EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK

MATEMATIKA

III.

PMMANB 313, PMMANB927 segédlet a PTE PMMK építőmérnök hallgatói részére

„Az építész- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

MATEMATIKA III.

PERJÉSINÉ HÁMORI ILDIKÓ

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar,
Matematika Tanszék
<perjesi@witch.pmmf.hu>

ISBN 978-963-7298-16-5

2007

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

A jegyzet a Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Kar Építőmérnök BSc szakos hallgatói számára készült. Felépítése a Matematika III. tantárgy tematikáját követi, annak elméleti összefoglalását adja.
Feladatmegoldáshoz a Maple számítógép algebrai rendszert használjuk, ezért a kidolgozott feladatokat tartalmazó munkalapok regisztált felhasználók számára elektronikusan érhetők el a http://matserv.pmmf.hu/e-learning honlapról.

Pécs, 2007. december

Perjésiné Hámori Ildikó

Részletes tantárgyprogram

Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Ismerkedés a MAPLE számítógép algebrai rendszerrel. Mátrix fogalma, kvadratikus mátrix, mátrix transzponáltja, minormátrix. A mátrixok körében értelmezett relációk, műveletek mátrixokkal, speciális mátrixok.
2.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Kvadratikus (négyzetes) mátrix determinánsa, a determináns tulajdonságai, négyzetes mátrix adjungáltja, inverze, szabályos lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal, Gauss-módszerrel.
3.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	A lineáris tér fogalma. Vektorok lineáris függetlensége, függősége. A vektorrendszer rangja, a lineáris tér bázisa, dimenziója, a vektor koordinátái. Mátrix rangja. Elemi bázistranszformáció. lineáris egyenletrendszer megoldása bázistranszformációval.
4.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat.	Mátrix sajátértékei és sajátvektorai. Másodfokú kifejezések kanonikus alakja, ezek osztályozása. Közönséges, elsőrendű lineáris differenciál-egyenletrendszerek megoldása a lineáris algebra módszereivel.
5.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	**1. ZH** Egyváltozós vektor-skalár függvények. Kísérő triéder, rektifikáló-, normál-, simulósík fogalma. Térgörbe ívhossza.
6.	ŐSZI SZÜNET	
7.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Kétváltozós vektor-skalár függvények. Gömb, forgásfelület, hengerfelület, kúpfelület egyenlete. Felület érintősíkja, felület felszíne. az elsőrendű alapmennyiségek
8.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Skalár-vektor függvények. Gradiens vektor, iránymenti derivált meghatározása.
9.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vektor-vektor függvények. A felületi integrál fogalma, kiszámítása. Divergencia, rotáció fogalma a rájuk vonatkozó azonosságok.. Gauss-Osztrogradszkij tétel.
10.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	A vonalintegrál fogalma, kiszámítása. A vonalintegrál úttól való függetlensége. A potenciál fogalma és meghatározása. Stokes tétel , Green tétel..
11.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	A végtelen számsor, a geometriai sor fogalma, konvergenciájának feltétele. Majoráns-, minoráns-, gyök-, hányados- és integrálkritérium.
12.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Leibniz tipusú sorok, abszolút- és feltételes konvergencia. A harmonikus és az $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ tipusú sor konvergenciája
13.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Függvénysorok, hatványsorok, konvergenciaintervallum fogalma. Hatványsor differenciálhatóságára és integrálhatóságára vonatkozó tétel. A Taylor-sor, Taylor formula, Lagrange féle maradéktag.
14.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Fourier sor, együtthatóinak meghatározása. Páros és páratlan függvények Fourier együtthatói. Tetszőleges peródusu függvény Fourier sora.
15.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	**2 ZH** A rezgő húr és a hővezetés differenciálegyenletének megoldása.

1. A lineáris algebra elemei

1.1 Mátrixok, determinánsok

1.1.1. Mátrixszal kapcsolatosa alapfogalmak

Definíció: Bizonyos elemek téglalap alakú elrendezését **mátrix**nak nevezzük.

Jelölés:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{mxn} = [a_{mn}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ha egy mátrixnak *m* sora és *n* oszlopa van, *mxn*-es mátrixról beszélünk. Kézi számításoknál a mátrixot kétszeres aláhúzással jelöljük: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}_{mxn}$

A mátrix elemei lehetnek: valós és komplex számok, vektorok, mátrixok, függvények.

Definíció: Az *nxn* típusu mátrixot (n-edrendű) **kvadratikus** (négyzetes) mátrixnak nevezzük. Az $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ … ,$a_{n,n}$ elemek a **főátló**ban helyezkednek el.

Definíció: A mátrix transzponáltját úgy kapjuk meg, hogy sorait és oszlopait felcseréljük.

Jele: **A***, vagy $\mathbf{A}^T$

Definíció: Az *1xn*-es mátrixot **sorvektor**nak, az *mx1*-es mátrixot **oszlopvektor**nak nevezzük. A sorvektort általában oszlopvektor transzponáltjaként írjuk fel.

Definíció: Ha a mátrixból tetszőleges számú sort vagy oszlopot elhagyunk, a mátrix **minormátrix**át kapjuk.

Definíció: **Egységmátrix** olyan kvadratikus mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1, a többi 0. Például a 3. egységmátrix:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definíció: Két mátrix **egyenlő**, ha elemeik rendre megegyeznek, azaz
$\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{B}_{m\times n}$ ha $a_{ik}=b_{ik}$ $\forall$ i-re, k-ra (i=1…m, k=1…n)

Definíció: Azonos típusu mátrixokra akkor értelmezett a <, >, = reláció, ha elemeikre rendre ugyanaz a reláció teljesül.

1.1.2. Műveletek mátrixokkal

Definíció: Két azonos típusú mátrix **összeg**ének (**különbségének**) nevezzük azt a mátrixot, amelynek bármely eleme a két mátrix megfelelő azonos indexű elemének összege (különbsége).

Tulajdonságok: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ kommutatív
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ asszociatív
$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ létezik zéruselem (olyan mátrix, melynek minden eleme 0)
$\mathbf{A}+\mathbf{X}=\mathbf{0}$ létezik ilyen **X**, az un., ellentettmátrix ($\mathbf{X}=-\mathbf{A}$)

Definíció: Egy mátrix **skalárszoros**ának nevezzük azt a mátrixot, melynek bármely eleme a mátrix megfelelő elemének skalárszorosa. $\lambda\lfloor a_{ik}\rfloor=\lfloor\lambda a_{ik}\rfloor$

Tulajdonságok: $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{A})$ skalárasszociatív
$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{A}$ disztributív
$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ disztributív

Definíció: A **szorzatmátrix** *i*-edik sorának *k*-adik elemét úgy kapjuk, ha a baloldali tényező *i*-edik sorának elemeit rendre megszorozzuk a jobboldali tényező *k*-adik oszlopának elemeivel és az így kapott szorzatokat összegezzük. Ezt az eljárást az *i*-edik sor és a *k*-adik oszlop kompozíciójának nevezzük.
Jelölés: &*, *, vagy *semmi*

Megjegyzés:

- A szorzás csak akkor végezhető el, ha a bal oldali tényező oszlopainak száma megegyezik a jobboldali tényező sorainak számával. Az ilyen mátrixok **konformábilis** mátrixok. $\mathbf{A}_{m\times n}\,\mathbf{B}_{n\times p}=\mathbf{C}_{m\times p}$
- A mátrixok szorzása vektorok skaláris szorzatának általánosításaként tekinthető.

Tulajdonságok: **AB≠BA** nem kommutatív

Ha *A*,*B*, *C* páronként komformábilisak: (**AB**)*C*=**A**(**BC**) asszociatív

Ha képezhető *A*+*B*, és ez konformábilis *C*-vel (**A**+**B**)*C*=**AB**+*AC* disztributív

1.1.3. A determináns értelmezése, kiszámítása, a determináns tulajdonságai

Definíció: A *2x2-es* kvadratikus mátrix **determináns**ának nevezzük a

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ kifejezés értékét.

Definíció: Az *nxn-es* kvadratikus mátrix **n-edrendű determinánsá**nak nevezzük a következő **rekurzív kifejtés** eredményeképpen kapott értéket:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & & . & \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

ahol A_{1k} az a1k elemhez tartozó **(n-1)-ed rendű aldetermináns**. Ezt az eredeti determinánsból úgy kapjuk, hogy az eredeti determináns első sorát és k-adik oszlopát elhagyjuk,és az így kapott determinánst $(-1)^{k+1}$-gyel megszorozzuk.

Definíció: Ha det **A** ≠0 a mátrix **reguláris**, ha det **A** =0, a mátrix **szinguláris**.

Sarrus-szabály: A 3x3-as mátrix determinánsának kifejtése egyszerűen megjegyezhető alakban:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

1. A determináns bármely sora és oszlopa szerint kifejthető

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & & . & \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & . & . \\ - & + & - & . & . \\ + & - & + & . & . \\ - & + & - & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

ahol az első esetben a kifejtés az i-edik sor, a második esetben a k-adik oszlop szerint történik. Az A_{ik} aldetermináns előjele $(-1)^{k+i}$-vel egyenlő. Ez az un. sakktábla szabállyal jegyezhető meg.

2. A determináns értéke nem változik, ha sorait és oszlopait felcseréljük.
   $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
3. Ha a determináns két sorát (oszlopát) felcseréljük, a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
4. Ha a determináns két sora (oszlopa) rendre megegyezik egymással, a determináns értéke 0.
5. Ha a determináns valamely sorában (oszlopában) csupa 0 áll, a determináns értéke 0.
6. Ha a determináns valamely sorának (oszlopának) minden elemét megszorozzuk egy $c \in \mathbf{R}$ számmal, a determináns értéke c-szeresére változik.
7. A determináns értéke nem változik, ha valamely sorának (oszlopának) elemeihez hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) elemeinek valahányszorosát.

1.1.4. A mátrix adjungáltja

Definíció Az **A** mátrix **adjungált**ja

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ahol A_{ij} az **A** mátrix determinánsának a_{ij} eleméhez tartozó (előjeles) aldeterminánsa.

Megjegyzés: adj **A** az **A** mátrix determinánsában szereplő aldeterminánsokból képzett mátrix transzponáltja.

Általánosan is bebizonyítható:

Tétel $(\text{adj}\,\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\text{adj}\,\mathbf{A}) = \det\mathbf{A} * \mathbf{E}$, ahol **A** egy tetszőleges *nxn*-es kvadratikus mátrix, **E** pedig az nxn-es egységmátrix.

Következmény: Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\dfrac{\mathbf{A}(\text{adj}\mathbf{A})}{\det\mathbf{A}} = \mathbf{E}$

Definíció A reguláris négyzetes **A** mátrix (det $\mathbf{A}\neq 0$) $\mathbf{A}^{-1}$ **inverz** (vagy reciprok) **mátrix**a az a mátrix, amelyre $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$ illetve $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$

Következmény: $$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\,\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}}$$

1.2 Lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal, Gauss eliminációval

1.2.1. Szabályos lineáris egyenletrendszer megoldása

Definíció Az n ismeretlent tartalmazó, n egyenletből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

ahol x_k (k=1…n) a k-adik ismeretlen, a_{ik} (i=1…n; k=1…n) és b_i (i=1…n) valós számok.

Képezzünk az együtthatókból egy nxn-es mátrixot, az ismeretlenekből és a jobboldalon szereplő konstansokból pedig oszlopvektort!

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ekkor az egyenletrendszer **Ax**=**b** alakú.

Definíció: a lineáris egyenletrendszert **szabályos**nak nevezzük, ha az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, és az ismeretlenek együtthatóiból képezhető mátrix determinánsa nem 0.

Cramer szabály: Ha a lineáris egyenletrendszer szabályos, megoldásvektora

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Általánosan is bebizonyítható:

Tétel: Ha egy lineáris egyenletrendszer szabályos, akkor a lineáris egyenletrendszer:
- megoldható
- pontosan egy, (n elemből álló) megoldása van
- a megoldás $x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}}$ alakú,, i=1…n, ahol det **A** az egyenletrendszer együtthatóiból származtatott determináns, det $\boldsymbol{A}_i$ pedig az i-edik módosított determináns, amely det **A**-ból úgy jön létre, hogy a det **A** i-edik oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansok oszlopával helyettesítjük.

Megjegyzés: A Cramer szabály „az egyik egyenletből kifejezem az egyik ismeretlent, behelyettesítem a másikba" típusú egyenletrendszer megoldási mód általánosítása.

1.2.2. A lineáris egyenletrendszer felírási módjai, megoldhatósága

Az n ismeretlent tartalmazó, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer **általános alak**ja:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&.\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = b_i\\
&.\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

ahol az x_k (k = 1,2,...,n) a k-adik ismeretlen, az a_{ik} (i = 1,2, . . . ,m; k = 1,2, . . .,n) , b_i valós számok. Az a_{ik} a k-adik ismeretlen együtthatója az i-edik egyenletben, a bi pedig az i-edik egyenletben levő konstans tag.

Ha az együtthatókból egy mxn-es mátrixot, a változókból vektort képezünk az egyenletrendszer **mátrixos alak**ját, kapjuk: **Ax**=**b**

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Definíció Az n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer **megoldás**ának nevezünk minden olyan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ **rendezett szám n-es**t, melynek elemeit rendre a megfelelő ismeretlenek helyébe helyettesítve az egyenletrendszer minden egyenlete teljesül.

Ha van ilyen rendezett szám n-es, akkor az egyenletrendszert **megoldható**nak nevezzük.

Az alábbi kérdésekre keressük a választ:

(a) Mi a feltétele annak, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen;
(b) Ha a rendszer megoldható, akkor hány megoldás van,
(c) Hogyan lehet az összes megoldást megadni;
(d) Milyen módszerrel kaphatjuk meg az összes megoldást.

1.2.3. A lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss módszerrel

Elemi ekvivalens átalakítások:

E1. Valamelyik egyenletet egy 0-tól különböző számmal végigszorozzuk.
E2. Valamelyik egyenlethez egy másik egyenlet számszorosát hozzáadjuk.
E3. Két egyenletet felcserélünk.
E4. Az olyan egyenleteket, amelyekben valamennyi együttható és a jobboldali állandó is 0 elhagyjuk.

Ezek az átalakítások az eredetivel egyenértékű egyenletrendszerhez vezetnek. Segítségükkel az egyenletrendszerből kiküszöböljük - egymás után - az ismeretleneket.

A Gauss módszer mátrixos alakja

Az egyenletrendszert egyszerűbben leírhatjuk mátrixok segítségével: az együtthatókból képzett *mxn-es* mátrixot az egyenletrendszer **együtthatómátrix**ának, a jobb oldali állandókkal kibővített *m x (n+1)-es* mátrixot pedig az egyenletrendszer **kibővített mátrix**á-nak nevezzük.

Az egyenletekkel végzett E1-E4 elemi ekvivalens átalakításoknak a kibővített mátrixnál a **sorok**kal végzett hasonló változtatások felelnek meg:

M1. Valamelyik sort egy nullától különböző számmal végigszorozzuk.
M2. Valamelyik sorhoz egy másik sor számszorosát hozzáadjuk.

M3. Két sort felcserélünk.
M4. A csupa 0-ból álló sorokat elhagyjuk.

A kibővített mátrixon végzett fenti lépéseket **elemi sorekvivalens átalakítások**nak nevezzük.

Az átalakítások után egy olyan mátrixhoz jutunk, amelyben az első sort kivéve minden sor nullákkal kezdődik, az első valahány sorban az első nem 0 elem mindig 1-es (az ún. **vezéregyes**), ezek csupa különböző oszlopban, lépcsőzetesen lefelé és jobbra helyezkednek el, a vezéregyesek alatt pedig minden elem 0. Lehetnek ezen kívül olyan sorok is, amelyekben az együtthatómátrixnak megfelelő rész csupa 0. Az így létrejövő formát **lépcsős alak**nak nevezzük.

A lépcsős alakból a vezéregyesek fölötti elemeket kinullázhatjuk, ha alulról felfelé haladva az egyes sorokból a vezéregyes sorának megfelelő többszörösét levonjuk. Az így adódó alakot **redukált lépcsős alak**nak nevezzük (RLA).

Az egyenletrendszer **akkor és csak akkor oldható meg,** ha az RLA-ban nem fordul elő olyan sor, amelyben az együtthatóknak megfelelő rész csupa nulla, a jobb oldali rész pedig nem 0 (**tilos sor**).

A megoldás **akkor és csak akkor egyértelmű**, ha nincs tilos sor és minden sorban áll vezéregyes, azaz a vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával.

Ha az egyenletrendszer megoldása **nem egyértelmű**, akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek tetszőlegesen választhatók (azaz **szabad paraméterek**), a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető.

