Matematika II.

Pollack jegyzetek

Fekete Mária

Matematika II.

Pécsi Tudományegyetem
Pollack Mihály Műszaki Kar
Matematika Tanszék

Pécs, 2007

A jegyzet a PTE PMMK építőmérnök szak PMMANB312, PMMANB926 tantárgykódú Matematika II. kurzus segédletének készült.

ISBN 978-963-7298-17-2

Gépelés és tördelési munkák:
Kozma Beáta

Szerkesztette és az ábrákat készítette:
Pálfi Róbert

Részletes tantárgyprogram

Hét	Ea./Gyak./Lab.	Témakör
1.	2/2/0	Kétváltozós függvény értelmezése, pontbeli határértéke, folytonossága, a parciális differenciálhányados értelmezése és kiszámítása.
2.	2/2/0	Kétváltozós függvény gradiensének, iránymenti deriváltjának értelmezése és kiszámítása.
3.	2/2/0	Kétváltozós függvények szélsőértéke.
4.	2/2/0	Egyváltozós függvény primitív függvénye, a határozatlan integrál. Alapintegrálok. $\frac{f'}{f}$, $f' \cdot f^{\alpha}$ alakú függvények integrálása.
5.	2/2/0	Parciális és helyettesítéses integrálás. Racionális törtfüggvények integrálása.
6.		Őszi szünet
7.	2/2/0	Trigonometrikus függvények integrálása.
8.	2/2/0	A határozott integrál értelmezése, tulajdonságai. A Newton-Leibnitz tétel. **1. Zárthelyi dolgozat megírása.**
9.	2/2/0	Az integrálszámítás geometriai alkalmazásai: síkidom területe, forgástest térfogata, görbe ívhossza, forgástest felszíne. Improprius integrál.
10.	2/2/0	Kétváltozós függvény integrálása: tartományon vett- és kettős-integrál.
11.	2/2/0	Szétválasztható változójú, változóiban homogén elsőrendű differenciálegyenletek.
12.	2/2/0	Elsőrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenletek.
13.	2/2/0	Hiányos másodrendű differenciálegyenletek. **2. Zárthelyi dolgozat megírása.**
14.	2/2/0	Másodrendű, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletek.
15.	2/2/0	Pótlások

Tartalomjegyzék

I. rész

Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

1. fejezet

A határozatlan integrál

1.1 A primitív függvény

Definíció. Az egyváltozós valós f függvénynek a H halmazon *primitív függvénye* az F függvény, ha f és F a H halmazon értelmezett, a H halmazon F differenciálható és

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in H \text{ esetén teljesül.}$$

$\square$

Tétel. *Ha f-nek a H halmazon primitív függvénye F, akkor bármely $G(x) = F(x) + c$ (c tetszőleges valós szám) alakú függvény is primitív függvénye.* $\square$

BIZONYÍTÁS: $G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in H$ esetén. $\blacksquare$

Tétel. *Ha az f függvénynek valamely I intervallumon primitív függvénye az F és a G függvény, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$ esetén $G(x) - F(x) = c$, azaz a primitív függvények csak összeadandó állandóban különböznek egymástól.* $\square$

BIZONYÍTÁS: A feltétel szerint: $F'(x) = G'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$-re, $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ $\forall x \in I$ esetén, azaz $(G(x) - F(x))' \equiv 0$ $\forall x \in I$-re $\Rightarrow G(x) - F(x) = c$, ahol c alkalmasan választott valós konstans. $\blacksquare$

1.2 A határozatlan integrál

Definíció. Az f függvény primitív függvényeinek összességét (halmazát) az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük. Jelölése: $\int f(x)dx$. $\square$

Megjegyzés.

- f határozatlan integrálja egy függvényhalmaz, amelynek elemei f primitív függvényei.
- A dx azt fejezi ki, hogy az integrálás az x változóra vonatkozik.
- Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon, akkor $\int f(x)dx = F(x) + c$, ahol c-t integrációs állandónak nevezzük.

1.3 Alapintegrálok

Ha egy függvénynek ismerjük a deriváltját, akkor az eredeti függvény a deriváltfüggvénynek primitív függvénye. Ezen az alapon adódnak a következő, úgynevezett alapintegrálok.

Az *alapintegrálok* az elemi alapfüggvények deriváltjainak integráljai. A következő képletek olyan intervallumokon érvényesek, amelyek minden pontjában a jobb oldalon álló függvény értelmezett és differenciálható.

$$\int 0 \; dx = c$$

$$\int 1 \; dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} \; dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \; dx = e^x + c$$

$$\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \; dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \; dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \; dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \arcsin x + c_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos x + c_1 = \arccos x + c_2$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \; dx = \operatorname{arctg} x + c_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x + c_1 = -\operatorname{arcctg} x + c_2$$

$$\int \operatorname{sh} x \; dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x \; dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \; dx = \int (1 - \operatorname{th}^2 x) \; dx = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \; dx = \int (1 - \operatorname{cth}^2 x) \; dx = -\operatorname{cth} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \operatorname{arsh} x + c = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\ dx = \operatorname{arch} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, \text{ ha } |x|<1 \\ \operatorname{arcth} x + c, \text{ ha } |x|>1 \end{cases} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Megjegyzés.

- Az f függvény integrálása olyan függvények keresését jelenti, melyek deriváltja f függvény.
- Minden elemi függvény deriváltját képezhetjük a deriválási szabályok alkalmazásával. Azonban léteznek olyan elemi függvények, melyeknek nincs elemi primitív függvényük. Ilyenek pl. $\frac{e^x}{x}$; $\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\cos x}{x}$; e^{-x^2}; $\frac{1}{\ln x}$; $\sqrt{x^3+1}$; stb.
- Szorzat-, tört-, összetett függvény integrálására vonatkozó szabály nincs. Csak speciális szorzatokat, törteket és összetett függvényeket tudunk integrálni.

1.4 Integrálási módszerek

Tétel. *Ha* $\int f(x)\ dx$ *és* $\int g(x)\ dx$ *létezik, akkor*

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx,$$

illetve

$$\int k\cdot f(x)\ dx = k\cdot \int f(x)\ dx,$$

ahol $k\in\mathbb{R}$ *tetszőleges.* □

A bizonyítás a megfelelő deriválási szabályok felhasználásával történik.

Tétel. *Ha* $F(x)$ *függvény az* $f(x)$ *függvény primitív függvénye, akkor*

$$\int f(ax+b)\ dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c,$$

ahol $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. □

BIZONYÍTÁS: $(\frac{F(ax+b)}{a} + c)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$. ■

Tétel. $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *esetén*

$$\int f'(x)\,[f(x)]^\alpha\ dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

□

BIZONYÍTÁS:
$$\left(\frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)[f(x)]^{\alpha}\ f'(x) = f'(x)[f(x)]^{\alpha}.$$

■

Tétel.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)|+c$$

□

BIZONYÍTÁS: Ha $f(x)>0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$
$$(\ln|f(x)|+c)' = (\ln\ f(x)+c)' = \frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Ha $f(x)<0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$
$$(\ln|f(x)|+c)' = (\ln\ (-f(x))+c)' = \frac{1}{-f(x)}(-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

■

Tétel. *Ha $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye és $g(x)$ valamely I intervallumon differenciálható, és ezen intervallumon létezik az $f(g(x))$ összetett függvény akkor*
$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\ dx = F(g(x))+c.$$

□

BIZONYÍTÁS: $(F(g(x))+c)' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$. ■

PÉLDA:

1. $\int e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$
2. $\int e^{x}\ \cos e^{x}\ dx = \sin e^{x}+c$

Tétel (Parciális integrálás)**.** *Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ valamely intervallumon differenciálható függvények, és ugyanezen intervallumon létezzen az $\int f(x)\ g'(x)\ dx$ vagy az $\int f'(x)\ g(x)\ dx$ integrál. Ekkor*
$$\int f'(x)\ g(x)\ dx = f(x)\ g(x) - \int f(x)\ g'(x)\ dx.$$

□

Bizonyítás:

$$(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$$
$$f'(x)\ g(x) = (f(x)\ g(x))' - f(x)\ g'(x),$$

ahonnan mindkét oldalt integrálva

$$\int f'(x)\ g(x)\ dx = f(x)\ g(x) - \int f(x)\ g'(x)\ dx.$$

■

PÉLDA:

$$\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\cos 5x}_{f'}\ dx = x\frac{\sin 5x}{5} - \int 1\cdot\frac{\sin 5x}{5}dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + c$$

Megjegyzés. A parciális integrálást akkor érdemes alkalmazni, ha az f-nek választott tényezőt könnyen tudjuk integrálni, és az $f\cdot g'$ integrálása is könnyebb, mint az $f'\cdot g$ integrálása.

Négy, parciális integrálásra alkalmas függvénytípus

a) Parciális integrálásra alkalmasak azok a

$$p(x)\cdot t(ax+b) \qquad (a,b\in\mathbb{R};\ a\neq 0)$$

alakú függvények, amelyekben

- $p(x)$: polinomfüggvény,
- t: a sin, cos, *sh*, *chx* függvények valamelyike vagy exponenciális függvény

$$\int \underbrace{p(x)}_{g} \underbrace{\cdot t(ax+b)}_{f'}\ dx \text{ választással.}$$

b) Ide soroljuk az

$$x^{\alpha}\cdot\ln^n x$$

alakú függvényeket, ha $\alpha\in\mathbb{R};\ \alpha\neq -1,\ n\in\mathbb{N}^+$

$$\int \underbrace{x^{\alpha}}_{f'}\cdot\underbrace{\ln^n x}_{g}\ dx \text{ választással.}$$

c) Ide soroljuk a

$$h(ax+b)\cdot k(cx+d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R};\ a \neq 0,\ c \neq 0$ alakú függvényeket, ha h és k: a sin, cos, sh, ch, exponenciális függvények valamelyike. Ebben az esetben két parciális integrálás után kapott egyenletből tudjuk az integrált kiszámítani.

$$\int \underbrace{h(ax+b)}_{f'} \cdot \underbrace{k(cx+d)}_{g}\ dx$$

választással, mindkét parciális integrálás esetén.

d) Ide soroljuk a

$$p(x) \cdot a(x)$$

alakú függvényeket, ha

- p: polinomfüggvény,
- a: arkusz- vagy area függvény.

$$\int \underbrace{p(x)}_{f'} \cdot \underbrace{a(x)}_{g}\ dx \text{ választással.}$$

Tétel. *Ha létezik az $f(x)$ függvény primitív függvényre és ha $g(x)$ valamely intervallumon differenciálható függvény, és itt létezik az $f(g(x))$ összetett függvény, akkor létezik az $\int f(g(x))\ g'(x)\ dx$ integrál és*

$$\int f(g(x))\ g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt,$$

ahol $t = g(x)$. (Lásd a 13. oldalon lévő tételt.) □

Tétel. *Ha az $x = g(t)$ szigorúan monoton és differenciálható függvény, valamint létezik az $f(g(t))$ összetett függvény, és létezik az $\int f(g(t))\ g'(t)\ dt$ integrál, akkor létezik az $\int f(x)\ dx$ és*

$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t))\ g'(t)\ dt,$$

ahol $t = \bar{g}(x) \Leftrightarrow x = g(t)$. □

Megjegyzés.

- Helyettesítéses integrálás során tetszőleges függvény integrálját egyszerűbb, könnyebben integrálható függvény integrálására vezetjük vissza.

- Helyettesítéskor gyakorlatilag az eredeti változó (x) valamely alkalmasan megválasztott függvénye $(g(x))$ helyére az új változót (t), vagy az eredeti változó helyére az új változó tetszőleges invertálható függvényét $(g(t))$ helyettesítjük. Az integrál kiszámítása után visszatérünk az eredeti változóra.

1.5 Elemi függvények integrálása

1.5.1 Polinom függvények integrálása

Polinom függvény (racionális egész függvény) általános alakjai:

$$R_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$

ahol $a_k \in \mathbb{R};\ k = 0, \ldots, n;\ a_n \neq 0$, n-ed fokú polinom függvény! Tagonként integrálunk!

1.5.2 Racionális törtfüggvények integrálása

Definíció. A $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(m \geq 1)$ alakú függvényt, ahol P n-ed fokú, Q m-ed fokú polinom, *racionális törtfüggvénynek* nevezzük. Ha $m > n$, *valódi törtfüggvényről*, egyébként *áltörtfüggvényről* beszélünk. □

Minden áltörtfüggvény (a számlálót elosztva a nevezővel) egyértelműen felbontható egy polinom függvény és egy valódi racionális függvény összegére. Tehát, ha $m \leq n$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{P(x)}{Q_m(x)},$$

ahol $R_{n-m}(x)$ egy $(n-m)$-ed fokú polinom függvény, és $P(x)$ m-nél alacsonyabb fokú polinom függvény.

PÉLDA: $\frac{x^5+3x^2-1}{x^2+x-2} = x^3 - x^2 + 3x - 2 + \frac{8x-5}{x^2+x-2}$.

Integrálás szempontjából a valódi törtfüggvények érdekesek.

Valódi törtfüggvények integrálása

A valódi törtfüggvényt azonos átalakításokkal elemi törtfüggvények (parciális törtfüggvények) összegére bontjuk.

Elemi törtfüggvények:

1. $\frac{A}{(ax+b)^n}$, ahol $A, a, b \in \mathbb{R};\ A \neq 0,\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^+$
2. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, ahol $A, B, a, b, c \in \mathbb{R};\ A^2 + B^2 \neq 0,\ a \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0,\ n \in \mathbb{N}^+$

Tétel. *Minden valós együtthatós valódi törtfüggvény előállítható elemi törtfüggvények összegeként, mégpedig egyértelműen.* □

A valódi törtfüggvények integrálásának lépései

1. lépés A tört nevezőjét a lehető legegyszerűbb tényezők szorzatára bontjuk.

