) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \qquad \text{azaz}$$

$$dx = \Delta x$$

Ezt felhasználva: $df = f'(x_o)(x - x_o) = f'(x_o)dx$

<u>A differenciál geometriai jelentése</u>

df az ordinátaérték megváltozását jelenti $f(x_o)$-tól az érintőig, miközben az x_o pontból áttérünk az $x_o + \Delta x$ helyre.

MEGJEGYZÉS:

1. df általában különbözik $\Delta f = f(x) - f(x_o)$-tól
2. Ha $\Delta x = dx$ kicsi $\quad \Delta f$ és df eltérése kicsi, azaz
   $\Delta f = f(x) - f(x_o) \approx df$ azaz
   $f(x) \approx f(x_o) + df$
   $f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)dx$

   Ha x közel van az x_o-hoz, jó a közelítés.

4. Magasabbrendű differenciálhányadosok

Ha $f(x)$ függvény $f'(x)$ deriváltfüggvénye is differenciálható, akkor az $f'(x)$ függvény differenciálhányados függvénye az $f(x)$ függvény második deriváltja.

Jele:

$$(f'(x))' = f''(x), \qquad \text{vagy} \quad \frac{d^2f}{dx^2}$$

De $\quad (f''(x))' = f'''(x), \qquad \text{vagy} \quad \frac{d^3f}{dx^3}$

$$\frac{d^4f}{dx^4}, \quad \frac{d^5f}{dx^5}, \quad \ldots, \quad \frac{d^nf}{dx^n}, \quad \ldots$$

$$f^{(4)}, \quad f^{(5)}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}, \quad \ldots$$

<u>Megállapodás:</u> $\quad f^{(o)} = f$

DEFINÍCIÓ. Az $f(x)$ függvény <u>n-edik deriváltját</u> a következőképpen értelmezzük:

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha} \quad n = 0 \\ \left[f^{(n-1)}(x)\right]', & \text{ha} \quad n \in N^+ \end{cases}$$

Az n számot a derivált rendjének nevezzük.

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény magasabbrendű deriváltjait!

Megoldás

$$f^{(o)}(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

5. A differenciálszámítás középértéktételei

TÉTEL (Rolle-tétele) Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és differenciálható az $]a,b[$-n, és $f(a)=f(b)$, akkor $\exists$ legalább egy olyan $\xi \in]a,b[$, ahol $f'(\xi)=0$.

Nem bizonyítjuk!

A Rolle – tétel geometriai jelentése

$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in]a;b[$
$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$ azt jelenti, hogy ξ_1, ξ_2, ξ_3, helyeken a fv görbélyéhez húzott érintő párhuzamos az x tengellyel.

TÉTEL (Langrange–féle középértéktétel) Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és differenciálható az $]a,b[$-n, akkor $\exists$ legalább egy olyan $\xi \in]a,b[$, ahol $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Nem bizonyítjuk.

A Langrange–tétel geometriai jelentése

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\exists\ \xi_1,\xi_2\ \in\ ]a,b[$ melyekre
a ξ_1 és ξ_2 helyeken húzott érintő párhuzamos az $(a;f(a))$ és $(b;f(b))$ pontokat összekötő szelővel.

6. A differenciálszámítás alkalmazásai

6.1 Határértékszámítás, a L'Hospitál-szabály

Gyakran adódnak olyan határértékszámítási problémák, amelyek megoldása az eddig jól ismert módszerekkel nem, vagy nagyon körülményesen oldhatók meg.

Pl: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; vagy $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

TÉTEL Legyen f és g az x_o valamely H környezetében differenciálható és $g'(x)\neq 0$, ha $x\in H$ és $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0.$

Ha $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik , akkor $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem bizonyítjuk.

TÉTEL Legyen f és g az x_o valamely H környezetében differenciálható és $g'(x)\neq 0$, ha $x\in H$ és $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}|g(x)|=\infty.$

Ha $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik , akkor $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem bizonyítjuk.