Tétel. I. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa elemi sorekvivalens átalakításokkal redukált lépcsős alakra hozható.

II. Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha a (redukált) lépcsős alakban nincs tilos sor.

III. Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor egyértelmű a megoldása, ha nincs tilos sor és a vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával.

IV. Ha több megoldás van, akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek szabad paraméterek (tetszőlegesen megválaszthatók), a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető. A megoldásszám ekkor végtelen.

1. 3. Lineáris tér, vektorrendszer rangja, bázis, dimenzió, koordináták

I. Az **összeadás** műveletére nézve az azonos típusú mátrixok (vektorok) ***Abel -csoportot*** alkotnak,azaz az **A**+**B** összegmátrix (vektor) értelemszerűen az összeadandókkal azonos típusú mátrix (vektor) (a művelet zárt) és

1. **A+B=B+A** (kommutatív)
2. **A+(B+C)=(A+B)+C** (asszociatív)
3. Létezik neutrális elem, ez itt a zérusmátrix, amellyel minden A-ra **A+0=A**
4. Minden **A**-hoz létezik additív inverz, a -**A** mátrix, amelyre **A+(-A)=0**,

tehát a 3. és 4. tulajdonság alapján a művelet invertálható.

II A **skalárral való szorzás**ra nézve ugyancsak zárt a művelet, tehát a λ**A** mátrix is az **A**-val azonos típusú mátrix és érvényesek a következő műveleti azonosságok:

1. $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{A})$ (skalárasszociatív)
2. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ (disztributivít)
3. $(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{A}$ (disztributív)

III. Ezeken kívül létezik olyan, az 1 szimbólummal jelölt egységskalár, amelyre nézve minden **A** esetén 1**A**=**A**

1.3.1. A lineáris tér, altér fogalma

Definíció: Az olyan halmazokat, amelyek rendelkeznek a most felsorolt (I. 1, 2, 3,4; II 1, 2, 3) és a III. tulajdonságok mindegyikével **lineáris tér**nek vagy **vektortér**nek nevezzük.

Pontosabban fogalmazva azt mondhatjuk, hogy például az n-elemű vektorok, vagy az azonos típusú mátrixok **lineáris teret**, más szóval vektorteret **alkotnak** a valós számok (teste) felett. A tér elemeit vektoroknak nevezzük, függetlenül konkrét jellegüktől.

Tekintsük most azoknak az n-elmű vektoroknak a halmazát, amelyeknek utolsó eleme 0. Ez a halmaz is lineáris tér(két ilyen vektor összege, számszorosa is a halmazhoz tartozik, az összeadásnak van inverze, van a halmazban zéruselem, valamint a két művelet rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal.

Ez a lineáris tér az n-elemű vektorok lineáris terének valódi részhalmaza (az n-elemű vektorok terében van olyan vektor, amelynek az utolsó eleme nem 0).

Definíció Egy lineáris tér nem üres részhalmazát, amely maga is lineáris tér a vektortér **alterének** nevezzük.

Definíció Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vektorok skalárszorosainak összegét, azaz a

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

alakú vektort az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Megjegyzés: itt a vektor fogalmát tágabban értelmezzük, egy adott lineáris tér elemeit értjük alatta.

Tekintsük az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ és képezzük ezek lineáris kombinációját úgy, hogy hogy minden skalárszorzó 0 legyen. Így zérusvektort kapunk (a vektor minden eleme 0 lesz). A zérusvektor ilyen előállítását **triviális előállítás**nak nevezzük.

Definíció Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vektorokból álló vektorrendszert **lineárisan független**nek nevezzük, ha a zérusvektor a vektorrendszer vektorai segítségével csak triviálisan állítható elő, azaz a

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

csak akkor teljesül, ha

$$\lambda_1=\lambda_2= \lambda_3= \ldots= \lambda_n=0$$

Ellenkező esetben, azaz ha a vektorrendszer vektorai segítségével a zérusvektor nem csak triviálisan állítható elő (a skalárszorzók közül legalább egy nem 0), akkor a vektorrendszert **lineárisan függő**nek nevezzük.

1.3.2. Lineárisan független illetve függő vektorrendszerre vonatkozó tételek

1.Tétel Lineárisan független vektorrendszernek a zérusvektor nem lehet eleme.

2.Tétel Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

3.Tétel Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor vektorai közül legalább egy előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként.

4. Tétel Ha egy vektorrendszer egyik vektora megadható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer függö. (Az előző tétel megfordítása)

A 3. és a 4. tételben foglalt állítások a következőképpen foglalhatók össze: Egy vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha legalább az egyik vektora kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

5. Tétel Lineárisan függő vektorrendszer bővítése is lineárisan függő

1.3.3. Lináris tér bázisa, rangja, dimenziója, vektor koordinátái

Definíció A vektorrendszerből kiválasztható független vektorok maximális számát a **vektorrendszer rangjá**nak nevezzük.

Véges sok vektorból álló vektorrendszer rangja természetesen nem lehet nagyobb a vektorok számánál.
A lineáris tér elemeinek száma nem véges. Kérdés, hogy maximálisan hány vektorból álló független vektorrendszert tudunk kiválasztani egy lineáris térből?

Definíció A lineáris térből kiválasztható maximális számú vektort tartalmazó független vektorrendszert az L lineáris tér **bázis**ának, a bázisban szereplő vektorok - az un. bázisvektorok - számát pedig a **lineáris tér dimenzió**jának nevezzük.

Ez más szavakkal azt jelenti, hogy az L lineáris tér n dimenziós, ha elemei közül ki lehet választani n számú lineárisan független vektort, de bármely n+1 eleme már lineárisan függő vektorrendszert alkot.

Példa: Adjuk meg a jól ismert geometriai térnek (a tér minden elemét rendezett számhármassal is megadhatjuk) egy bázisát! Hány dimenziós ez a tér?

Megoldás: Tekintsük pl. a következő vektorokat:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0 , 0),\ \ \mathbf{e}_2 = (0 , 1 ,0),\ \ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

Ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot (könnyen ellenőrithető, hogy a zérusvektor ezek lineáris kombinációjaként csak triviálisan állítható elő).

Ha ezekhez bármely más

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektort hozzáveszünk, a négy vektor már lineárisan függő rendszert alkot, hiszen

$$\mathbf{v} = v_1\, \mathbf{e}_1 + v_2\, \mathbf{e}_2 + v_3\, \mathbf{e}_3,$$

tehát **v** előáll az először felvett vektorok lineáris kombinációjaként, s ez az előző szakasz 4. tétele értelmében pont azt jelenti, hogy a rendszer függő.
Tehát az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ .egy, a háromelemű vektorok teréből kiválasztható, maximális számú vektort tartalmazó lineárisan független vektorrendszer, azaz a tér bázisa. (Az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektorok a geometriában **i**, **j**, **k**- val jelölt, páronként merőleges egységvektorok). A (geometriai) tér megadott bázisa 3 vektorból áll, ezért a tér háromdimenziós. Ezt szemléletesen úgy fogalmazhatjuk meg, hogy három, nem egysíkú vektor kifeszíti a teret.

Példa: Hány dimenziós a rendezett szám n-esek által alkotott lineáris tér?
Megoldás: A tér egy bázisát adják pl. azok a vektorok, amelyeknek egyetlen eleme 1, a többi 0 Ilyen un. egységvektor n db van:

$$\mathbf{e}_1, = (1, 0, 0, \dots,0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots,0)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots,1)$$

Ez az n db vektorból álló vektorrendszer lineárisan független, de bármely más

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots\, v_n)$$

vektort hozzávéve, az így kapott n+1 vektorból álló vektorrendszer már lineárisan függő, hiszen

$$\mathbf{v} = v_1\, \mathbf{e}_1 + v_2\, \mathbf{e}_2\, v_3 + \dots + v_n\, \mathbf{e}_n \quad \text{(4.tétel)}$$

Mivel a rendezett szám n-esek terének egy bázisában n vektor van, ezért ez a tér n-dimenziós. Az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,.... $\mathbf{e}_n$ n db egységvektorból álló bázist az n-dimenziós tér **triviális bázis**ának nevezzük.
Az n-dimenziós térből (L_n) számtalan sok n vektorból álló lineárisan független vektorrendszer választható ki, azaz a térnek számtalan sok bázisa van. Egy-egy bázis egy-egy vonatkoztatási rendszer, melynek vektoraival - a bázisvektorokkal - a tér bármelyik vektora már kifejezhető (3.tétel), azaz megadható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

Tétel A lineáris tér bármely vektora *egyértelműen* előállítható a tér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként.

Definíció Ha $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$,.... $\mathbf{b}_n$ a tér egy bázisa és a tér egy **v** vektora $\mathbf{v} = v_1\ \mathbf{b}_1 + v_2\ \mathbf{b}_2\ v_3 + ... + v_n\ \mathbf{b}_n$ alakban írható fel, akkor a $v_1, v_2, ..., v_n$ számokat a **v** vektor adott bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

1.3.4. A mátrix rangja

Minden m*n tipusu **A** mátrixnak megfeleltethetünk két vektorrendszert, az oszlopvektorok és a sorvektorok alkotta vektorrendszert. Az oszlop-, illetve sorvektorok lineáris teret alkotnak. Bebizonyítható, hogy ezek dimenziója azonos.

Definíció1 Az **A** mátrix sorvektorterének és oszlopvektorterének dimenzióját a **mátrix rang**jának nevezzük, és $\rho(\mathbf{A})$-val jelöljük.

Definíció2 Az A mátrix $\rho(\mathbf{A})$ **rang**ja *r*, ha r-ed rendű négyzetes minormátrixai között van legalább egy reguláris, és minden *r+1*-ed rendű minormátrixa szinguláris.

1.4. Lineáris egyenletrendszer megoldása bázistranszformációval

A lineáris térből végtelen sok bázis választható ki. Ha a tér egy bázisáról egy másikra térünk át, akkor a tér vektorainak koordinátái - az új vektorrendszerre vonatkozó jellemzői - megváltoznak.

Definíció **Bázistranszformáció**nak nevezzük azt az eljárást, amellyel egy vektornak adott bázisra vonatkozó koordinátáiból meghatározzuk egy másik bázisra vonatkozó koordinátáit.

A bázistranszformációt lépésenként, ún. **elemi bázistranszformáció**k egymás utáni alkalmazásával hajtjuk végre.
Hogyan hajtható végre az elemi bázistranszformáció, azaz hogyan számítjuk ki egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak ismeretében ennek a vektornak egy olyan új bázisra vonatkozó koordinátáit, amely az eredeti bázistól csak egy vektorban különbözik?

Legyen az n-dimenziós tér (L_n) egy bázisa:

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, ..., \mathbf{b}_k, ... \mathbf{b}_n$$

és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ az L_n egy vektora, amelyet bevonunk a bázisba (ezt választjuk bázisvektornak valamelyik régi bázisvektor helyett).

Tekintsük a tér egy tetszőleges **x** vektorát, amelynek koordinátái:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots, x_n.$$

Az **x** vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit fogjuk meghatározni.
Mivel $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, ezért **c**-nek legalább az egyik bázisvektorra vonatkozó koordinátája nem 0. Legyen ez a $\mathbf{b}_k$ vektorra vonatkozó koordináta. A **c** egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \ldots c_k\,\mathbf{b}_k + \ldots + c_n\,\mathbf{b}_n \quad \text{ahol } c_k \neq 0.$$

Kicserélhető-e a $\mathbf{b}_k$ eredeti bázisvektor a **c** vektorral? Ez a bázisvektorcsere akkor végezhető el, ha a

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots \mathbf{b}_n$$

vektorok az L_n tér egy másik bázisát alkotják, azaz ez az n db vektor lineárisan független vektorrendszert alkot. Igazoljuk ezt a lineáris függetlenség definíciója szerint! Azt kell bizonyítanunk, hogy ez az n vektor a zérusvektort csak triviálisan állítja elő.

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{c} + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}\,.$$

- Ha a zérusvektor felírt előállításában $\lambda_k=0$, akkor a többi skalárszorzó is 0, mivel az eredeti bázisból kiválasztott n-1 vektorból álló vektorrendszer is független, hiszen lineárisan független vektorrendszer részrendszere is lineárisan független.
- Ha $\lambda_k \neq 0$, akkor a zérusvektor felírt előállításából a **c** vektor kifejezhető, azaz **c** megadható az n-1 vektor lineáris kombinációjaként, vagyis **c** felírásához $\mathbf{b}_k$ nem kell, vagyis $c_k=0$. Ez ellentmond a $c_k \neq 0$ feltételnek. Ez az ellentmondás abból adódott, hogy a $\lambda_k \neq 0$. Tehát a $\lambda_k=0$-nak teljesülnie kell.

Bebizonyítottuk tehát, hogy az új n db vektor segítségével a **0** csak triviálisan állítható elő, azaz L_n bázisa lehet, vagyis a **c vektor** a $\mathbf{b}_k$ vektor helyett bevihető a bázisba.
Határozzuk meg az **x** vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit!
Az **x** vektor az eredeti bázis segítségével felírva:

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{b}_1 + x_2\,\mathbf{b}_2 + \ldots x_k\,\mathbf{b}_k + \ldots + x_n\,\mathbf{b}_n$$

A $\mathbf{b}_k$ helyett **c** lesz az új bázisvektor (a többi marad).

Az új bázissal:

$$\mathbf{x} = x_1' \ \mathbf{b}_1 + x_2' \ \mathbf{b}_2 \ + \ldots \ x_k' \mathbf{c} + \ . + x_n' \mathbf{b}_n \quad \text{ahol}$$
$$\mathbf{c} = c_1 \ \mathbf{b}_1 + c_2 \ \mathbf{b}_2 \ + \ldots \ c_k \mathbf{b}_k + \ . + c_n \mathbf{b}_n \quad (c_k \neq 0).$$

Ebből kifejezzük a $\mathbf{b}_k$ vektort, hogy azután ezt az $\mathbf{x}$ vektor eredeti előállításába helyettesítsük

$$\mathbf{b}_k = -\frac{1}{c_k} \ (c_1 \ \mathbf{b}_1 + c_2 \ \mathbf{b}_2 \ + \ldots \ c_{k-1} \mathbf{b}_{k-1} - \mathbf{c} \ +. \ c_{k+1} \mathbf{b}_{k+1} + \ldots + c_n \mathbf{b}_n) \quad (c_k \neq 0).$$

Így:

$$\mathbf{x} = x_1 \ \mathbf{b}_1 + x_2 \ \mathbf{b}_2 \ + \ldots . \frac{x_k}{c_k} (c_1 \ \mathbf{b}_1 + c_2 \ \mathbf{b}_2 \ + \ldots - \mathbf{c} + \ . + c_n \mathbf{b}_n \ ) + \ldots + x_n \mathbf{b}_n$$

Az $\mathbf{x}$ vektornak az új $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,..., $\mathbf{c}$,...., $\mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátáit leolvashatjuk, ha a vektorokra vonatkozó műveleti tulajdonságokat alkalmazzuk.

$$\mathbf{x} = (x_1 - \frac{x_k}{c_k} c_1)\mathbf{b}_1 + (x_2 - \frac{x_k}{c_k} c_2)\mathbf{b}_2 + \ . \ . \ . + \frac{x_k}{c_k} \ \mathbf{c} \ + \ . \ . \ . + (x_n - \frac{x_k}{c_k} c_n)\mathbf{b}_n,$$

innen az x új bázisra vonatkozó koordinátái :

$$x_1' = x_1 - \frac{x_k}{c_k} c_1, \ x_2' = x_2 - \frac{x_k}{c_k} c_2, \ . \ . \ . \ , \ x_k' = \frac{x_k}{c_k}, . \ . \ . \ , \ x_n' = x_n - \frac{x_k}{c_k} c_n$$

Fogalmazzuk meg a kapott eredményt!

Ha a lineáris tér k-adik bázisvektora helyett új bázisvektort választunk (csak olyan vektort választhatunk, amelynek a k-adik bázisvektorra vonatkozó koordinátája nem 0), akkor a tér tetszőleges vektorának ($\mathbf{x}$) az új bázisra vonatkozó koordinátáit a következőképpen számíthatjuk ki:

1. Az $\mathbf{x}$ vektornak az új (k-adik) bázisvektorra vonatkozó kordinátáját (x_k') megkapjuk, ha az $\mathbf{x}$ régi (k-adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátáját elosztjuk az új (k-adik, $\mathbf{c}$) bázisvektor régi (k-adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátájával ($c_k \neq 0$)

$$x_k' = \frac{x_k}{c_k} = \delta$$, ahol a $c_k \neq 0$-t **generáló elem**nek nevezzük.