A szorzattá alakítás elvi lehetőségét mondja ki a következő

Tétel. *Minden valós együtthatós polinom egyértelműen felbontható valós együtthatós első és valós együtthatós irreducibilis másodfokú polinomok szorzatára.* □

Az ax^2+bx+c valós együtthatós irreducibilis másodfokú polinom, ha $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$; b^2- $-4ac<0$.

Megjegyzés. Ez a szorzattá alakítás nem mindig egyszerű!

2. lépés A valódi törtet úgynevezett elemi törtfüggvények összegére bontjuk. (Az elemi törtek száma megegyezik a nevező tényezőinek számával, és minden elemi tört nevezője különböző!)

3. lépés Kiszámítjuk az elemi törtek számlálóiban szereplő paramétereket. (Mi az egyenlő együtthatók módszerével határozzuk meg ezen paramétereket.)

4. lépés Integráljuk a kapott elemi törtfüggvényeket.

Az elemi törtek integrálása:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b|+c,\ a\neq 0$
2. $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{A}{a}\int a(ax+b)^{-n}\,dx = \frac{A}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n}+c,\ n\in\mathbb{N}^+,\ n\geq 2,\ a\neq 0$
3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, ahol ax^2+bx+c irreducibilis polinom.

Példák racionális törtfüggvények integrálására

PÉLDA:

$$\int \frac{x^5+3x^2-1}{\underbrace{x^2+x-2}_{\text{áltört függvény}}}\,dx = \int \Big(x^3-x^2+3x-2+\frac{8x-5}{\underbrace{x^2+x-2}_{\text{valódi törtfüggvény}}}\Big)\,dx = (*)$$

$$\frac{8x-5}{x^2+x-2}\equiv\frac{8x-5}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\equiv\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)}$$

Tehát

$$\frac{8x-5}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)},\qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

A fenti egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\left.\begin{aligned} 8&=A+B\\ -5&=2A-B\end{aligned}\right\}$$

azaz $A=1,\ B=7$.

$$\begin{aligned}(*)\ &= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{7}{x+2}\right)dx=\\ &= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\ln|x-1|+7\ln|x+2|+c\end{aligned}$$

PÉLDA:

$$\int \underbrace{\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}}_{\text{valódi törtfüggvény}}\, dx = \int (\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1})\, dx = (*)$$

$$\underbrace{\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}}_{\text{3 tényező!}} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \equiv \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)} \equiv \frac{A(x-1)^{(x^2+1)}+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$-2x+4 \equiv A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2$$

A két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha x megfelelő hatványainak együtthatói a két polinomban azonosak, tehát

$$\left.\begin{array}{ll} \text{3-ad fokú tag együtthatója:} & 0 = A+C \\ \text{2-od fokú tag együtthatója:} & 0 = -A+B-2C+D \\ \text{1-ső fokú tag együtthatója:} & -2 = A-2D+C \\ \text{0-ad fokú tag együtthatója:} & 4 = -A+B+D \end{array}\right\}$$

Ez az egyenletrendszer A, B, C, D-re lineáris. (Mindig egyértelmű megoldása van!) Azaz:

$$A = -2,\ B = 1,\ C = 2,\ D = 1.$$

$$\begin{aligned} (*) &= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \int \frac{2x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \\ &= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + c \end{aligned}$$

1.5.3 Irracionális függvények integrálása

Ha nem speciális alakú a függvény, gyakran helyettesítést alkalmazunk vagy parciálisan integrálunk.

1.5.4 Trigonometrikus függvények integrálása

$\sin^m x \cdot \cos^n x$ **alakú függvények integrálása, ahol** $m, n \in \mathbb{N}$

a) Ha m és n közül legalább egyik páratlan, a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság felhasználásával az integrandusz átalakítható.

PÉLDA:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x\, dx &= \int \sin x(1-\cos^2 x)^2\, dx = \int \sin x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\, dx = \\ &= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

b) Ha m és n páros, akkor a

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x &\equiv \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x &\equiv \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{aligned}\right\} \text{(linearizáló formulák)}$$

segítségével alakítjuk át az integranduszt.

$\sin nx \cdot \sin mx$, $\sin nx \cdot \cos mx$, $\cos nx \cdot \cos mx$ alakú függvények integrálása ($m \neq n$)

A szorzatokat megfelelő azonosság felhasználásával összeggé alakítjuk, majd tagonként integrálunk.
Azonosságok:

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cdot \sin\beta &\equiv -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta &\equiv \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta &\equiv \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \end{aligned}$$

Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása

Helyettesítéssel racionális törtfüggvények integrálására vezetjük vissza.
A helyettesítés:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t & \Rightarrow\quad x = 2\operatorname{arctg} t & \Rightarrow\quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2} & \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \operatorname{ctg} x = \dfrac{1-t^2}{2t} & \end{array}$$

Ugyanis:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Exponenciális, logaritmikus, hiperbolikus függvények integrálása

Az eddigiekben ismertetett módszerekkel történik.

2. fejezet

A határozott integrál

– Az integrálszámítás egyik legfontosabb fogalma.

– A *területszámítás* (görbe vonalakkal határolt síkidomok területének meghatározása) volt az első olyan probléma, mely a határozott integrál fogalmához vezetett.

– *Síkgörbe ívhossza.*

– *Térfogatszámítás*

Stb. szintén a határozott integrál fogalmához vezet.

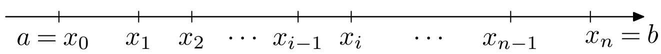
2.1 A határozott integrál fogalma

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $[a, b]$ $(a < b)$ intervallum minden pontjában értelmezett, korlátos függvény. Az *f függvény határozott integráljának* (Riemann-integráljának) az alábbi eljárás eredményeként kapott *valós számot nevezzük.* □

1. Az $[a, b]$ intervallumot az

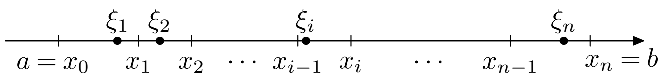
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

abszcisszájú pontokkal n számú tetszőleges részintervallumokra osztjuk.



2. Mindegyik részintervallumból tetszőlegesen kiválasztunk egy-egy számot.

$$\xi_1 \in [x_0, x_1]; \xi_2 \in [x_1, x_2]; \ldots; \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]; \ldots; \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$$



3. Képezzük a következő n tagú összeget

$$R_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

ahol $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.$R_n$ n-edik Riemann összeg, n-edik Riemann-féle integrálközelítő összeg.

4. Képezzük a Riemann-összegek határértékét, midőn a felosztások n száma végtelenhez tart, és a legnagyobb részintervallum hossza is nullához tart:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} R_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ha az összes lehetséges beosztás és tetszőleges ξ_i értékek választása estén a felírt Riemann-féle integrálközelítő összegeknek a hátarértéke ugyanaz a valós szám, akkor *ezt a közös határértéket az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott integráljának nevezzük* és az $f(x)$ függvényt az $[a, b]$ intervallumban *Riemann szerint integrálhatónak* nevezzük.
Tehát:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} R_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I \qquad \text{- közös határérték}$$

Jelölés: $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott integráljának jelölése.

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{ahol:}$$

$[a, b]$ – az integrációs intervallum

a – az integrálás alsó határa

b – az integrálás felső határa

$f(x)$ – intergrandusz

Megjegyzés. (Az $\int_a^b f(x)\,dx$ definíciójához.)

1. Az $[a, b]$ intervallum n részre történő beosztása tetszőleges, egyenlő részekre is oszthatjuk.
2. Az $[a, b]$ intervallum felosztását a-nál kezdjük, tehát $a = x_0, b = x_n$.
3. Egy adott *beosztása finomságán* a keletkezett leghosszabb intervallum hosszát értjük.
4. Megköveteljük, hogyha $n \to \infty$, akkor a leghosszabb részintervallum hossza is 0-hoz tartson, azaz azt mondjuk, hogy a *beosztássorozat minden határon túl finomodó* legyen.
5. A Riemann-összeg (R_n) végtelen sok változatban elkészíthető.

A határozott integrál definíciója alapján körülményes és nehéz annak eldöntése, hogy $f(x)$ függvény az $[a, b]$-on Riemann szerint integrálható-e, ezért olyan feltételeket kell keresnünk, melyek segítségével az integrálhatóság könnyen eldönthető.

2.2 A határozott integrál létezésének feltételei

2.2.1 Az Riemann-szerinti integrálhatóság szükséges feltételei

Tétel. *Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$-on Riemann-szerint integrálható, akkor $f(x)$ $[a,b]$-n értelmezett és korlátos. (Másképp: $\int_a^b f(x)\, dx$ létezéséhez szükséges, hogy $f(x)$ $[a,b]$-n értelmezett korlátos függvény legyen.)* □

2.2.2 Az Riemann-szerinti integrálhatóság elégséges feltételei

Tétel. *Ha $f(x)$ az $[a,b]$-n értelmezett, korlátos és monoton függvény, akkor $\int_a^b f(x)\, dx$ létezik.* □

Tétel. *Ha $f(x)$ az $[a,b]$-n értelmezett, korlátos és véges sok szakadási hellyel rendelkező függvény, akkor $f(x)$ $[a,b]$-n Riemann-szerint integrálható.* □

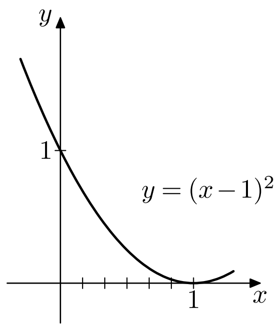
Tétel. *Ha $f(x)$ az $[a,b]$-n folytonos függvény, akkor $\int_a^b f(x)\, dx$ létezik.* □

2.3 Példa a határozott integrál definícióval történő kiszámítására

$$\int_0^1 (x-1)^2\, dx = ?$$

Megoldás. Mivel $f(x) = (x-1)^2$ függvény [0,1]-on folytonos $\Rightarrow$ $\int_0^1 (x-1)^2\, dx$ létezik. Ezért ezen az intervallumon bármelyik Riemann-féle integrálközelítő összegét felírva, annak létezik a határértéke, és a határértéke egyenlő a határozott integrállal. Tehát írjuk fel a lehető legegyszerűbb Riemann-féle integrálközelítő összeget, hogy a határértékét könnyen ki tudjuk számítani.

– A [0,1]-ot n egyenlő részre osszuk fel. Ekkor $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_i = \cdots = \Delta x_n = \frac{1}{n}$.



– A keletkezett kis részintervallumokból válasszuk az intervallum jobb végpontját, tehát

$$\xi_1 = \frac{1}{n}, \xi_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \xi_i = \frac{i}{n}, \ldots, \xi_n = \frac{n}{n} = 1$$

Írjuk fel R_n-t.

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\xi_i = \left(\frac{1}{n}-1\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}-1\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{i}{n}-1\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}-1\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\dots+\frac{n}{n}\right) + n\right] =$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} - 2\frac{1+2+\dots+n}{n} + n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^2} - 2\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} + n\right] =$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - 2\frac{n(n+1)}{n} + n\right] = \frac{1}{n}\cdot\frac{2n^2+3n+1-6n^2-6n+6n^2}{6n} =$$
$$= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$\int_0^1 (x-1)^2\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Megjegyzés. Most $n \to \infty$ esetén $\Delta x_i = \frac{1}{n} \to 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$, mert a $[0,1]$-ot n egyenlő részre osztottuk.

