MATEMATIKA I.

FEKETE MÁRIA

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
POLLACK MIHÁLY MŰSZAKI KAR
MATEMATIKA TANSZÉK

feketemt@witch.pmmf.hu

2007

RÉSZLETES TANTÁRGYPROGRAM		
Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A matematika nyelvének elemei, definíció, tétel, szimbólumok, jelek szerepe. A matematikai logikai alapfogalmai, logikai műveletek, igazságtáblák, logikai áramkörök.
2.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vektor fogalma, vektorok összeadása, kivonása, számmal való szorzása. A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer, a vektor koordinátái.
3.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**Felmérő teszt a középiskolás anyagból.** Két vektor skaláris és vektoriális szorzata, tulajdonságai, kiszámítása koordinátákkal adott vektorok esetén.
4.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Vektorok vegyesszorzata, vektorok koordinátageometriai alkalmazásai: sík és egyenes egyenlete.
5.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Valós számsorozat fogalma, megadási módjai. Korlátosság, monotonitás, konvergencia, divergencia fogalma. Műveletek konvergens és divergens sorozatok között. Korlátosság, monotonitás, konvergencia kapcsolatára vonatkozó tételek. Nevezetes sorozatok $a_n=1/n$; $a_n=q^n$; $a_n=(1+1/n)^n$.
6.	SZÜNET	
7.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A leképezés és a függvény fogalma. Egy- és kétváltozós valós függvény megadása, tulajdonságai. Összetett és inverz függvény képzése. Elemi függvények osztályozása.
8.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**1. Zárthelyi dolgozat**. Algebrai és transzcendens függvények tulajdonságai. Egyváltozós függvény végesben és végtelenben vett határértékének fogalma. Jobb- és baloldali határérték.
9.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Függvény adott pontbeli folytonossága, a szakadás fajtái. Folytonos függvényekre vonatkozó tételek. Egyváltozós valós függvény differencia- és differenciál-hányadosának fogalma, geometriai és fizikai jelentése.
10.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	A deriváltfüggvény értelmezése. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata. Deriválási szabályok.
11.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Hatványfüggvény deriválása. Összeg-, szorzat-, hányados-, összetett- és inverz függvény deriválási szabálya. Elemi függvények deriválása.
12.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Egyváltozós függvény magasabb-rendű deriváltja. A differenciálszámítás középértéktételei. A l'Hospital-szabály, Taylor-formula.
13.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**2. Zárthelyi dolgozat**. Deriválható függvény monotonitásának és szélsőértékének vizsgálata a derivált segítségével.
14.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont fogalma. Differenciálható függvények esetén ezek kapcsolata a második deriválttal. A teljes függvényvizsgálat lépései.
15.	3 óra előadás 2 óra gyakorlat	**Pótlások**

TARTALOMJEGYZÉK

RÉSZLETES TANTÁRGYPROGRAM **2**

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI **5**

1. ALAPFOGALMAK 5
2. LOGIKAI MŰVELETEK 5
2.1 Negáció *5*
2.2 Konjunkció *6*
2.3 Diszjunkció *6*
2.4 Implikáció *6*
2.5 Ekvivalencia *6*
2.6 Kidolgozott példák *7*

II. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI **8**

1. ALAPFOGALMAK 8
1.1 Alapfogalmak, jelölések *8*
1.2 Halmazok megadása *8*
1.3 Halmazok egyenlősége *9*
1.4 Üres halmaz *9*
1.5 Venn-diagram *9*
2. RÉSZHALMAZ, TARTALMAZÁS 9
3. MŰVELETEK HALMAZOKKAL 10
3.1 Halmazok metszete *10*
3.2 Halmazok egyesítése *10*
3.3 Halmazok metszetének és egyesítésének műveleti tulajdonságai *11*
3.4 Halmazok különbsége *11*
3.5 Komplementer halmaz *11*
3.6 Hatványhalmaz *12*
3.7 Halmazok Descartes-szorzata *12*
3.8 Számhalmazok *13*
3.9 Halmazok számossága *13*

III. VEKTORALGEBRA **14**

1. ALAPFOGALMAK, ALAPMŰVELETEK 14
1.1 A vektor fogalma *14*
1.2 Vektorok összeadása *15*
1.3 Vektorok kivonása *16*
1.4 Vektor szorzása skalárral (vektor számszorosa) *17*
1.5 Vektorok lineáris kombinációja *17*
1.6 Vektorok felbontása *17*
1.7 Vektor koordinátái *19*
1.8 Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal *20*
2. VEKTOR SZORZÁSA VEKTORRAL 20
2.1 Vektorok skaláris szorzata *20*
2.2 Vektorok vektoriális szorzata *22*
2.3 Vektorok vegyes szorzata *25*
3. KOORDINÁTAGEOMETRIAI ALKALMAZÁSOK 26
3.1 Az egyenes *26*
3.2 A sík *27*

IV. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY **29**

1. A FÜGGVÉNY FOGALMA (ÁLTALÁNOSAN) 29
2. SZÁMSOROZATOK 29
2.1 A számsorozat fogalma *29*
2.2 Monoton és korlátos sorozatok *31*
2.3 Sorozatok konvergenciája *32*
2.4 Konvergenciakritériumok *35*
2.5 Végtelenhez tartó sorozatok *36*
2.6 Néhány nevezetes konvergens sorozat *36*

2.7 Műveletek konvergens sorozatokkal ... *38*
2.8 Példák sorozatok határértékének kiszámítása ... *40*
3. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY ALAPTULAJDONSÁGAI ... 41
3.1 A függvény fogalma, megadása ... *41*
3.2 Függvények jellemzése, függvénytani alapfogalmak ... *42*
3.3 Műveletek függvényekkel ... *44*
3.4 Egyváltozós elemi függvények ... *48*
3.5 Függvények határértéke ... *48*
3.6 Függvények folytonossága ... *50*
V. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA ... 52
1. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ÉRTELMEZÉSE A DERIVÁLTFÜGGVÉNY ... 52
1.1 A differenciahányados értelmezése ... *52*
1.2 A differenciálhányados értelmezése ... *52*
1.3 Jobb- és baloldali differenciálhányados ... *54*
1.4 A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata ... *54*
1.5 A deriváltfüggvény (differenciálhányados-függvény) ... *55*
2. DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK ... 55
2.1 Általános differenciálási szabályok ... *55*
2.2 Elemi függvények differenciálása ... *58*
2.3 Speciális differenciálási szabályok ... *62*
3. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLJA ... 64
4. MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLHÁNYADOSOK ... 64
5. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEI ... 65
6. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI ... 66
6.1 Határértékszámítás, a L'Hospitál-szabály ... *66*
6.2 Függvényvizsgálat (Függvénydiszkusszió) ... *67*
6.3 Taylor polinom; Taylor – formula ... *71*
6.4 Síkgörbék néhány jellemzője. ... *72*
6.5 Egyenletek közelítő megoldása Newton – módszerrel ... *73*

I. A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Alapfogalmak

A matematikában az állításokat, kijelentéseket ítéleteknek nevezzük és az ítéletet alapfogalomnak tekintjük.

Minden ítélet az alábbi két tulajdonság közül pontosan az egyikkel rendelkezik: vagy igaz, vagy hamis.

Az igaz ítélet logikai értékét i
a hamis ítélet logikai értékét: h
-val jelöljük

Ítélet
- Elemi ítélet (egyetlen állítást tartalmaz)
- Összetett ítélet (elemi ítéletekből épül fel)

PÉLDA

8 osztható 4-gyel	Elemi ítélet;	igaz
A fizika természettudomány	Elemi ítélet;	igaz
Mit csinálsz holnap?	Nem ítélet	
A kutya emlősállat és sin x>2	Összetett ítélet;	hamis
Minden négyszög téglalap	Elemi ítélet;	hamis
Ne kiabálj!	Nem ítélet	

2. Logikai műveletek

2.1 Negáció

DEFINÍCIÓ. Adott A ítélet tagadása a „nem A" ítélet, melyet az A ítélet negációjának nevezünk és $\urcorner A$-val jelölünk. A $\urcorner A$ ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A hamis.

A negáció művelettáblája ill. értéktáblázata:

A	$\urcorner A$
i	h
h	i

PÉLDA

A (ítélet):	3 osztója 6-nak	igaz
$\urcorner$A (ítélet):	3 nem osztója 6-nak	hamis

2.2 Konjunkció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek konjunkciójának nevezzük és A∧B (olv: A és B)—vel jelöljük az „A és B” összetett ítéletet. Az A∧B ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A is igaz, B is igaz.

A konjunkció értéktáblázata:

A	B	A∧B
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

2.3 Diszjunkció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek diszjunkciójának nevezzük és A∨B (olv: A vagy B)–vel jelöljük az „A vagy B” (megengedő értelmű vagy) összetett ítéletet. Az A∨B ítélet akkor és csak akkor igaz, ha A és B közül legalább az egyik igaz.

A diszjunkció értéktáblázata:

A	B	A∨B
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

2.4 Implikáció

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletekekből A előtaggal és B utótaggal képzett implikációnak nevezzük és A⇒B–vel jelöljük a „ha A akkor B” összetett ítéletet. Az A⇒B ítélet akkor és csak akkor hamis, ha A igaz, B hamis.

Az implikáció értéktáblázata:

A	B	A⇒B
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

2.5 Ekvivalencia

DEFINÍCIÓ. Adott A és B ítéletek ekvivalenciájának nevezzük és A⇔B (olv. A ekvivalens B)–vel jelöljük az akkor és csak akkor A, ha B összetett ítéletet. Az A⇔B akkor és csak akkor igaz, ha A és B logikai értéke egyenlő.

Az ekvivalencia értéktáblázata:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

2.6 Kidolgozott példák

1. PÉLDA Készítsük el az $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ formula értéktáblázatát!

Megoldás

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i

Tehát a formula értéke mindig igaz

2. PÉLDA Készítsünk értéktáblázatot a $\neg A \wedge \neg(\neg A \vee B)$ formulához!

Megoldás

A	B	$\neg A$	$(\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg(\neg A \vee B)$
i	i	h	i	h	h
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	h	h
h	h	i	i	h	h

A formula értéke mindig hamis

3. PÉLDA Igazoljuk a következő azonosságot: $A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$!

Megoldás

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg B$	$\neg B \vee A$	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	$A \Leftrightarrow B$
i	i	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	i	i	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i

Mivel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ és $A \Leftrightarrow B$ logikai értéke mindig azonos, ezért valóban igaz az azonosság.

II. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

- A halmazelmélet a matematika új fejezete. Az 1800-as évek 2. felében Cantor német matematikus vezeti be a halmazelméleti alapfogalmakat (halmazok számosságával is foglalkozik)
- A halmazelmélet nagy jelentőségű, mert a matematika minden ágának modellje felépíthető halmazelméleti fogalmakkal.