2. Az $\mathbf{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó többi koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy az $\mathbf{x}$ régi bázisvektorra vonatkozó koordinátájából rendre kivonjuk az új bázisvektor ($\mathbf{c}$) régi bázisra vonatkozó megfelelő koordinátáinak $\frac{x_k}{c_k} = \delta$ -szorosát:

$$x_i' = x_i - \delta c_i \quad (i \neq k)$$

Ha több vektort akarunk bevinni a bázisba ill. ha egy bázisról egy olyan bázisra akarunk áttérni, amely az eredetitől nem csak egy vektorban különbözik, akkor egymás után több elemi bázistranszformációt végzünk.

A **bázistranszformáció** segítségével:

-meghatározhatjuk a **vektorrendszer rangját**,
-eldönthetjük, hogy egy vektor benne van-e egy vektorrendszer által generált térben, ezt **kompatibilitás**-vizsgálatnak nevezzük,
-megoldhatunk lineáris egyenletrendszereket,
-megadjuk a lineáris programozási feladatok megoldási módszerét, az ún. szimplex módszert.

Tekintsük az m egyenletből álló

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Lineáris egyenletrendszer vektoros alakja:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots \mathbf{a}_k x_k + \ .+ \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_n$ az ismeretlenek együtthatóiból alkotott vektorok, **b** konstans tagokból alkotott vektor. A megoldás során meg kell állapítanunk, hogy a **b** felírható-e az együtthatóvektorok lineáris kombinációjaként, ill., ha felírható, akkor hogyan. Ezt bázistranszformációval állapítjuk meg.

A megoldás menete

-Az együtthatóvektorokat egymás után bevonjuk az m-dimenziós tér triviális bázisába, ameddig lehet.
-Megállapítjuk az együtthatóvektorok és a b új bázisra vonatkozó koordinátáit, majd ezek segítségévelfelírjuk az egyenletrendszert és megadjuk a megoldást (ha van).

1. 5. A mátrix sajátértékei, sajátvektorai

Definíció a komplex számokból álló **A** négyzetes mátrix **sajátérték**ének nevezzük a λ valós vagy komplex számot, amelyhez található legalább egy olyan **v** (oszlop)vektor, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v} \qquad \text{de } \mathbf{v}\neq\mathbf{0}.$$

Az ilyen, általában komplex koordinátás **v** vektort az **A** mátrix **sajátvektor**ának nevezzük.

A definícióban felírt egyenlőség ekvivalens a $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$ egyelettel, ahol $\mathbf{E}_n$ az nxn-es egységmátrix. Ez pedig nem más, mint annak a homogén lineáris egyenlet-rendszernek a mátrixszorzatos alakja, amelynek együtthatómátrixa az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_n$

mátrix, ismeretlenei pedig a **v** koordinátái. Mivel a sajátvektornak a definíció szerint legalább egy koordinátája nem 0, a sajátvektor koordinátái megegyeznek az egyenlet nem triviális megoldásaival.

Tétel Adott λ-hoz tartozó sajátvektor létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\det(\mathbf{A}-\lambda E_n)=\mathbf{0}$$

legyen.

Tehát azokhoz az λ-khoz tartozik sajátvektor, melyek eleget tesznek a tételben megfogalmazott feltételnek. Más szóval: Az **A** mátrix sajátértékei az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$ egyenlet megoldásai. Az egyenlet bal oldalát az **A** mátrix karakterisztikus polinomjának, az egyenletet pedig az **A** mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Ha megtaláltuk az **A** mátrix valamelyik sajátértékét, az ehhez tartozó sajátvektort úgy számítjuk ki, hogy az egyenletbe λ_0 értékét behelyettesítve megoldjuk az így kapott

$$(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{E}_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenlet rendszert.

A λ sajátértékhez tartozó, maximális számú lineárisan független sajátvektorok számát a **sajátérték multiplicitásának**nevezzük.

1.5.1. Másodfokú kifejezések kanonikus alakja

Főtengelytétel Minden nxn-es tipusú, szimmetrikus mátrixnak van n darab, páronként egymásra merőleges sajátvektora.

Definíció Változók homogén másodfokú kifejezését **kvadratikus másodfokú) alak**nak nevezzük. Az x, y és z változók kvadratikus alakja:

$$a_{1,1}x^2+2\ a_{1,2}xy+2\ a_{1,3}xz+\ a_{2,2}y^{2+}2\ a_{2,3}yz+\ a_{3,3}z^2$$

Legyen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

A kvadratikus alak az **A** szimmetrikus mátrix és az **r** segítségével az $\mathbf{r}^T\mathbf{A}\mathbf{r}$ szorzat segítségével írható fel. A kvadratikus alakban szereplő x,y,z változók az **r** vektor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bázisra vonatkoztatott koordinátái. Ha más bázist választunk, a kvadratikus alak formailag más alakú lesz. Legyenek az **A** mátrix sajátértékei λ_1, λ_2, λ_3., az ezekhez tartozó, páronként egymásra merőleges,egységnyi hosszúságú sajátvektorok $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ Forgassuk el a koordinátarendszert úgy, hogy tengelyei legyenek párhuzamosak a sajátvektorokkal. Ebben az új koordinátarendszerben legyen

$$\mathbf{r} = u\mathbf{s}_1+v\mathbf{s}_2+w\mathbf{s}_3$$

Helyettesítsük ezt be az $\mathbf{r}^T\mathbf{A}\mathbf{r}$ kifejezésbe. Tekintettel arra, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1=\lambda_1\mathbf{s}_1\ ,\ \mathbf{A}\mathbf{s}_2=\lambda_2\mathbf{s}_2\ ,\ \mathbf{A}\mathbf{s}_3=\lambda_3\mathbf{s}_3$$
$$\mathbf{r}^T\mathbf{A}\mathbf{r}\ =(\ u\mathbf{s}_1+v\mathbf{s}_2+w\mathbf{s}_3)(\ u\lambda_1\mathbf{s}_1+v\lambda_2\mathbf{s}_2+w\lambda_3\mathbf{s}_3\ )=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$$

Itt felhasználtuk a sajátvektorok merőlegességét. Így az új koordinátarendszerben u,v,w változókkal a kvadratikus alak csak tiszta négyzetes tagokat tartalmaz, ezért formailag egyszerűbb. A koordinátarendszer ilyen megválasztását **főtengely-transzformáció**nak nevezzük. A kapott kifejezés a másodfokú kifejezés **kanonikus alak**ja. A kvadratikus alakot osztályozhatjuk aszerint, hogy a változók helyébe különböző értéket helyettesítve, milyen előjelű helyettesítési értéket kapunk.
A kvadratikus alak **definit**, ha minden helyettesítési érték nullától különböző és ugyanolyan előjelű. Ha minden helyettesítési érték pozitív, pozitív definit, ha negatív, negatív definit. A kvadratikus alak **szemidefinit**, ha a helyettesítési értékek között 0 is szerepel, de minden más helyettesítési érték azonos előjelű. A kvadratikus alak **indefinit**, ha a helyettesítési értékek különböző előjelűek.

1.6. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldása

Definíció **Közönséges differrenciálegyenlet-rendszert** kapunk, ha az egy független változótól (x) függő több függvény meghatározására olyan egyenletrendszert tudunk felírni, amely a független változót, a függvényeket és ezek (x szerint vett) deriváltjait tartalmazza.

A differenciálegyenlet-rendszerek megoldása hasonlóságot mutat az algebrai egyenletrendszerek megoldásával.

Jelölések: $\frac{\partial}{\partial x}y = D(y)$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = D^2(y)$

Így a differenciálegyenletek egyszerűbb alakban is felírhatók:
Például a

$$2\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} - 4y - z = e^x$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}y + 3y + z = 0$$

alakú differenciálegyenletrendszer

$$(2D\text{-}4)\ y\text{+}(D\text{-}1)\ z\text{=}e^x$$
$$(D\text{+}3)\ y\text{+}\qquad z\text{=}0$$

alakban írható fel.
A D definíciója alapján belátható, hogy a D operátorral formálisan úgy lehet számolni, mintha szám volna. A lineáris differenciálegyenletrendszert ilyen módon lineáris egyenletrendszerrel helyettesítjük és a megismert módon megoldjuk az ismeretlen függvényekre.
Így $y = \frac{e^x}{-1-D^2}$, illetve $z = \frac{(-D-3)e^x}{-1-D^2}$ adódik. Visszahelyettesítve D és D2 eredeti jelentését, y-ra és x-re két másodrendű, lineáris differenciálegyenlet

$$y'' + y = -e^x \quad \text{és} \quad z'' + z = -4e^x$$

adódik, amelyeket a már jól ismert módszerrel meg tudunk oldani.

2. A vektoranalízis elemei

2.1. Egyváltozós vektor-skalár függvények

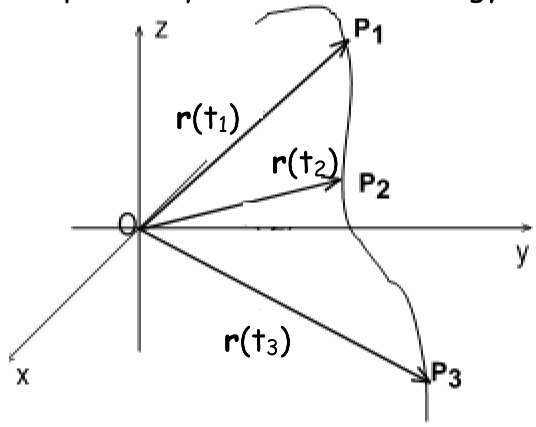
Definíció Az olyan függvényt, amely valós számhoz vektort rendel, **egyváltozós vektor-skalár függvény**nek nevezzük.

Az ilyen függvény értelmezési tartománya a valós számok egy részhalmaza, értékkészlete pedig vektorokból áll. Az elnevezés a leírás, és nem a hozzárendelés sorrendjét követi.
Megjegyzés A továbbiakban vektor alatt a közönséges háromdimenziós vektortér egy elemét értjük.

Jelölés: $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$, vagy $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, ahol t valós szám paraméter, **r** pedig a háromdimenziós vektortér egy eleme.
Jelölje **r** koordinátáit a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben x, y, z.
Ha **r** t függvénye, akkor a koordináták is t függvényei, x(t), y(t), z(t) (koordináta függvények.)
Ekkor $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, alakban is felírható.
Vagyis az $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, egyváltozós vektor-skalár függvény megadása egyenértékű

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

három, egyváltozós valós függvény egyidejű megadásával.
A t paraméterhez tartozó $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ helyvektor meghatározza a tér egy P pontját. Ha t értéke változik, változik a P pont helyzete. **r** általában egy térgörbét ír le.



1. ábra Egyváltozós vektor-skalár függvény szemléltetése

Definíció Az **r**=**r**(t) függvény t_0 helyen differenciálható, ha létezik a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_o+\Delta t)-\mathbf{r}(t_o)}{\Delta t}$ véges határérték. Ezt a határértéket a t_0 helyen vett **differenciálhányados-vektor**nak nevezzük.

Jelölés $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_o+\Delta t)-\mathbf{r}(t_o)}{\Delta t}=\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ vagy $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=t_o}$

A differenciálhányados vektor értelmezéséből következik, hogy $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ geometriailag a térgörbe P_0 pontbeli érintővektorát jelenti, (ha létezik).

Definíció Az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ **derivált vektor** egy olyan egyváltozós vektor-skalár függvény, melynek értelmezési tartománya azon pontok halmaza, ahol **r**(t) differenciálható, értékkészlete az adott helyen vett differenciálhányados-vektor értéke.

Tétel Az **r**=**r**(t) függvény **derivált vektorának koordinátái** rendre megegyeznek a koordináta-függvények $t_0$helyen vett t paraméter szerinti deriváltjaival.

$$\dot{\mathbf{r}}(t_o)=\dot{x}(t)\mathbf{i}+\dot{y}(t)\mathbf{j}+\dot{z}(t)\cdot\mathbf{k}$$

2.1.1. A kísérő triéder

A térgörbe minden egyes pontjához három nevezetes vektor tartozik.

Definíció Ha **r**=**r**(t) függvény t_0 pontban differenciálható és $\left|\dot{\mathbf{r}}(t)\right|\neq 0$, akkor az

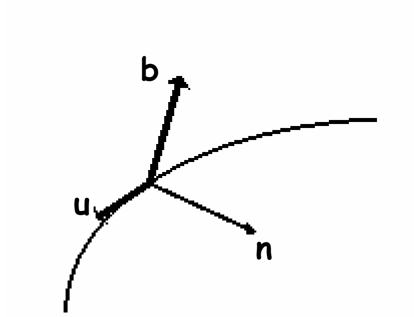
$$\mathbf{u}(t_o)=\frac{\mathbf{r}(t_o)}{\left|\dot{\mathbf{r}}(t_o)\right|}$$

egységvektort a térgörbe **érintő egységvektor**ának nevezzük.

A továbbiakban tegyük fel, hogy **r**(t) kétszer differenciálható t_0-ban, és $\dot{\mathbf{r}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_o)\neq\mathbf{0}$.

Definíció A $\mathbf{b}(t_o)=\frac{\dot{\mathbf{r}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_o)}{\left|\dot{\mathbf{r}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{r}}(t_o)\right|}$ egységvektort a térgörbe **binomiális egység-vektorá**nak nevezzük.

Definíció Az $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$ egységvektort a térgörbe **főnormális egységvektor**ának nevezzük.

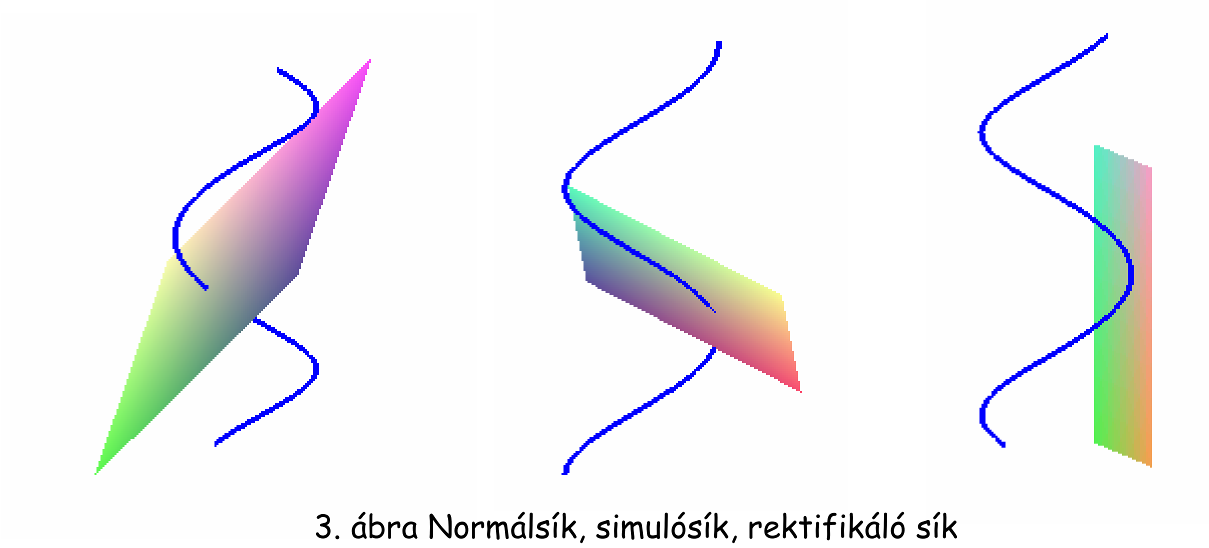


2. ábra Térgörbe kísérő triédere

Az **u**,**n**,**b** páronként merőleges egységvektorok, tehát lineárisan függetlenek, valamint ebben a sorrendben jobb-rendszert alkotnak, akár az **i**, **j**, **k** bázisvektorok.

Definíció Az **u**,**n**,**b** egységvektorokat a görbe $\mathbf{r}(t_0)$ pontjához tartozó **kísérő triéderé**nek nevezzük.

Definíció A P_0 ponton áthaladó, **u** normálvektorú síkot a térgörbe P_0 ponthoz tartozó **normálsík**nak, a **b** normálvektorú síkot **simulósík**nak, az **n** normálvektorú síkot **rektifikáló sík**nak nevezzük.


3. ábra Normálsík, simulósík, rektifikáló sík

Definíció A görbe adott P_0-pontjához tartozó **simulókör**nek azt a kört nevezzük, amely úgy jön létre, hogy P_0-on kívül veszünk a görbén egy S és Q pontot, erre a három pontra kört illesztünk, majd $S \to P_o$, $Q \to P_o$, ha ez a határhelyzet létezik.