TÉTEL Ha f és g az $]x_o,\infty[$ -on differenciálható és

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \text{ v. } (\pm\infty) \quad , \quad \text{valamint} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{létezik ,}$$

akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{2} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+0} (-x) = 0$

6.2 Függvényvizsgálat (Függvénydiszkusszió)

6.2.1 A függvény növekedése, csökkenése, szélsőértékei

TÉTEL Legyen f az $]a,b[$-on differenciálható. Az f függvény az $]a,b[$-on akkor és csak akkor növekedő (ill. csökkenő) ha $\forall x \in]a;b[$ esetén $f'(x) \geqq 0$ $\left(\text{ill.} f'(x) \leqq 0\right)$.

Nem bizonyítjuk!

TÉTEL Legyen f az $]a,b[$-on differenciálható. Az f függvény az $]a,b[$- on akkor és csak akkor szigorúan növekedő (ill. csökkenő), ha $f'(x) \geqq 0$ $\left(\text{ill.} f'(x) \leqq 0\right)$ teljesül $\forall x \in]a,b[$ esetén, és $f'(x) = 0$ az $]a;b[$ egyetlen részintervallumán sem azonosan zérus.

TÉTEL Ha $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$ esetén, akkor f az $]a,b[$-n konstans.

PÉLDA Vizsgáljuk meg monotonítás szempontjából az $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ függvényt!

Megoldás $D_f =]-1;0[\cup]0;\infty[$

$$f'(x) = \frac{(1+x)^3}{x^2} \cdot \frac{2x(1+x)^3 - x^2 \cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{2(1+x)-3x}{x(1+x)} = \frac{2-x}{x(1+x)} \quad ; \quad D_{f'} = D_f$$

$f'(x)=0$ ha $x=2$ $\Rightarrow$ Mivel $f'(x)$ függvény csak 1 pontban zérus, $f(x)$ függvény egy részintervallumán sem lehet konstans.

x	$]-1;0[$	$]0;2[$	$]2;\infty[$
f'	+	+	−
f	↗	↗	↘

TÉTEL Ha f differenciálható az x_o környezetében és f -nek x_o -ban helyi szélsőértéke van, akkor $f'(x)=0$.

Nem bizonyítjuk!

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha $f'(x_o)=0$, akkor f-nek x_o-ban lehet, de nem biztos, hogy van szélsőértéke.
2. Ha $f'(x_o)\neq 0$, akkor f-nek nincs szélsőértéke.

TÉTEL Ha f differenciálható x_o valamely környezetében és $f'(x_o)=0$, valamint az $f'(x)$ függvény az x_0 pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek x_o-ban helyi szélsőértéke van.

Nem bizonyítjuk!

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x)=(x-4)^2(x-3)^2$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=2(x-4)(x-3)^2+(x-4)^2\cdot 2(x-3)=2(x-3)(x-4)(x-3+x-4)$$

$$f'(x)=2(x-3)(x-4)(2x-7) \qquad D_{f'}=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0 \qquad 2(x-3)(x-4)(2x-7)=0$$

$$x_1=3, \qquad x_2=3,5 \qquad x_3=4$$

x	$]-\infty;3[$	3	$]3;3,5[$	3,5	$]3,5;4[$	4	$]4;\infty[$
f'	+	0	+	0	–	0	+
f	↘	h. min.	↗	h. min	↘	h. min.	↗

$f(3)=0$

$f(3,5)=0,06$

$f(4)=0$

Abszolút minimuma $x_1=3$, $x_3=4$-nél $f(3)=f(4)=0$

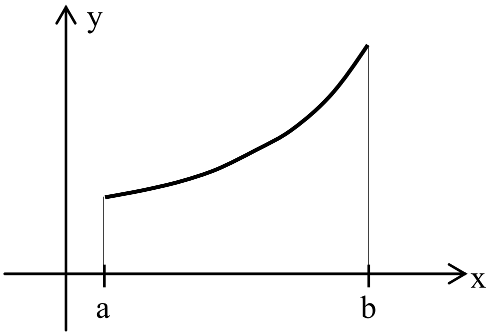
Abszolút maximuma nincs.