1. Alapfogalmak

1.1 Alapfogalmak, jelölések

A halmaz alapfogalom a matematikában (bizonyos meghatározott, különböző, valóságos vagy gondolatban kialakított dolgoknak az összesége)

Jelölések: A, B, C, …, H, … – halmazokat jelölnek; a, b, c, …, h, … – elemeket jelölnek

$a \in H$ jelentése
– „a" eleme a H halmaznak
– „a" benne van a H halmazban
– H halmaz tartalmazza az „a" elemet

$b \notin H$ jelentése
– „b" nem eleme a H halmaznak

PÉLDA vezessük be a következő jelöléseket

N^+: a pozitív egész számok halmaza
N: a nemnegatív egész számok halmaza
Z: az egész számok halmaza

$3 \in N$ de $0 \notin N^+$, $100 \in Z$
$-1 \notin N$, $-1 \in Z$

1.2 Halmazok megadása

Egy halmazt adottnak tekintünk, ha minden dologról, elemről egyértelműen el tudjuk dönteni eleme-e a halmaznak vagy sem.

A halmazok megadási módjai

a) Analítikus úton: elemeinek felsorolásával (ha „kevés" véges sok elemet tartalmaz), vagy annyi elemének felsorolásával (ha végtelen sok eleme van), hogy abból bármely eleme képezhető legyen.
Pl. A:= {Jóska, Pista, Pali}
B:= {2, 4, 6, …, 2n, …}

b) Szintetikus úton: a halmaz elemeit valamilyen tulajdonságuk alapján adjuk meg (tehát, ha A halmaz azon x dolgok halmaza, melyek τ tulajdonsággal rendelkeznek, akkor ezt A:= $\{x \mid \tau(x)\}$-el jelöljük.
Pl. C: = $\{x, \mid x \in N^+, 3 \mid x \text{ és } x<100\}$
(C a 3-mal osztható, 100-nál kisebb pozitív egész számok halmazát jelenti)

1.3 Halmazok egyenlősége

DEFINÍCIÓ. Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk <u>egyenlőnek</u>, ha elemeik ugyanazok.

Pl:
1) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$
2) $\{1, 2, 3\} \neq \{a, b, c\}$
3) $B := \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$
   $C := \{x, \mid x \in N^+, 2 \mid x\}$
   $D :=$ {a pozitív páros számok halmaza}
   $B=C$, de $B \neq D$ $D=\{B\}=\{C\}$
   $8 \notin D$ (D-nek egyetlen eleme van!)

1.4 Üres halmaz

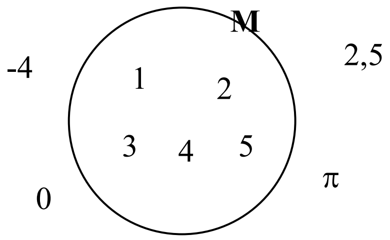
DEFINÍCIÓ. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, <u>üres halmaznak</u> nevezzük, és Ø-val jelöljük.

Pl: Ø= {az egyenlő oldalú tompaszögű háromszögek}

1.5 Venn-diagram

A sík zárt görbevonallal határolt pontjaival szemléltetünk halmazokat.

PÉLDA M: = {a vizsgán kapható osztályzatok}={1, 2, 3, 4, 5}



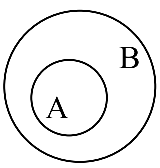
2. Részhalmaz, tartalmazás

DEFINÍCIÓ. Az A halmazt a B halmaz <u>részhalmazának</u> nevezzük, ha A minden eleme B-nek is eleme.

Jele: $A \subseteq B$ v. $B \supseteq A$

DEFINÍCIÓ. Az A halmaz <u>valódi részhalmaza</u> B-nek, ha A része B-nek, de $A \neq B$.

Jele: $A \subset B$ v. $B \supset A$



$A \subset B$

TÉTEL		Minden A-ra $A \subseteq A$	reflexivitás
	Ha	$A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$	antiszimmetria
	Ha	$A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$	tranzitivitás
		$\emptyset \subseteq A$, minden A-ra	

TÉTEL		$A \subset A$	egyetlen A-ra sem áll fenn
	Ha	$A \subset B$, akkor $B \not\subset A$	
	Ha	$A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$	

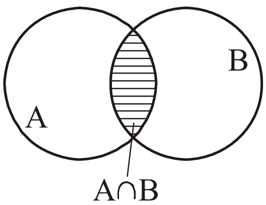
3. Műveletek halmazokkal

3.1 Halmazok metszete

DEFINÍCIÓ. Két halmaz metszetén v. közös részén azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

Jelölés**:** A és B halmaz metszete $A \cap B$

Szemléltetés:



$A \cap B$

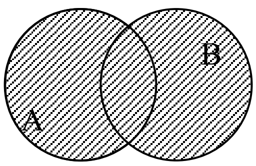
DEFINÍCIÓ. Ha A-nak és B-nek nincs közös eleme, $A \cap B \neq \emptyset$, ekkor az A és B un. disziunkt halmazok.

3.2 Halmazok egyesítése

DEFINÍCIÓ. Két halmaz egyesítésén v. unióján azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.

Jelölés: A és B halmaz egyesítése $A \cup B$

Szemléltetés:



$A \cup B$

TÉTEL – Tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az

$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ és $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

tartalmazási kapcsolatok.

– Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$ és $A \cup B = B$

3.3 Halmazok metszetének és egyesítésének műveleti tulajdonságai

TÉTEL Tetszőleges A, B, C halmazokra

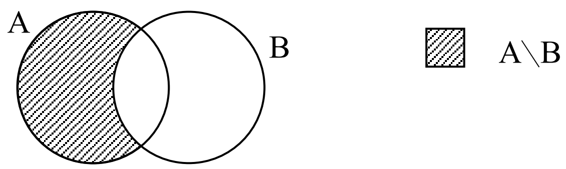
1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	asszociatív
2. $A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	kommutatív
3. $A \cap A = A$	$A \cup A = A$	idempontens
4. $A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	elnyelési tul.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	disztributív

3.4 Halmazok különbsége

DEFINÍCIÓ. A és B halmazok <u>különbségén</u> értjük A összes olyan elemének a halmazát, amelyek nincsenek a B-ben.

Jele: $A \setminus B$

Szemléltetés:



Képletben: $A \setminus B = \{x \mid x \in A, \text{ de } x \notin B\}$

TÉTEL – Tetszőleges A, B halmazokra

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$

– Ha $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow$, ha $A \subseteq B$

3.5 Komplementer halmaz

DEFINÍCIÓ. A H halmaz valamely A részhalmazának H-ra vonatkozó <u>komplementerén</u> értjük a $H \setminus A$ halmazt.

Jelölése: $\overline{A}_H = H \setminus A$ v. $\overline{A} = H \setminus A$

TÉTEL – H halmaz tetszőleges A és B részhalmazaira

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad , \quad A \cup \overline{A} = H$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \leftarrow \text{(de Morgan képletek)}$$

3.6 Hatványhalmaz

DEFINÍCIÓ. Egy H halmaz összes részhalmazai újabb halmazt alkotnak, ezt nevezzük a H hatványhalmazának.

Jele: P(H) — H hatványhalmaza; H halmaz P(H) alaphalmaza
$A \subseteq H$ ugyanazt jelenti mint $A \in P(H)$.

PÉLDA $H = \{1, 2, 3\}$

Részhalmazok: $H_1 = \emptyset$

$H_2 = \{1\}$ $H_3 = \{2\}$ $H_4 = \{3\}$

$H_5 = \{1, 2\}$ $H_6 = \{2, 3\}$ $H_7 = \{1, 3\}$

$H_8 = H_5 = \{1, 2, 3\}$

$H_i \subseteq H$ $(i = 1,\ldots, 8)$

Most H elemeinek száma: 3

P(H) elemeinek száma: $8 = 2^3$

MEGJEGYZÉS: Általában is igaz, hogy ha H elemeinek száma n (véges!), akkor P(H) elemeinek száma: 2^n.

3.7 Halmazok Descartes-szorzata

DEFINÍCIÓ. A H_1 $H_2,\ldots,$ H_n nemüres halmazok Descartes-szorzatán a következő halmazt értjük:

$$H_1 \times H_2 \times H_3 \ldots \times H_n = \{(h_1, h_2,\ldots,h_n) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2,\ldots,h_n \in H_n\}$$

Speciális Descartes-szorzatok

1. Ha $H_1 = \mathbb{R}$, $H_2 = \mathbb{R}$
   $H_1 \times H_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
   $\mathbb{R}^2$ — a rendezett valós számpárok halmaza
   a rendezettség miatt pl: $(2, -1) \neq (-1, 2)$
   $\mathbb{R}^2$ — szemléltetve: a sík

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
   $\mathbb{R}^3$ — a rendezett valós számhármasok halmaza
   $\mathbb{R}^3$ — szemléltetve: a tér

3.8 Számhalmazok

<u>Természetes számok halmaza</u> Jele: N

N: = {a pozitív egész szám és a 0} = {0, 1, 2, 3, …}
Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás

<u>Egész számok halmaza</u> Jele: Z

Z: = {0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, …}
Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás

<u>Racionális számok halmaza</u> Jele: Q

$Q: = \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in Z,\ q \neq 0\}$

Elvégezhető műveletek: összeadás, szorzás, kivonás, osztás (0-val nem osztunk!)
(Tehát a racionális számok, a két egész hányadosaként felírható számok.)
A racionális szám tizedestört alakja: véges v. végtelen szakaszos tizedes tört.

Pl: 5; -4; 12,47; $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$

<u>Irracionális számok halmaza</u> Jele: Q^*

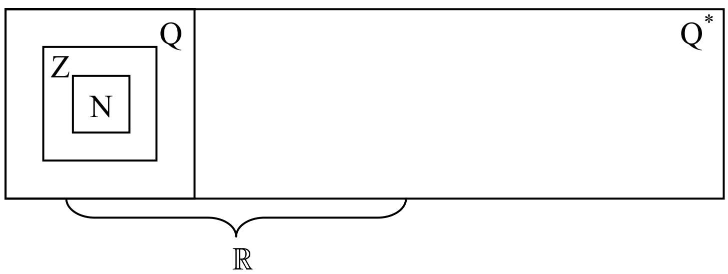
Q^*: = {a végtelen nem szakaszos tizedestörtek}
irracionális szám: nem írható fel két egész hányadosaként

Pl: $\sqrt{5}$, 3π, lg3, cos6, $\log_3 4$, $2^{\frac{1}{3}}$ stb.