Bebizonyítható, hogy a simulókör sugara (R) (más néven a G görbület reciproka) az

$$\frac{1}{R} = G = \frac{\left|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\right|}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3}$$

összefüggéssel határozható meg.

Definíció A **torzió** (c) annak mértéke, hogy mennyire tér el a görbe egy síkgörbétől.

Ez annál nagyobb, minél nagyobb szöget zár be két pont simulósíkja, ha a két pont tart egymáshoz, vagyis a binormálisok hajlásszöge megmutatja a görbe torzultságát. Bebizonyítható, hogy a torzió a

$$c(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)\ddot{\mathbf{r}}(t_0)\dddot{\mathbf{r}}(t_0)}{\left|\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\right|^2} = \frac{1}{T}$$

összefüggéssel számítható ki, ahol T a csavarodás sugara.

2.1.2. Térgörbe ívhossza

Definíció A térgörbe ívhosszán a beírt poligonok hosszának határértékét értjük, ha ez a határérték létezik és véges, miközben a felosztást minden határon túl finomítjuk. Az a görbe, aminek van ívhossza: **rektifikálható görbe**.

Tétel Ha $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ folytonosan differenciálható a $[t_1, t_2]$ zárt intervallumon, akkor az $\mathbf{r}(t)$ által leírt térgörbe **ívhossza**

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \left|\dot{\mathbf{r}}(t)\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\dot{x}(t)\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\right]^2 + \left[\dot{z}(t)\right]^2}\, dt$$

összefüggés alapján határozható meg.

2.2. Kétváltozós vektor-skalár függvények

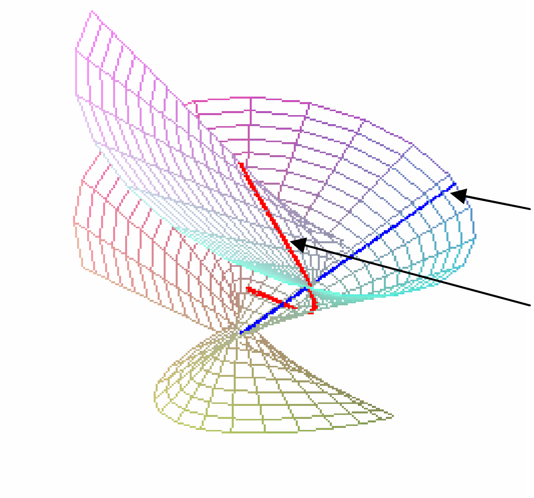
Definíció Az olyan függvényt, amely az (u,v) rendezett valós számpárokhoz $(u \in R,\, v \in R)$ $\mathbf{r}$ vektort rendel, **kétváltozós vektor-skalár függvény**nek nevezzük.

Jelekkel: $(u,v) \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$

Az **r** vektorral együtt annak **i**, **j**, **k** bázisbeli koordinátái is u, v függvényei.
x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), vagyis a kétváltozós vektor-skalár függvény egyenértékű három kétváltozós valós függvényből álló skalárfüggvényrendszerrel.

2.2.1. Felületek egyenlete, paraméteres megadása

Ha az **r**(u,v)=x(u,v)**i** +y(u,v)**j**+(u,v)**k** kétváltozós vektor-skalár függvény egyik változóját (paraméterét) rögzítjük, pl. $u=u_0$, akkor az $\mathbf{r}(u_0,v)=x(u_0,v)\mathbf{i}+y(u_0,v)\mathbf{j}+(u_0,v)\mathbf{k}$ egyváltozós vektor-skalár függvényhez jutunk.
Minden ilyen rögzített paraméterhez egy térgörbe tartozik, az egyenlet egy görbesereg egyenlete. A másik paraméter rögzítéseivel az $\mathbf{r}(u,v_0)$ egyenletű görbesereg egyenletét kapjuk. Ezeket **paramétergörbéknek** nevezzük.
Ebből következően az **r**(u,v) függvény képe - általában - **felület**.



4. ábra Felület és paramétergörbéi

Ha speciálisan az *x* és *y* derékszögű koordinátát választjuk paraméternek, vagyis u=x, v=y, akkor **r**= **r**(x,y), koordinátákkal **r**= **r**(x,y)=x**i**+y**j**+f(x,y)**k** ahol z=f(x,y). Ez pedig egy kétváltozós valós függvényt, amelynek képe - mint tudjuk - felület. A felület ilyen speciális megadási módját Euler-Monge-féle megadásnak nevezzük.

Írjuk fel az origó középpontú, *R* sugarú gömböt leíró kétváltozós vektor skalár-függvényt!
Tudjuk, hogy a gömb egyenlete $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Ha paraméternek az x és y koordinátákat választanánk, z-t kétváltozós valós függvényként csak akkor írhatnánk fel egyértelműen, ha megmondanánk, hogy az xy sík feletti vagy az alatti félgömbhöz vezessen a **r**(x,y) vektor.

$$\left(z = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - x^2}\right)$$

Az xy sík feletti félgömbre:

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathbf{k}\,,$$

$$\text{ahol } x^2 + y^2 \le R\,.$$

Az xy sík alatti félgömbre:

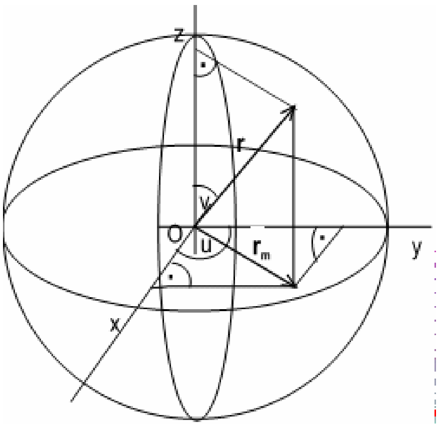
$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathbf{k}\,,$$

$$\text{ahol } x^2 + y^2 \le R\,.$$

Ezt a problémát kiküszöbölhetjük úgy, hogy u paraméternek a gömb tetszőleges pontjába mutató **r** vektor xy síkbeli vetületvektora (**r**$_m$) és az x tengely által bezárt szöget, v paraméternek pedig **r** vector z tengellyel bezárt szögét választjuk. (Térbeli polárkoordináta-rendszer)

Ekkor $|\mathbf{r}| = R$ $\quad |\mathbf{r}_m| = R \cdot \sin v$

Így



$$x(u,v) = R \cdot \sin v \cdot \cos u$$
$$y(u,v) = R \cdot \sin v \cdot \sin u$$
$$z(u,v) = R \cdot \cos v$$

5. ábra A gömb kétváltozós vektor-skalár függvényének származtatása

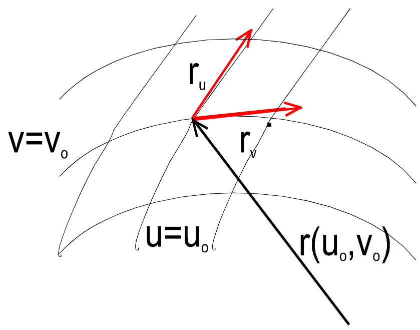
Definíció Az **r**=**r**(u,v) függvény u és v szerint **parciálisan differenciálható az** (u_0,v_0) helyen, ha az

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u,v)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v)}{\Delta v}$$

véges határértékek léteznek.

Az $\mathbf{r}_u$ vektor a v_0=konstans térgörbéhez húzott érintővektor $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ pontban, $\mathbf{r}_v$ vektor pedig az u_0=konstans térgörbéhez húzott érintővektor $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ helyen.



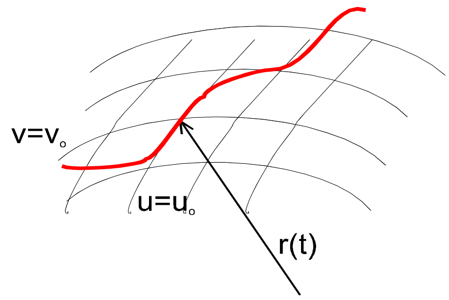
6. ábra A parciális deriváltak geometriai jelentése

Koordinátákkal adott vektorok esetén:

$$\mathbf{r}_u = x_u\mathbf{i} + y_u\mathbf{j} + z_u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}$$

ahol x_u az x=x(u,v) u szerinti parciális deriváltját jelenti.
Hasonlóan képezhetők a másodrendű parciális deriváltak is.
Legyen $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ felület egyenletében u és v egy közös t paraméter függvénye.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)] = \mathbf{r}(t)$$



7. ábra Térgörbe felületen

Ekkor $\mathbf{r}$ már csak egy paraméter függvénye, vagyis képe térgörbe, amely a felületen halad. Ennek az egyváltozós vektorskalár függvénynek a t szerinti derváltja

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = \mathbf{r}_u\dot{u} + \mathbf{r}_v\dot{v}$$

Az érintővektor tehát $\mathbf{r}_u$ vektor $\dot{u}$ skalárszorosának és $\mathbf{r}_v$ vektor $\dot{v}$-szorosának vektori eredője.

2.2.2. Felület érintősíkjának egyenlete

Tétel Ha $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ egy $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(u_0,v_0)$ pontjában $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ folytonos, és $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{r}_0$-n áthaladó felületi görbék érintői egy síkban fekszenek.

Definíció Az $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektort felületi normálisnak nevezzük.

A felületi normális irányítottsága u és v sorrendjétől függ.

Definíció A **felület irányítottsága** megegyezik a felületi normális irányítottságával.

Ezek után felírhatjuk az $\mathbf{r}_o(x_o, y_o, z_o)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú felület érintősíkjának egyenletét. Jelöljük az érintősík egy tetszőleges pontjának helyvektorát $\mathbf{R}(X,Y,Z)$-vel. Ekkor az érintősík egyenlete.

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Vagyis

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 0$$

Ez nem más, mint az $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ és $\mathbf{R}$-$\mathbf{r}_0$ vektorok vegyes szorzata.
Koordinátás alakban:

$$\begin{vmatrix} X - x_o & Y - y_o & Z - z_o \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

Ha speciálisan x=u, y=v, z=f(x,y), akkor

$$\mathbf{r}_x = 1\mathbf{i} + 0\bar{\mathbf{j}} + f_x'(x,y)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_y = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + f_y'(x,y)\mathbf{k}$$

így

$$\begin{vmatrix} X - x_o & Y - y_o & Z - z_o \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = -(X - x_o)f_x' - (Y - y_o)f_y' + Z - z_o = 0$$

valamint

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

Az így kapott egyenlet a kétváltozós függvénytanban tanult érintősík egyenletével egyezik meg.

2.2.3. Felület felszíne

A felület felszínét a felületre írt háromszögek (poliéderfelületek) területeinek összegével közelíthetjük.

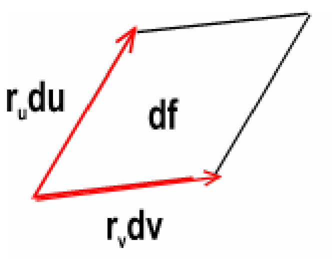
Definíció Bebizonyítható, hogy ha a T(u,v) tartományon értelmezett $\mathbf{r}(u,v)$ egyenletű felületnél $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ folytonosak és a T tartományt úgy osztjuk fel háromszögekre, hogy a finomítás során a háromszögek nem fajulnak el vonallá, (minden szöge mindig kisebb 180°), akkor az így kapott **poliéder felületek felszínei** egy meghatározott értékhez tartanak. Ezt a határértéket a **felületdarab felszínének** nevezzük.

Definíció Ha a $\mathbf{r}(u,v)$ egyenletű felületnek van felszíne, akkor a felület **mérhető felszínű**.

A felület adott pontjához tartozó érintősíkjának normálvektora $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.
Most definiáljunk egy ezzel párhuzamos vektort

$$\mathbf{df} = du \cdot \mathbf{r}_u \times dv\mathbf{r}_v = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dudv\ ,$$

ahol du és dv az u és v független változók differenciáljai.



Ennek a vektornak az abszolút értéke a $du\mathbf{r}_u$ és $dv\mathbf{r}_v$ vektorokból képezhető paralelogramma területe, amely paralelogramma az érintősíkban fekszik.

8. ábra Felületelem

Definíció A $df = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dudv$ mennyiséget **felületelem**nek nevezzük.

Ha a felületelemeket összegezzük a T(u,v) paraméter-tartományon, és a felület mérhető felszínű, akkor így a teljes felszínt kapjuk.

Tétel Ha az $\mathbf{r}(u,v)$ egyenletű felületnek van felszíne a $T(u,v)$ paramétersíkon, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ folytonos, valamint $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, ekkor a **felületdarab felszíne** a *T* tartományon:

$$A = \iint_T \left|\mathbf{r}_u \times \bar{\mathbf{r}}_v\right| du\,dv\,,$$

feltéve, hogy a kettősintegrál létezik.

Definíció Az $\mathbf{r}_u^2 = E$, $\mathbf{r}_v^2 = G$, $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = F$ az ún. Gauss-féle **elsőrendű főmennyiségek**

Így a felszín kiszámítása a következő formában is írható:

$$A = \iint_T \sqrt{E \cdot G - F^2}\, du\,dv$$

2.3. Skalár-vektor függvények

Definíció Azokat a függvényeket, amelyek vektorhoz számot rendelnek, **skalár-vektor függvény**eknek nevezzük.

Definíció Ha a vektortér egy D részhalmazán értelmezve van egy $\mathbf{r} \to u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény, akkor a D halmazon az u függvény **skalárteret (skalármezőt)** alkot.

Ha $\mathbf{r}$ a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakú, akkor $u(\mathbf{r}) = f(x,y,z)$ vagyis a skalár-vektor függvény egyenértékű egy háromváltozós valós függvénnyel, amely rendezett számhármashoz rendel valós számot.
Háromváltozós valós függvényt nem tudunk ábrázolni. Szemléltetni csak az u=constans értékekhez tartozó kétváltozós valós függvényeket, másnéven a **szintfelület**eket tudjuk.

A skalármező esetén differenciálhatóság értelmezése már nem történhet a differenciahányados határértékeként, hiszen ekkor a $\dfrac{\Delta u}{\Delta \mathbf{r}}$ mennyiséget kellene meghatározni, de $\Delta \mathbf{r}$ vektormennyiség, vektorral viszont osztani nem tudunk. Próbálkozzunk a valós függvénytanban megismert azon fogalommal analógiát keresni, ahol is azt mondtuk, hogy egy egyváltozós valós függvény akkor és csakis akkor differenciálható x_0-ban, ha növekménye

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \qquad \text{alakú,}$$

ahol $\Delta x \to 0$ esetén $\varepsilon \to 0$. Ekkor $A = f'(x_o)$ a függvény x_o-beli differenciálhányadosa. Vegyük figyelembe, hogy most a független változó megváltozása, $\Delta \mathbf{r}$ vektorjellegű, míg Δu függvényérték megváltozás (növekmény) skalár. Vektorhoz skalárt úgy rendelhetünk, ha a vektort skalárisan megszorozzuk egy másik vektorral.

2.3.1. A gradiensvektor értelmezése

Definíció Az $u(\mathbf{r})$ függvény az $\mathbf{r}_0$ **helyen differenciálható**, ha a függvény növekménye előállítható

$$\Delta u = \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{r}, \qquad \lim_{\Delta \mathbf{r} \to \mathbf{0}} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

módon, ahol $\Delta u = u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0)$; $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Tétel Ha $u(\mathbf{r})$ differenciálható $\mathbf{r}_0$ helyen, akkor egyetlen olyan **g derivált vektor** létezik, amely a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételeknek eleget tesz.

Ha a skalár-vektor függvény koordinátákkal adott, próbálkozzunk a deriváltvektor meghatározásával.
Legyen

$$\mathbf{g} = g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j} + g_3\mathbf{k} \qquad \Delta \mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1\mathbf{i} + \varepsilon_2\mathbf{j} + \varepsilon_3\mathbf{k}$$

Ekkor a skaláris szorzásnál tanultak szerint

$$\Delta u = \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{r} = g_1\Delta x + g_2\Delta y + g_3\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

Változzon $\mathbf{r}$ csak x tengely irányában! Ekkor $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x;0;0)$, így

$$\Delta u = g_1\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = g_1 + \varepsilon_1 .$$

Mivel $\lim_{\Delta \mathbf{r} \to \mathbf{0}} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, így $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$. Tehát $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g_1$,ami éppen u(x,y,z) x-szerinti parciális deriváltját jelenti.