6.2.2 Konvex, konkáv függvények, inflexiós pont

DEFINÍCIÓ. Az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvényt az $[a,b]$-n <u>konvexnek nevezzük</u>, ha $\forall\, c,d\in[a;b]$-re érvényes a következő:

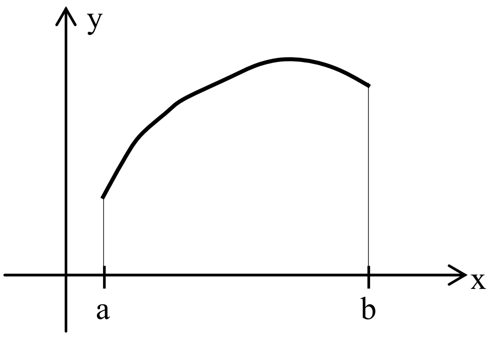
$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{f(c)+f(d)}{2}$$

Ha az egyenlőtlenség jelét megfordítjuk, akkor f függvény $[a,b]$-n konkáv.



$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{f(c)+f(d)}{2}$$

konvex



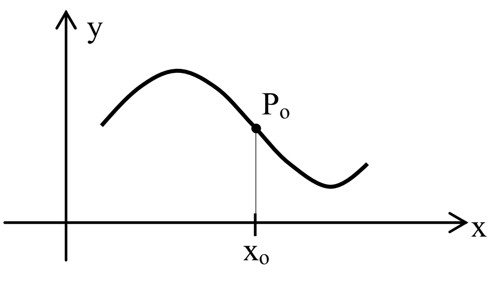
$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) \ge \frac{f(c)+f(d)}{2}$$

konkáv

MEGJEGYZÉS:

1. A görbéket mindig alulról nézzük!
2. Ha egyenlőséget nem engedünk meg, szigorúan konvex, ill. szigorúan konkáv.

DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az x_o pontban inflexiós pontja van, ha x_o-nak van olyan jobb és bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény konvex, a másikban konkáv, vagy fordítva.



P_o az f grafikonjának inflexiós pontja

TÉTEL Az $\left[a,b\right]$-n folytonos, $\left]a,b\right[$-n kétszer differenciálható f függvény akkor és csak akkor konvex (ill. konkáv) az $\left[a,b\right]$-n, ha $f''(x) \geqq 0$, $\left(f''(x) \leqq 0\right)$ $\forall x \in \left]a,b\right[$ esetén.

Nem bizonyítjuk!

TÉTEL Az $\left[a,b\right]$-n folytonos, $\left]a,b\right[$ kétszer differenciálható f fügvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (szigorúan konkáv) az $\left[a,b\right]$-n, ha $f''(x) \geqq 0$, $\left(\text{illetve } f''(x) \leqq 0\right)$ $\forall x \in \left]a,b\right[- n$, de $f''(x)$ az $\left]a,b\right[$ egyetlen részintervallumán sem azonosan zérus.

Nem bizonyítjuk!

PÉLDA $f(x) = x \ln x$ $D_f =$ ú$^+$

Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából!

Megoldás $f'(x) = \ln x + 1$ $D_f =$ ú$^+$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad D_f = \text{ú}^+$$

Az f görbe alakja $f''(x)$ függvény előjelétől függ.

Mivel $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \;\; (x \in D_{f''})$ $\Rightarrow$ f $D_f -$en konvex.

TÉTEL Ha az x_o hely valamely környezetében kétszer differenciálható f függvénynek x_o-ban inflexiós pontja van, akkor $f''(x_o) = 0$.

Nem bizonyítjuk.

TÉTEL Ha az f függvény az x_o valamely környezetében differenciálható és $f''(x_o) = 0$, valamint az $f''(x)$ függvény az x_o helyen előjelet vált, akkor f-nek x_o-ban inflexiós pontja van.

Nem bizonyítjuk.

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x) = x^4 + x^3$, $D_f =$ ú függvény inflexiós pontjait!