<u>A valós számok halmaza</u> Jele: $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}: = Q \cup Q^*$

A valós számhalmaz szemléltetése Venn-diagrammal



3.9 Halmazok számossága

Véges sok elem esetén: az elemek száma adja a halmaz számosságát

Végtelen sok elem esetén:
- megszámlálhatóan végtelen sok
- nem megszámlálhatóan végtelen sok

elemű halmazokról beszélhetünk

III. VEKTORALGEBRA

1. Alapfogalmak, alapműveletek

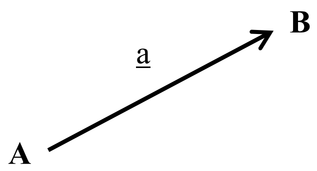
1.1 A vektor fogalma

A vektor fogalma a fizikából származik.
A fizikai mennyiségek lehetnek:

a) skalár jellegű mennyiségek: értékük egyértelműen megadható egyetlen valós számmal
Pl.: távolság, tömeg, idő, hőmérséklet, munka stb.

b) vektor jellegű mennyiségek: irányított szakasszal adhatók meg (melyet nagysága, állása, irányítása határoz meg)
Pl.: elmozdulás, sebesség, erő, gyorsulás stb.

DEFINÍCIÓ. Vektoron irányított szakaszt értünk, melyet hossza, állása és iránya határoz meg.



Jele: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, …

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, …

A a vektor kezdőpontja
B a vektor végpontja

MEGJEGYZÉS:
A matematikában a vektort szabadnak tekintjük! A kezdőpontja tetszőleges!

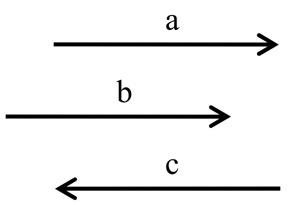
DEFINÍCIÓ. Vektor abszolút értékén a vektort ábrázoló irányított szakasz hosszát (nagyságát) értjük.

Jele: $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$, $|\overline{AB}|$

DEFINÍCIÓ. Két vektor egyező állású, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak.

DEFINÍCIÓ. Két vektor egyenlő, ha abszolút értékük, állásuk és irányuk megegyezik.

Pl.:



$\underline{a} = \underline{b}$

$\underline{a} \neq \underline{c}$

DEFINÍCIÓ. Azt a vektort, melynek abszolút értéke nulla, zérusvektornak (nullvektornak) nevezzük.

A zérusvektor állása és iránya tetszőleges.

Jele: $\underline{0}$; $|\underline{0}| = 0$

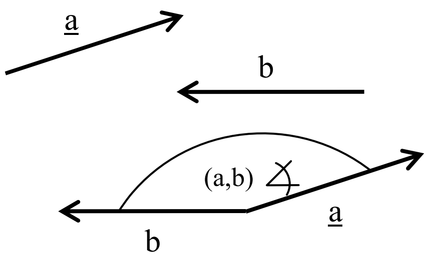
DEFINÍCIÓ. Azt a vektort, melynek abszolút értéke egységnyi, egységvektornak nevezzük.

MEGJEGYZÉS:
A $\underline{v}$ vektorral azonos állású és irányú egységvektort $\underline{v}_o$-al vagy $\underline{e}_v$-vel jelöljük $(\underline{v} \neq \underline{0})$.

DEFINÍCIÓ. Kollineáris (párhuzamos) két vektor, ha állásuk megegyezik.

DEFINÍCIÓ. Komplanárisak azok a vektorok, amelyek egy síkkal párhuzamosak.

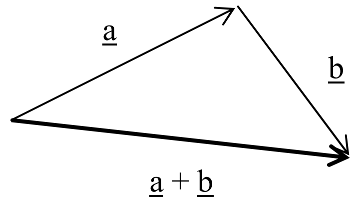
DEFINÍCIÓ. Két vektor szöge, az őket tartalmazó egyenesek 180°-nál nem nagyobb szöge.



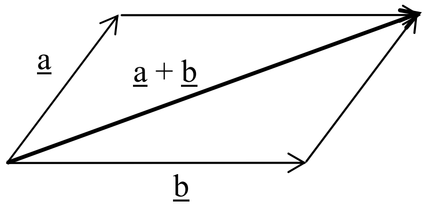
1.2 Vektorok összeadása

DEFINÍCIÓ.

1. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $\left(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3\right)$ összegén azt az $\underline{a} + \underline{b}$ –vel jelölt vektort értjük, amely az $\underline{a}$ kezdőpontjából a $\underline{b}$ végpontjába mutat.



2. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ különböző állásúak, akkor $\underline{a} + \underline{b}$ vektort megadja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$-vel (mint oldalakkal) szerkesztett paralelogrammának, a vektorok közös kezdőpontjából induló átlóvektora.



MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \quad \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges vektorokra

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$$

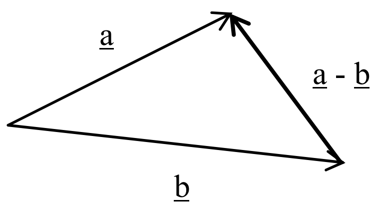
$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$$

$$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$$

(ahol $-\underline{a}$, $\underline{a}$ ellentettje
$|-\underline{a}| = |\underline{a}|$, $-\underline{a} \parallel \underline{a}$, de ellentétes irányúak)

1.3 Vektorok kivonása

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $\underline{a} - \underline{b}$ –vel jelölt különbségén azt a vektort értjük, amelyet $\underline{b}$ –hez hozzáadva az $\underline{a}$-t kapjuk.



Nem kommutatív
$\underline{b} - \underline{a} \neq \underline{a} - \underline{b}$

1.4 Vektor szorzása skalárral (vektor számszorosa)

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}$ vektor és a λ valós szám $\lambda\underline{a}$ -val jelölt szorzatán azt a vektort értjük, amelynek abszolút értéke $|\lambda||\underline{a}|$, állása megegyezik $\underline{a}$ állásával, iránya $\underline{a}$ irányával egyenlő, ha $\lambda \geq 0$, $\underline{a}$ -val ellentétes irányú, ha $\lambda < 0$.

Tehát
$$|\lambda\underline{a}| = |\lambda||\underline{a}|$$
$$\lambda\underline{a} \parallel \underline{a}$$

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK:

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda\, \underline{a} = \underline{a}\, \lambda$$
$$\lambda(\mu\, \underline{a}) = (\lambda\, \mu)\, \underline{a}$$
$$(\lambda+\mu)\, \underline{a} = \lambda\, \underline{a} + \mu\, \underline{a}$$
$$\lambda\, (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\, \underline{a} + \lambda\, \underline{b}$$

$$\underline{a}_e = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$$ $\underline{a}$ irányú **egységvektor** , ha $\underline{a} \neq 0$

1.5 Vektorok lineáris kombinációja

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján a

$$\lambda_1\, \underline{a}_1 + \lambda_2\, \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k$$

vektort értjük, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i=1,\ldots, k$

1.6 Vektorok felbontása

1. TÉTEL

Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, akkor bármely $\underline{a}$-val párhuzamos (kollineáris) $\underline{v}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ lineáris kombinációjaként, azaz létezik egyértelműen meghatározott $\alpha \in R$, hogy

$$\underline{v} = \alpha\, \underline{a} \ .$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{v} \parallel \underline{a}$ és $\underline{a} \neq \underline{0}$

Ekkor két eset lehetséges

α) $\underline{v}_e = \underline{a}_e$ β) $\underline{v}_e = - \underline{a}_e$

α) esetén
$$\underline{v} = \underline{v}_e \cdot |\underline{v}| = \underline{a}_e \cdot |\underline{v}| = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} \cdot |\underline{v}| = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$$

ahol
$$\underline{a}_e = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$$

Tehát
$$\underline{v} = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} = \alpha \cdot \underline{a} \qquad \text{ahol} \qquad \alpha = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}$$

β) esetén $\underline{v} = \underline{v}_e \cdot |\underline{v}| = -\underline{a}_e \cdot |\underline{v}| = -\frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} \cdot |\underline{v}| = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$

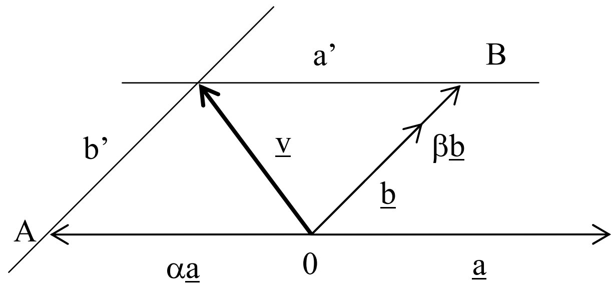
Tehát $\underline{v} = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} = \alpha \cdot \underline{a}$ ahol $\alpha = -\frac{|\underline{v}|}{|\underline{a}|}$

Ha $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{v} = \underline{0} = 0 \cdot \underline{a}$ áll fenn, azaz $\alpha = 0$

2. TÉTEL Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha legalább egyik a másik számszorosa.

3. TÉTEL Ha két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak, akkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok síkjába eső bármely $\underline{v}$ egyértelműen előállítható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz létezik olyan α , $\beta \in R$, melyekre

Bizonyítás. Végezzük el a következő szerkesztést!



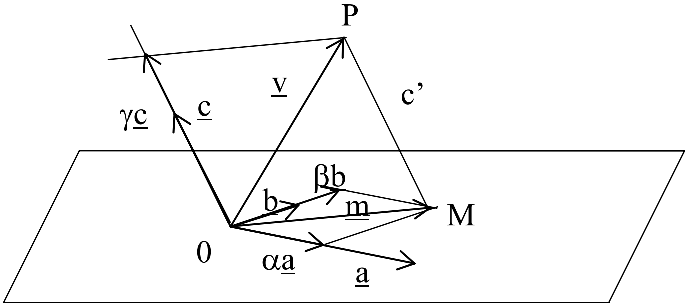
A szerkesztés egyértelműségéből következik, hogy α és β egyértelműen meghatározott.

MEGJEGYZÉS: A **3. TÉTEL** így is megfogalmazható:
Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{v}$ komplanárisak, akkor $\underline{v}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

4. TÉTEL Három vektor akkor és csak akkor komplanáris (egysíkú), ha legalább egyikük a másik kettő lineáris kombinációja.

5. TÉTEL Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, nem komplanáris (nem egysíkú) vektorok, akkor a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen előállítható az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete azonos a **3. TÉTEL** bizonyításával.



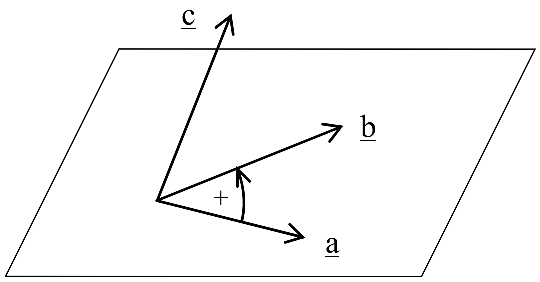
A szerkesztés egyértelműségéből következik, hogy α, β, γ $\in R$ valós számok egyértelműen meghatározottak.

$$\underline{v} = \underline{m} + \gamma \cdot \underline{c} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c}$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Két nem párhuzamos vektor a síkot, három nem egysíkú vektor a teret „kifeszíti”, mert lineáris kombinációjukkal a sík, ill. a tér minden vektora egyértelműen előállítható.
2. A sík 2 nem párhuzamos vektora a sík egy bázisa, a tér 3 nem komplanáris vektora a tér egy bázisa.