Tehát $g_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Hasonlóképpen $g_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$; $g_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Vagyis a **g** deriváltvektor egy olyan térbeli vektor, amelynek koordinátái az $u(\mathbf{r})$ függvény x,y ill. z-szerinti parciális deriváltjainak értékei az adott $\mathbf{r}_0$ helyen. Kétváltozós valós függvényeknél pedig azt a síkbeli vektort, amelynek koordinátái a parciális deriváltak adott helyen felvett értékei, gradiensvektornak hívtuk .

Definíció. Az $u(\mathbf{r})$ $\mathbf{r}_0$-ban differenciálható függvény **g** derivált függvényét az $u(\mathbf{r})$ $\mathbf{r}_0$ helyhez tartozó **gradiens-vektor**ának nevezzük.

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_o) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

Definíció A $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ kifejezést **nabla differenciáloperátor vektor**nak nevezzük.

A fizikában ∇-t Hamilton operátornak is szokás nevezni. Ennek segítségével

$$\operatorname{grad} u = \nabla \cdot u$$

ami formálisan nem más, mint a ∇ vektor *u* számszorosa. A gradiensvektort minden olyan helyen meghatározhatjuk, ahol $u(\mathbf{r})$ differenciálható.

Vegyük észre, hogy grad $u(\mathbf{r})$ egy olyan függvényt ad, amely az **r** vektorhoz egy másik vektort rendel.

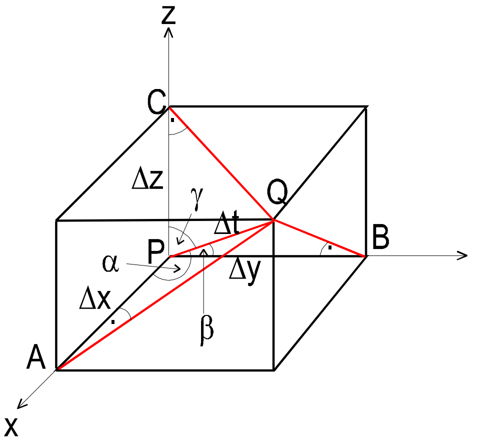
$$\mathbf{r} \xrightarrow{\text{skalár-vektor}} u(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{vektor-skalár}} \text{grad } u(\mathbf{r})$$

$$\xrightarrow[\text{vektor-vektor}]{\hspace{6cm}}$$

2.3.2. Az iránymenti derivált meghatározása

Ha **r** értéke függ egy t paramétertől (pl. ha **r** csak a skalártér bizonyos pontjait összekötő görbén haladhat), kérdés, hogy u hogyan változik t irányában.

Tekintsünk az $\mathbf{r}(t)$ térgörbén egy $P(x,y,z)$ és egy $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ pontot. $\left|\overline{PQ}\right| = \Delta t$.



9. ábra Skalármező változása

APQΔ-ből $\Delta x = \Delta t \cdot \cos\alpha$
BPQΔ-ből $\Delta y = \Delta t \cdot \cos\beta$
CPQΔ-ből $\Delta z = \Delta t \cdot \cos\gamma$

Négyzetre emelve és összeadva
$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta t)^2 \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$
A Pitagorasz-tétel szerint
$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta t)^2$, így
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
Tehát a $\overrightarrow{PQ}$ irányába mutató egységvektor
$\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$

Tekintsük $u(\mathbf{r})$ megváltozását PQ irányában! (Rögzítsük $u(\mathbf{r})$-t az $\mathbf{r}(t)$ térgörbére!)
Mivel

$$\Delta u = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta\mathbf{r}, \quad \lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0},$$

mindkét oldalt Δt-vel osztva

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \operatorname{grad} u \cdot \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \operatorname{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Mivel

$$\frac{dx}{dt} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = \cos\gamma,$$

így

$$\frac{du}{dt} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e}$$

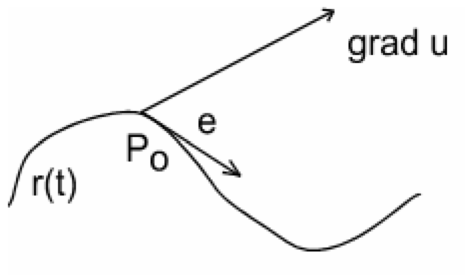
ahol $\mathbf{e}$ a térgörbe érintő irányú egységvektora P pontban.

Megjegyzés 1.
Vegyük észre, hogy

$$\frac{du(\mathbf{r}(t))}{dt} = \operatorname{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

kifejezés az összetett függvény deriválási szabályánál megismert láncszabály általánosításának tekinthető.

Megjegyzés 2.
$\frac{du}{dt}$ a $\operatorname{grad} u$ vektor **e** irányú merőleges vetületének hossza.



10. ábra A gradiens geometriai jelentése

Következmény 1.
Az $u(\mathbf{r}(t))$=konstans esetben a görbe a skalár-vektor függvény egy szintfelületén van, **e** pedig a szintfelület érintősíkjában helyezkedik el. Ekkor $\frac{du}{dt} = 0$, vagyis $\operatorname{grad} u$ **merőleges** az **e** egységvektorra, vagyis a **szintfelület** adott pontbeli **érintősíkjára.**

Következmény 2.
$\frac{du}{dt}$ egy adott pontban akkor a legnagyobb, ha a kiszámításában szereplő vektorok párhuzamosak egymással, vagyis $\operatorname{grad} u$ **iránya** megmutatja azt az irányt, amelyik irányban a független változó változtatása a **legnagyobb mértékű függvényérték-változás**t eredményezi.

Következmény 3.
A $\operatorname{grad} u$ a magasabb értékű szintfelület felé mutat.

2.4. Vektor-vektor függvények

Definíció Azokat a függvényeket, amelyek vektorhoz vektort rendelnek, **vektor-vektor függvény**eknek nevezzük.

Definíció Ha a vektortér egy D részhalmazán értelmezve van egy $\mathbf{r} \to \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény, akkor a D halmazon a **v** függvény **vektormezőt** alkot.

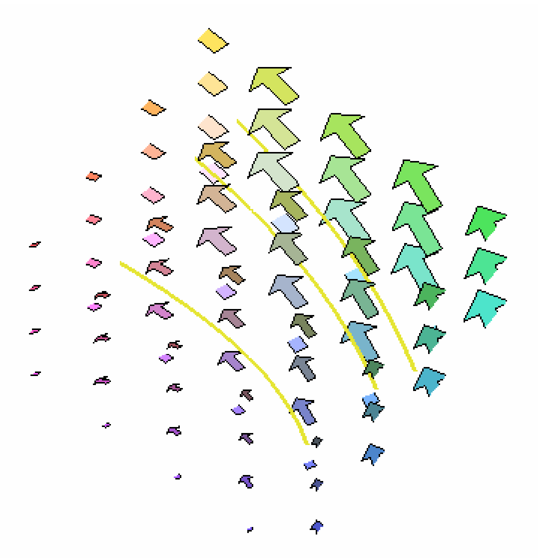
Megjegyzés:
A vektormező helyett – ugyanúgy, mint a skalár-vektor függvényeknél – használatos a vektortér megnevezés is, de ezt a fogalmat a közönséges vektorok alaphalmazára is értik, ezért használatát kerüljük.

Koordinátás alakban:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

vagyis a vektor-vektor függvény 3 darab 3 változós valós függvénnyel helyettesíthető.
A szemléltetéshez egy újabb fogalomra, az ún. trajektória értelmezésére van szükség.

Definíció A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőtér **trajektóriái** azok a görbék, amelyek érintői bármely $\mathbf{r}$ pontban egyirányúak a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektorral. Fizikai elnevezése: áramvonal, erővonal.



11. ábra Vektormező és trajektóriái

Ezek szerint minden trajektória egy térgörbe, aminek egyenlete $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Ennek érintőirányú vektora a differenciálvektor

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

A definícióból következően ez párhuzamos $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektorral, így

$$d\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Tehát

$$v_3\,dy - v_2\,dz = 0$$
$$v_1\,dz - v_3\,dx = 0$$
$$v_2\,dx - v_1\,dy = 0$$

a trajektóriák differenciálegyenletei. Ennek megoldásai adják az áramvonalak egyenletét.

2.4.1. A felületi integrál

Az adott felületen áthaladó áramvonalak sűrűsége, illetve az áramvonalak száma információt ad a **v**(**r**) abszolút értékéről (nagyságáról).

Ha **v** állandó, akkor egy **n** normálvektorú, A területű síklapon $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{A}$ számú erővonal halad át. Célunk olyan matematikai modell leírása, melynek segítségével tetszőleges vektormező adott felületen kilépő erővonalainak mennyisége meghatározható.

Legyen az F felület sík, a **v**(**r**), egy áramlás sebessége állandó (térben és időben), a folyadék összenyomhatatlan. A kiáramló anyagmennyiség a **v** **n** normálvektor irányú vetületének hosszával (v_n) arányos.

$$\Psi = F\cdot v_n = F\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_o\,,\ \text{ahol}\quad \mathbf{n}_o = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

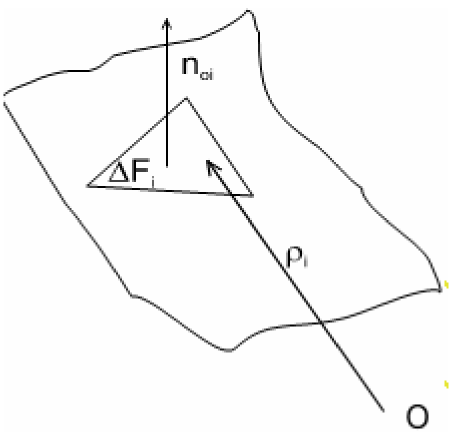
Ha a felület nem sík, a felület kétváltozós vektor-skalár függvénnyel írható le:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}\,.$$

Ha **v**(**r**) nem állandó, akkor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

alakú.



12. ábra A felületi integrál származtatása

A felületdarab felszínének kiszámításához osszuk fel a felületet elemi részekre úgy, hogy ott már síknak legyen tekinthető, és a **v** értéke az ezen felületdarab egy tetszőleges helyvektorához tartozó érték legyen.

Ekkor

$$\Delta\Psi_i = \Delta F_i\cdot\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i)\cdot\mathbf{n}_{o_i}$$

ahol **v**(ρ_i) a felület egy tetszőleges pontjába mutató helyvektor. A felület irányítottságát a felülettel együtt meg kell adni.

Elvégezve az összegzést, majd finomítva a beosztást kapjuk:

$$\Psi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta F_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i\cdot\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i)\cdot\mathbf{n}_{o_i} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta F_i\to 0}} S_n\,.$$

Ha ez a határérték létezik, megadja a kiáramló folyadék mennyiségét.

Definíció A $\Delta F_i \cdot \mathbf{n}_{o_i} = \Delta \mathbf{F}_i$ vektort irányított felületelemnek nevezzük.

Definíció Ha az S_n integrálközelítő összeg határértéke a beosztástól függetlenül mindig ugyanaz a szám, ez a határérték a **v**(**r**) függvény F felületi integrálja.

$$\iint_F \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{F} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta F_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i)$$

A felületi integrált skaláris fluxusnak is nevezzük. Kiszámítását egy kettős integrál kiszámítására vezetjük vissza. A felületdarab felszínének kiszámításánál láttuk, hogy

$$\Delta F_i \approx |\mathbf{r}_n x \mathbf{r}_v| \Delta u_i \cdot \Delta v_i\,,$$

a felületek normálisa $\mathbf{n}_{o_i} = \dfrac{\mathbf{r}_u x \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u x \mathbf{r}_v|}$, így az S_n integrálközelítő összeg

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i)(\mathbf{r}_u x \mathbf{r}_v)\Delta u_i \cdot \Delta v_i \text{ alakú.}$$

Ennek határértéke, ha létezik, adja a felületi integrált.

Tétel. Ha **r**=**r**(u,v) és, parciális deriváltjai $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ is folytonosak T tartományon, $\mathbf{r}_u x \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, valamint **v**=**v**(**r**) folytonos a T tartományon értelmezett F felületen, akkor létezik a felületi integrál is

$$\iint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{F} = \iint_T \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_u x \mathbf{r}_v) du dv = \iint_T \mathbf{v}\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v du dv$$

Megjegyzés:
Ha a felület zár, a felületi integrál jele $\oiint$.
A felületi integrál kiszámításánál tehát a következő lépéseket kell elvégezni

- **v**(**r**) lokalizálása az F felületre
- az $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ parciális deriváltak meghatározása
- $\mathbf{v}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$ vegyesszorzat kiszámítása
- a kettős integrál kiszámítása.

2.4.2. A divergencia értelmezése, a Gauss-Osztrogradszkij tétel

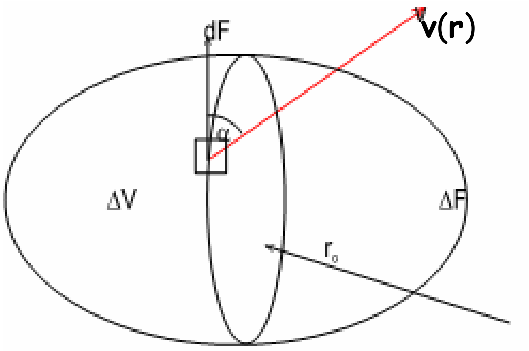
$\psi = \iint_F \mathbf{v}d\mathbf{F} = \iint_F v_n dF$ felületi integrál értékének előjele a vektormező elemeinek és az irányított felületelem által bezárt α szög értékétől függ.

$$\psi > 0\text{, ha } 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\psi = 0\text{, ha } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{és}$$

$$\psi < 0\text{, ha } \frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi.$$

Ennek fizikai jelentést is adhatunk, ha a felület zárt.
Legyen egy folyadékáramlás sebességtere **v**. Ha $\oiint_F v_n dF > 0$, a felület által határolt térrészből folyadék áramlik ki, vagyis a térrészben **forrás** van. Ha $\oiint_F v_n dF = 0$ **forrásmentes** a vektormező, ha $\oiint_F v_n dF < 0$ folyadékhiány lép fel, vagyis a térrész **nyelőként** viselkedik.



12. ábra A divergencia értelmezése

Hogyan lehet azt meghatározni, hogy az áramlási tér egy pontja forrásként vagy nyelőként viselkedik?
Legyen **v**(**r**) $\mathbf{r}_0$ -ban és annak környezetében folytonos és differenciálható. Legyen $\mathbf{r}_0$ hely körül ΔF egy tetszőleges mérhető felszínű zárt felület,amely ΔV térfogatú.

Képezzük **v**(**r**) ΔF -re vonatkoztatott felületi integráljának egységnyi térfogatra eső átlagát:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta F} \mathbf{v}d\mathbf{F}.$$

A felületi normális a felületről kifelé mutat.

Képezzük ezen átlagos ki-, ill. beáramló folyadékmennyiség határértékét úgy, hogy a ΔV-t " egy pontra zsugorítjuk" vagyis $\Delta V \to 0$.

$$\frac{d\psi}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \oiint_{\Delta F} \mathbf{v} d\mathbf{F} = \frac{1}{dV} \oiint_{dF} \mathbf{v} d\mathbf{F} \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Definíció A vektortér adott pontbeli divergenciáján a vektortér e pont körüli kis felületen vett felületi integrálja és a körülzárt térrész térfogata hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta F} \mathbf{v} d\mathbf{F}$$

Ha **v** egy áramlás sebességtere, a divergencia anyagszaporulatot jelent, ha **v** erőtér, a divergencia fajlagos fluxus.
Ha $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, forrásmentes a vektormező, ha $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ forrásos, ha $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ nyelővel rendelkezik a vektormező az adott pontban.

Ha a divergenciát a vektortér teljes V térfogatára összegezzük, a vektoranalízis egyik alapvető integrálátalakítási tételéhez jutunk.