2.4 A határozott integrál tulajdonságai

Definíció. Minden $a \in \mathbb{R}$ szám és minden valós $f(x)$ függvény esetén, ha $a \in D_f$, akkor $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ □

Definíció. Ha $\int_a^b f(x)\, dx$ létezik $(a < b)$, akkor az $\int_b^a f(x)\, dx$ integrált a következőképpen definiálhatjuk:

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx.$$

□

Tétel. *Ha $f(x)$ függvény integrálható az $[a,b]$-n, akkor az $[a,b]$ intervallum bármely $[c,d]$ részintervallumán is integrálható.* □

Tétel. *Ha $f(x)$ függvény integrálható $[a,b]$-n és $a < c < b$, akkor*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

□

Tétel. *Ha $f(x)$ függvény integrálható $[a,b]$ és $[c,b]$ intervallumokon, akkor $[a,b]$-n is integrálható és*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

□

Tétel. *Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik, akkor $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\ dx = c \int_a^b f(x)\ dx.$$

□

Tétel. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálható $[a,b]$-n, akkor*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx.$$

□

2.5 A határozott integrál geometriai jelentése

Definíció. Ha $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon $(a < b)$ integrálható és $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq 0$, akkor az

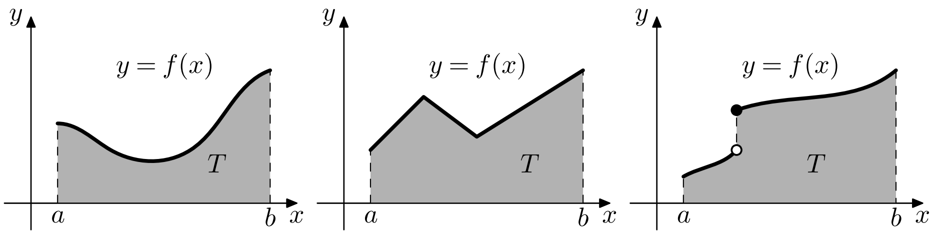
$y = f(x)$ egyenletű görbe;

az $[a,b]$ intervallum;

az $x = a$ és $x = b$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom – *görbevonalú trapéz* – területének számértéke az $\int_a^b f(x)\ dx$ integrállal egyenlő.

$$T = \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

□



2.6 A határozott integrálra vonatkozó tételek

Tétel. *Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik és $\forall x \in [a,b]$-re, $f(x) \geq 0$, akkor $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$* □

Tétel. *Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik, akkor $\int_a^b |f(x)|\ dx$ is létezik és*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\ dx.$$

□

Tétel. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálható $[a,b]$-n és $\forall x \in [a,b]$-re $f(x) \leq g(x)$, akkor*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

□

Az integrálszámítás középértéktételei

Tétel. *Ha $f(x)$ függvény az $[a,b]$-n integrálható, és m az $f(x)$ függvény alsó határa, illetve M az $f(x)$ függvény felső határa $[a,b]$-n, akkor*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

□

Tétel. *Ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$-n, akkor $\exists$ olyan $\xi \in [a,b]$, melyre $\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$.* □

2.7 Az integrálfüggvény és tulajdonságai

Definíció. Legyen $f(x)$ az $[a,b]$-n integrálható függvény. Értelmezzük az F függvényt a következő módon: $D_F := [a,b]$ és $\forall x \in [a,b]$-re

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)\ dt.$$

$F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény *integrálfüggvényének* nevezzük. □

Tétel. *Ha $f(x)$ az $[a,b]$-on integrálható, akkor $F(x)$ integrálfüggvénye folytonos.* □

Tétel. *Ha f függvény $[a,b]$-on folytonos, akkor F integrálfüggvénye $]a,b[$-n differenciálható és $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$ esetén.* □

Bizonyítás: A folytonos $f(x)$ függvénynek integrálfüggvénye $[a,b]$-n legyen $F(x)$, azaz

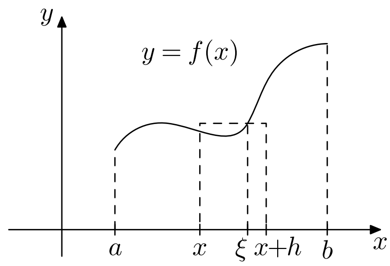
$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \quad \text{ahol } x \in]a,b[.$$

Az $F(x)$ függvény x helyhez tartozó differenciahányadosa:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = (*).$$

A második egyenlőségnél a határozott integrál additivitását használtuk fel. Az f függvény $[a,b]$-n folytonos $\Rightarrow$ az $[x,x+h]$-on is folytonos $\Rightarrow$ az integrálszámítás középértéktétele szerint $\exists \xi \in [x,x+h]$, hogy

$$f(\xi)\cdot h=\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\ dt.$$



Ezért

$$(*)=\frac{1}{h}f(\xi)\cdot h=f(\xi).$$

$F(x)$ differenciálhányadosa:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

Felhasználtuk, hogy $h\to 0\Rightarrow \xi\to x$, továbbá $f(\xi)\to f(x)$, mert az f függvény folytonos. Tehát, ha $x\in]a,b[$, akkor $F'(x)=f(x)$.

■

Megjegyzés. A fenti tétel szerint $[a,b]$-n folytonos f függvény integrálfüggvénye $[a,b]$-n primitív függvénye f-nek, hiszen $F'(x)=f(x)$.

2.8 A differenciál- és integrálszámítás főtétele: a Newton – Leibniz-tétel

Tétel (Newton – Leibniz-tétel). *Ha $f(x)$ és $F(x)$ függvények az $[a,b]$-n folytonosak, és $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye, akkor*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx=F(b)-F(a).$$

□

Bizonyítás: Mivel $f(x)$ $[a,b]$-n folytonos $\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx$ létezik. Mivel $f(x)$ $[a,b]$-n folytonos $\Rightarrow G(x)=$ $=\int_a^x f(t)\ dt$ integrálfüggvényre a $G'(x)=f(x)$. Tehát $f(x)$ függvénynek primitív függvénye $[a,b]$-n az $F(x)$ és $G(x)$ függvény is, így $G(x)=F(x)+C\quad \forall x\in[a,b]$-re. Így

$$\left.\begin{aligned} G(a)&=F(a)+C\\ G(a)&=\int_a^a f(t)\ dt=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow C=-F(a)$$

$$\left.\begin{array}{r} G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \\ G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

■

Jelölések: $\int\limits_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

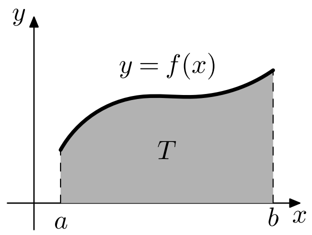
3. fejezet

A határozott integrál alkalmazásai

3.1 Területszámítás

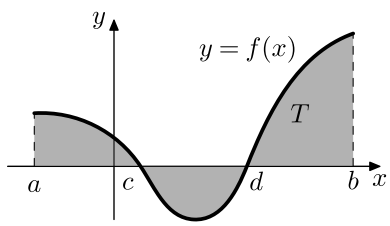
1. Ha $f(x)$ $[a,b]$-n integrálható $(a<b)$, $f(x)\geq 0$, akkor:

$$T=\int\limits_a^b f(x)\ dx.$$



2. Ha $f(x)$ $[a,b]$-n integrálható $(a<b)$, akkor $f(x)$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt síkidom területe

$$T=\int\limits_a^b |f(x)|\ dx.$$

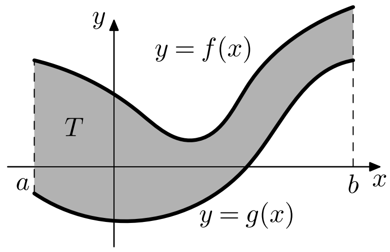


Az ábrán $f(x)$ függvény $[a,b]$-on előjelet vált c-nél és d-nél. Ebben az esetben a görbe és az x tengely közötti síkidom területe:

$$T=\int_a^b |f(x)|\ dx=\int_a^c f(x)\ dx-\int_c^d f(x)\ dx+\int_a^b f(x)\ dx.$$

3. Ha $f(x)$ és $g(x)$ $[a,b]$-n integrálható $(a<b)$ és $\forall x\in[a,b]$ esetén $f(x)\geq g(x)$, akkor a két függvény görbéje és az $x=a$ és $x=b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

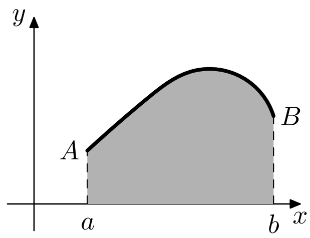
$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$



4. Paraméteres alakban adott görbék esete. Legyen

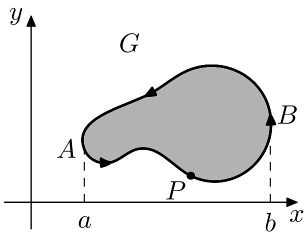
$$x = \varphi(t) \quad \alpha \le t \le \beta \quad \text{ahol } \varphi(t), \psi(t) \text{ folytonosan differenciálhatók.}$$
$$y = \psi(t)$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\ dt$$



Paraméteres alakban adott zárt görbék által meghatározott síkidom területe

$$x = \varphi(t) \quad \alpha \le t \le \beta \quad \text{ahol } \varphi(t), \psi(t) \text{ folytonosan differenciálhatók.}$$
$$y = \psi(t)$$



A görbe befutási iránya legyen *pozitív*, azaz a G görbe kerületén sétálónak bal kézre van a terület. Miközben t befutja az $[\alpha, \beta]$-ot a $P(\varphi(t), \psi(t))$ befutja a G zárt görbét ($\varphi(\alpha) = \varphi(\beta), \psi(\alpha) = \psi(\beta)$), azaz α-hoz és β-hoz mint paraméterekhez tartozó görbepontok azonosak $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \equiv (\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Ekkor

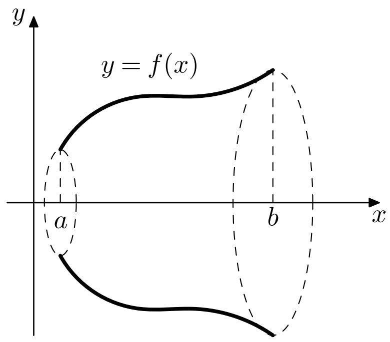
$$T = -\int_\alpha^\beta \psi(t)\dot{\varphi}(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t)\dot{\varphi}(t))\ dt.$$

3.2 Térfogatszámítás

1. Forgástest térfogata

Tétel. *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$-n folytonos. Az $f(x)$ függvény görbéjét az x tengely körül megforgatva, a kapott forgástest térfogata*

$$V_x = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \, dx.$$



□

Forgástest térfogata, ha a körülforgatott görbe paraméteres alakban adott:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \qquad \alpha \le t \le \beta \qquad \text{ahol } \varphi(t), \psi(t) \text{ folytonosan differenciálhatók.}$$

A forgástest térfogata, amennyiben a forgatást az x illetve az y tengelyek körül végeztük:

$$V_x = \pi \int_{t_A}^{t_B} [\psi(t)]^2 \dot{\varphi}(t) \, dt \quad \text{illetve} \quad V_y = \pi \int_{t_A}^{t_B} [\varphi(t)]^2 \dot{\psi}(t) \, dt$$

2. Olyan testek térfogata, amelyeket alkalmasan a térbeli derékszögű koordináta rendszerbe helyezve, $\forall x \in [a, b]$ esetén ismert az x tengelyre merőleges sík által létesített metszet $T(x)$ területe, és $T(x)$ folytonos függvény:

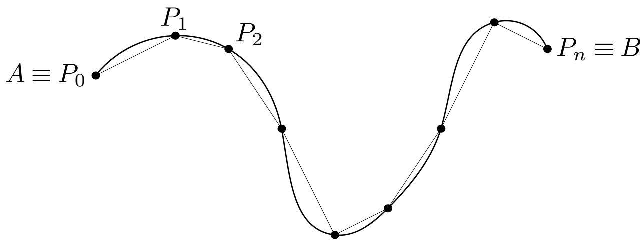
$$V = \int_a^b T(x) \, dx.$$

Megjegyzés. Ez az általánosabb képlet, ennek speciális esete a forgástest.

3.3 Síkgörbe ívhossza

Definíció. Egy síkgörbe ívhosszának azt a határértéket nevezzük, melyhez a beírt törtvonal hossza tart, ha oldalainak száma minden határon túl nő, miközben a legnagyobb oldal hossza is 0-hoz tart.

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1} P_i}.$$



□

Az olyan görbéket, melyeknek van ívhosszuk (a fenti határérték létezik) *rektifikálható* görbének nevezzük.

Tétel. *Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$-n folytonosan differenciálható, akkor az $y=f(x)$ függvény görbének az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó íve rektifikálható, és az* ív hosszúsága*:*

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

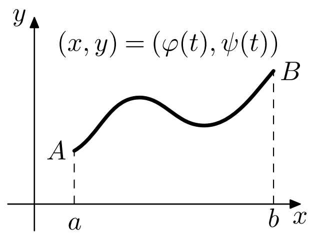
□

Megjegyzés. Az $f(x)$ *függvény* $[a,b]$-n *folytonosan differenciálható*, ha $f'(x)$ létezik és $f'(x)$ $[a,b]$-n folytonos.

Paraméteres alakban adott, hurokmentes görbe ívhossza

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned} \qquad \alpha\le t\le\beta \qquad \text{ahol } \varphi(t),\psi(t) \text{ folytonosan differenciálhatók.}$$

$$L=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{[\dot\varphi(t)]^2+[\dot\psi(t)]^2}\,dt.$$



3.4 Forgástest palástjának felszíne

Tétel. *Ha az $[a,b]$-n $f(x)\ge 0$, és $f'(x)$ az $[a,b]$-n folytonos, akkor az $f(x)$ $[a,b]$-hez tartozó ívének az x tengely körüli forgatásával keletkezett forgásfelület felszíne:*

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

□

Paraméteres alakban adott, görbe x tengely körüli forgatásával keletkezett forgástest palástjának felszíne

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned} \qquad \alpha\le t\le\beta \qquad \text{ahol } \varphi(t),\psi(t) \text{ folytonosan differenciálhatók.}$$

$$F=2\pi\int_{t_A}^{t_B} y(t)\sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2+\left[\dot\psi(t)\right]^2}\,dt.$$

4. fejezet

Numerikus integrálás

Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik, még nem biztos, hogy a pontos értékét ki is tudjuk számítani, ilyenkor alkalmazhatunk közelítő integrálást. Numerikus vagy közelítő integrálást alkalmazhatunk a következő esetekben:

1. Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik, de $f(x)$ függvénynek primitív függvénye nem létezik, azaz $f(x)$ függvény primitív függvénye nem elemi függvény. Például $f(x)$ függvény: $\frac{e^x}{x}$; $\frac{\sin x}{x}$; e^{-x^2}; $\frac{1}{\ln x}$ stb.

2. Ha $\int_a^b f(x)\ dx$ létezik, de $f(x)$-nek nem tudjuk meghatározni primitív függvényét. (Túl bonyolult az integrál vagy nem vagyunk elég okosak.)

3. Ha f függvényt csak diszkrét pontokban ismerjük, azaz f függvény csak táblázatosan adott, avagy f függvénynek csak grafikonja ismert.