Megoldás $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$ $D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1) = 0$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 + 6x = 6x(2x+1) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = 0$$

x	$\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$	$-\frac{1}{2}$	$\left]-\frac{1}{2};0\right[$	0	$]0;\infty[$
f''	+	0	–	0	+
f	$\cup$	infl. p	$\cap$	infl. p	$\cup$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$ $\qquad$ $f(0)=0$

Inflexiós pontok: $\quad P_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{16}\right)$ $\qquad$ $P_2(0;0)$

6.2.3 A függvénydiszkusszió vázlata (Teljes függvényvizsgálat)

I. Megállapítjuk $f(x)$ függvény

a) értelmezési tartományát, ha nem adott
b) paritását, periodicitását (a vizsgálati intervallum ezek után esetleg szűkíthető)
c) zérushelyét, az $f(x)=0$ egyenletből
d) határértékeit, a kritikus helyeken és az értelmezési tartomány szélein
e) folytonosságát, szakadási típusait (ha vannak)

II. $f'(x)$ segítségével (ha létezik) megállapítjuk:

a) $f'(x)$ lehetséges szélsőértékhelyeit az $f'(x)=0$ egyenletből
b) $f(x)$ monotonitási intervallumait és szélsőértékhelyeit

III. $f''(x)$ segítségével (ha létezik) megállapítjuk

a) $f(x)$ lehetséges inflexiós pontjait az $f''(x)=0$ egyenletből
b) $f(x)$ konvexitási intervallumait és inflexiós pontjait

IV. A függvény grafikonjának megrajzolása (az eddigi információk alapján)

V. Az értékkészlet meghatározása, korlátosság vizsgálata

PÉLDA Vizsgáljunk teljes függvényvizsgálatot az $f(x)=x^3\times e^{-x}$ fv -en!

Megoldás

I.

a) $D_f = ú$
b) Nem periodikus;

$$f(-x)=(-x)^3 e^{-(-x)}=-x^3\cdot e^x \neq \left.\begin{matrix} f(x) \\ -f(x)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \text{se páros, se páratlan}$$

c) zérushelyek: $f(x)=0$, azaz $x^3e^{-x}=0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$
d) Kritikus hely nincs

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$$

e) $f(x)$ folytonos, mert elemi függvény

II. $f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x)$ $\qquad D_{f'}=\mathbb{R}$

a) $f'(x)=0 \quad x^2e^{-x}(3-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=0;\, x_2=3$ a lehetséges szélsőérték helyek

b)

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
f'	+	0	+	0	–
f	↗	nő	↗	h. max.	↘

$f(3)=\frac{27}{e^3}\approx 1{,}34$

helyi és egyben abszolút maximum!

III. $f''(x)=2xe^{-x}(3-x)-x^2e^{-x}(3-x)-x^2e^{-x}= \qquad xe^{-x}\left(6-2x-3x+x^2-x\right)$

$f''(x)=xe^{-x}\left(x^2-6x+6\right)$ $\qquad D_{f''}=$ú

a) $f''(x)=0 \qquad x\cdot e^{-x}\left(x^2-6x+6\right)=6$

$x_1=0; \qquad x_2=3-\sqrt{3}; \qquad x_3=3+\sqrt{3}$

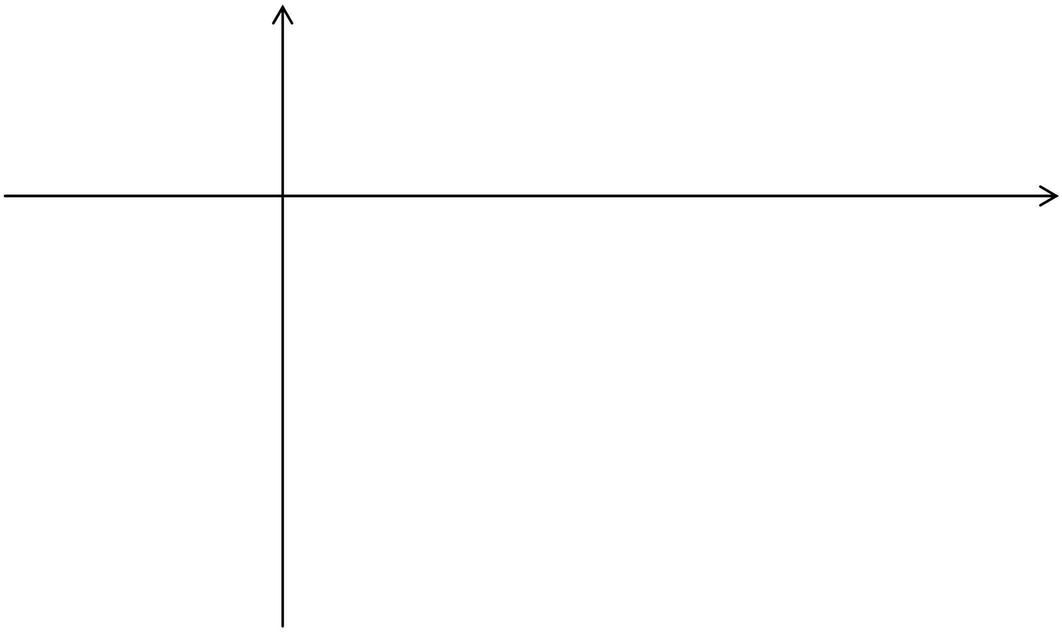
b)