Tétel ***Gauss-Osztrogradszkij-tétel***. Legyen **v**(**r**) folytonosan differenciálható az F zárt felület határolta V térrészben. Ekkor

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oiint_F \mathbf{v} d\mathbf{F}$$

Tétel Ha a **v**=**v**(**r**) egy parciálisan differenciálható vektormező (mindhárom koordináta függvénye v_1, v_2, v_3 parciálisan differenciálható), akkor a **v**(**r**) vektormező divergenciája létezik, és

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

A nabla-vektor segítségével a div **v** a következő alakú

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot \left(v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} \right)$$

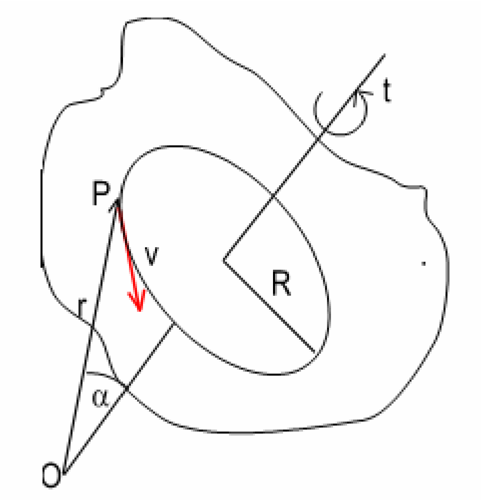
vagyis **v** vektormező divergenciája (formálisan) két vektor skaláris szorzatának tekinthető.

$$\mathbf{r} \xrightarrow{\text{vektor-vektor}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{skalár-vektor}} \text{div } \mathbf{v}$$
$$\mathbf{r} \xrightarrow[\text{skalár-vektor}]{} \text{div } \mathbf{v}$$

2.4.3. A rotáció értelmezése

A divergencia fizikai jelentésénél láttuk, hogy az a vektortér forrásairól ad információt. A következőkben azt vizsgáljuk, a vektortér áramvonalai zárt görbéket (örvényeket) alkotnak-e, vagy örvénymente a vektortér.

Tekintsünk egy állandó forgástengely körül állandó szögsebes-séggel (ω) forgó merev testet!



13. ábra A rotáció értelmezése

A merev test egy tetszőleges P pontjának helyvektora az idő függvényében **r**=**r**(t). A P pont forgástengelytől való távolsága legyen R.
A P pont a t tengely körül egyenletes körmozgást végez ω szögsebességgel, illetve $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ érintő irányú sebességgel.
A körmozgás kerületi és szögsebessége közötti kapcsolat alapján $v = R \cdot \omega$. Ha **r** helyvektor a t tengellyel α szöget zár be:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{r}| \cdot \omega \cdot \sin\alpha$$

Ha értelmezünk egy ω hosszúságú, t tengellyel párhuzamos ω vektort, akkor a fenti összefüggés a $|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$ alakban is írható. Meg kell még adni ω irányítottságát is!

Definíció. Az ω szögsebességvektor olyan vektor, amelynek
- nagysága a szögsebesség abszolút értéke
- iránya a forgástengellyel párhuzamos
- irányítottsága olyan, hogy az **r** helyvektor,a **v** érintő irányú sebességvektor és ω jobbrendszert alkot

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Megjegyzés:
Ha nincs forgás, ω =**0**.

Ha **v**=[$v_1(x,y,z)$, $v_2(x,y,z)$, $v_3(x,y,z)$], **r**=[x, y, z] alakú, hogyan határozhatók meg $\boldsymbol{\omega}=[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ koordinátái?

A vektoriális szorzásnál tanultak szerint

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} +$$

$$(\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Mivel merev test forgását vizsgáljuk, és tudjuk hogy merev test minden pontjának szögsebessége ugyanaz (a szögsebesség független a helytől), így ω_x, ω_y, ω_z állandó. Ezért

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\omega_z \qquad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \omega_y$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \omega_z \qquad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\omega_x$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\omega_y \qquad \frac{\partial v_3}{\partial y} = \omega_x \qquad \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

Ezen kifejezések segítségével:

$$2\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Felhasználva a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)$ nabla vektort $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ alakban írható.

Definíció A $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ kifejezést a vektormező **rotáció**jának nevezzük.

Definíció Ha rot**v**=**0**, a **v**(**r**) vektormezőben nincs forgómozgás, vagyis a vektormező örvénymentes.

Megjegyzés:
Az angol szakirodalomban is, így a MAPLE-ban is a rot**v** helyett curl**v** a használatos.

$$\mathbf{r} \xrightarrow{\text{vektor-vektor}} \mathbf{v} \xrightarrow{\text{vektor-vektor}} \mathrm{rot}\mathbf{v}$$

$$\xrightarrow[\text{vektor-vektor}]{}$$

2.4.4. A vektoranalízis oprációinak összefoglalása

a.) $\nabla u = \text{grad}\, u$ a nabla vektor skalárszorosát jelenti, vagyis ∇u skalárhoz vektort rendel.
b.) $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div}\,\mathbf{v}$ a Nabla vektor és **v** vektor skaláris szorzata, vagyis $\nabla \cdot \mathbf{v}$ vektorhoz skalárt rendel.
c.) $\nabla x \mathbf{v} = \text{rot}\,\mathbf{v}$ a Nabla vektor és **v** vektor vektoriális szorzata, vagyis $\nabla x \mathbf{v}$ vektorhoz vektort rendel.

A műveletek közül némelyik többször egymás után végrehajtható. Ezek közül a fizikában sokszor használják ezért, külön neve is van a

$$\text{divgrad}\, u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \Delta u$$

kifejezésnek.

Definíció A $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ kifejezést Laplace-operátornak nevezzük.

Tétel Bármely $u(\mathbf{r})$ skalártérre

$$\nabla x \nabla u = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, u = 0\,,$$

feltéve, hogy a parciális deriváltak léteznek és folytonosak.

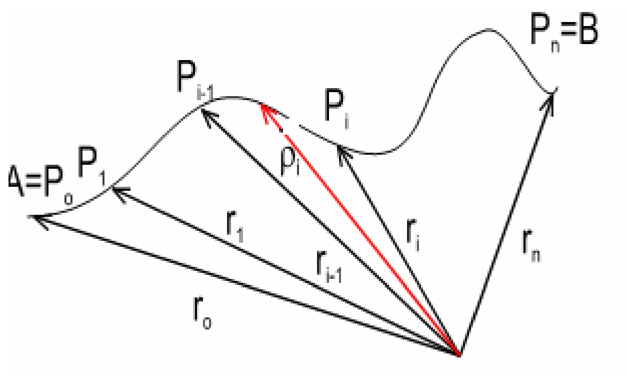
Tétel Bármely **v**(**r**) vektormezőre

$$\nabla \cdot (\nabla x \mathbf{v}) = \text{div}\,\text{rot}\,\mathbf{v} = 0$$

feltéve, hogy a parciális deriváltak léteznek és folytonosak.

2.4.5. A vonalintegrál fogalma, kiszámítása, a potenciál fogalma

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a vektor-vektor függvény nem egy felület, hanem csak egy adott görbe mentén változik. Az eljárás a következő. Tekintsük a **v**=**v**(**r**) vektormezőt, és ebben a vektormezőben legyen adott egy **r**=**r**(t) térgörbe. (**v** legyen értelmezett **r** minden pontjában). a görbe $t_1 \le t \le t_2$ intervallumhoz tartozó AB görbeívet jelölje g, a g legyen ezen a tartományon rektifikálható.
Osszuk fel az AB ívet n részre, A-ból kiindulva. Minden $P_{i-1}P_i$ ívszakasz (i=1,2,...n) egy tetszőleges pontjába mutasson egy $\boldsymbol{\rho}_i$ helyvektor. Legyen $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$.



14. ábra A vonalintegrál értelmezése

Képezzük az

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

integrálközelítő összeget. Ha a beosztás finomításával ($n \to \infty$, miközben $\max|\Delta \mathbf{r}_i| \to 0$) az integrálközelítő összeg sorozat határértéke független a beosztástól, és $\boldsymbol{\rho}_i$ választásától függetlenül ugyanahhoz a számhoz tart, akkor ez a szám a **v** görbementi integrálját adja. P:

Definíció A $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta \mathbf{r}_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_i)\Delta \mathbf{r}_i = \int_g \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ kifejezést a **v** vektor-vektor függvény *g* görbén vett integráljának (görbe menti integrál vagy **vonalintegrál**) nevezzük.

Definíció Ha a *g* görbe zárt (kezdő és végpontja) egybeesik, akkor a zárt görbe menti vonalintegrált a vektortér cirkulációjának (**körintegrál**jának) nevezzük.
Jele: $\oint_g \mathbf{v}d\mathbf{r}$

Ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $d\mathbf{r} = (dx; dy; dz)$ koordinátákkal adott, a skaláris szorzás definíciójából:

$$\int_g \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_g (v_1dx + v_2dy + v_3dz).$$

Ha a görbe paraméteres alakban adott

$$dx = \dot{x}(t)dt$$

$$dy = \dot{y}(t)dt$$

$$dz = \dot{z}(t)dt$$

akkor

$$\int_g \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}[\mathbf{r}(t)]\dot{\mathbf{r}}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_1(t)\dot{x}(t) + v_2(t)\dot{y}(t) + v_3(t)\dot{z}(t) \right)dt$$

Tehát a görbe menti integrált úgy számítjuk ki, hogy **v(r)** függvényt "lokalizáljuk" az **r** görbére (x, y, z változókat a t paraméter függvényeként írjuk fel), majd az így kapott egyváltozós valós függvényt integráljuk t_1 és t_2 határok között.

Tétel A $\int_g \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ vonalintegrál értéke akkor és csak akkor független az integrálás útjától valamely egyszeresen összefüggő T tartományban, ha ott van olyan u = u(x,y,z) differenciálható függvény, melyre $\mathbf{v} = \text{grad}\, u$.

Definíció Azon *u(x,y,z)* függvényt, melyre $\mathbf{v} = \text{grad}\, u$ a vektortér **potenciál**függvényének nevezzük.

(Fizikában a potenciál alatt gyakran az *-u* függvényt értik).

Definíció Ha a **v** vektormező erőtér, és létezik potenciálfüggvénye (potenciálos), az erőtér **konzervatív**.

Megjegyzés:
Ha $\mathbf{v} = \text{grad}\, u$, akkor $\mathbf{v} = \text{grad}(u + c)$ $c \in \boldsymbol{R}$.

Következmény:
Ha a **v** vektormező potenciálos, $\oint_g \mathbf{v}d\mathbf{r} = 0$, feltéve hogy a g görbe egyszeresen összefüggő tartományban van.

Hogyan állapítható meg, hogy egy vektortér potenciálos-e?
A vektoranalízis operációinak összefoglalásánál megismert tétel szerint bármely u(**r**) skalármezőre rot grad u = **0**, így ha $\mathbf{v} = \text{grad}\, u$, ebből következően rot **v** = **0**.

Tétel *A* **v**=**v**(**r**) vektor-vektor függvénynek akkor és csakis akkor létezik a potenciálja, ha rot **v** = **0.**

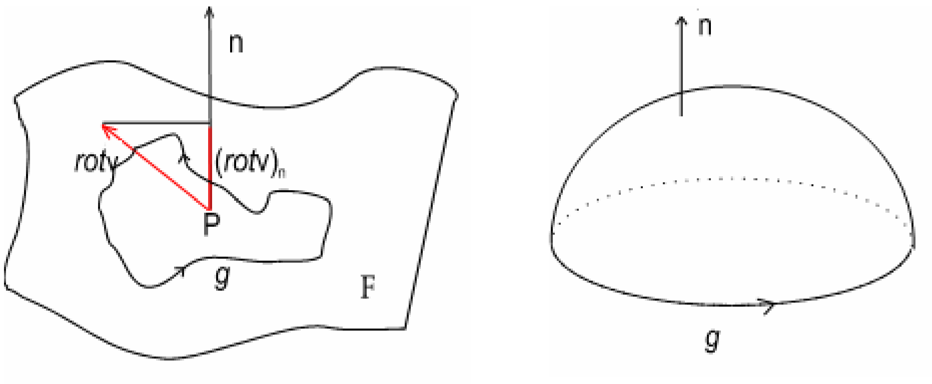
Megjegyzés1:
Az előbbiekből következően az alábbi állítások ekvivalensek.

- **v** tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus.
- **v** örvénymentes
- **v** konzervatív
- **v** potenciálos.

Megjegyzés2.
Vegyük észre a hasonlóságot az egyváltozós valós függvények primitív függvénye, és a vektor-vektor függvények potenciálfüggvénye között! $(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a))$

2.4.6. Stokes tétel , Green tétel

Legyen adott a **v**=**v**(**r**) vektormezőben egy F felület. Legyen a felület *P* pontja körüli felületdarab ΔF, amelyet a *g* görbe határol. A felület P pontbeli érintősíkjának normálvektora legyen **n**, ahol a *g* görbe körüljárási iránya és **n** jobbrendszert alkot. Ekkor kimondhatjuk a következő tételt



15. ábra A Stokes-tétel

Tétel *A* rotációnak a *P* pontban az **n** vektorra való merőleges vetülete:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_g \mathbf{v}d\mathbf{r}$$

Ha a fenti eljárást végrehajtjuk a *g* görbe által határolt teljes felületen, és a rot **v** normálvektor irányú vetületeit összegezzük a teljes felületre, kapjuk:

Tétel **Stokes-tétele**. Legyen **v**=**v**(**r**) és parciális deriváltjai az F irányított felületdarabon és annak ***g*** zárt görbével megadott határán folytonosak. Ekkor

$$\iint_F \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\overline{F} = \oint_g \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$$

F irányítottsága olyan, hogy g irányítottsága és minden d**F** felületelem **n** normálvektora jobbrendszert alkot.

A tétel egy speciális esete, ha $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$, valamint az F felület az xy sík egy zárt T tartománya, g ennek határoló görbéje.

Tétel **Green-formula**:

$$\oint_g v_1 dx + v_2 dy = \iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dx dy$$

Ekkor ugyanis a sík normálvektora **k**, és a rot **v** vektor **k** irányú vetülete

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\ .$$

3. Végtelen sorok

3.1. Számsorok

3.1. 1. A végtelen sor fogalma, a geometriai sor

Definíció Az $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ egy sorozat tagjainak összegét, az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

végetelen összeget **végtelen sor**nak nevezzük.

Jelölés: $$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Az a_n értéket a sor n-edik tagjának, az $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ értéket pedig a sor n-edik **részletösszeg**ének nevezzük.

Definíció Ha a részletösszegek $\{s_n\}$ sorozata a **konvergens** és határértéke S, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor az S számértékhez tart, vagy más szavakkal a **sor összege** S.

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ vagy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$

Ha a részletösszegek sorozatának nincs véges határértéke, azaz, ha $\{s_n\}$ divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **divergens**nek mondjuk.

Definíció Az $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ alakú sort **geometriai** vagy mértani **sor**nak nevezzük. A q-t a geometriai sor hányadosa vagy kvóciense.

Tétel **A geometriai sor tétele** Ha $|q| < 1$, akkor az $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ geometriai sor az $\frac{a}{1-q}$ értékhez konvergál.

Ha $|q| \geq 1$, akkor a sor divergens, kivéve az a =0 értéket. Ha a = 0, akkor a sor konvergens és összege 0.

Tétel Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Más szavakkal: a sor kongergenciájának szükséges feltétele, hogy az általános tagja 0-hoz tartson.

3.1.2. Nemnegatív tagú sorok összehasonlító konvergencia-kritériumai

Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nemnegatív tagú. (azaz $a_n \geq 0$ minden n-re)

Majoráns kritérium Ha $a_n \leq b_n$ teljesül (legfeljebb véges sok elempár kivételével) és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is **konvergens.**

Minoráns kritérium Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ sor divergens és $d_n \leq a_n$ teljesül (legfeljebb véges sok elempár kivételével), akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **divergens.**

Gyökkritérium Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan n_0 index, hogy $n_0 < n$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$, akkor a sor konvergens.

Következmény Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ határérték, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Ha q = 1, akkor ezen az úton nem dönthetünk a konvergenciáról, ha $q > 1$, akkor a sor divergens.

Hányadoskritérium Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan n_0 index, hogy $n_0 < n$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, akkor a sor konvergens.

Következmény: Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ határérték, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Ha q = 1, akkor ezen az úton nem dönthetünk a konvergenciáról, ha $q > 1$, akkor a sor divergens.

Integrálkritérium Legyen az f(x) függvény pozitív értékű, folytonos és monoton csökkenő, ha $1 \le x$. Legyen $f(n)=a_n$.

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor (másképp írva $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$) és az $\int_1^{\infty} f(x)dx$ impoprius integrál egyszerre konvergens, vagy divergens.