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$-n értelmezett integrálható függvény. Osszuk fel az $[a,b]$-ot n egyenlő részre, így

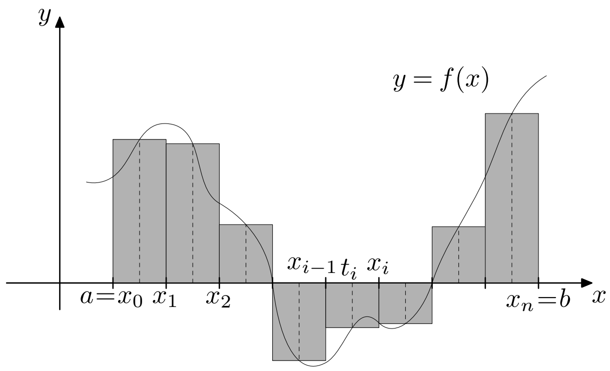
$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h, \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Az $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$, függvényértéket tekintsük ismertnek.

4.1 Téglalap módszer

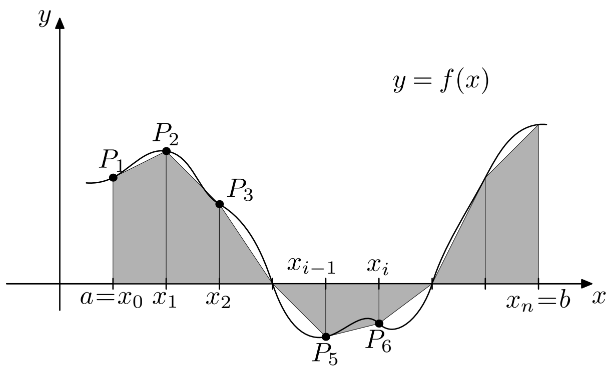
Legyen t_i az i-edik intervallum felezőpontja: $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Az i-edik $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az integrált az $f(t_i)\cdot h$ szorzattal közelítjük, így

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx h\left[f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$



4.2 Trapézmódszer

A P_{i-1} és P_i pontokat összekötő görbeívet a $\overline{P_{i-1}P_i}$ húrral (egyenes szakasszal) helyettesítjük. Ekkor trapézokat kapunk, melyek közös magassága $h=\frac{b-a}{n}$. Az i-edik trapéz „előjeles" területe: $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot h$, ez az előjeles terület $f(x)$ függvény határozott integráljának közelítő értéke az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon.



Tehát a Trapéz formula:

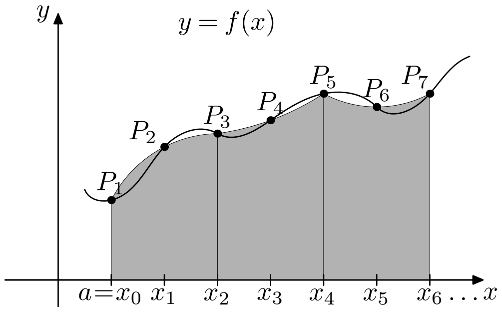
$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h=$$
$$=h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-i})\right]=$$
$$=h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right]=T_n$$

A közelítés hibája Ha $f(x)$ $[a,b]$-n kétszer differenciálható, és $f''(x)$ $[a,b]$-n folytonos $\Rightarrow f''(x)$ az $[a,b]$-n korlátos, azaz $\exists K>0$ szám, hogy $|f''(x)|\le K$ $\forall x\in[a,b]$ esetén, akkor

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - T_n\right| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

4.3 Simpson-módszer

Ha a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben tetszőlegesen felveszünk három pontot $\{P_1, P_2, P_3\}$, akkor egyértelműen megadható olyan görbe, mely átmegy mindhárom ponton, és a görbe egyenlete: $y = ax^2 + bx + c$ (ha $a = 0$, egyenes; ha $a \neq 0$, parabola). A fentiek miatt most páros számú egyenlő részre osztjuk $[a, b]$-t, $2n$ részre osztunk: $h = \frac{b-a}{2n}$. A részintervallumokat párosával összefogjuk és egy-egy dupla intervallumon az $f(x)$ függvény grafikonját, a megfelelő ponthármason átmenő parabolaívekkel vagy szakaszokkal helyettesítjük. Tehát $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f_i(x)\,dx$, ahol $f(x)$ vagy elsőfokú vagy másodfokú függvény.



A részintervallumokon vett integrálok közelítő értékeinek összességéből adódik a *Simpson-formula*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+f(x_{2n})+2\Big(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})\Big)+4\Big(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\Big)\Big]=$$

$$= \frac{h}{3}\Big[y_0+y_{2n}+2\Big(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}\Big)+4\Big(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}\Big)\Big] = S_{2n}$$

A közelítés hibája

Ha $f(x)$ $[a, b]$-n négyszer differenciálható és $f^{(4)}(x)$ folytonos $[a, b]$-n, akkor $\exists K > 0$ szám, hogy $|f^{(4)}(x)| \leq K$ $\forall x \in [a, b]$ esetén, ekkor

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| \leq K\frac{(b-a)^5}{2880n^2}.$$

5. fejezet

Improprius integrálok

A határozott integrál értelmezésénél feltettük azt, hogy mind az integrálás intervalluma, mind az integrandusz korlátos, illetve az integrandusz a vizsgált intervallum minden pontjában értelmezett. Azonban egyes alkalmazásoknál kívánatos, hogy ezeket a feltételeket elhagyjuk, ezért szükség van az integrál fogalmának kiterjesztésére.

5.1 Véges sok pontban nem értelmezett függvény integrálja

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $[a,b]$-ban az $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ pontok kivételével mindenütt értelmezett és korlátos. Legyen a $\varphi(x)$ egy olyan korlátos függvény, amely az $[a,b]$ intervallum minden pontjában értelmezett és az x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ pontok kivételével legyen $\varphi(x) = f(x)$. Ha $\int_a^b \varphi(x)dx$ határozott integrál létezik, akkor az $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon improprius értelemben integrálható és $f(x)$ improprius integrálja:

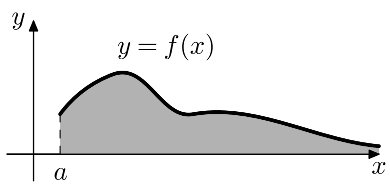
$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \int\limits_a^b \varphi(x)\ dx$$

□

5.2 Integrálás végtelen intervallumon

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $[a,\infty[$-on értelmezett és legyen az $f(x)$ függvény Riemann szerint integrálható minden $[a,\beta[$ intervallumon bármely $a < \beta$ esetén. Ha a $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$ véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy létezik az $f(x)$ *függvény* $[a,\infty[$*-ra vonatkozó improprius integrálja* és

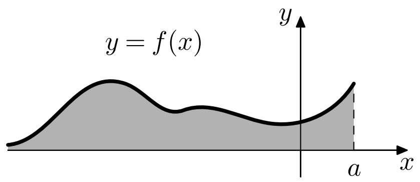
$$\int\limits_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_a^\beta f(x)\ dx.$$



□

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $]-\infty,a]$-on értelmezett és legyen az $f(x)$ függvény Riemann szerint integrálható minden $[\beta,a]$ intervallumon bármely $\beta<a$ esetén. Ha a $\lim_{\beta\to-\infty}\int_\beta^a f(x)dx$ véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *$f(x)$ függvény $]-\infty,a]$-ra vonatkozó improprius integrálja* és

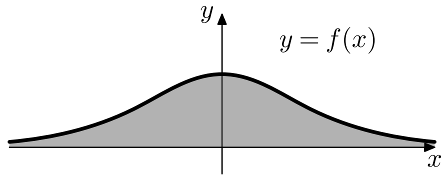
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx := \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{a} f(x)\ dx.$$



□

Definíció. Legyen $f(x)$ függvényértelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Ha tetszőleges, rögzített a érték esetén léteznek a $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ és $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ improprius integrálok, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\ dx.$$

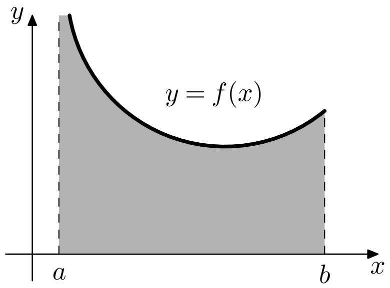


□

5.3 Nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $]a,b]$ intervallumon értelmezett, de az a hely környezetében ne legyen korlátos. Ha az $f(x)$ függvény bármely $[a+\varepsilon,b]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ intervallumon Riemann szerint integrálható és létezik a $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ véges határérték, akkor az *$f(x)$ függvény $[a,b]$-on vett improprius integrálja:*

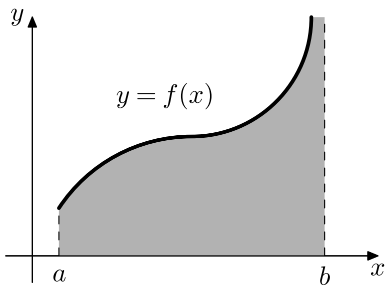
$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx := \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx.$$



□

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $]a,b]$ intervallumon értelmezett, de a b hely környezetében ne legyen korlátos. Ha az $f(x)$ függvény bármely $[a,b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ intervallumon Riemann szerint integrálható és létezik a $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ véges határérték, akkor az *$f(x)$ függvény $[a,b]$-on vett improprius integrálja:*

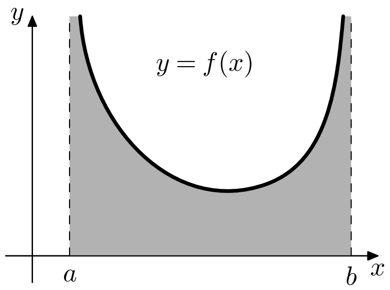
$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx.$$



□

Definíció. Legyen $f(x)$ függvény az $]a,b[$ intervallumon értelmezett, de az a és b pontok környezetében nem korlátos. Ha $f(x)$ $[a+\varepsilon, b-\delta]$ $(0<\varepsilon<b-a,\ 0<\delta<b-a)$ intervallumon Riemann szerint integrálható és létezik a $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 0+}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)dx$ véges határérték, akkor az $f(x)$ *függvény* $[a,b]$*-on vett improprius integrálja:*

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 0+}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\ dx.$$



□

II. rész

Kétváltozós valós függvények

1. fejezet

A kétváltozós függvények differenciálszámítása

1.1 A kétváltozós függvény fogalma, megadása, ábrázolása

Definíció. Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a rendezett valós számpárok ($\mathbb{R}^2$) valamely nem üres részhalmaza, értékkészlete pedig a valós számok valamely nem üres részhalmaza, *kétváltozós valós függvénynek* nevezzük. □

Jelölés: $z = f(x, y)$; $(x, y) \to f(x, y)$; $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$; $R_f \subseteq \mathbb{R}$

Kétváltozós függvényt megadhatunk:

– táblázattal

– képlettel (explicit illetve implicit alakban),

– paraméteresen.

A kétváltozós függvényt térbeli derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk. A gyakorlatban előforduló kétváltozós függvények képe felület.

1.2 A kétváltozós függvények határértéke, folytonossága

Kétváltozós esetben: a $P_0(x_0, y_0)$ pont $\varepsilon > 0$ sugarú környezete $\mathbb{R}^2$ összes olyan $P(x, y)$ pontja, amelyre $\rho(P_1, P_0) < \varepsilon$ reláció teljesül.

Definíció. A $P_n(x_n, y_n)$ *pontsorozat tart a* $P_0(x_0, y_0)$ *ponthoz*, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N_0 természetes szám, hogy ha $n > N_0$, akkor $\rho(P_n, P_0) < \varepsilon$. □

(Másképp: $P_n(x_n, y_n) \to P_0(x_0, y_0)$, ha a P_n pontsorozat majdnem minden eleme beleesik a P_0 pont tetszőleges kicsi ε sugarú környezetébe.)