DEFINÍCIÓ. A tér nemkomplanáris, közös kezdőpontból felmért $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorai az adott sorrendben <u>jobbrendszert</u> alkotnak, ha $\underline{c}$ irányából nézve az $\underline{a}$ vektor az óramutató járásával ellenkező 180°-nál kisebb szögű forgatással a $\underline{b}$ irányába forgatható.



MEGJEGYZÉSEK

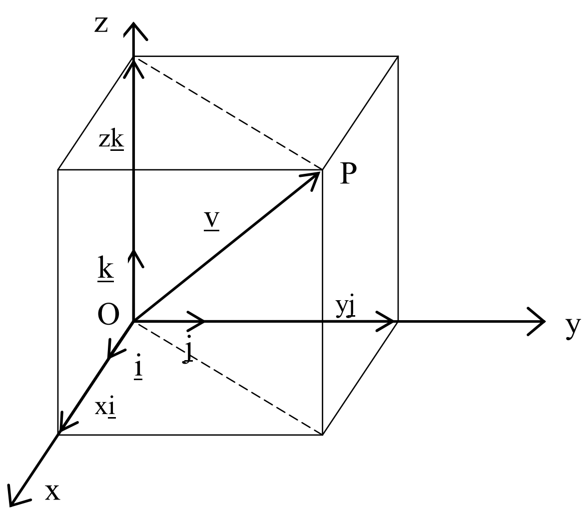
1. Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ <u>jobbrendszer</u> $\Rightarrow$ $\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}$ <u>balrendszer</u>!
2. A jobbrendszert jobbkezünk ujjaival, a balrendszert balkezünk ujjaival szemléltetjük.

1.7 Vektor koordinátái

Vegyünk fel a térben egy O pontot, valamint az O ponttól kiinduló három, páronként egymásra merőleges egységvektort, jelölje őket $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ és alkossanak ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert. Ezeket nevezhetjük <u>bázisvektoroknak.</u> Az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ a tér bázisa. (ortonormált bázis!).

Az **5. TÉTEL** értelmében a tér bármely $\underline{v}$ vektora egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Legyen a felbontás

$$\underline{v} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j} + z\cdot\underline{k}$$



DEFINÍCIÓ. Az x, y, z valós számok a $\underline{v}$ vektor <u>koordinátái</u>, az x $\underline{i}$, y $\underline{j}$, z $\underline{k}$ vektorok a $\underline{v}$ vektor komponensei (az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban).

Tehát a $\underline{v}$ koordinátáit egy rendezett számhármassal

a	$\underline{v} = (x, y, z)$	– sorvektoros	alakban szoktuk kifejezni,
de	$\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	– oszlopvektoros	alakban is használhatjuk.

MEGJEGYZÉS

1. Másik bázist is választhattunk volna!
2. $\underline{v}$ koordinátái függnek a bázisvektorok választásától.
3. A sík, pl. az x, y sík $\underline{v}$ vektorát
   $\underline{v} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j} + 0\cdot\underline{z} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j}$
   alakban állíthatjuk elő, így $\underline{v}$ koordinátái
   $\underline{v} = (x, y, 0)$ $\qquad$ $\underline{v} = (x, y)$
   $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad$ rendezett valós számpár
4. A tér $\underline{v}$ vektorai és a tér P pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt a $\underline{v}$ és P végpontjának koordinátái azonosak.
   A $\underline{v}$ a P pont <u>helyvektora</u>.

1.8 Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal

TÉTEL A $\underline{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és a $\underline{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ adott vektorok esetén $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ egyszerre teljesül.

TÉTEL A $\underline{v} = (x, y, z)$ vektor λ-szorosának $\lambda\underline{v}$ -nek koordinátái $\lambda\underline{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

TÉTEL Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok összegének, különbségének koordinátái:

$$\underline{a} + \underline{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_{2,}\, a_3 + b_3\right)$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \left(a_1 - b_1, a_2 - b_{2,}\, a_3 - b_3\right)$$

2. Vektor szorzása vektorral

2.1 Vektorok skaláris szorzata

DEFINÍCIÓ. Két vektor <u>skaláris szorzatán</u> a két vektor abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük.

Jele: $\underline{a}\,\underline{b}$

Képlettel: $\underline{a}\,\underline{b} := |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cdot\cos(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle$

MEGJEGYZÉS: A skaláris szorzat eredménye nem vektor, hanem skalár mennyiség.

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges vektorok $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\,(\underline{a}\,\underline{b}) = (\alpha\,\underline{a})\,\underline{b}$$
$$\alpha\,(\underline{a}\,\underline{b}) = \underline{a}\,(\alpha\,\underline{b})$$
$$(\alpha\,\underline{a})\,(\beta\,\underline{b}) = (\alpha\,\beta)(\underline{a}\,\underline{b})$$
$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{a}$$
$$\underline{a}\,(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\,\underline{b} + \underline{a}\,\underline{c}$$

TÉTEL Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás.

1. rész: Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$, akkor $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ Most ezt bizonyítjuk!

Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$, akkor $(\underline{a},\underline{b})\sphericalangle = 90^\circ$, és $\cos 90^\circ = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$

2. rész: Ha $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$, akkor $\underline{a} \perp \underline{b}$ Most ezt bizonyítjuk!

Legyen $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ azaz $|\underline{a}||\underline{b}|\cdot\cos(\underline{a},\underline{b})\sphericalangle = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a} \perp \underline{b}$

Ha $|\underline{a}| = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{a} = \underline{0}$ és a $\underline{0} \perp \underline{b}$

Ha $|\underline{b}| = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{b} = \underline{0}$ és a $\underline{0} \perp \underline{a}$

Ha $|\underline{a}| \neq 0, |\underline{b}| \neq 0$, akkor $\cos(\underline{a},\underline{b})\sphericalangle = 0$ $\Rightarrow$ $(\underline{a},\underline{b})\sphericalangle = 90^\circ$

PÉLDA $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok (páronként merőlegesek, jobbrendszer)

$$\underline{i}\,\underline{j} = \underline{j}\,\underline{k} = \underline{k}\,\underline{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$\underline{j}\,\underline{i} = \underline{k}\,\underline{j} = \underline{i}\,\underline{k} = 0$$
$$\underline{i}\,\underline{i} = \underline{j}\,\underline{j} = \underline{k}\,\underline{k} = 1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ = 1$$

TÉTEL Koordinátáival adott két vektor skaláris szorzata:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$

$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$, akkor

$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Bizonyítás.

$$\underline{a}\,\underline{b} = \left(a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}\right)\left(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}\right) =$$

a megfelelő műveleti tulajdonságot felhasználva

$$\left(a_1\underline{i}\right)\left(b_1\underline{i}\right)+\left(a_1\underline{i}\right)\left(b_2\underline{j}\right)+\left(a_1\underline{i}\right)\left(b_3\underline{k}\right)+$$
$$\left(a_2\underline{j}\right)\left(b_1\underline{i}\right)+\left(a_2\underline{j}\right)\left(b_2\underline{j}\right)+\left(a_2\underline{j}\right)\left(b_3\underline{k}\right)+$$
$$\left(a_3\underline{k}\right)\left(b_1\underline{i}\right)+\left(a_3\underline{k}\right)\left(b_2\underline{j}\right)+\left(a_3\underline{k}\right)\left(b_3\underline{k}\right)=$$
$$=a_1b_1\underline{i}^2+a_1b_2\underline{i}\underline{j}+a_1b_3\underline{i}\underline{k}+$$
$$+a_2b_1\underline{j}\underline{i}+a_2b_2\underline{j}^2+a_2b_3\underline{j}\underline{k}+$$
$$+a_3b_1\underline{k}\underline{i}+a_3b_2\underline{k}\underline{j}+a_3b_3\underline{k}^2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

a korábbi eredmények felhasználásával

$\underline{a}$ abszolút értékének kiszámítása

$$\underline{a}\,\underline{a}=\underline{a}^2=|\underline{a}||\underline{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\underline{a}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\underline{a}|=\sqrt{\underline{a}^2}$$
$$\underline{a}^2=\underline{a}_1^2+\underline{a}_2^2+\underline{a}_3^2$$

Tehát $$|\underline{a}|=\sqrt{\underline{a}_1^2+\underline{a}_2^2+\underline{a}_3^2}$$

PÉLDA

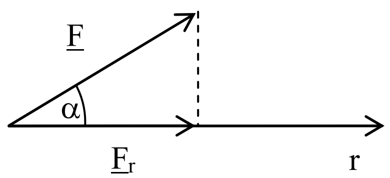
Legyen $\underline{a}=(2,\ 1{,}0)$, $\underline{b}=(-1,\ 2,\ -6)$ $\qquad \underline{a}\cdot\underline{b}=?$, $|\underline{a}|=?$

Megoldás $\underline{a}\cdot\underline{b}=2\cdot(-1)+1\cdot 2+0\cdot 6=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{a}\perp\underline{b}$

$$\underline{a}=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$$

A FIZIKÁBAN

A munka: egy pontszerű, egyenes pályán mozgó testre ható állandó erő munkája:



$W = |\underline{F}|\cdot\cos\alpha\cdot|\underline{r}| = \underline{F}\cdot\underline{r}$

skaláris szorzat

Tehát: $W=\underline{F}\cdot\underline{r}$

2.2 Vektorok vektoriális szorzata

DEFINÍCIÓ. Két vektor vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amelynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szögük szinuszának szorzata,
- állása mindkét tényezőre merőleges
- iránya pedig olyan, hogy az első tényező, a második tényező és a vektori szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

Jelölés: $\underline{a} \times \underline{b}$ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata

$$|\underline{a} \times \underline{b}| := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges vektorok ; $\alpha, \beta \in R$

$$\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$$

$$\alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = (\alpha \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\alpha \underline{b})$$

$$\alpha \underline{a} \times \beta \underline{b} = \alpha\beta(\underline{a} \times \underline{b})$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

$$(\underline{b} + \underline{c}) \times \underline{a} = \underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \quad !!!$$

TÉTEL Két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos (egyező állású).