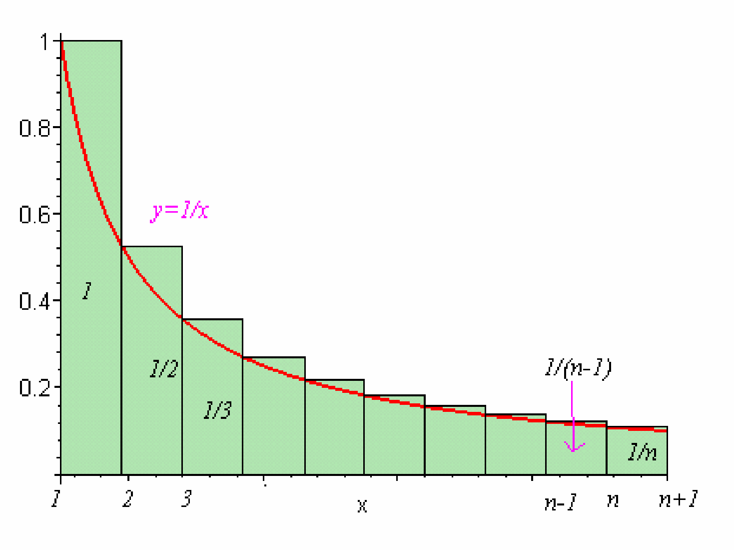
3.1.3.A harmonikus és a hiperharmonikus sor

Tétel A **harmonikus sor**, azaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \ldots$$

sor **divergens**.

Bizonyítás: A harmonikus sor tagjainak geometriai reprezentációját nem nehéz megadni: olyan téglalapok területének számértékével egyenlők, amelyeknek alapja 1, magassága pedig rendre$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ A sor első n tagjának összege, vagyis a sor n-edik részletösszege olyan n db téglalappal repezentálható, amelyek mindegyikének területe nagyobb, mint az $\frac{1}{x}$ függvény megfelelő intervallumra eső görbe alatti területe:



16. ábra A harmonikus sor

Tehát $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Mivel az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$, így a sor sem lehet konvergens.

Tétel A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hiperharmonikus sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, különben divergens.

3.1.4. Leibniz tipusú sorok, abszolút- és feltételes konvergencia

A nemnegatív sorokra kifejlesztett, a konvergencia eldöntését szolgáló eljárásokat most kiterjesztjük negatív és pozitív tagokat egyaránt tartalmazó sorokra.

Definíció Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **abszolút konvergens**nek mondjuk.

Tétel Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjai között negatívak és pozitívak is vannak, akkor a sor konvergenciáját vizsgálhatjuk a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor segítségével. Ha az abszolút értékekből álló sor konvergens, akkor a vizsgálandó sor is konvergens. Ha azonban az abszolút értékekből álló sor divergens, akkor a vegyes előjelű sor lehet konvergens is és divergens is.

Definíció Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, de a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **feltételesen konvergens**nek mondjuk.

Tétel **Leibniz tétele** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor teljesíti az alábbi három feltételt, akkor konvergens:

1. Minden n-re: $0 < a_n$;
2. $a_{n31} \le a_n$ minden n-re
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tétel **Az alternáló sor összegének becslésére vonatkozó tétel** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor kielégíti a Leibniz tétel feltételeit, akkor az $s_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$ részletösszeg az a_{n+1} abszolút értékénél kisebb hibával közelíti meg a sor összegét, azaz az elkövetett hiba kisebb az első elhagyott tag abszolút értékénél. Ezen túlmenően a $S-s_n$ kifejezés előjele megegyezik az első elhagyott tagéval.

3. 2. Függvénysorok

Definíció Ha egy végtelen sor tagjai valamilyen változó (többnyire az x) függvényei, akkor függvénysorról beszélünk.

Megjegyzés: Természetesen a tagok értelmezési tartományának metszetét kell vennümk, ami nem lehet üres halmaz.

Általános alak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots.$$

Ha az x helyére konkrét értéket helyettesítünk, akkor numerikus sort kapunk.

Definíció Ha az $x=x_0$ értékre az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots.$$

numerikus sor konvergens, akkor x_0-t a függvénysor **konvergencia-pont**jának nevezzük.

Definíció A függvénysor konvergenciapontjainak halmazát a sor **konvergencia-tartomány**ának nevezzük.
Ha a konvergenciatartomány intervallum, akkor **konvergencia-intervallum**ról beszélünk.

Definíció Azt a függvényt, amely azokban az x pontokban van értelmezve, amelyekben a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor konvergens és értéke egy-egy pontban a sor összege, a sor **összegfüggvény**ének nevezzük.

Definíció A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$

függvénysort, amelyben az a_i együtthatók és az x_0 állandók, az x_0 körüli **hatványsor**nak nevezzük.
Speciálisan, ha $x_0=0$, akkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Tétel A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor vagy minden x mellett konvergens, vagy csak $x=0$ mellett konvergens, vagy van olyan pozitív r szám, hogy $|x| < r$ esetén konvergens, $|x| > r$ esetén divergens. Az r számot a hatványsor **konver-genciasugará**nak nevezzük.

Tétel A hatványsor a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor **differenciálás**át szabad tagonként elvégezni.

Tétel A konvergenciaintervallum bármely belső részintervallumában a hatványsor tagonként integrálható és a hatványsor **integrálás**át szabad tagonként elvégezni.

Ha a tagonkénti deriválással illetve integrálással kapott sornak létezik az összege, ebből az eredeti sor össege az összeg integrálásával illetve deriválásával meghatározható.

3. 2. 1. A Taylor-sor

Célunk most előzőek fordítottja, a vizsgálandó függvényt hatványfüggvények összegeként akarjuk előállítani, és ennek segítségével függvényértékeket közelíteni. Tegyük fel, hogy a függvény az $x_0=0$ helyen differenciálható és felírható hatványfüggvények összegeként, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$$

alakban. Célunk az ismeretlen a_0, a_1, …, a_n,… együtthatók meghatározása. Tudjuk, hogy a függvény deriváltja az előző hatványfüggvények deriváljával egyezik meg:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$$

Ez a hatványsor ugyanabban az intervallumban konvergens, mint az f(x) hatványsora. Az eljárást ismételten alkalmazva:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + ... + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + ...$$

.

.

.

A hatványsor együtthatóit meghatározhatjuk a függvénynek és deriváltjainak az x=0 helyen vett értékeivel.

$$f(0) = a_0 \qquad f'(0) = a_1 \qquad f''(0) = 2a_2 \quad f'''(0) = 3 \cdot 2a_3 \quad ... \quad f^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

Definíció Ha f(x) az x=0 helyen akárhányszor diffrenciálható, akkor az

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + ...$$

sort a függvény **Taylor sor**ának, a

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$$

polinomot az f(x) n-edik **Taylor polinom**jának nevezzük.

Az f(x) függvény a Taylor sor összege, ha $n \to \infty$ esetén $R_n(x) = f(x) - T_n(x) \to 0$. Az Rn(x)-et a Raylor sor maradéktagjának nevezzük.

Tétel Legyen f(x) n+1-szer differenciálható az x_o=0 helyen és valamely környezetében. Ekkor minden ebbe a környezetbe eső *x* helyen érvényes, hogy

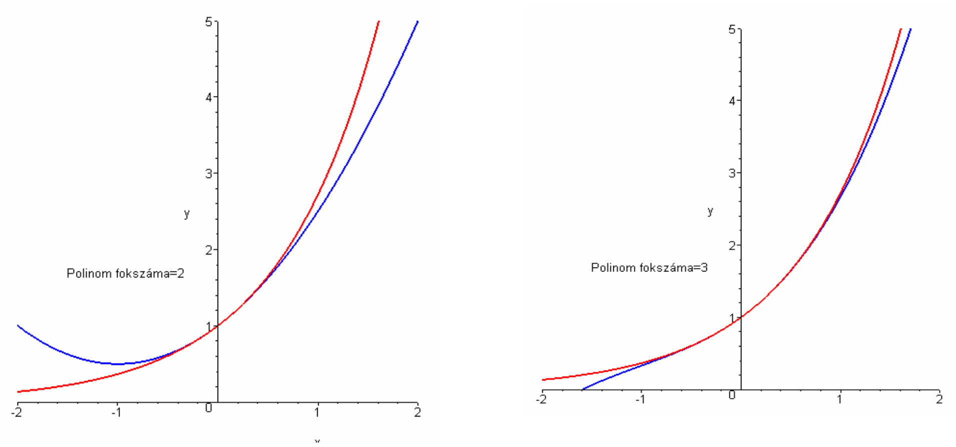
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ahol ξ a 0 és x közötti hely.

A függvény ilyen előállítását **Taylor-formulá**nak, (McLaurin-formulának), az $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ kifejezést Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

Néhány függvény Taylor sora:

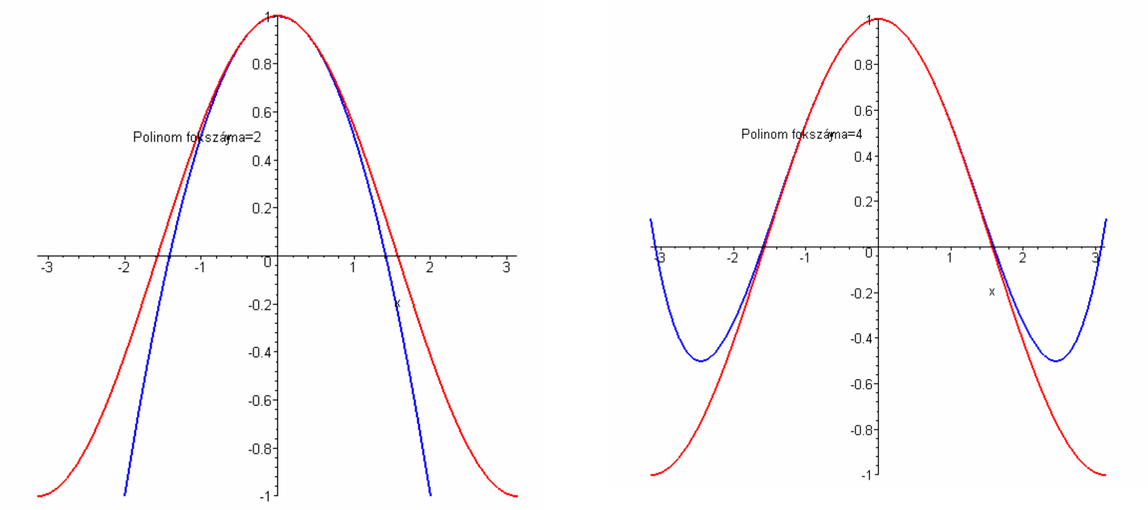
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$



17. ábra Az e^x függvény valamint másod- illetve harmadfokú Taylor polinomja

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$



18. ábra Az cosx függvény valamint másod- illetve negyedfokú Taylor polinomja.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x \le 1$$

$$\mathrm{arctg}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad -1 < x < 1$$

3. 2. 2. Integrálás sorfejtéssel

A határozatlan integrálnál említettük, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek nincs primitív függvénye. Ilyenkor a határozott integrált az integrandusz Taylor sorba fejtésével adjuk meg.

Például:

$si\, x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $\left(\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\right)$ az úgynevezett integrál-szinusz függvény

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^x 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$$

$$\int e^{-x^2} dx = \int 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} -$$

3.2.3 A Fourier sor

Periodikus, nem mindenütt differenciálható függvényeket szeretnénk mindenütt differenciálható trigonometrikus függvények sorával előállítani, a következő alakban:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... \quad (1)$$

Célunk a_0, a_1, b_1, a_2, b_2,....együtthatók meghatározása. Ehhez felhasználjuk a következő határozott integrálokat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad m \neq n \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad m \neq n \end{cases}$$

Ezeket felhasználva, a függvényt és a sorát $[-\pi, \pi]$ zárt intervallumon integrálva a jobb oldalon az első tagot kivéva mindenütt 0-t kapunk. Így

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 2\pi$$

Ha az (1) egyenlet mindkét oldalát cosmx-szel szorozzuk, és így végezzük el az integrálást, az előzőleg megadott határozott integrálok felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi$$

Ha az (1) egyenletet sinmx-szel szorozzuk, adódik, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \pi$$

Ezek segítségével mostmár megadhatjuk a Fourier sor definícióját:

Definíció A 2π szerint periodikus és integrálható függvény Fourier-sora az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

végtelen trigonometrikus sor, amelyben az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx$$

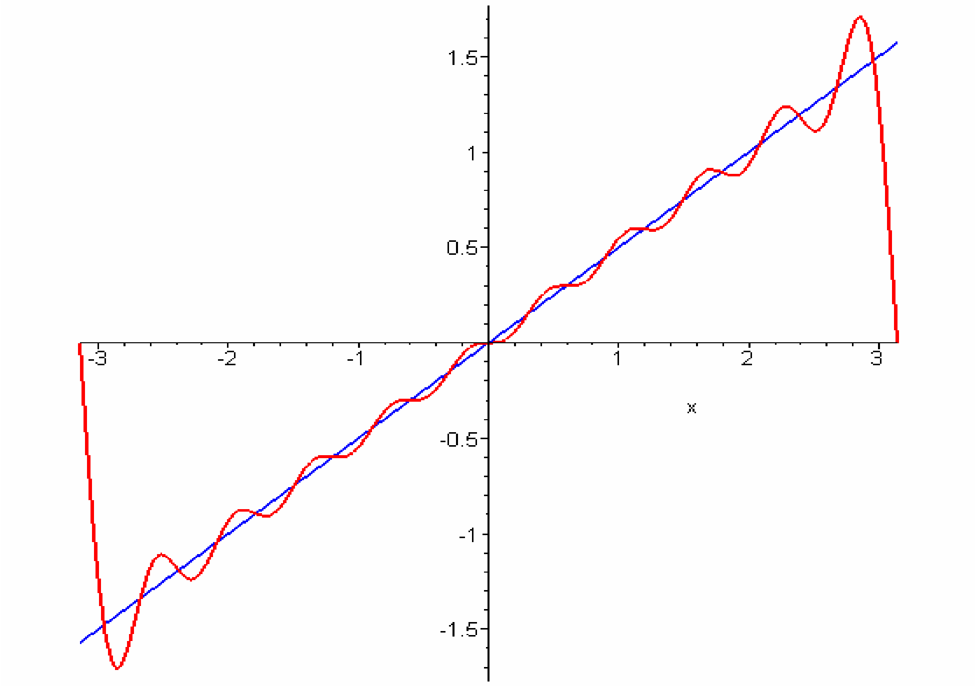
Tétel Ha f(x) páros függvény, akkor Fourier-sora csak koszinuszos tagokat, ha páratlan, akkor csak szinuszos tagokat tartalmaz.

Néhány függvény Fourier sora:

1. f(x)=$\frac{x}{2}$ ha $x \in [-\pi, \pi]$ és f(x)=f(x+k2p) $k \in \mathbb{Z}$

Fourier sora

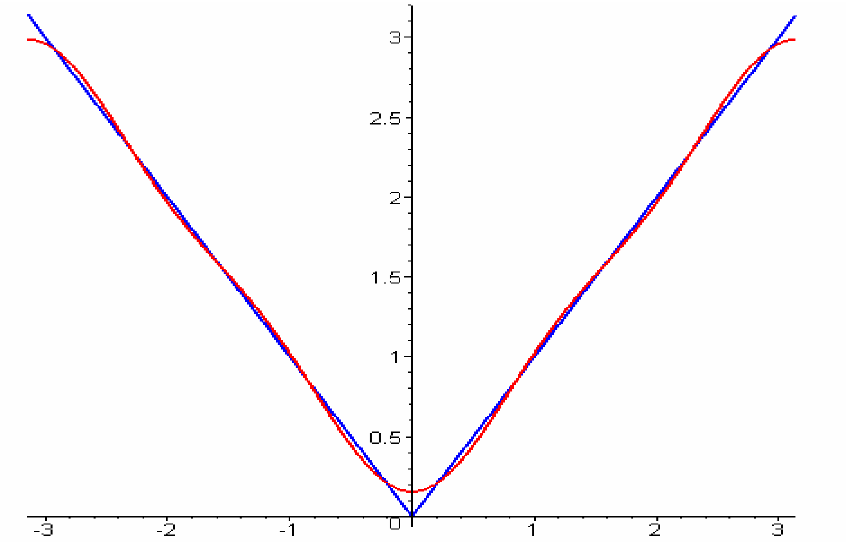
$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \sin nx}{n} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x - \ldots$$



19. ábra A periodikus $\frac{x}{2}$ függvény és Fourier sorának 10. részletösszege

2. f(x)=|x| ha $x \in [-\pi,\pi]$ és f(x)=f(x+k2π) $k \in Z$ függvény sorának 12. részletösszege:

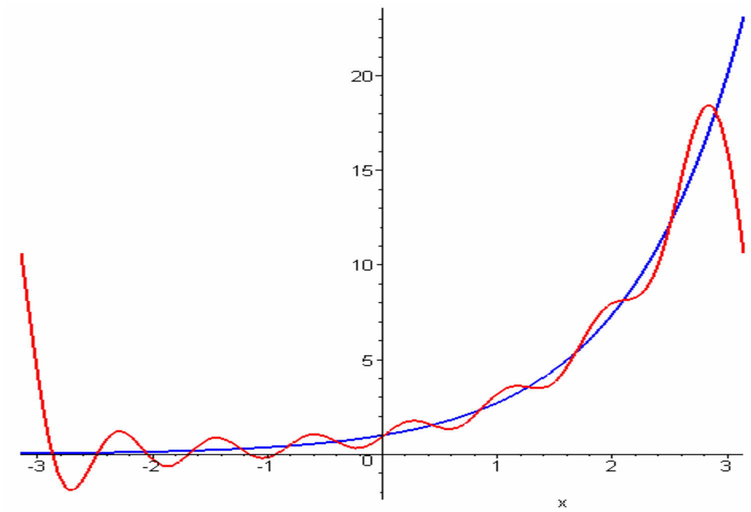
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$



20. ábra A periodikus |x| függvény és Fourier sorának 10. részletösszege

3. f(x)=e^x ha $x \in [-\pi,\pi]$ és f(x)=f(x+k~2π) k ~$\in Z$

$$f(x)= \frac{1}{2}\,\frac{-e^{(-\pi)} + e^{(-\pi)}\, e^{(2\pi)} + 2\left(\sum_{k\sim\,=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k\sim}\,(-1+e^{(2\pi)})\, e^{(-\pi)}\,(\cos(k\sim x) - k\sim \sin(k\sim x))}{\pi\,(1+k\sim^2)} \right)\pi}{\pi}$$



19. ábra A periodikus e^x függvény és Fourier sorának 10. részletösszege

A gyakorlatban sokszor olyan függvényt kell Fourier-sorba fejteni, amelynek periódusa nem 2π, hanem 2l, ahol l tetszőleges pozitív szám. Tegyük föl, hogy a 2l szerint periodikus f(x) függvény adott a [-l, l] intervallumon. Ezt az intervallumot 2π hosszúságúvá alakíthatjuk a $z = \frac{\pi x}{l}$ transzformációval.Így, ha x=-l, akkor $z=-\pi$, ha x=l, akkor $z=\pi$. Ezután a sorfejtést már a z változóval elvégezhetjük

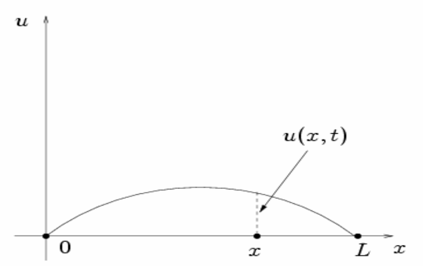
3.3. Parciális differenciálegyenlet megoldása sorfejtés segítségével

Definíció Az olyan egyenlőséget, amely valamely többváltozós függvény parciális deriváltjai, független változói és függvényértéke között állapít meg összefüggést, **parciális differenciálegyenlet**nek nevezzük.

Az ilyen differenciálegyenletek megoldása általában csak numerikus módszerekkel lehetséges. Két speciális esetben a megoldás során felhasználjuk a Fourier sorfejtés technikáját.

3.3.1. A rezgő húr problémája

Tekintsük az L hosszúságú tökéletesen rugalmas húrt. Helyezzük ezt a húrt az x-tengely [0, L] szakaszára és mozdítsuk ki az *x*-tengelyre merőlegesen.



20. A rezgő húr

A húr az x tengelyre merőlegesen az (x,u) síkban mozog. Azt, hogy a húr egy x abszcisszájú pontja hol van t időmúlva az u(x,t) függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha az u(x,t) ismeretlen függvényt megtaláljuk.

Amint az fizikai megfontolásokból adódik, a keresett u(x,t) függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad (1)$$

másodrendű, lineáris, parciális differenciálegyenletet, ahol α ismert állandó. (Fizikai magyarázathoz lásd Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek Műszaki Kiadó, Bólyai sorozat). A keresett partikuláris megoldás két kezdeti és két peremfeltételt kell megadani.

Kezdeti feltételek: a t=0 időpillanatban

u(x,0)=f(x) a húr kezdeti alakját leíró függvény

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x)$ a húr pontjainak kezdeti sebességét leíró függvény

Kerületi vagy peremfeltételek: a rúd két végpontjának helyzete

u(0,t)=0 u(L,t)=0

vagyis a rúd két vége rögzített.

A differenciálegyenlet megoldását u(x,t)=X(x)T(t) szorzat alakban keressük és így vezetjük vissza közönséges differenciálegyenletek megoldására.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = T(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = X(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)$$

Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}T(t)}{T(t)} = \alpha^2\frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)}$$

ez pedig csak úgy lehet igaz minden x és t értékre, ha az értéke konstans. Legyen ez $-\beta^2$. Így két közönséges, másodrendű, állandó együtthatós differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) + \beta^2 T(t) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}X(x) = 0$$

Ezek megoldásai:

$$T(t) = A\sin\beta t + B\cos\beta t$$

$$X(x) = C\sin\frac{\beta x}{\alpha} + E\cos\frac{\beta x}{\alpha}$$

Így az (1) egyenlet megoldása:

$$u(x,t) = (A\sin\beta t + B\cos\beta t)\left(C\sin\frac{\beta x}{\alpha} + E\cos\frac{\beta x}{\alpha}\right)$$

Itt A,B,C,E,β ismeretlenek, értéküket a kezdeti és a peremfeltételekből határozzuk meg.

Peremfeltételekből: mivel u(0,t)=0, így

$$0 = (A\sin\beta t + B\cos\beta t)E$$

Ez pedig csak úgy lehet igaz minden t-re ha E=0. Mivel u(L,t)=0,

$$0 = (A\sin\beta t + B\cos\beta t)C\sin\frac{\beta L}{\alpha}$$

C nem lehet 0, mert akkor u(x,t) azonosan 0 lenne, így csak $\sin\frac{\beta L}{\alpha}$ lehet 0. Ez pedig a trigonometrikus függvény periodikussága miatt végtelen sok megoldást ad β-ra. Feltéve, hogy k egész szám:

$$\frac{\beta_k L}{\alpha} = k\pi \qquad \beta_k = \frac{k\pi\alpha}{L}$$

Így k értékétől függően a megoldás:

$$u_k(x,t) = (A_k\sin\frac{k\pi\alpha t}{L} + B_k\cos\frac{k\pi\alpha}{L}t)C_k\sin\frac{k\pi x}{L}$$

a lineáris differenciálegyenlet megoldásainak lineáris kombinációi is megoldások. Így a kezdeti feltételnek megfelő megoldásokat

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

alakban keressük. Legyen $a_k=C_kA_k$, $b_k=C_kB_k$.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin\frac{k\pi\alpha t}{L}\sin\frac{k\pi x}{L} + b_k\cos\frac{k\pi\alpha t}{L}\sin\frac{k\pi x}{L})$$

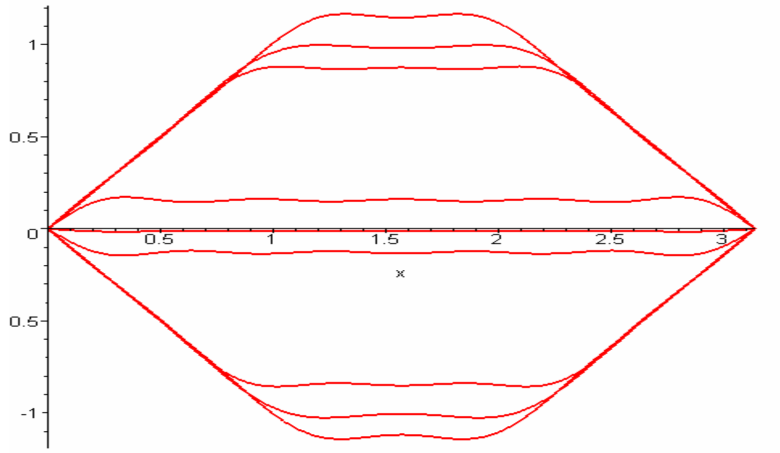
A feladat most már a kezdeti feltételekből a_k, és b_k meghatározása. A kezdeti feltételek szerint u(x,0)=f(x),illetve $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x)$, így

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{L} \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\frac{\sin\frac{k\pi x}{L}k\pi\alpha}{L}$$

A b_k együtthatók az f(x) függvény tiszta színuszos Fourier sorának együtthatói, ha f(x) értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy 2L szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Az a_k együtthatók pedig a g(x) függvény tiszta színuszos Fourier sorának együtthatóiból számítható, ha g(x) értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy *2L* szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Így az általános megoldásban szereplő konstansok már meghatározottak, vagyis megkaptuk az adott kezdeti és peremfeltételeknek megfelelő partikuláris megoldást.

Ha $$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$ és g(x)=0,

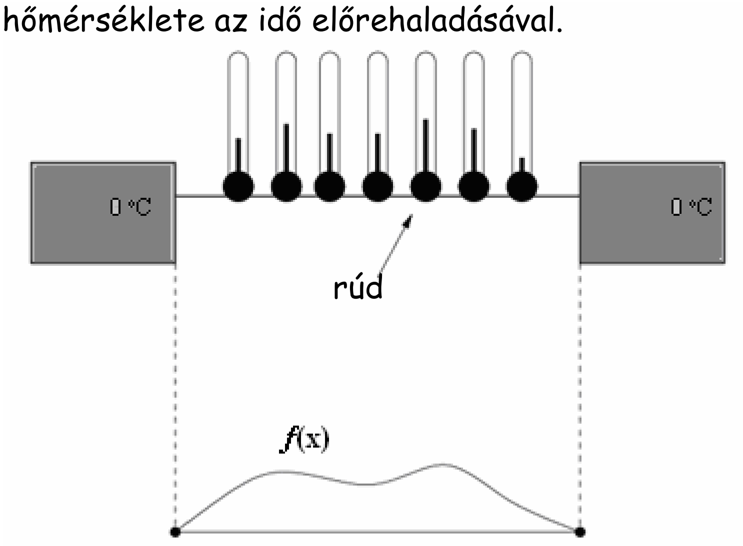
$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}(\sin x \cos t - \frac{1}{3^2}\sin 3x \cos 3t + \frac{1}{5^2}\sin 5x \cos 5t - \frac{1}{7^2}\sin 7x \cos 7t + \ldots)$$



21. A rezgő húr állapotait leíró függvénysor 10. részletösszegei különböző időpillanatokban

3.3.2. A hővezetés differenciálegyenlete

Képzeljünk el egy homogén, izotróp rudat, melynek mindkét végét 0 °C-os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza L. A rúd az *x* tengelyen van, és bal végpontja a zérus pont. A rúd kezdeti hőmérsékletét az u(x,0)= f(x) függvény adja meg. Adjuk meg az u(x,t) függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az x pontban t idő múlva. A kezdeti hőmérsékletet t = 0-ban a 22. ábra mutatja. Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott x pontban a rúdnak néha magasabb, néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladásával.



22. ábra l hosszúságú rúd hőmérsékleteloszlása a t=0 időpillanatban

Hogy egy adott x pontban t idő mulva mért u(x,t) hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouriertől származó hőterjedési törvényt:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad (1)$$

ahol α az anyagi minőségtől függő állandó. (Ennek levezetését megtalálhatjuk Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete cím könyvében.)

A **kezdeti feltétel** a rúd hőmérséklete a t=0-ban, vagyis u(x,0) =f(x). (Mivel a differenciálegyenletben t szerint csak az első dervált szerepel, ezért csak egy kezdeti feltétel van.)
A **kerületi feltétel** pedig abból adódik, hogy a rúd két vége nagy, 0 ^oC-os vizet tartalmazó tartályokban van, vagyis u(0,t)=0, u(L,t)=0.

A differenciálegyenlet megoldását most is u(x,t)=X(x)T(t) szorzat alakban keressük és így vezetjük vissza közönséges differenciálegyenletek megoldására.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \alpha^2 T(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = X(x)\frac{\partial}{\partial t}T(t)$$

Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$\frac{\frac{d}{dt}T(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)}$$

ez pedig csak úgy lehet igaz minden x és t értékre, ha az értéke konstans. Legyen ez $-\beta^2$. Így egy első és egy másodrendű, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t) + \beta^2 T(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}X(x) = 0$$

Ezek megoldásai:

$$T(t) = Ae^{-\beta^2 t}$$

$$X(x) = B\sin\frac{\beta x}{\alpha} + C\cos\frac{\beta x}{\alpha}$$

Így az (1) egyenlet megoldása

$$u(x,t) = Ae^{-\beta^2 t}\left(B\sin\frac{\beta x}{\alpha} + C\cos\frac{\beta x}{\alpha}\right)$$

alakú. Itt még A,B,C, β ismeretlenek, értéküket a kezdeti és a peremfeltételekből határozzuk meg.

Peremfeltételekből: mivel u(0,t)=0, így

$$0 = Ae^{-\beta^2 t}C$$

Ez pedig csak úgy lehet igaz minden t-re ha C=0.

A kerületi feltételeket felhasználva, mivel u(L,t)=0

$$0 = Ae^{-\beta^2 t}B\sin\frac{\beta L}{\alpha}$$

AB nem lehet 0, mert akkor u(x,t) azonosan 0 lenne, így csak $\sin\frac{\beta L}{\alpha}$ lehet 0. Ez pedig a trigonometrikus függvény periodikussága miatt végtelen sok megoldást ad β-ra. Feltéve, hogy k egész szám:

$$\frac{\beta_k L}{\alpha} = k\pi \qquad \beta_k = \frac{k\pi\alpha}{L}$$

Jelöljük az AB szorzatot a-val! Így k értékétől függő megoldások összege:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin\frac{k\pi x}{L} e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right)^2 t}\right)$$

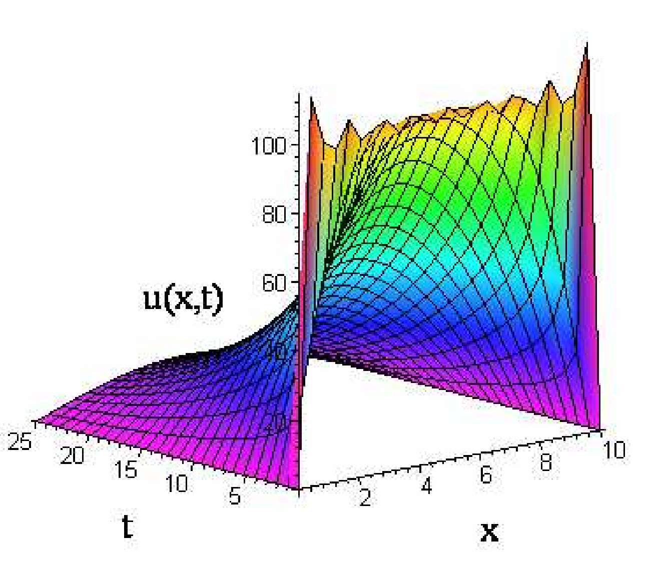
A feladat most már a kezdeti feltételből a_k meghatározása. A kezdeti feltétel szerint u(x,0)=f(x), így

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi\alpha x}{L}$$

Az egyenletben szereplő a_k együtthatók az f(x) függvény tiszta színuszos Fourier sorának együtthatói, ha f(x) értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy 2L szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Így az általános megoldásban szereplő konstansok már meghatározottak, vagyis megkaptuk az adott kezdeti és peremfeltételeknek megfelelő partikuláris megoldást.

Ha f(x)=100 °C (konstans), a rúd hossza L=10 m, a helytől és az időtől függő hőmérsékleteloszlás:

$$u(x,t)=\frac{400}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{100}}\sin\frac{\pi x}{100}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3^2\pi^2 t}{100}}\sin\frac{3\pi x}{100}+\frac{1}{5}e^{-\frac{5^2\pi^2 t}{100}}\sin\frac{5\pi x}{100}+\ldots\right)$$



23. ábra A 100 °C-os rúd lehűlése a hely és az idő függvényében

Ajánlott irodalom:

[1] Szász Gábor: Matematika II. *Többváltozós vektorfüggvények, lineáris algebra, komplex függvények, algebrai egyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest

[2] Klincsik Mihály – Perjésiné Hámori Ildikó: *Vektoranalízis, Műszaki, fizikai és Maple alkalmazásokkal*, University Press, Pécs

[3] http://matserv.pmmf.hu/e-learning

[4] http://matek.pmmf.hu

[5] Freud Róbert: *Lineáris algebra* ELTE Eötvös kiadó

[6] Rózsa Pál: *Lineáris algebra és alkalmazásai* Műszaki kiadó

[7] ……..: *Mátrixszámítás*, Műszaki kiadó

[8] Scharnitzky Viktor: *Differenciálegyenletek*: Műszaki kiadó

[9] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete*: Gondolat kiadó