Adott pontban vett véges határérték

Definíció. Legyen az $f(x,y)$ függvény értelmezett a $P_0(x_0,y_0)$ pont valamely környezetében, kivéve esetleg a P_0 pontot. Az *$f(x,y)$ függvénynek a P_0 pontban a határértéke az A valós szám*, ha minden olyan pontsorozat esetén, ahol $P_n \in D_f,\ P_n \neq P_0$ és $P_n(x_n,y_n) \to P_0(x_0,y_0)$, akkor $f(P_n) \to A$. □

Jelölés:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

Pontbeli folytonosság

Definíció. Az *$f(x,y)$ függvény folytonos a $P_0(x_0,y_0)$ pontban, ha*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) = f(P_0).$$

□

1.3 A kétváltozós függvények P_0 pontbeli parciális differenciálhányadosai

Definíció. Legyen a $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban és környezetében értelmezett. Ha az y rögzítésével $(y = y_0)$ kapott $z = f(x,y_0)$ egyváltozós függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy *a $z = f(x,y)$* kétváltozós *függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban x szerint parciálisan differenciálható* és a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

valós határértéket a $z = f(x,y)$ *függvény $P_0(x_0,y_0)$ ponthoz tartozó x szerinti parciális deriváltjának nevezzük.* □

Jelölése:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=x_0}} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=x_0}} = f'_x(x_0,y_0) = f'_x(P_0)$$

Definíció. Legyen a $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban és környezetében értelmezett. Ha az x rögzítésével $(x = x_0)$ kapott $z = f(x_0,y)$ egyváltozós függvény az y_0 helyen differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy a $z = f(x,y)$ *kétváltozós függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban y szerint parciálisan differenciálható*, és a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

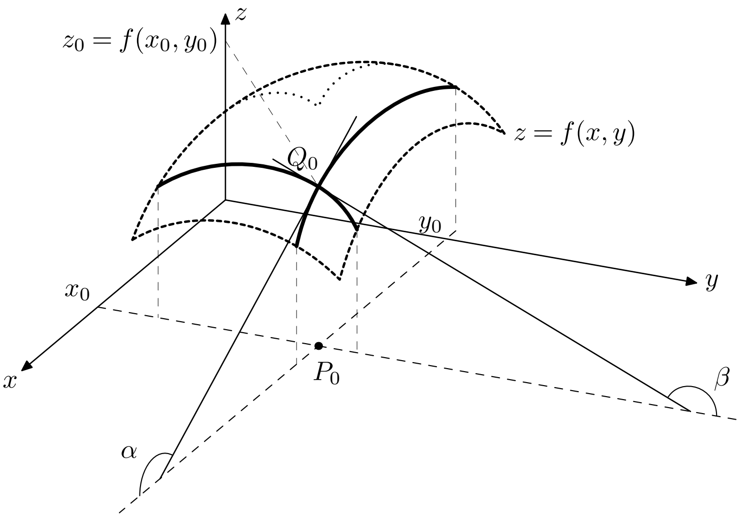
valós határértéket a $z = f(x,y)$ *függvény $P_0(x_0,y_0)$ ponthoz tartozó y szerinti parciális deriváltjának* nevezzük. □

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = f'_y(P_0) = f'_y(x_0,y_0)$$

A P_0 pontbeli parciális deriváltak geometriai jelentése

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{P_0}$ *geometriai jelentése:* A $z=f(x,y)$ felület és az $y=y_0$ sík metszésvonalának $Q_0(x_0,y_0,z_0)$ pontjában húzott érintőjének iránytangense, az x tengelyre vonatkozóan.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{P_0}$ *geometriai jelentése:* A $z=f(x,y)$ felület és az $x=x_0$ sík metszésvonalának $Q_0(x_0,y_0,z_0)$ pontjában húzott érintőjének iránytangense, az y tengelyre vonatkozóan.



1.4 A kétváltozós függvények parciális deriváltjai

Definíció. A kétváltozós *$z=f(x,y)$ függvény x szerinti (illetve y szerinti) elsőrendű parciális deriváltja az a kétváltozós függvény*, amelynek értelmezési tartománya azon $P \in D_f$ pontok halmaza, amely P pontokban a $z=f(x,y)$ függvény x szerint (illetve y szerint) parciálisan differenciálható, és amely kétváltozós függvény $\forall P \in D_{f'_x}$ (illetve $\forall P \in D_{f'_y}$) pontban az $f'_x(P)$ (illetve $f'_y(P)$) értéket veszik fel. □

Jelölések: $f'_x(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ illetve $f'_y(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

1.5 A totálisan differenciálható függvény fogalma

Definíció. Legyen a $z=f(x,y)$ függvény a $P_0(x,y)$ pontban és valamely környezetében értelmezett. A *$z=f(x,y)$ függvényt a P_0 pontban totálisan differenciálhatónak* nevezzük, ha P_0 ezen környezetébe eső $\forall P(x,y)$ pontban érvényes a következő egyenlőség:

$$f(P)-f(P_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+a(P)(x-x_0)+b(P)(y-y_0),$$

ahol A és B konstansok, és $\lim\limits_{P\to P_0} a(P) = \lim\limits_{P\to P_0} b(P) = 0$. □

Tétel. *Ha a $z=f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)$-ban totálisan differenciálható, akkor folytonos is a P_0-ban.* □

Tétel. *Ha az $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x, y_0)$-ban totálisan differenciálható, akkor a $z = f(x,y)$ függvénynek léteznek a $P_0(x_0, y_0)$-ban a parciális deriváltjai, és*

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{P_0} = A \qquad \textit{és} \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{P_0} = B.$$

□

Tétel. *Ha a $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$-ban és környezetében mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, és a parciális deriváltak folytonosak P_0-ban, akkor az $f(x,y)$ függvény P_0-ban totálisan differenciálható.* □

1.6 Iránymenti derivált

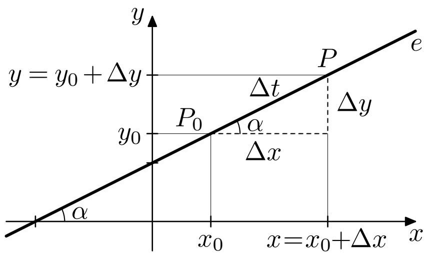
A kétváltozós függvény parciális differenciálhányadosai a függvény x és y irányú változását jellemzik. Egy tetszőlegesen megadott irányban bekövetkező változás jellemzésére vezetjük be az iránymenti differenciálhányados fogalmát, amely a parciális differenciálhányados általánosítása.

Legyen a $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és környezetében értelmezett. Vegyünk fel az xy síkban a P_0 pontra illeszkedő, az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egyenest. Legyen $P(x,y)$ ezen egyenes P_0-tól különböző pontja és a $\overline{P_0P}$ előjeles távolság legyen Δt ($\Delta t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \cos\alpha \Rightarrow \Delta x = \Delta t \cos\alpha$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \sin\alpha \Rightarrow \Delta y = \Delta t \sin\alpha$$

$$x = x_0 + \Delta t \cos\alpha; \; y = y_0 + \Delta t \sin\alpha$$



Definíció. Legyen a $z = f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és környezetében értelmezett, és legyen $P(x,y)$ ezen környezet eleme ($P \not\equiv P_0$), és illeszkedjen P az x tengellyel α szöget bezáró P_0 pontra illeszkedő e egyenesre. Ha a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta t \cos\alpha, y_0 + \Delta t \sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\Delta t}$$

határérték létezik (valós szám), akkor ezt a határértéket a $z = f(x,y)$ *függvény* P_0 *pontbeli* α *irányú iránymenti differenciálhányadásának* nevezzük. □

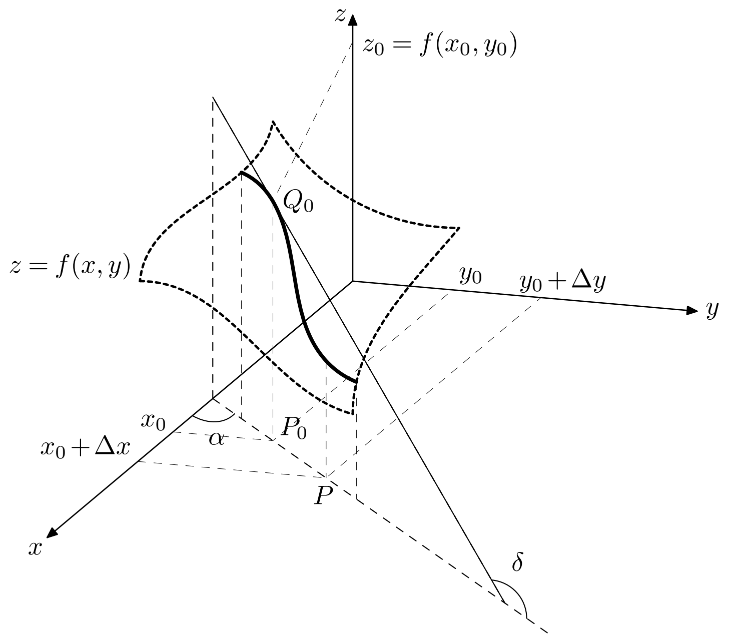
Jelölése:

$$f'_\alpha(x_0, y_0); \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right|_{P_0}.$$

Az iránymenti derivált geometriai jelentése

Az $f'_\alpha(P_0)$ jelenti a $z = f(x,y)$ függvény által meghatározott felület és a P_0P α irányszögű egyenesre illeszkedő z tengellyel párhuzamos sík metszésvonalának $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjában húzott érintőegyenes iránytangensét.

$$f'_\alpha(P_0) = \operatorname{tg}\delta$$



Tétel. *Ha a $z=f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban totálisan differenciálható, akkor P_0-ban minden α irányban is differenciálható, és*

$$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha.$$

□

1.7 A gradiens vektor

Definíció. Ha a $z=f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)\in D_f$ pontban mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, akkor az $f(x,y)$ *függvény* P_0 *ponthoz tartozó gradiens vektora*:

$$\operatorname{grad}\ f(x,y)\Big|_{P_0} = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0)),$$

$$\left|\operatorname{grad}\ f\Big|_{P_0}\right| = \sqrt{[f'_x(P_0)]^2 + [f'_y(P_0)]^2}.$$

□

Tétel. *Ha a $z=f(x,y)$ függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban totálisan differenciálható, akkor a függvény P_0-beli α irányú iránymenti differenciálhányadosa az* $\underline{e}_\alpha = (\cos\alpha)\underline{i} + (\sin\alpha)\underline{j}$ egységvektor *és a* $\operatorname{grad} f\big|_{P_0}$ vektor skaláris szorzatával *egyenlő, azaz* $f'_\alpha(P_0) = \underline{e}_{\alpha\cdot\operatorname{grad} f\big|_{P_0}}$. □

Bizonyítás: A koordinátákkal adott vektorok skaláris szorzatát kiszámítva:

$$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha.$$

■

Tétel. *A* $z = f(x, y)$ *függvény* $f'_\alpha(P_0)$ *iránymenti deriváltja olyan* α *esetén legnagyobb, melyre* $\underline{e}_\alpha$ *párhuzamos a* $\operatorname{grad} f|_{P_0}$ *vetkorral.* □

Tehát a $z = f(x, y)$ P_0 pontbeli iránymenti deriváltja akkor maximális értékű, azaz az $f(x, y)$ függvény értékei akkor változnak a legnagyobb mértékben, ha a szóban forgó irány éppen a $\operatorname{grad} f|_{P_0}$ vektor iránya. A maximális változás mértéke P_0-ban $= \left|\operatorname{grad} f|_{P_0}\right|$.

1.8 A felület érintősíkja

Definíció. Legyen a $z = f(x, y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és annak környezetében folytonos. Ha a felületet a $P_0(x_0, y_0)$ pontra illeszkedő z tengellyel párhuzamos síkokkal metszve, minden kimetszett görbe P_0-beli érintője egy síkban fekszik, akkor ezt a síkot a $z = f(x, y)$ *felület* P_0 *pontbeli érintősíkjának* nevezzük. □

Írjuk fel a $z = f(x, y)$ felület $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét! Legyen a $z = f(x, y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban totálisan differenciálható. Ekkor P_0 pontban a függvény bármely irányban differenciálható, tehát $f'_x(P_0)$ és $f'_x(P_0)$ létezik. A felület $Q_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjában húzott xz síkkal párhuzamos, érintőegyenes iránytangense $f'_x(P_0)$, így ezen érintő irányvektora $\underline{v}_x = (1, 0, f'_x(P_0))$. A Q_0 pontban húzott yz síkkal párhuzamos érintő egyenes iránytangense $f'_y(P_0)$, tehát ezen érintő irányvektora: $\underline{v}_y = (0, 1, f'_y(P_0))$. Az érintősík normálvektora: $\underline{n} = \underline{v}_x \times \underline{v}_y = (-f'_x(P_0), -f'_y(P_0), 1)$. *Az érintősík egyenlete:*

$$-f'_x(P_0)(x - x_0) - f'_y(P_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0.$$

Rendezve:

$$z - z_0 = f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0).$$

1.9 A teljes differenciál

Definíció. Legyen a $z = f(x, y)$ függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban totálisan differenciálható. Ekkor a $dz = df = f'_x(P_0)\ dx + f'_y(P_0)\ dy$ kifejezést az $f(x, y)$ *függvény* P_0 *pontbeli teljes differenciáljának* nevezzük. □

Megjegyzés. Mivel $dx = \Delta x = x - x_0$ és $dy = \Delta y = y - y_0$, ezért

$$dz = f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - x_0).$$

A teljes differenciál geometriai jelentése

A teljes differenciál a felület P_0-beli *érintősíkjának emelkedésével*, azaz $(z - z_0)$-lal egyenlő:

$$dz = z - z_0 = z - f(P_0)$$

Tehát, ha a P pont közel van P_0-hoz, azaz dx, dy kicsi, akkor a dz differenciál jól közelíti a függvény megváltozását. A P_0 pont közelében a felület emelkedése az érintősík emelkedésével helyettesíthető, azaz:

$$f(P) - f(P_0) \approx\ dz = f'_x(P_0)\ dx + f'_y(P_0)\ dy.$$

1.10 Kétváltozós függvények lokális szélsőértéke

Definíció. Az $f(x, y)$ függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban szigorú lokális minimuma (maximuma) van, ha van olyan $\delta > 0$ szigorú környezete a P_0-nak, amely környezetbe eső $\forall P \neq P_0$ esetén $f(P_0) < f(P)$ $(f(P) < f(P_0))$. □

Tétel (Szélsőérték létezésének szükséges feltétele)**.** *Ha az $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban helyi szélsőértéke van, és $f(x, y)$ totálisan differenciálható P_0-ban, akkor*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0.$$

□

Megjegyzés.

1. Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának azon $P_0(x_0, y)$ pontjait, melyekre

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$$

   teljesül, az $f(x, y)$ *függvény stacionárius pontjainak* nevezzük.

2. Ha megoldjuk a

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

   egyenletrendszert az x, y változókra, akkor a kapott $P_0(x_0, y_0)$ stacionárius pontok között kell keresnünk a differenciálható $f(x, y)$ függvény szélsőértékhelyeit.