Bizonyítás Legyen a két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$

Ha $\underline{a} = \underline{0}$ (v. $\underline{b} = \underline{0}$) a tétel triviálisan teljesül

Ha Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$

1. rész: Ha $\underline{a} \,||\, \underline{b}$, akkor $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

Bizonyítás Ha $\underline{a} \,||\, \underline{b}$, akkor $(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0^{\circ}$ v. 180°,

de ekkor $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0$, de

ez azt jelenti, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

2. rész: Ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, akkor $\underline{a} \,||\, \underline{b}$

Bizonyítás $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0 \Rightarrow \sin(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0$,

tehát $(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0^{\circ}$ v. 180°

PÉLDA $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok (jobbrendszert alkotnak!)

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$ előző tétel szerint

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$ $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$ $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

TÉTEL Koordinátáival adott két vektor vektoriális szorzata:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k}$$

Bizonyítás

$$\underline{a}\times\underline{b}=\left(a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}\right)\times\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)=$$

$$=a_1b_1\left(\underline{i}\times\underline{i}\right)+a_1b_2\left(\underline{i}\times\underline{j}\right)+a_1b_3\left(\underline{i}\times\underline{k}\right)+$$

$$+a_2b_1\left(\underline{j}\times\underline{i}\right)+a_2b_2\left(\underline{j}\times\underline{j}\right)+a_2b_3\left(\underline{j}\times\underline{k}\right)+$$

$$+a_3b_1\left(\underline{k}\times\underline{i}\right)+a_3b_2\left(\underline{k}\times\underline{j}\right)+a_3b_3\left(\underline{k}\times\underline{k}\right)=$$

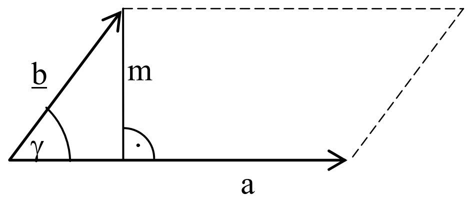
$$=a_1b_1\underline{k}-a_1b_3\underline{j}-a_2b_1\underline{k}+a_2b_3\underline{i}+a_3b_1\underline{j}-a_3b_2\underline{i}=$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\underline{i}-\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\underline{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\underline{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\qquad \text{DETERMINÁNS}$$

TÉTEL Két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

Bizonyítás



$T = |\underline{a}| \cdot m = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma$
$T = |\underline{a} \times \underline{b}|$

PÉLDA

Legyen $\underline{a}=\left(6,\ 1{,}0\right),\quad \underline{b}=\left(\text{-}2,\ 1,\ 2\right)$ $\qquad \underline{a}\times\underline{b}=?,\qquad \left|\underline{a}\times\underline{b}\right|=?$

Megoldás

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 6 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\left(2-0\right)\underline{i}-\left(12-0\right)\underline{j}+\left(6+2\right)\underline{k}=2\underline{i}-12\underline{j}+8\underline{k}$$

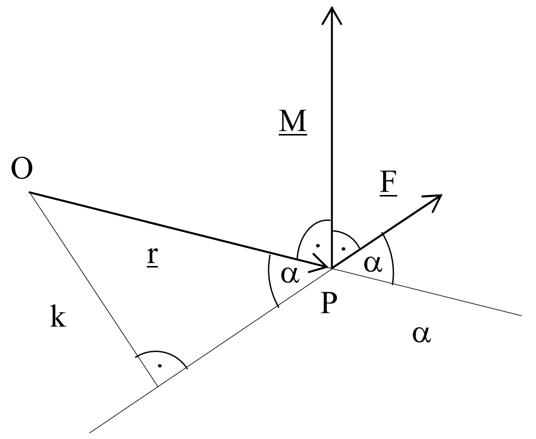
$$\underline{a}\times\underline{b}=2\underline{i}-12\underline{j}+8\underline{k}=\left(2,-12,8\right)$$

$$\left|\underline{a}\times\underline{b}\right|=\sqrt{4+144+64}=\sqrt{212}$$

A FIZIKÁBAN

$$\overrightarrow{M}=\underline{r}\times\underline{F}$$

(O pontban rögzített merev testre P pontban $\underline{F}$ állandó erő hat, melynek hatásvonala nem halad át O ponton. Ezen $\underline{F}$ erőnek a testre forgató hatása van, amelyet <u>forgatónyomatéknak</u> nevezünk.)



$\underline{r} = \overrightarrow{OP}$; $(\underline{r}, \underline{F})\sphericalangle = \alpha$

k az erő karja

$k = |\underline{r}| \sin\alpha$

$|\underline{M}| = |\underline{r}|\,|\underline{F}| \cdot \sin\alpha$

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

$\underline{M} \perp \underline{r}$; $\underline{M} \perp \underline{F}$; $\underline{r}, \underline{F}, \underline{M}$ jobbrendszer

2.3 Vektorok vegyes szorzata

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatán az $\underline{a} \times \underline{b}$-nek a $\underline{c}$-vel képzett skaláris szorzatát értjük, jele $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$

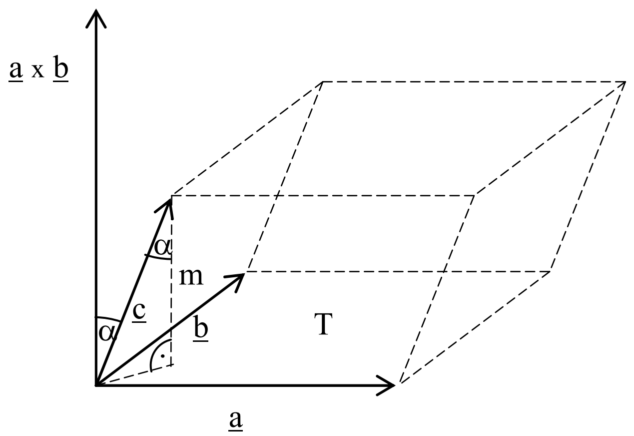
$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}|\,|\underline{c}| \cos(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})\sphericalangle$$

A VEGYES SZORZATA GEOMETRIAI JELENTÉSE

TÉTEL Az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú ferde hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcsából kiinduló 3 élvektora éppen az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektor.

Bizonyítás

$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})\sphericalangle = \alpha$



$T = |\underline{a} \times \underline{b}|$

$m = |\underline{c}| \cdot |\cos\alpha|$

$V = T \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |\cos\alpha| = |(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c}| = |\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,|$

$V = |\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,|$

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges vektorok

1. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a} = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}$
2. $-\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c} = \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = \underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b}$
3. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} = \underline{a}(\underline{b}\times\underline{c})$

(1–2.) A geom. jelentésből köv.

TÉTEL Három vektor vegyes szorzata akkor és csak akkor zérus, ha a három vektor komplanáris (egysíkú).

TÉTEL Koordinátáival adott három vektor vegyes szorzata, ha

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

harmadrendű determinánssal egyenlő, azaz

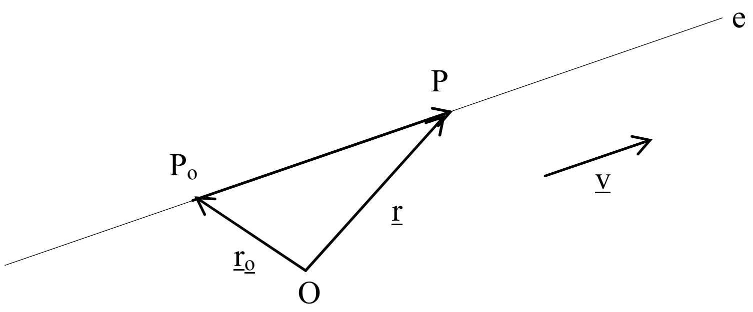
$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)a_1 - (b_1c_3 - b_3c_1)a_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_3$$

3. Koordinátageometriai alkalmazások

3.1 Az egyenes

Adott $P_o(x_o, y_o, z_o)$ pont és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \underline{0}$ vektor.

'**e**' egyenes haladjon át $\mathbf{P_o}$ ponton és **e** legyen párhuzamos $\underline{v}$-ral ($\underline{v}$ az egyenes irányvektora!)



$P_o \in e$
$e \parallel \underline{v}$

P(x; y; z) pont akkor és csak akkor van az **e** egyenesen, ha

$\overrightarrow{P_oP} = \underline{r} - \underline{r}_o$ vektor egyező állású (párhuzamos) $\underline{v}$-ral, azaz ha $\exists$ olyan $t \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\underline{r} - \underline{r}_o = t \cdot \underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Amiből

$$\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

TÉTEL Ha egy egyenes adott P_o pontjának helyvektora $\underline{r}_o$, irányvektora pedig $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor az egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $\underline{r}$ az egyenes valamely P pontjába mutató helyvektor és t paraméter, $t \in \mathbb{R}$.

<u>Az egyenes paraméteres egyenletrendszere</u>

$P_o(x_o, y_o, z_o)$, $\underline{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ — az egyenes adott pontja és helyvektora

$P(x, y, z)$, $\underline{r} = (x, y, z)$ — az egyenes vm. pontja és helyvektora

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \underline{0}$ — az egyenes irányvektora

ha $\underline{r} = \underline{r}_o + t \cdot \underline{v}$ $t \in \mathbb{R}$, akkor

a megfelelő koordináták egyenlőségét felírva

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + t\,v_1 \\ y &= y_o + t\,v_2 \\ z &= z_o + t\,v_3 \end{aligned}\right\}$$

— **<u>az egyenes paraméteres egyenletrendszere</u>**

Ha $v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad v_3 \neq 0$ a 3 egyenletből

$$t = \boxed{\frac{x - x_o}{v_1} = \frac{y - y_o}{v_2} = \frac{z - z_o}{v_3}}$$

<u>az egyenes paraméteres egyenletrendszere</u>

PÉLDA Írjuk fel az $A(2, \text{-}3, 1)$ és $B(\text{-}5, 7, 2)$ pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

Megoldás irányvektora: $\underline{v} = \overrightarrow{AB} = (\text{-}7, 10, 1)$

egy pontja: $A = (2, \text{-}3, 1)$

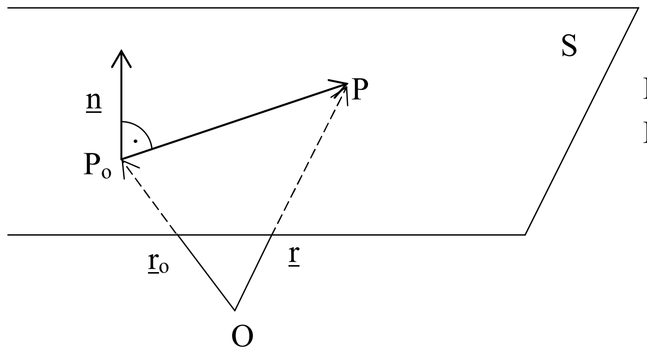
Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 7t \\ y &= -3 + 10t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3.2 A sík

Adott $P_o(x_o, y_o, z_o)$ pont és $\underline{n} = (A, B, C) \neq \underline{0}$

S sík illeszkedjen a $\mathbf{P_o}$ pontra és legyen merőleges <u>n</u>-ra (<u>n</u> a sík <u>normálvektora</u>!)