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3-\sqrt{3}[$	$3-\sqrt{3}$	$]3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}[$	$3+\sqrt{3}$	$]3+\sqrt{3};\infty[$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	∩	infl.p.	∪	infl.p.	∩	infl.p.	∪

$f(0)=0 \qquad f\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}58 \qquad f\left(3+\sqrt{3}\right)\approx 0{,}93$

$P_1(0;0) \qquad P_2\left(3-\sqrt{3};0{,}58\right) \qquad P_3\left(3+\sqrt{3};0{,}93\right)$

IV.



V. $R_f = \left]-\infty; \frac{27}{e^3}\right[\quad \Rightarrow$ csak felülről korlátos

6.3 Szélsőérték problémák

PÉLDA Egy 10cm sugarú félkör alakú lemezből legfeljebb mekkora területű egyenlőszárú, trapéz alakú lemezt vághatunk ki?

Megoldás

$CD = x \qquad$ OTC Δ-ből

$OT = \frac{x}{2} \qquad 10^2 = m^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{400-x^2}}{2} > 0$

$0 < x < 20$

$$T = \frac{20+x}{2} \cdot m$$

$$T(x) = \frac{20+x}{2} \cdot \frac{\sqrt{400-x^2}}{2} = \frac{1}{4}(20+x)\sqrt{400-x^2}$$

$$D_T = \left]0;20\right[$$

$$T'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{400-x^2} + \frac{1}{4}(20+x)\frac{-x}{\sqrt{400-x^2}} = \frac{1}{4}\frac{400-x^2-x(20+x)}{\sqrt{400-x^2}}$$

$$T'(x) = \frac{1}{4}\frac{(20+x)(20-2x)}{\sqrt{400-x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_o = 10(cm)$$

x	]0;10[	10	]10;20[
T′	+	0	-

$x_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad m_o = 5\sqrt{3}(cm) \approx 8{,}66\,cm$

$T_{max} = 75 \cdot \sqrt{3}(cm^2)$

T	$\nearrow$	h. max.	$\searrow$

6.4 Taylor polinom; Taylor – formula

DEFINÍCIÓ. Legyen f függvény az x_o pontban legalább n-szer differenciálható. Az f függvény x_o helyhez tartozó n-edik <u>Taylor polinoma:</u>

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x - x_o) + \frac{f'(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

röviden $$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_o)}{i!}(x - x_o)^i$$

PÉLDA $f(x) = e^x$ $x_o = 0$ Írjuk fel f függvény x_o helyhez tartozó n-edik Taylor polinomját (n-edfokú Taylor polinomját!)

Megoldás $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

MEGJEGYZÉS $f(x)$ függvény n-edfokú (n-edik Taylor–polinomja) az x_o pontban legalább n-edrendben érintkezik az $f(x)$ függvény grafikonjával.