Tétel (A szélsőérték létezésének elegendő feltétele)**.** *Tekintsük az $f : D_f (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan parciálisan differenciálható kétváltozós függvényt, és legyen $P_0(x_0, y_0) \in D_f$ pont az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontja, azaz*

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{P_0} = 0,$$

és legyen

$$H = f''_{xx}(P_0) f''_{yy}(P_0) - [f''_{xy}(P_0)]^2.$$

a) $H > 0$ esetén $f(x, y)$ függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van P_0-ban. A szélsőérték $f''_{xx}(P_0) > 0$ esetén minimum lesz, míg $f''_{xx}(P_0) < 0$ esetén maximum.

b) Ha $H < 0$, akkor f-nek P_0-ban nincs szélsőértéke.

c) Ha $H = 0$, akkor f szélsőértékproblémája a P_0 pontban nem dönthető el a másodrendű parciális differenciálhányadosai segítségével.

□

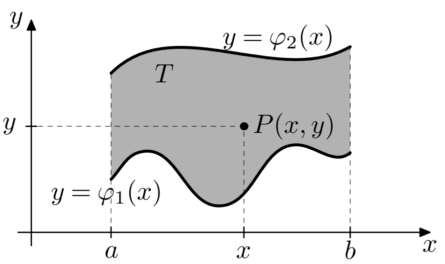
2. fejezet

Többváltozós valós függvények integrálszámítása

2.1 Alapfogalmak

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$, $T \neq \emptyset$. *T az x tengelyre nézve normál tartomány.*

$D_{\varphi_1} = D_{\varphi_2} = [a, b]$
$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ folytonosak és
$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$.



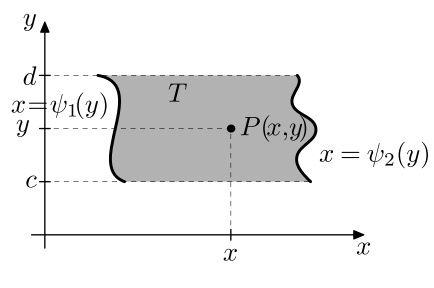
$\mathbb{R}^2$ azon $P(x, y)$ pontjai, amelyeknek koordinátáira fennáll az

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

egyenlőtlenségrendszer, *x tengelyre nézve normál tartományt* alkotnak. A tartomány lehet több oldalról nyílt, ha az egyenlőtlenségrendszerben az egyenlőséget egy vagy több esetben kizárjuk.

T az y tengelyre nézve normál tartomány.

$D_{\psi_1} = D_{\psi_2} = [c, d]$,
$\psi_1(y), \psi_2(y)$ folytonosak és
$\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.



$D_{\psi_1} = D_{\psi_2} = [c, d]$, $\psi_1(x), \psi_2(y)$ folytonosak és $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$. $\mathbb{R}^2$ azon $P(x, y)$ pontjai, amelyeknek koordinátáira fennáll a

$$\begin{aligned} \psi_1(y) \leq & x \leq \psi_2(y) \\ c \leq & y \leq d \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszer, *y tengelyre nézve normál tartományt* alkotnak. A tartomány lehet több oldalról nyílt. Ha T *normál tartomány, akkor van területe.* Ha T normál tartomány, akkor korlátos.

2.2 Kétváltozós függvény határozott vagy tartományi integráljai

Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R}^2, T \neq \emptyset$ és T véges számú normáltartományra bontható. Legyen a $z = f(x, y)$ függvény a T tartományon értelmezett korlátos függvény.

A $z = f(x, y)$ *függvény a* T *tartományra vonatkozó (vagy Riemann-szerinti) integrálja* a következő lépésekben értelmezhető:

1. Felosztjuk a T tartományt n db $T_1, T_2, \ldots, T_n$ részre $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n = T$ és $T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_n = \emptyset$ (nincs közös belső pont). A résztartományok területe legyen $\Delta T_1, \Delta T_2, \ldots, \Delta T_n$.

2. Mindegyik résztartomány belsejében vagy határán választunk egy $P_i(\xi_i, \eta_i)$ pontot $(i = 1, \ldots, n)$.

3. Képezzük a következő összeget:

$$S_n = f(P_1)\Delta T_1 + f(P_2)\Delta T_2 + \cdots + f(P_n)\Delta T_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta T_i$$

4. Képezzük ennek az összegnek a határértékét, midőn $n \to \infty$ és $\max \Delta T_i \to 0$.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta T_i \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta T_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta T_i$$

Ha ez a határérték létezik, függetlenül T felosztásától és a P_i pontok választásától, akkor azt mondjuk, hogy a $z = f(x, y)$ függvény a T tartományon Riemann-szerint integrálható és ez a véges határérték az *f(x,y) függvény T tartományon vett Riemann-integrálja*:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta T_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta T_i = \iint\limits_{T} f(x, y)\ dT. \quad \text{(Formális jelölés, számolásra nem alkalmas.)}$$

□

Tétel. *Legyen* T *véges számú normáltartományra bontható* $(T \neq \emptyset, T \subset \mathbb{R}^2)$. *Ha a* $z = f(x, y)$ függvény a T tartományon értelmezett folytonos *függvény,* akkor $\iint\limits_{T} f(x, y)\ dT$ létezik. □

Megjegyzés. Kétváltozós függvény tartományi integrálja (Riemann-integrálja) hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint az egyváltozós függvényre.

1. $\iint\limits_T cf\ dT = c\iint\limits_T f\ dT$

2. $\iint\limits_T (f+g)\ dT = \iint\limits_T f\ dT + \iint\limits_T g\ dT$

3. $\iint\limits_{T_1\cup T_2} f\ dT = \iint\limits_{T_1} f\ dT + \iint\limits_{T_2} f\ dT$

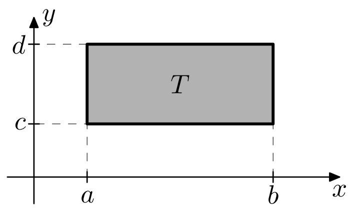
A Riemann-integrál (tartományi integrál) geometriai jelentése.

Legyen a $z = f(x,y)$ függvény a T tartományon folytonos, és $\forall P \in T$ esetén $f(P) \geq 0$. Ekkor $\iint\limits_T f(x,y)\ dT$ azon test térfogatának számértéke, melyet a T tartomány, a kerületére illeszkedő z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerfelület és a $z = f(x,y)$ által meghatározott felület zár közre.

2.3 A tartományra vonatkozó integrál kiszámítása

Kétváltozós függvény téglalapon vett integrálja.

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$



Tétel. *Ha a $z = f(x,y)$ függvény a T téglalapon folytonos, akkor*

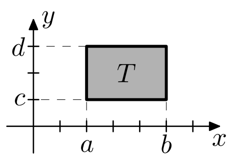
$$\iint\limits_T f(x,y)\ dT = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

□

Megjegyzés. A tétel szerint $f(x,y)$ függvény T-n vett integrációját az egyes változók szerinti egyváltozós integrálok egymás utáni kiszámításával, azaz úgynevezett *szukcesszív integrálással* kiszámíthatjuk.

PÉLDA: Számítsuk ki a $z = x^2 y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 3\}$ téglalapon.

MEGOLDÁS:



$$\iint_T x^2y\ dT = \int_1^3 \left(\int_2^5 x^2y\ dx \right)\ dy = \int_1^3 \left(\left[\frac{x^3}{3}y \right]_2^5 \right)\ dy = \int_1^3 \left(\frac{5^3}{3}y - \frac{2^3}{3}y \right)\ dy =$$

$$= \frac{117}{3} \int_1^3 y\ dy = 39 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 39 \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 156 \quad \text{Térfogatot jelent.}$$

Fordított sorrendben is integrálhatunk.

$$\iint_T x^2y\ dT = \int_2^5 \left(\int_1^3 x^2y\ dy \right)\ dx = \int_2^5 \left(\left[x^2\frac{y^2}{2} \right]_1^3 \right)\ dx = \int_2^5 \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right)\ dx =$$

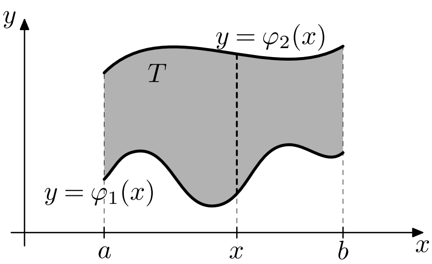
$$= 4 \int_2^5 x^2\ dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 = 156$$

□

Kétváltozós függvény normál tartományon vett integrálja

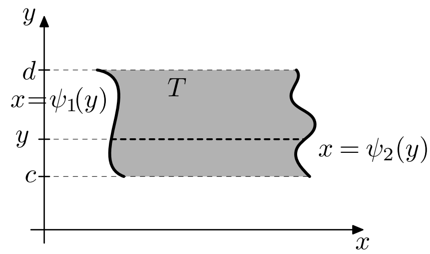
Az x tengelyre nézve normál tartomány

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ folytonosak $[a,b]$-n és $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.



Az y tengelyre nézve normál tartomány

$\psi_1(y), \psi_2(y)$ a $[c,d]$-n folytonosak és $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.



Tétel. *Legyen a $z = f(x,y)$ függvény folytonos T-n, mely T az x tengelyre nézve normál tartomány. Ekkor*

$$\iint_T f(x,y)\ dT = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

□

Tétel. *Legyen a $z = f(x, y)$ függvény folytonos T-n, mely T az y tengelyre nézve normál tartomány. Ekkor*

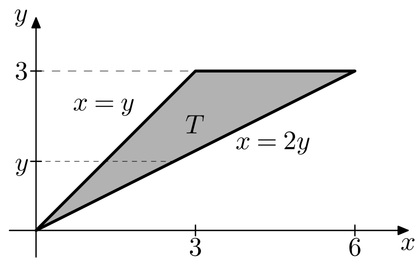
$$\iint\limits_T f(x,y)\ dT = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

□

PÉLDA: Legyen $z = f(x, y) = 3x^2 + y^2$. $\iint\limits_T f(x,y)\ dT = ?$

MEGOLDÁS:

a) A T most y *tengelyre* nézve normál tartomány,

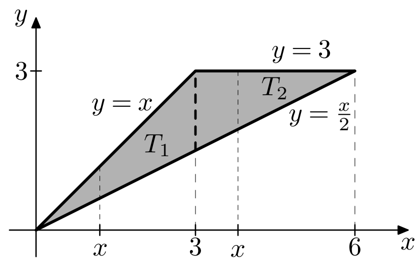


melyre $\psi_1(y) = y, \psi_2(y) = 2y$, ahol $0 \leq y \leq 3$.

$$\iint\limits_T (3x^2+y^2)\ dT = \int_0^3 \left(\int_y^{2y} (3x^2+y^2)\ dx \right)\ dy = \int_0^3 \left[x^3+y^2x\right]_y^{2y}\ dy$$

$$= \int_0^3 (8y^3+2y^3-y^3-y^3)\ dx = \int_0^3 8y^3\ dy = \left[2y^4\right]_0^3 = 2\cdot 81 = 162$$

b) Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, majd számítsuk ki újból az integrált. Ekkor az x tengelyre nézve normál tartománnyal (tartományokkal) dolgozunk. Most T-t az $x = 3$ egyenessel T_1-re és T_2-re bontjuk.



T_1 és T_2 x tengelyre nézve normál tartományok.

$$\iint\limits_T (3x^2+y^2)\ dT = \iint\limits_{T_1} (3x^2+y^2)\ dT + \iint\limits_{T_2} (3x^2+y^2)\ dT = \int_0^3 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{x} (3x^2+y^2)\ dy \right)\ dx +$$
$$+ \int_3^6 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{3} (3x^2+y^2)\ dy \right)\ dx = \int_0^3 \left[3x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}x}^{x}\ dx + \int_3^6 \left[3x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}x}^{3}\ dx =$$
$$= \int_1^3 \left(3x^3 + \frac{x^3}{3} - 3x^2\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{24} \right)\ dx + \int_3^6 \left(9x^2 + 9 - 3x^2\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{24} \right)\ dx =$$
$$= \int_0^3 \frac{43}{24}x^3\ dx + \int_3^6 \left(9x^2 + 9 - \frac{37}{24}x^3 \right)\ dx = \frac{43}{24} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 + \left[3x^3 + 9x - \frac{37}{24} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_3^6 =$$
$$= \frac{43}{24} \cdot \frac{81}{4} + \left(3 \cdot 6^3 + 54 - \frac{37}{24} \cdot \frac{6^4}{4} - 3^4 - 27 + \frac{37}{24} \cdot \frac{3^4}{4} \right) = 162$$

$\square$

III. rész

Differenciálegyenletek

Sok fizikai, geometriai, műszaki probléma megoldásához bizonyos változó mennyiségek közötti függvénykapcsolatot kell meghatároznunk. Gyakran a probléma ismert feltételei lehetővé teszik, hogy az ismeretlen függvény, annak változója és az ismeretlen függvény első, második, stb. differenciálhányadosa között bizonyos összefüggést állapítsunk meg (például egyenletet írjunk fel).

PÉLDA: Nehézségi erő hatására szabadon eső testekre a levegő ellenállása olyan fékező erőt fejt ki, mely kis sebesség esetén egyenesen arányos a mozgó test sebességével. Keressük meg azt az $s(t)$ függvényt, amely a test által megtett utat adja meg az idő függvényében.