P (x, y, z) , $\underline{r} = (x, y, z)$

P_o (x_o, y_o, z_o) , $\underline{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$

$\underline{n} = (A, B, C) \neq \underline{0}$

A **P** pont akkor és csak akkor van az **S** síkon, ha

$\overrightarrow{P_oP} = \underline{r} - \underline{r}_o$ vektor merőleges $\underline{n}$-ra, azaz ha skaláris szorzatuk 0.

$n(\underline{r} - \underline{r}_o) = 0$ (skaláris szorzat)

TÉTEL Ha egy sík adott P_o pontjának helyvektora r_o, normálvektora pedig $\underline{n} \neq \underline{0}$, akkor a sík vektoregyenlete:

$$n(\underline{r} - \underline{r}_o) = 0$$

<u>Az sík általános egyenlete:</u>

$$\underline{n} = (A, B, C)$$

$$\underline{r} = (x, y, z) \qquad \underline{r} - \underline{r}_o = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$$

$$\underline{r}_o(x_o, y_o, z_o)$$

A sík vektoregyenletében szereplő skaláris szorzatot a koordinátákkal kiszámítva:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$ <u>a sík általános egyenlete</u>

Ezt átrendezve

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{ahol} \qquad D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$$

<u>a sík általános egyenlete</u>

PÉLDA Írjuk fel azon sík egyenletét, amely illeszkedik a $P(1, -2, 3)$ pontra és párhuzamos a $3x - 4y - 5z - 3 = 0$ egyenletű síkkal!

Megoldás Az adott sík: $\underline{n} = (3, -4, 5)$

A két sík normálvektora azonos!

A keresett sík egyenlete: $3(x-1) - 4(y+2)y + 5(z-3)$

átalakítva: $3x - 4y + 5z = 26$

IV. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY

1. A függvény fogalma (általánosan)

DEFINÍCIÓ. Ha egy A halmaz bizonyos elemeihez hozzárendeljük egy B halmaz egy-egy elemét, akkor az A halmazból a B halmazba vivő függvényt értelmeztük.

Jele: ha f ilyen függvény jele
$f : A \to B$

A halmaz	az	$f : A \to B$	függvény alaphalmaza
B halmaz	az	$f : A \to B$	függvény képhalmaza

Ha $a \in A$ és f függvény a-hoz az f(a)-t rendeli B-ből, akkor f , a´ helyen felvett helyettesítési értéke $f(a) \in B$.

DEFINÍCIÓ. Az $f : A \to B$ függvény értelmezési tartománya azon A-beli elemek halmaza, amelyekhez f ténylegesen hozzárendeli B valamelyik elemét.

Az f értékkészlete pedig azon B-beli elemek halmaza, amelyeket f hozzárendel, az A-nak legalább egy eleméhez.

Jelölés: f értelmezési tartománya D_f
f értékkészlete R_f

$$D_f \subseteq A \qquad \text{és} \qquad R_f \subseteq B$$

PÉLDÁK

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(v) = \sqrt{1 - v^2}$
$D_f = [-1;1] \subset \mathbb{R}$; $R_f \subset \mathbb{R}$
egyváltozós valós függvény

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $t(a,m) = \dfrac{am}{2}$
$D_t = \{(a,m) \mid (a,m) \in \mathbb{R}^2 , a > 0, m > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$, $R_t = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$
Δ területe
kétváltozós valós függvény

2. Számsorozatok

2.1 A számsorozat fogalma

DEFINÍCIÓ. Számsorozatnak nevezzük azt a függvényt, amely minden pozitív egész számhoz egy-egy számot rendel (ez a szám lehet valós, de komplex is!)

Jelölése: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$
a_n a sorozat n-edik, v. ált. eleme
$\{a_n\}$ — a sorozat rövid jelölése

MEGJEGYZÉS: A sorozat mint fv. értelmezési tartománya: N^+
A sorozat mint fv. értékkészlete $\subset\mathbb{R}$ ($\subset C$)

Sorozatot megadhatunk

1. Képlettel

pl.: a) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ $n\in N^+$

b) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $n\in N^+$

(a) és b): valós sorozatok)

c) $\{i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots, i^n, \ldots\} = \{i^n\}$ $n\in N^+$ komplex sorozat

2. Rekurzív definícióval

pl.: a) (az un. Fibonacci-féle számsorozat) valós sorozat

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n \geqq 3$, $n\in N$

$\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

b) $a_1 = 1$ $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + 1$, ha $n \geqq 2$, $n\in N$

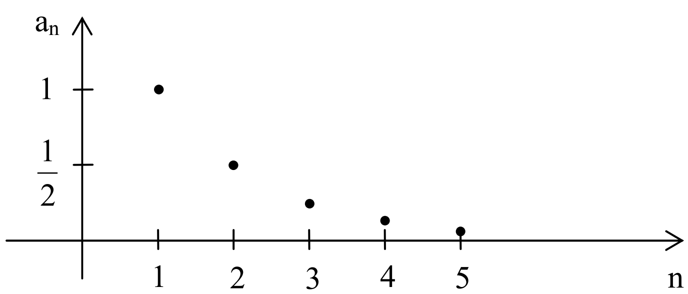
$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}, \ldots\right\}$

3. Képzési utasítással

pl : legyen a_n a π $n-$edik tizedesjegye valós sorozat

$\{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 6, \ldots\}$

4. Grafikusan



$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $n\in N^+$

valós sorozat

MEGJEGYZÉS: Mi valós számsorozatokkal foglalkozunk részletesebben!

2.2 Monoton és korlátos sorozatok

Monoton sorozatok

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat növekedő, ha $a_n \leqq a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat szigorúan növekedő, ha $a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat csökkenő, ha $a_n \geqq a_{n+1}$

$\{a_n\}$ sorozat szigorúan csökkenő, ha $a_n > a_{n+1}$

teljesül $\forall\, n \in N^+$ esetén.

PÉLDÁK

1. $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ szigorúan növekedő sorozat
2. $\{0, 0, -1, -1, -2, -2, -3, -3, \ldots\}$ monoton csökkenő sorozat
3. $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ nem monoton sorozat
4. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n+3}{2n-1}\right\}$ $n \in N^+$ Milyen monotonitású?

$$a_{n+1} = \frac{n+4}{2n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{2n+1} - \frac{n+3}{2n-1} = \cdots = \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

$\forall\, n \in N^+$ esetén

Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Korlátos sorozatok

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos, ha $\exists\, K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in N^+ -$re $a_n \leqq K$

Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos, ha $\exists\, k \in \mathbb{R}$, hogy $k \leqq a_n$

Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos,

azaz ha $\forall n \in N^+ -$re $k \leqq a_n \leqq K$

k szám a sorozat alsó korlátja

K szám a sorozat felső korlátja

MEGJEGYZÉSEK:

1. Korlátos sorozatnak végtelen sok alsó, ill. felső korlátja van.
2. A felső korlátok között van legkisebb, az alsó korlátok között van legnagyobb.

DEFINÍCIÓ. Felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat felső határának (szuprémumának);

alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat alsó határának (infimumának) nevezzük.

PÉLDÁK

1. $\{a_n\} = \{1+2n\}$ $n \in N^+$ alulról korlátos sorozat

   mivel $3 \leqq 1 + 2n$ $\forall n \in N^+ - re$ 3 a sorozat infimuma!

2. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ $n \in N^+$ korlátos sorozat

   $0 < \frac{1}{n} \leqq 1$ $\forall n \in N^+$ 0 infimum

   1 szuprémum

2.3 Sorozatok konvergenciája

Pl.:

1. Legyen $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$; $\{2 + (-1)^n \frac{1}{n}\}$ $n \in N^+$

   $$\left\{2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \frac{17}{8}, \frac{17}{9}, \ldots\right\}$$

   $$a_{1000} = 2 + \frac{1}{1000} = 2{,}001$$

   n növelésével hogyan viselkednek a sorozat elemei?

   Igaz-e: ha $n = \infty$ $a_n = 2$

   Nem igaz! A <u>∞ nem tényleges mennyiség</u>, hanem egy minden határon túl folytatható <u>folyamat szimbóluma</u>. Tehát itt, ha $n \to \infty$, akkor $a_n \to 2$

   Itt a 2 számot a sorozat határértékének nevezzük.

2. Legyen $b_n = (-3)^n$; $\{(-3)^n\}$ $n \in N+$

   $\{(-3)^n\} = \{-3,\ 9,\ -27,\ 81, \ldots\}$ sorozat esetében úgy gondolhatjuk nincs olyan szám melyet a_n megközelít, ha $n \to \infty$.

   DEFINÍCIÓ (1). <u>Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens</u>, ha $\exists$ olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy A $\forall$ környezetébe a sorozatnak véges sok eleme kivételével minden eleme beletartozik és ekkor az A számot a <u>sorozat határértékének</u> nevezzük.

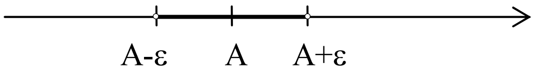
   DEFINÍCIÓ (2). Az <u>$\{a_n\}$ sorozat konvergens</u> és <u>határértéke</u> az A szám, ha $\forall$ ε>0-hoz, meghatározható olyan N_o természetes szám (N_o ε–tól függő), hogy ha $n > N_o$ akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ |.

Az A szám az $\{a_n\}$ határértéke, jelben:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \quad \text{v.} \quad a_n \to A \text{, ha} \quad n \to \infty$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Az A szám ε sugarú környezetén (ε>0) az
   $]A-\varepsilon;\ A+\varepsilon[$ nyílt intervallumot értjük, azaz
   $]A-\varepsilon;\ A+\varepsilon[\ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ A-\varepsilon < x < A+\varepsilon\}$



2. $|\,a_n-A\,| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < a_n-A < \varepsilon$
   $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$

3. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergenciájára adott két definíció ekvivalens.

1. TÉTEL Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

DEFINÍCIÓ. Az olyan sorozatot, amelynek nincs határértéke divergensnek nevezzük.

PÉLDÁK

1. Divergens sorozatok:
   $\{(-3)^n\} = \{-3, 9, -27, 81, \ldots\}$
   $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
2. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\dfrac{1+2n}{2+n}\right\}$ sorozat konvergens!