<u>Taylor – formula</u>

TÉTEL Ha f függvény az x_o valamely környezetében legalább (n+1)-szer differenciálható, akkor ebbe a környezetbe eső $\forall x$ helyen érvényes a következő egyenlőség:

$$f(x) = \underset{\uparrow}{T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1} \quad \text{, ahol} \quad x_o < \xi < x \quad \text{v.} \quad x < \xi x_o$$

n-edfokú Taylor polinomja f függvénynek

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}$$ — Langrange – féle maradéktag

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha n nagy, akkor ált. $R_n(x)$ kicsi, így $f(x) \approx T_n(x)$
2. Az $R_n(x)$ maradéktagot legtöbbször közelítő értékek számításakor elkövetett hibabecslésre használják.

PÉLDA Számítsuk ki $\sin 0,4$ közelítő értékét a harmadfokú Taylor–polinom segítségével és becsüljük meg a közelítés hibáját!

Megoldás $f(x) = \sin x$ $x = 0,4$ $x_o = 0$

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1$$
$$f^{IV}(x)=\sin x$$

$$T_3(x)=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3=x-\frac{1}{6}x^3$$
$$\sin 0,4\approx T_3(0,4)=0,4-\frac{1}{6}0,4^3=0,3893$$

A Taylor formula:

$$\sin x=T_3(x)+R_3(x) \qquad R_3(x)=\frac{\sin\xi}{4!}x^4$$
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{\sin\xi}{4!}x^4 \qquad 0<\xi<0,4$$
$$\left|R_3(0,4)\right|=\left|\frac{\sin\xi}{4!}0,4^4\right|<\frac{0,4^4}{4!}=\frac{0,0256}{24}=1,0\dot{6}\cdot 10^{-3}=0,0010\dot{6}$$
$$0<\xi<0,4 \qquad \sin\xi<1 \qquad \text{A hiba kisebb mint } 1,06\cdot 10^{-3}$$

6.5 Síkgörbék néhány jellemzője.

6.5.1 Síkgörbe érintője; normálisa

Legyen f x_o környezetében értelmezett, x_o-ban differenciálható. A $P_o(x_o;f(x_o))$ pontntban érintőt húzunk f függvény grafikonjához.

Az érintő egyenlete:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

P_o-ban az érintőre merőleges egyenes a görbe normálisa.

A normális esetén: $m=\mathrm{tg}\beta= \; =\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{f}{f'(x_0)}$ ha $f'(x_0)\neq 0$

A normális egyenlete:

$$y-f(x_o)=\frac{-1}{f'(x_o)}(x-x_o) \qquad \text{ha} \quad f'(x_o)\neq 0$$

6.5.2 Síkgörbék hajlásszöge

DEFINÍCIÓ. Két a P_o-ban egymást metsző síkgörbe hajlásszöge a két görbéhez a metszéspontban húzott érintők által bezárt – derékszögnél nem nagyobb szög.

Legyen f és g x_0 környezetében értelmezett, x_0 -ban differenciálható és $f(x_0)=g(x_0)$

A két fv görbe hajlásszöge ω

$$\mathrm{tg}\omega = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\alpha}$$

de $\quad \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) \qquad \mathrm{tg}\beta = g'(x_0)$

és $\quad 0 \le \omega \le \frac{\pi}{2} \quad$ ezért

$$\mathrm{tg}\omega = \left| \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0) f'(x_0)} \right| \qquad \text{ha} \qquad g'(x_0)\; f'(x_0) \neq -1$$

6.5.3 Síkgörbék érintkezése

DEFINÍCIÓ. Az f és a g függvények legyenek az x_o pontban legalább n-szer differenciálhatók és

$$f(x_o) = g(x_o), \quad f'(x_o) = g'(x_o), \quad f''(x_o) = g''(x_o), \ldots, f^{(n)}(x_o) = g^{(n)}(x_o)$$

de $\quad f^{(n+1)}(x_o)$ és $g^{(n+1)}(x_o)$ nem egyenlők v. nem léteznek,

akkor f és g függvények görbéi x_o-ban <u>n-edrendben érintik</u> egymást.

DEFINÍCIÓ. Egy síkgörbe <u>P_0 pontbeli simulóköre</u> az a kör, amely az adott pontban legalább másodrendben érintkezik a görbével.