MEGOLDÁS: Newton II. törvénye: $F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$ (*), ahol F a testre ható erők eredője.
Most $F = \underbrace{m \cdot g}_{\text{nehézségi erő}} - \underbrace{k \cdot v(t)}_{\text{fékező erő}} = m \cdot g - k\frac{ds}{dt}$.

$$(*)\ \underbrace{m \cdot g - k\frac{ds}{dt}}_{F \text{ eredő erő}} = m \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}}_{a}$$

Rendezve:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{ds}{dt} = g \qquad \Rightarrow \qquad s(t) = ?$$

Ellenőrzihető, hogy

$$s(t) = s_1 \cdot e^{\frac{k}{-m}t} + \frac{m}{k}gt + s_2$$

függvény kielégíti a fenti egyenletet. $\square$

1. fejezet

Alapfogalmak

Definíció. Az olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen valamely függvény (vagy függvények), és amely egyenlet az ismeretlen függvény egy vagy több differenciálhányadosát tartalmazza, *differenciálegyenletnek* nevezzük. □

Definíció. Ha a differenciálegyenlet csak egyváltozós függvény deriváltját vagy deriváltjait tartalmazza (azaz az ismeretlen függvény egyváltozós függvény), akkor *közönséges differenciálegyenletről* beszélünk. Ha a differenciálegyenlet parciális deriváltakat is tartalmaz, mert az ismeretlen függvény többváltozós függvény, akkor *parciális differenciálegyenletről* beszélünk. □

Megjegyzés. Mi csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk és nem foglalkozunk a megoldások egzisztenciájának és unicitásának vizsgálatával.

1.1 A differenciálegyenletek osztályozása

1. *Rendűség szerint:* A differenciálegyenlet rendje, az egyenletben szereplő legmagasabbrendű derivált rendjével egyenlő.

2. *Linearitás szerint:* A **differenciálegyenlet lineáris**, ha az ismeretlen függvény és deriváltjai az egyenletben csak első hatványon fordulnak elő, és az egyenletben ezek szorzatai nem szerepelnek, ellenkező esetben a **differenciálegyenlet nemlineáris**.

3. *Homogenitás szerint:* **Homogén a differenciálegyenlet**, ha az egyenletben szereplő minden tag tartalmaz ismeretlent (azaz az ismeretlen függvényt vagy deriváltját), ellenkező esetben a **differenciálegyenlet inhomogén**.

1.2 A differenciálegyenlet megoldásai, megoldástípusok

Megjegyzés. A továbbiakban a differenciálegyenletek megoldását az egyváltozós függvények körében keressük.

A *differenciálegyenlet megoldásának* nevezünk minden olyan függvényt, amely deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet.

Definíció. Az n-edrendű közönséges differnciálegyenlet *általános megoldása* az a függvényrendszer, amely pontosan n számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet. □

Definíció. Az n-edrendű differnciálegyenlet *partikuláris megoldása* az a függvény vagy függvényrendszer, amely legfeljebb $n-1$ számú, egymástól független állandót tartalmaz, és deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet. □

PÉLDA: $y'' = e^x$ másodrendű differenciálegyenlet.

a)

$$y' = \int e^x \, dx = e^x + c_1$$
$$y = \int (e^x + c_1) \, dx = e^x + c_1 x + c_2$$
$$y = e^x + c_1 x + c_2$$

b) Adjuk meg a fenti differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, mely eleget tesz az $y(0) = 3$ és $y'(0) = 2$ kezdeti feltételnek.

$$y(0) = 3 \;\Rightarrow\; 3 = 1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = 2$$
$$y(0) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = 1 + c_1 \;\Rightarrow\; c_2 = 1$$

A keresett partikuláris megoldás: $y = e^x + x + 2$

c) Adjunk meg a fenti differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amely eleget tesz az $y(0) = 3$ és $y'(-1) = e$ peremfeltételeknek.

$$y(0) = 3 \;\Rightarrow\; 3 = 1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = 2$$
$$y(-1) = \frac{1}{e} \;\Rightarrow\; e^{-1} = e^{-1} + c_1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = 1$$

A keresett partikuláris megoldás: $y = e^x + 2x + 2$

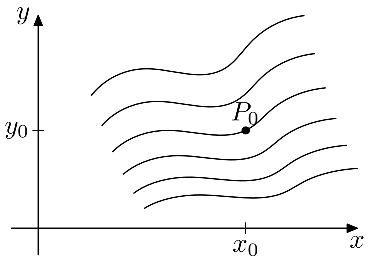
Szinguláris megoldás: (Pontos definíciót nem adunk.) A differenciálegyenlet olyan megoldása (vagy megoldásai), mely nem kapható az általános megoldásból az állandók speciális megválasztásával. (Nincs minden differenciálegyenletnek.)

Teljes megoldás: Az általános és a szinguláris megoldások összessége adja.

Megjegyzés.

1. Általában az általános megoldást keressük, vagy valamely feltételrendszert kielégítő partikuláris megoldását a differenciálegyenletnek.
2. Mivel a differenciálegyenleteket általában integrálással oldjuk meg, a megoldást szokás a differenciálegyenlet integráljának nevezni.

3. Az n-edrendű differenciálegyenlet általános megoldása az xy síkban egy n paraméteres görbesereget határoz meg. Speciálisan: az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása az xy síkban egy egyparaméteres, görbesereget határoz meg. Ezen görbeseregből választunk ki egy görbét, az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltétellel, hiszen ez geometriailag a $P_0(x_0, y_0)$ pont megadását jelenti.



$P_0(x_0, y_0)$ ponton egyetlen görbe halad keresztül. Az ilyen görbét, amely a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának a grafikonja, *integrálgörbének* nevezzük.

4. A szinguláris megoldás geometriai jelentése: az általános megoldás ábrázolásakor kapott *görbesereg burkolója.*

2. fejezet

Elsőrendű differenciálegyenletek

2.1 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha a differenciálegyenlet felírható

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad \text{vagy} \qquad P(x)\ d(x) + Q(y)\ dy = 0$$

alakban, akkor *szétválasztható változójú* differenciálegyenletnek nevezzük, ahol f, g illetve P, Q adott folytonos egyváltozós függvények.

Megoldása:

$$\begin{aligned}
y' &= f(x) \cdot g(y), \text{ ha } \quad g(y) \neq 0 \\
\frac{1}{g(y)} y' &= f(x) \\
\int \frac{1}{g(y)} \underbrace{y' dx}_{dy} &= \int f(x)\ dx \\
\int \frac{1}{g(y)}\ dy &= \int f(x)\ dx + c
\end{aligned}$$

Utóbbi egyenlőség x és y között implicit függvényi kapcsolatot létesít, s a differenciálegyenlet általános megoldását adja implicit alakban.

PÉLDA: Adjuk meg az $yy' = \frac{x(y^2+1)}{x^2+1}$ differenciálegyenlet $y(-1) = 3$ feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

MEGOLDÁS:

a) Először az általános megoldást határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \frac{y}{y^2+1}y' &= \frac{x}{x^2+1} \\ \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ \ln|y^2+1| &= \ln|x^2+1| + \ln|c|, \qquad c \neq 0 \\ y^2+1 &= c(x^2+1), \qquad c \neq 0 \end{aligned}$$

Általános megoldás, implicit alakban.

b) A partikuláris meghatározása.

$$y(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^2+1 = c(1^2+1)$$
$$10 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$y^2+1 = 5(x^2+1)$$

$$y^2 = 5x^2+4$$

Ez az adott feltétel kielégítő partikuláris megoldás, implicit alakban.

□

2.2 Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

2.2.1 Ha a differenciálegyenlet

$$y' = f(ax+by+c)$$

alakra hozható, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0$, akkor az egyenlet az

$$u(x) = ax+by+c = \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a+b\cdot y'$$

helyettesítéssel (transzformációval) $u(x)$ függvényre nézve már szétválasztható változójú egyenlet.

PÉLDA: Oldjuk meg: $y' = \sqrt{2x+3y+4}$.

MEGOLDÁS: Helyettesítés

$$u(x) = 2x+3y+4$$

$$u'(x) = 2+3y' \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'-2}{3}$$

$$\frac{u-2}{3} = \sqrt{u}$$

$$u' = 3\sqrt{u}+2 \; > \; 0 \qquad \text{A jobb oldal közvetlenül } u \text{ függvénye.}$$

$$\frac{u'}{3\sqrt{u}+2} = 1 \qquad \text{Szétválasztva a változókat.}$$

$$\int \frac{u'}{3\sqrt{u}+2}\; dx = \int 1\; dx$$

$$\int \frac{1}{3\sqrt{u}+2}\; du = \int 1\; dx$$

A bal oldal:

$$\int \frac{1}{3\sqrt{u}+2}\; du = \left| \begin{array}{c} 3\sqrt{u}+2 = t \\ u = \dfrac{(t-2)^2}{9} \\ du = \dfrac{2}{9}(t-2)dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2}{9}(t-2)\; dt = \frac{2}{9}\int \left(1-\frac{2}{t}\right)\; dt =$$

$$= \frac{2}{9}(t-2\ln|t|)+c_1 = \frac{2}{9}(3\sqrt{u}+2-2\ln|3\sqrt{u}+2|)+c_1$$

Az egyenlet:

$$\frac{2}{9}\left(3\sqrt{u}+2-2\ln|3\sqrt{u}+2|\right) = x+c$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2x+3y+4}-\frac{4}{9}\ln|3\sqrt{2x+3y+4}+2| = x+c \qquad \text{az általános megoldás implicit alakban.}$$

□

2.2.2 Ha a differenciálegyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakra hozható, akkor *homogén fokszámú vagy változóiban homogén differenciálegyenletnek* nevezzük és az

$$\frac{y}{x} = t(x) \qquad \Rightarrow \qquad y = t(x)\cdot x \qquad \Rightarrow \qquad y' = t'\cdot x+t$$

helyettesítéssel $t(x)$ függvényre nézve már szétválasztható változójú egyenlet.

PÉLDA: Oldjuk meg: $xy' = y+\sqrt{x^2+y^2}; \quad y(1) = 0$

MEGOLDÁS: $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$ Változóiban homogén, $x \neq 0$. Helyettesítés:

$$t(x) = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = t\cdot x$$

$$y' = t'x+t$$

Az egyenlet:

$$
\begin{aligned}
t'x+t &= t+\sqrt{1+t^2} \\
\frac{t'}{\sqrt{1+t^2}} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt &= \int \frac{1}{x}\,dx \\
\operatorname{arsh} t &= \ln|x|+c \\
t &= \operatorname{sh}(\ln|x|+c) \\
y &= x\operatorname{sh}(\ln|x|+c) \qquad \text{A differenciálegyenlet általános megoldása.}
\end{aligned}
$$

A partikuláris megoldás meghatározása:

$$y(1)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=1\cdot\operatorname{sh}(\ln 1+c)=\operatorname{sh} c \quad \Rightarrow \quad c=0$$

$$y_p = x\operatorname{sh}\ln|x| = x\cdot\frac{e^{\ln|x|}-e^{-\ln|x|}}{2} = \frac{1}{2}x(|x|-\frac{1}{|x|})$$

□

2.3 Lineáris differenciálegyenletek

Az

$$y'+g(x)y=h(x)$$

alakra hozható egyenletet *elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük, ahol $g(x)$ és $h(x)$ valamely intervallumon folytonos, adott függvények.
Ha $h(x)\equiv 0$ $\quad y'+g(x)y=0$ homogén, lineáris differenciálegyenlet.
Ha $h(x)\not\equiv 0$ $\quad y'+g(x)y=h(x)$ inhomogén, lineáris differenciálegyenlet.

2.3.1 Elsőrendű, homogén differenciálegyenlet

$$y'+g(x)y=0$$

Ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet, tehát

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= -g(x) \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= -\int g(x)\,dx+\ln|c| \qquad c\neq 0 \\
\ln|y| &= -\int g(x)\,dx+\ln|c| = \ln\left|c\cdot e^{-\int g(x)dx}\right|
\end{aligned}
$$

Általános megoldás: $y=c\cdot e^{-\int g(x)dx}$, $\quad c\neq 0$ és $\quad y=0$ szinguláris megoldás.

2.3.2 Elsőrendő, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet

$$y' + g(x)y = h(x) \tag{2.1}$$

Tétel. *Az $y'+g(x)y=h(x)$, $(h(x)\not\equiv 0)$ inhomogén differenciálegyenlet y-nal jelölt általános megoldása az inhomogén egyenlethez tartozó*

$$Y' + g(x)Y = 0 \tag{2.2}$$

homogén differenciálegyenlet Y-nal jelölt általános megoldásának, és az inhomogén egyenlet y_p-vel jelölt, egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő, azaz

$$y = Y + y_p$$

□

BIZONYÍTÁS: Elegendő bizonyítanunk, hogy $Y = y - y_p$ a homogén egyenletnek általános megoldása, tehát kielégíti az $Y' + g(x)Y = 0$ egyenletet és pontosan egy szabadon választható paramétert tartalmaz.
$Y = y - y_p$-t helyettesítsük a homogén egyenletbe ((2.2)-be).
$Y' = y' - y_p'$

$$y' - y_p' + g(x)(y - y_p) = \underbrace{y' + g(x)y}_{h(x)} - (\underbrace{y_p' + g(x)y_p}_{h(x)}) = h(x) - h(x) = 0,$$

mert y az inhomogén egyenlet általános megoldása, és y_p az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása. Tehát $Y = y - y_p$ az inhomogén egyenlet egyetlen paramétert tartalmazó megoldása, azaz általános megoldása. ■

Az inhomogén differenciálegyenlet

$$y' + g(x)y = h(x)$$

általános megoldása: $y = Y + y_p$, ahol az Y az $Y' + g(x)Y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása, tehát

$$Y = c \cdot e^{-\int g(x)dx}$$

Az y_p az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása. *Az y_p-t az úgynevezett állandó variálás módszerével* határozzuk meg. Az y_p-t a következő szorzat alakjában kereshetjük:

$$y_p = k(x) \cdot e^{-\int g(x)dx},$$

ahol $k(x)$ olyan függvény, melyre a fenti szorzat az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.

$$y_p = k(x)e^{-\int g(x)dx}$$
$$y_p' = k'(x)e^{-\int g(x)dx} - k(x) \cdot g(x)e^{-\int g(x)dx}$$

Az y_p-t és y_p'-t helyettesítsük az inhomogén egyenletbe, (2.1)-be.

$$\begin{aligned}
k'(x)e^{-\int g(x)dx} - k(x)g(x)e^{-\int g(x)dx} + k(x)g(x)e^{-\int g(x)dx} &= h(x)\\
k'(x)e^{-\int g(x)dx} &= h(x)\\
k'(x) &= h(x)\cdot e^{\int g(x)dx}\\
k(x) &= \int \left[h(x)\cdot e^{\int g(x)dx}\right]\, dx
\end{aligned}$$

Így

$$y_p = \left[\int h(x)e^{\int g(x)dx}\, dx\right] e^{-\int g(x)dx}$$

integrációs állandót nem tartalmaz. Tehát a (2.1) inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_p = c\cdot e^{-\int g(x)dx} + \left[\int h(x)e^{\int g(x)dx}\, dx\right] e^{-\int g(x)dx} = \left[c + \int h(x)e^{\int g(x)dx}\, dx\right] e^{-\int g(x)dx}$$

Megjegyzés. Más módszerek is léteznek az inhomogén differenciálegyenlet megoldására.