A simulókör sugara: $\quad r$

középpontja: $\quad C(u;v)$

egyenlete: $(x-u)^2 = (y-v)^2 = r^2$

Az x_0 pont környezetében a simulókör adjon meg egy g függvényt!

A másodrendű érintkezés miatt

$$f(x_0) = g(x_0); \quad f'(x_0) = g'(x_0); \quad f''(x_0) = g''(x_0)$$

$$(x-u)^2 + (g(x)v)^2 = r^2$$

$$2(x-u) + 2(g(x) - v) \cdot g'(x) = 0$$

$$2 + 2[g'(x)]^2 + 2(g(x) - v)g''(x) = 0$$

Az érintkezés miatt

$$\left.\begin{aligned} &(x_0 - u)^2 + (f(x_0) - v)^2 = r^2 \\ &(x_0 - u) + (f(x_0) - v)f'(x_0) = 0 \\ &1 + [f'(x_0)]^2 + (f(x_0) - v)f''(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ezt } u, v, r \text{ -re megoldva}$$

$$u = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f'(x_0)} \qquad v = f(x_0) + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

$$r = \frac{\left(1+\left[f'(x_0)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|f''(x_0)\right|}$$ u; v; r a simulókör adatai!

DEFINÍCIÓ. Egy síkgörbe P_0 pontbeli görbülete a e pontbeli simulókör sugarának reciproka:

$$g = \frac{1}{r}$$

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvénygörbe $x_0 = 1$ helyen tartozó simulókörét és görbületét!

Megoldás

$f(x) = \ln x$ $\quad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f''(1) = -1$

$$u = 1 - 1\frac{1+1^2}{-1} = 3 \qquad v = 0 + \frac{1+1^2}{-1} = -2$$

$$r = \frac{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

A simulókör egyenlete: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$

x_0-beli görbülete: $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

6.6 Egyenletek közelítő megoldása Newton – módszerrel

6.6.1 Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

1. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f korlátos az $[a,b]$-n.

2. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f az $[a,b]$-on felveszi legnagyobb és legkisebb értékeit.

3. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n és $f(a)\cdot f(b) < 0$; akkor › $c \in]a,b[$, ahol $f(c) = 0$.

4. TÉTEL Legyen f folytonos az $]a;b[-n$, $\forall x_1, x_2 \in]a;b[$ esetén, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, akkor f minden $f(x_1)$ és $f(x_2)$ közötti értéket felvesz az $]x_1;x_2[$-on.

$f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) < c < f(x_2)$

$J\,\xi \in]x_1, x_2[$ melyre

$f(\xi) = c$

6.6.2 Egyenletek közelítő megoldása

Egyismeretes egyenlet általános alakja:

$$f(x)=0$$

A gyakorlatban az egyenletek megoldásait elég csak bizonyos pontossággal megadni, azaz a gyököket közelítő eljárással határozhatjuk meg.

Az $f(x)=0$ egyenlet megoldásait 2 lépésben határozhatjuk meg:

1. Tájékozódunk az egyenlet gyökeinek számáról és elhelyezkedéséről, majd ha tudjuk, elkülönítjük a gyököket, azaz olyan véges, zárt intervallumokat határozunk meg, amelyekben csak egyetlen gyök van. (Ezt gyakran grafikusan oldjuk meg.)
2. Az előzőleg meghatározott intervallumokban valamilyen közelítő módszerrel kiszámítjuk a gyökök közelítő értékét.

PÉLDÁK

1. Bizonyítsuk be, hogy a $10^x-2x-5=0$ egyenletnek csak egyetlen megoldása van a $[0;1]-$ban .

Megoldás

$f(x)=10^x-2x-5$ $\qquad D_f=$ ú

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-4 \\ f(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Mivel f folytonos a $[0;1]-$en › $c\in\,]0;1[$, melyre $f(c)=0$

$f'(x)=10^x\cdot\ln 10-2$

$f'(x)=10^x\cdot(\ln 10)^2>0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ szigorúan monoton nő , de ekkor

$f'(0)=\ln 10-2>0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$ a $[0,1]-$on,

tehát $f(x)$ szigorúan monoton nő a $[0,1]-$on $\Rightarrow$

f -nek egyetlen zérushelye van a $[0,1]-$on.

2. Különítsük el az $\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{x+2}$ egyenlet gyökeit!

Megoldás

$y(x)=\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x+2}$ $\qquad D_f=[-2;0[\ \text{v}\ ]0;\infty[$

$\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{x+2}$ $\qquad$ mindkét oldalt ábrázoljuk

$\xi_1\in[-2;-1,5]$

$\xi_2=-1$

$\xi_3\in[0,5;1]$

6.6.3 Newton – féle érintőmódszer

Numerikus módszer az $f(x)=0$ egyenlet közelítő megoldására
$f(\xi)=0$ és $\xi\in[a,b]$ ξ közelítő értékét keressük.

A Newton–módszer alkalmazható, ha $f(x)$ az $[a;b]-$n teljesíti a következőket:

1) kétszer differenciálható
2) $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$ (tehát $f'(x)$ állandó előjelű $\Rightarrow$ f szig. monoton!)
3) $f''(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$ (tehát $f'(x)$ állandó előjelű $\Rightarrow$ f-nek nincs inflexiós pontja)

Az $[a,b]$ intervallum azon végpontjából indulunk, ahol a függvényérték előjele azonos $f''(x)$ előjelével.

4 eset lehetséges:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)>0 \\ f(b)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow b-\text{ből indulunk} \qquad \left.\begin{array}{l} f''(x)<0 \\ f(a)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow a-\text{ból indulunk}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)>0 \\ f(a)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow a-\text{ből indulunk} \qquad \left.\begin{array}{l} f''(x)<0 \\ f(b)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow b-\text{ből indulunk}$$

A kezdőpont legyen pl. a b pont. Ekkor b pontban felírjuk az érintő egyenletét:

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

Megkeressük az érintő egyenes x tengellyel való metszéspontját ez legyen x_1

$$0 - f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Majd a következő érintőt az x_1 pontban húzzuk a görbéhez, ennek az x tengellyel való metszéspontja x_2,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

és így tovább

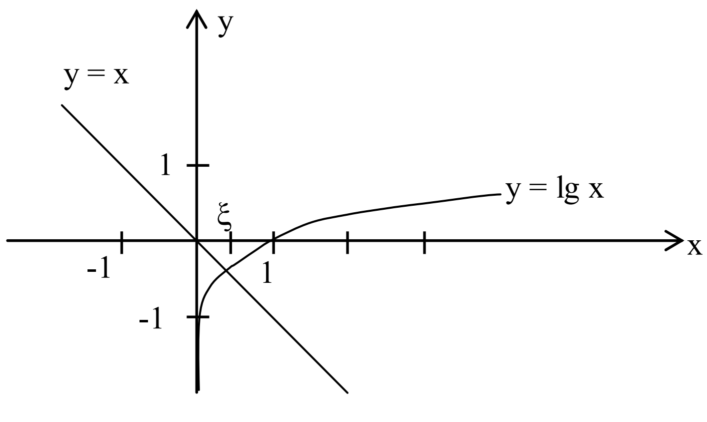
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_n)}$$

$x_1, x_2, ...x_n$ értékek monoton közelítenek a ξ értékhez.

PÉLDA Oldjuk meg az $x + \lg x = 0$ egyenletet!

Megoldás $f(x) = x + \lg x$ $D_f = ú^+$

$\lg x = -x$ mindkét oldalt ábrázoljuk



$\xi \in [0,1;1]$

mert $f(0,1) = -0,9$

$f(1) = 1$

$$f(x) = x + \lg x$$
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x \ln 10} > 0$$
$$f''(x) = \frac{-1}{x^2 \ln 10} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0,1 - \text{ből indulunk}$$

n	x_n	$f(x_n) = x_n + \lg x_n$	$f'(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n \ln 10}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,1	- 0,9	5,343	0,2684
1	0,2684	- 0,3028	2,618	0,3841
2	0,3841	- 0,0315	2,131	0,3989

3	0,3989	- 0,00025	2,08873	0,3991
4	0,3991	- 0,000018	2,08818	

Tehát $\xi \approx 0,3991$