PÉLDA: Oldjuk meg: $y' + \frac{3y}{x} = x$; $\qquad y(-1) = \frac{4}{5}$

MEGOLDÁS: Elsőrendű, lineáris, inhomogén. Az inhomogenitást okozó tag az egyenletben: x. Az egyenlet általános megoldása: $y = Y + y_p$, ahol Y a homogén egyenlet általános, y_p az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása. Az egyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$\begin{aligned}
Y' + \frac{3}{x}Y &= 0 \qquad \text{Ez szétválasztható változójú.}\\
\frac{Y'}{Y} &= -\frac{3}{x}\\
\int \frac{1}{y}\, dY &= -3\int \frac{1}{x}\, dx\\
\ln|Y| &= -3\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x^3}\right|\\
Y &= \frac{c}{x^3} = c\cdot\frac{1}{x^3}
\end{aligned}$$

Az y_p-t a következő alakban keressük: $y_p = k(x)\cdot\frac{1}{x^3}$.

$$\left.\begin{aligned}
y_p &= k(x)\frac{1}{x^3}\\
y'p &= k'(x)\frac{1}{x^3} - k(x)\frac{3}{x^4}
\end{aligned}\right\}\ \text{Az inhomogén egyenletbe helyettesítjük.}$$

$$\begin{aligned}
k'(x)\frac{1}{x^3} - k(x)\frac{3}{x^4} + \frac{3}{x}\cdot k(x)\frac{1}{x^3} &= x\\
k'(x) &= x^4\\
k(x) &= \int x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\\
y_p &= \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{5} \qquad \text{Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.}
\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_p = \frac{c}{x^3} + \frac{x^2}{5}.$$

Az adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatárotzása:

$$y(-1) = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{5} = -c + \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{3}{5}.$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5x^3}$$

$\square$

3. fejezet

Másodrendű differenciálegyenletek

Általános alakja:

$$F(y'', y', y, x) = 0 \qquad \text{implicit alak,}$$

$$y'' = f(y', y, x) = 0 \qquad \text{explicit alak.}$$

Megjegyzés. Csak néhány speciális esettel foglalkozunk.

3.1 Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Akkor beszélünk hiányos másodrendű differenciálegyenletről, ha x, y, y' közül legalább egyik hiányzik az egyenletből.

3.1.1 Tiszta másodrendű differenciálegyenletek

Hiányzik: y és y'.
Ha $y'' = f(x)$ alakra hozható, két egymás után végrehajtott integrálással megoldható.

PÉLDA: Adjuk meg az $y'' = \frac{2}{1+x^2}$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amely kielégíti az

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{kezdeti feltételeket.}$$

MEGOLDÁS: Először az általános megoldást határozzuk meg.

$$y'' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$y' = \int \frac{2}{1+x^2}\, dx = 2\operatorname{arctg} x + c_1$$

$$y = \int (2\operatorname{arctg} x + c_1)\, dx = 2x\operatorname{arctg} x - \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx + c_1 x + c_2$$

$$y = 2x\operatorname{arctg} x - \ln|1+x^2| + c_1 x + c_2 \qquad \text{Általános megoldás.}$$

A partikuláris megoldás meghatározása:
$y(0)=3 \quad \Rightarrow \quad 3=c_2$
$y'(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=c_1$

$$y_p = 2x \operatorname{arctg} x - \ln|1+x^2| + x + 3$$

□

3.1.2 Az y-ban hiányos másodrendű differenciálegyenletek

(Az egyenletből y hiányzik!)

Általános alak:

$$F(y'', y', x) = 0 \qquad \text{implicit alak,}$$

$$y'' = f(x, y') \qquad \text{explicit alak.}$$

Megoldása: $y' = p(x)$ és $y'' = p'(x)$ helyettesítéssel $p(x)$-re elsőrendű differenciálegyenlet adódik, melyet megoldunk.

PÉLDA: Oldjuk meg: $xy'' = y''(1-x)$

Megoldás: Az y hiányzik az egyenletből.

$$\left.\begin{array}{r} y' = p(x) \\ y'' = p'(x) \end{array}\right\} \text{helyettesítés}$$

$xp' = p(1-x) \qquad p(x)$-re elsőrendű differenciálegyenlet, most szétválasztható változójú.

$$\int \frac{p'}{p}\, dx = \int \frac{1-x}{x}\, dx, \qquad \text{ahol } x \neq 0 \text{ és } p \neq 0.$$

$$\ln|p| = \ln|x| - x + \ln|c|, \qquad \text{ahol } c \neq 0$$

$$p = cxe^{-x}, \qquad \text{ahol } x \neq 0 \text{ és } c \neq 0.$$

$y' = cxe^{-x}$

$y = \int cxe^{-x}\, dx = -cxe^{-x} + c\int e^{-x}\, dx = -cxe^{-x} - ce^{-x} + c_2$

Legyen $-c = c_1$

$y_{\text{ált.}} = c_1xe^{-x} + c_1e^{-x} + c_2, \quad \text{ahol } c_1 \neq 0,\ x \neq 0$
Ha $p = 0 \Rightarrow y = c$ is megoldás.

3.1.3 Az x-ben hiányos másodrendű differenciálegyenletek

(Az egyenletből x hiányzik.)
Általános alak:

$$F(y'', y', y) = 0 \qquad \text{implicit alak,}$$

$$y'' = f(y, y') \qquad \text{explicit alak.}$$

Megoldása:

$$y' = p(y)$$

$$y'' = \tfrac{dp(y)}{dx} = \tfrac{dp}{dy} \cdot \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{dp}{dy} \cdot y' = \tfrac{dp}{dy} \cdot p$$

Az

$$\left.\begin{array}{r} y' = p(y) \\ y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot p \end{array}\right\} \text{helyettesítéssel } p(y)\text{-ra elsőrendű differenciálegyenlet adódik, melyet megoldunk.}$$

PÉLDA: Adjuk meg az $yy'' - 2(y')^2 = 0$ differenciálegyenlet

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{array}\right\} \text{peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldását.}$$

MEGOLDÁS: Először az általános megoldást határozzuk meg. Az y hiányzik az egyenletből.

$$\left.\begin{array}{r} y' = p(y) \\ y'' = \dfrac{dp}{dy} p'(y) \end{array}\right\} \text{helyettesítés}$$

$$y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p - 2p^2 = 0$$

$$p(y\frac{dp}{dy} - 2p) = 0$$

a) Ha $p(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = c$. Ebből nem kapható partikuláris megoldás.

b) Ha $p(y) \neq 0 \quad y\frac{dp}{dy} - 2p = 0$, $\quad p(y)$-ra elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

$$\int \frac{1}{p}\, dp = \int \frac{2}{y}\, dy \qquad y \neq 0$$

$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|c_1| = \ln|c_1 y^2| \qquad c_1 \neq 0$$

$$p = c_1 y^2 \qquad y \neq 0,\ c_1 \neq 0$$

De

$$
\begin{aligned}
y' &= c_1 y^2 \qquad c_1 \neq 0,\ y \neq 0 \\
-\int \frac{y'}{y^2}\,dx &= -\int c_1\,dx \\
\frac{1}{y} &= -c_1 x + c_2 \\
y &= \frac{1}{-c_1 x + c_2} \qquad c_1 \neq 0 \qquad \text{Általános megoldás.}
\end{aligned}
$$

A partikuláris megoldás meghatározása.

$$
\begin{aligned}
y(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{c_2} \quad &\Rightarrow \quad c_2 = 1 \\
y(1) = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{1-c_1} \quad &\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
y_p = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2}{2-x}
$$

□

3.2 Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Ha a differenciálegyenlet

$$
y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)
$$

alakra hozható, ahol $p(x), q(x), h(x)$ adott egyváltozós függvények, akkor *másodrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.
Ha $h(x) \equiv 0$, a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Definíció. Az I intervallumon értelmezett $y_1(x)$ és $y_2(x)$ *függvényeket lineárisan függetlennek* nevezzük, ha a

$$
c_1 y_1(x) + c_2 y_2 \equiv 0
$$

egyenlőség csak akkor teljesül, ha $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$. Ellenkező esetben a *függvények lineárisan függőek.* □

Tétel. *Az $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása mindig előállítható*

$$
y = c_1 y_1 + c_2 y_2
$$

alakban, ahol y_1 és y_2 az egyenlet két független megoldása. □

Állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletek.
Általános alakja:

$$
ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.1}
$$

ahol a, b, c adott állandók, $a \neq 0$. Ezen egyenlet partikuláris megoldását $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük, ahol λ ismeretlen szám, mert az exponenciális függvény az egyetlen, mely deriváltjaival arányos.

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \text{(3.1)-be helyettesítjük.}$$

$$\begin{aligned} a\lambda^2 e^{\lambda x} + bxe^{\lambda x} + ce^{\lambda x} &= 0 \\ e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) &= 0 \end{aligned}$$

Mivel $e^{\lambda x} > 0$ mindig, ezért

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.2}$$

(3.2)-t a (3.1) alakú differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsától függően három esetet különböztetünk meg. Legyen a (3.2) egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac$.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$
   Ebben az esetben (3.2)-nek két különböző valós gyöke van.

   $$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   Ekkor $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ két különböző megoldása (3.1)-nak. Az y_1 és y_2 lineárisan függetlenek, hiszen $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq c \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$. Tehát (3.1) általános megoldása, a két független megoldásból:

   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. $D = b^2 - 4ac = 0$
   Ebben az esetben a a (3.2) egyenletnek két azonos valós gyöke van:

   $$\lambda = -\frac{b}{2a}$$

   Ekkor $y_1 = e^{\lambda x}$ megoldása a (3.1) egyenletnek. De ekkor $y_2 = x \cdot y_1 = x \cdot e^{\lambda x}$ is megoldása. Helyettesítsük y_2-t a (3.1) egyenletbe.

   $$\left.\begin{aligned} y_2 &= x \cdot e^{\lambda x} \\ y_2' &= e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \\ y_2'' &= \lambda e^{\lambda x} + \lambda(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(3.1)-be helyettesítve.}$$

   $$\begin{aligned} a(2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}) + b(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + cxe^{\lambda x} &= e^{\lambda x}(2a\lambda + \lambda^2 ax + b + \lambda bx + cx) = \\ &= e^{\lambda x}(\underbrace{2a\lambda + b}_{0} + x(\underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c}_{0})) \equiv 0 \end{aligned}$$

   Mivel $\lambda = -\frac{b}{2a}$ megoldása (3.2)-nek.

Most $y_1 = e^{\lambda x}$ és $y_2 = xe^{\lambda x}$ megoldásai (3.1)-nek, mégpedig lineárisan független megoldásai, mert $\frac{y_1}{y_2} \neq c$. Tehát (3.1) általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$
   Ekkor (3.2)-nek két különböző komplex gyöke van:

$$\lambda_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

   Vezessük be az $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ jelöléseket, melyekkel

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

   Ekkor $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ és $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ két lineárisan független megoldás. Így a (3.1) egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Összefoglalva, az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

másodrendű, lineáris, homogén, állandó együtthatójú differenciálegyenlet általános megoldását az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenlet segítségével keressük meg. A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} && \text{ha } D > 0 \\ y &= c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} && \text{ha } D = 0 \\ y &= c_1 e^{\alpha x}\cos\beta + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta && \text{ha } D < 0 \end{aligned}$$

PÉLDA: Oldjuk meg: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

MEGOLDÁS: Másodrendű, lineáris, homogén, állandó együtthatós. Karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2 \qquad (D = 0)$$

$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$
Általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

□

PÉLDA: Oldjuk meg: $y'' + 8y' + 25y = 0$

MEGOLDÁS: Karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$

$$\lambda_2 = -4 \pm \sqrt{16-25} = -4 \pm \sqrt{-9} \qquad (D<0)$$

$$\alpha = -4 \qquad \beta = 3$$

$y_1 = e^{-4x}\cos 3x, \quad y_2 = e^{-4x}\sin 3x$
Általános megoldása:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-4x}\cos 3x + c_2e^{-4x}\sin 3x = e^{-4x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$$

$\square$