Megoldás

$$\left\{1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \frac{11}{7}, \ \ldots, \underset{\underset{a_{98}}{\parallel}}{\frac{197}{100}}, \ \ldots, \underset{\underset{a_{1000}}{\parallel}}{\frac{2001}{1002}}, \ldots, \underset{\underset{a_{10000}}{\parallel}}{\frac{20001}{10002}}, \ \ldots\right\}$$

Sejtés: a határérték A=2
A 2. definícióval igazoljuk, hogy a határérték 2.
Írjuk fel és oldjuk meg az $|a_n-A| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget n-re, majd elemezzük a megoldást.

$$\left|\frac{1+2n}{2+n} - 2\right| < \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon > 0, \quad n \in N^+$$

$$\left|\frac{-3}{2+n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|-3|}{|2+n|} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{2+n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\varepsilon} - 2 < n$$

Itt $N_o = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right]$. Tehát ha $n > N_o = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right]$, akkor $|a_n-2| < \varepsilon$, azaz a sorozat teljesíti a 2. definíciót, így $\left\{\frac{1+2n}{2+n}\right\}$ konvergens és határértéke 2.

Jelben: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n}{2+n} = 2$$

A konvergencia bizonyítás vége!

A sorozat azon elemei melyekre $n>N_{o,}$ a $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ intervallumban, azaz a 2 ε sugarú környezetében vannak. Véges sok elem: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{No}$ esik csak kívül a 2 ε sugarú környezetén.

Pl.: legyen $\bar{\varepsilon}=3\cdot 10^{-3}$ $\quad \overline{N}_o = \left[\frac{3}{3\cdot 10^{-3}} - 2\right] = 998$ küszöbszám!

Tehát

a	2	0,003	sugarú környezetén kívül eső elemek:	$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{998}$
a	2	0,003	sugarú környezetébe eső elemek:	$a_{999}, a_{1000}, a_{1001}, \ldots$— végtelen sok

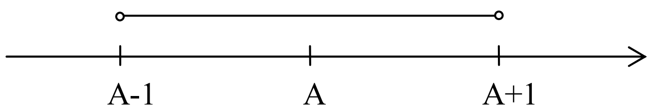
2. TÉTEL Ha $\{a_n\}$ konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

A konvergencia definíciójával bizonyítunk.

Ekkor pl.: $\varepsilon=1$-hez is $\exists\, N_o \in N^+$, hogy ha $n>N_o$, akkor $|\, a_n - A \,| < 1 \Leftrightarrow A-1<a_n< A+1$
A sorozat azon elemei, melyre $n>N_o$, teljesítik a fenti egyenlőtlenséget.
A sorozat $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{No}$ elemei vannak kívül az $]A-1, A+1[$ intervallumon.

Válasszunk alsó korlátot: $k = \min\{A-1, a_1, a_2, \ldots, a_{No}\}$
Válasszunk felső korlátot: $K = \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_{No}\}$



Minden n-re $k \leqq a_n \leqq K$ tehát a sorozat korlátos!

MEGJEGYZÉS: Az előző tétel <u>megfordítása nem igaz</u>, azaz van olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens!

DEFINÍCIÓ. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot az $\{a_n\}$ <u>torlódási pontjának</u> nevezzük, ha α $\forall$ környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

PÉLDA $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$
Két torlódási pont: -1 és 1
De: a sorozat divergens!

2.4 Konvergenciakritériumok

- A konvergencia definíciója alapján gyakran nehéz bizonyítanunk konvergens-e az adott sorozat, ehhez ugyanis ismernünk kellene a sorozat határértékét!
- Előfordulhat nem is vagyunk kíváncsiak a határértékre, csupán az érdekel bennünket, konvergens-e a sorozat (azaz van-e határértéke!)
- Fontos olyan kritériumok ismerete, melyek segítségével a konvergencia egyértelműen eldönthető.

Külön megadhatunk a konvergenciára
- szükséges
- elégséges
- szükséges és elégséges

feltételeket!

2.4.1 A konvergencia szükséges feltétele

TÉTEL A konvergencia szükséges feltétele a korlátosság. (Másképp fogalmazva: Ha $\{a_n\}$ konvergens, akkor korlátos.) (Korábban biz.!)

MEGJEGYZÉSEK

1. A nem korlátos sorozatok divergensek
2. Ha a sorozat korlátos, még nem biztos, hogy konvergens is!

PÉLDÁK

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow$ a sorozat korlátos

$\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ nem korlátos (nincs felső korlát) $\Rightarrow$ divergens sorozat

$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ korlátos, de divergens sorozat

2.4.2 A konvergencia elegendő feltétele

TÉTEL Ha az $\{a_n\}$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

(Másképp: Az $\{a_n\}$ sorozat konvergenciájához elegendő, hogy a sorozat monoton és korlátos legyen.)

2.4.3 A konvergencia szükséges és elégséges feltételei

1. TÉTEL Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos és csak egyetlen torlódási pontja van.

2. TÉTEL Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ N_o természetes szám (N_o ε-tól függő), hogy ha $n, m > N_o$, akkor $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(Cauchy-féle konvergenciakritérium!)

2.5 Végtelenhez tartó sorozatok

(Ezen sorozatok divergensek!)

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ sorozat a $+\infty$-hez tart, ha $\forall$ K>0 számhoz $\exists\, N_o \in N^+$, hogy ha $n>N_o$, akkor $a_n>K$.

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ill. $a_n \to \infty$, ha $n \to \infty$

DEFINÍCIÓ. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ akkor az $\{a_n\}$ sorozat a $-\infty$ – hez tart.

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ v. $a_n \to -\infty$, ha $n \to \infty$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3\right) = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3^n\right) = -\infty$

2.6 Néhány nevezetes konvergens sorozat

1. $\{a\}$ $a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

} a konvergencia definícióval biz.

3. $\{q^n\}$ $q \in \mathbb{R}$, mértani sorozat q a kvóciense

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } & |q|<1 \\ 1, \text{ ha } & q = 1 \\ \text{divergens, minden egyéb esetben} & \end{cases}$$

de $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, ha q>1

4. $\{\sqrt[n]{a}\}$ $a \in \mathbb{R}^+$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$
5. $\{\sqrt[n]{n}\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
6. $$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{2, \frac{9}{4}, \quad 2{,}\dot{3}7\dot{0}, \quad 2{,}441..., 2{,}48832, \ldots, \underset{\substack{\|\\ a_{100}}}{2{,}7048...}, \ldots\right\}$$

Mutassuk meg, hogy teljesül a fenti sorozatra a konvergencia elégséges feltétele, azaz monoton és korlátos.

a) <u>A sorozat monotonitásának bizonyítása</u>

Sejtés: a sorozat monoton növekedő (a néhány első elem ezt sugallja!)
A bizonyításhoz felhasználjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ legyenek nemnegatív valós számok,

ahol $k \in N^+$

ekkor

$$\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

(mértani k.) (számtani k.)

(Ha $a_1 = a_n \ldots = a_k$, akkor és csak akkor egyenlő a két oldal.)

Tekintsük a következő n+1 db számot

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \quad db}, \quad 1$$

Írjuk fel a fenti (n+1) szám számtani és mértani közepét!

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \forall n \in N^+ \text{esetén igaz}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ a_n & < & a_{n+1} \end{matrix},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekedő

b) <u>A sorozat korlátosságának bizonyítása</u>

Mivel $a_1 < a_2 < \ldots a_n < a_{n+1} < \ldots$ ezért a sorozat alulról biztosan korlátos. Alsó határ: $a_1=2$.

Tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy felülről is korlátos.

Tekintsük a következő n+2 db számot

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \quad db}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Írjuk fel a fenti (n+2) szám számtani és mértani közepét!

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}$$

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2}=1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4} < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad \forall\, n\in N^+\text{-re teljesül}$$

Tehát $a_n < 4$ $\forall\, n\in N^+$-re így a sorozat felülről is korlátos, azaz

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad \forall\, n\in N^+\text{-re}$$

A konvergencia elegendő feltétele teljesül a sorozatra (szig., monoton nő és korlátos), azaz az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, tehát van határértéke.

Kimutatták, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke irracionális szám, melyet e-vel jelölünk.

DEFINÍCIÓ. Az \`e\` valós számot az

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

határértékkel definiáljuk.

$e\approx 2{,}7182818285\ldots$

DEFINÍCIÓ. Az \`e\` alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezzük. A $x\in\mathbb{R}^+$ szám természetes logaritmusának jelölése ln x.

MEGJEGYZÉS:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{a_n}=e^k \quad , \text{ ha } \lim_{n\to\infty}a_n=\infty \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

2.7 Műveletek konvergens sorozatokkal

DEFINÍCIÓ. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok összegén azt a $\{c_n\}$ sorozatot értjük amelynek n-edik eleme:

$$c_n = a_n + b_n$$

MEGJEGYZÉS: Hasonlóan értelmezhető két sorozat különbsége, szorzata, hányadosa.

TÉTEL Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, akkor

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot A \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$
4. ha $B \neq 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$

Csak a 2. állítást bizonyítjuk.

Bizonyítás

A konvergencia definíciója alapján bizonyítjuk.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens, így mindkét sorozatra teljesül a konvergencia definíciója, miszerint $\forall\, \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists\, N_1$, ill. $\exists\, N_2$ term. szám, hogy

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{ha} \quad n > N_1$$

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{ha} \quad n > N_2$$

Mi azt akarjuk bizonyítani, hogy $(a_n + b_n) \to (A + B)$

Mutassuk meg, hogy az $(a_n + b_n)$ sorozatra is teljesül a konvergencia definíciója, miszerint

$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon \quad , \quad$ ha $\quad n > N_o \quad$ ahol ε tetszőleges pozitív szám

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leqq \underbrace{|a_n - A|}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ha } n > N_1}} + \underbrace{|b_n - B|}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ha } n > N_2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{ha} \quad n > N_o = \max(N_1, N_2)$$

Tehát

$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon \quad , \quad$ ha $\quad n > N_o \quad , \quad$ ahol $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad$ szám

ami igazolja a tétel állítását.

TÉTEL (Rendőrelv!) Ha $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, valamint véges sok n kivételével $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ teljesül, akkor $\{b_n\}$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

MEGJEGYZÉS:

1. Divergens sorozatokkal végzett műveletek eredményeként kapott sorozatok lehetnek konvergensek és divergens is!

   Mindig a konkrét eset vizsgálata szükséges!

2. Semmi biztosat nem mondhatunk a

   $$\infty-\infty \quad ; \quad 0\cdot\infty \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad 1^{\infty} \quad ; \quad \infty^{0} \quad ; \quad 0^{0}$$

   típusú határértékekről.

2.8 Példák sorozatok határértékének kiszámítása

A konvergens sorozatokra vonatkozó tételek és a nevezetes konvergens sorozatok határértékének felhasználásával számolunk határértékeket.

Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2+5\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}=0$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1}{n^3+3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-12\frac{1}{n}+6\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^3}{1+3\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^3}=8$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{2^n+4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot 3^n}{2^n+\frac{1}{4}\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}}=0$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+\frac{3}{2}\cdot 2^n}{\frac{1}{3}\cdot 3^n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}+9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

   Divergens! Két torlódási pontja van: -3 és 3

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{(-1)^n}{n}\right)=2$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+6}+n}{\sqrt{n^2+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6-n^2}{\sqrt{n^2+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n^2+6}+n}=0$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=e^3$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n-1}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n}\right]^2 = \left(\frac{e^{\frac{5}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}}\right)^2 = \left(e^2\right)^2 = e^4$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}$

Rendőrelv segítségével!

9.
$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{2} & < & \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} & < & \sqrt[n]{4} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} = 1$

3. Egyváltozós valós függvény alaptulajdonságai

3.1 A függvény fogalma, megadása

DEFINÍCIÓ. Egyváltozós valós függvényen olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmazának valamely részhalmaza.

Függvények jelölése: f, g, h,…, φ, ψ,…stb.

Ha egy függvényt a matematikai fogalma alapján pontosan akarunk megadni, akkor megadjuk az értelmezési tartományát, a képhalmazát és a hozzárendelés szabályát.

PÉLDÁK

1. f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to\sqrt{3x-7}$

$D_f \subseteq \mathbb{R}$ itt $D_f = [\frac{7}{3};\infty[$

$R_f \subseteq \mathbb{R}$ $R_f = [0;\infty[$

vagy

$f(x)=\sqrt{3x+7}$, $D_f = [\frac{7}{3};\infty[$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$ $R_f = [0;\infty[$

2. $g(x)=\frac{1}{x-3}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $R_g \subseteq \mathbb{R}$ $R_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

MEGJEGYZÉS: Ha az f függvény x helyen vett helyettesítési értéke képlettel megadható és f-nek csak alaphalmazát és képhalmazát adjuk meg (itt $\mathbb{R}$ mindkettő), akkor D_f és R_f megállapítása számítással jár. Ilyenkor D_f a $\mathbb{R}$ azon legbővebb részhalmaza, amelyeknek elemeihez a képlet függvényértéket rendelhet.

Egyváltozós függvény szemléltetése

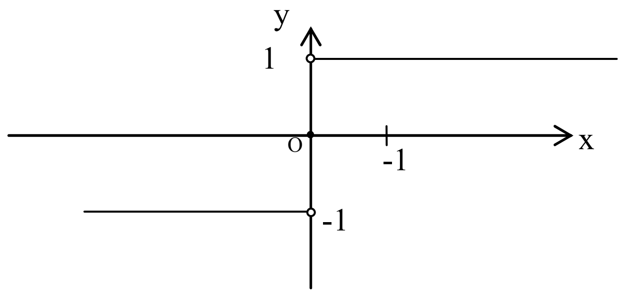
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$

f függvényt síkbeli derékszögű koordináta rendszerben, az y = f(x) egyenletű geometriai alakzattal ábrázoljuk, miközben x befutja a D_f halmaz elemeit. Az y = f(x) egyenletű geometriai alakzatot az f függvény grafikonjának nevezzük.

PÉLDA $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $R_f \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ -1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn} x$

előjelfüggvény

Ábrázoljuk



$R_f \{-1,\ 0,\ 1\}$

3.2 Függvények jellemzése, függvénytani alapfogalmak

3.2.1 Korlátosság

DEFINÍCIÓ. Az f függvényt felülről korlátosnak nevezzük, ha $\exists K \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\forall x \in D_f -$re $\quad f(x) \leq K$,

Az f függvény alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\forall x \in D_f -$re $\quad k \leq f(x)$

Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz $k \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in D_f -$re

felső határ : legkisebb felső korlát (sup f (x))
alsó határ : legnagyobb alsó korlát (inf f(x))

3.2.2 Páros, páratlan függvények

DEFINÍCIÓ. Az f függvényt, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra páros függvénynek nevezzük, ha $\forall x \in D_f - re \quad f(-x) = f(x)$, és páratlan függvénynek, ha $f(-x) = -f(x)$.

MEGJEGYZÉS Ábrázolható függvények esetén, ha f páros, grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, ha páratlan, a képe az origóra szimmetrikus.

PÉLDA Legyen $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$ Milyen paritású f függvény?

Megoldás D_f origóra szimmetrikus

$$f(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{3^x} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = -\frac{3^x - 1}{3^x + 1} = -f(x)$$

Tehát , $\forall x \in D_f - re \qquad f(-x) = -f(x) \qquad \Rightarrow \quad f$ páratlan

3.2.3 Periodikus függvények

DEFINÍCIÓ. Az f függvény periodikus, ha $\exists$ olyan p>0 szám, hogy teljesül a következő 2 feltétel:

1. $\forall x \in D_f - re \qquad (x + p) \in D_f$
2. $\forall x \in D_f - re \qquad f(x + p) = f(x)$

A p>0 szám az f függvény periódusa.

3.2.4 Monoton függvények

DEFINÍCIÓ. az f függvényről akkor mondjuk, hogy ez a függvény az értelmezési tartományán

<u>monoton növekvő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$

<u>monoton csökkenő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$

<u>szig. monoton növekvő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

<u>szig. monoton csökkenő,</u> ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

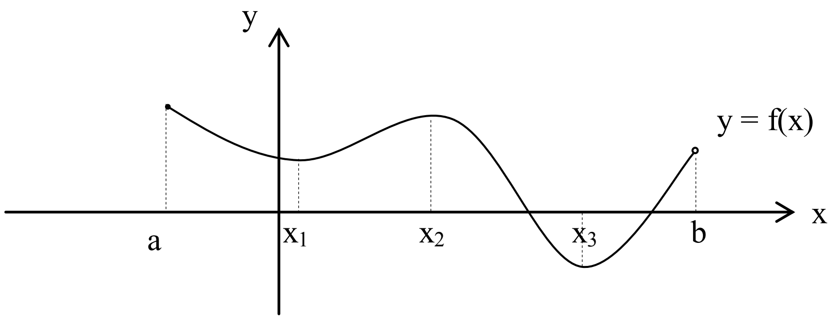
a D_f minden (x_1, x_2) elempárjára.

3.2.5 Függvények szélsőértéke

DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>helyi minimuma</u> van, ha $\exists$ az $x_o -$nak olyan környezete, hogy ha $x \in$ ezen környezetnek, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>helyi maximuma</u> van, ha $\exists$ az $x_o -$nak olyan környezete, hogy ha $x \in$ ezen környezetnek, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

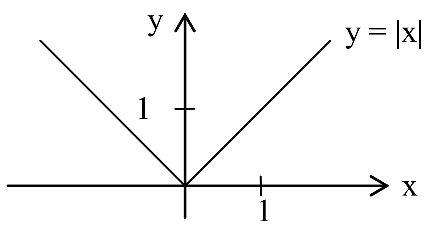
PÉLDA



$f: [a\,; b[\to \mathbb{R}$
$D_f = [a\,; b[$

$x = a$	helyen	f-nek	abszolút (totális) maximuma van
x_1	helyen	f-nek	helyi minimuma van
x_2	helyen	f-nek	helyi maximuma van
x_3	helyen	f-nek	helyi minimuma van, ami egyben abszolút minimum is

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x|$



$x = 0$ helyen helyi minimuma van és egyben abszolút minimuma is van.

f-nek maximuma nincs

3.2.6 Függvény zérushelye

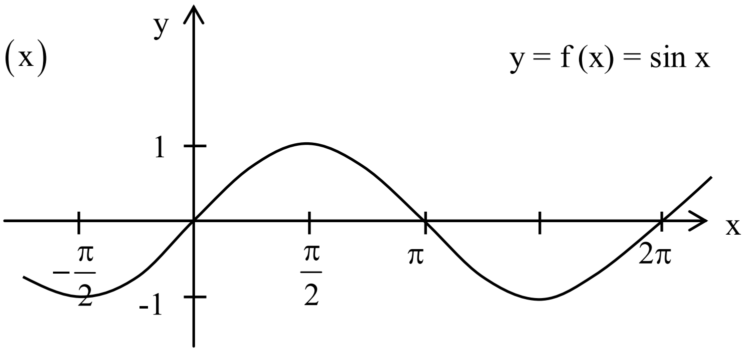
DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az $x_o \in D_f$ pontban <u>zérushelye</u> van, ha $f(x_o) = 0$

3.3 Műveletek függvényekkel

3.3.1 Függvények leszűkítése

DEFINÍCIÓ. Legyen $H \subset D_f$, $H \neq \emptyset$. Ekkor az f függvény H halmazra való leszűkítésén azt a g függvényt értjük, melyre $D_g = H$, és $\forall\, x \in H$ esetén g(x) = f(x).

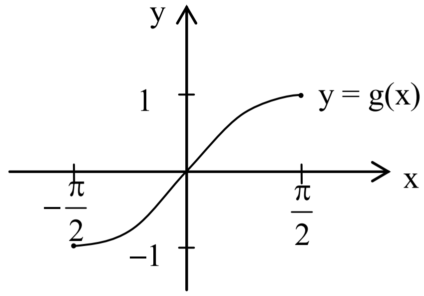
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , \quad f(x)=\sin(x)$



Legyen $H=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

g legyen f fv leszűkítése H – ra

$D_g=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad g(x)=\sin x \quad ,\text{ha } x\in H$



3.3.2 Függvények összege, különbsége, szorzata, hányadosa

Legyen f és g két olyan függvény melyekre $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.
Z_g legyen a g függvény zérushelyeinek halmaza.

DEFINÍCIÓ. Az f és g függvények összegén, különbségén, szorzatán rendre azt a F, G, H függvényt értjük melyekre

$$D_F = D_f \cap D_g \qquad \text{és} \qquad F(x)=f(x)+g(x)$$
$$D_G = D_f \cap D_g \qquad \text{és} \qquad G(x)=f(x)-g(x)$$
$$D_H = D_f \cap D_g \qquad \text{és} \qquad H(x)=f(x)\cdot g(x)$$

DEFINÍCIÓ. Az f és g függvények hányadosán azt az $\mathbb{R}$ függvényt értjük melyre

$$D_R=\left(D_f \cap D_g\right)\setminus Z_g \qquad \text{és} \qquad R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

PÉLDA

Legyen $D_f=[4;\infty[\quad , \quad f(x)=\sqrt{x+4}$

$D_g=R^+ \quad , \quad g(x)=\lg x$

$Z_g=\{1\} \quad$, mert $\lg 1=0$

1. $F(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+4}+\lg x \quad , \quad D_F=D_f \cap D_g=\mathbb{R}^+$
2. $G(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+4}-\lg x \quad , \quad D_G=D_f \cap D_g=\mathbb{R}^+$

3. $H(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+4} \cdot \lg x$, $D_H = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+$

4. $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\lg x}$, $D_R = \left(D_f \cap D_g\right) \setminus Z_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

3.3.3 Függvények összetétele

DEFINÍCIÓ. Az f és g két olyan függvény, amelyekre $R_g \cap D_f \neq \varnothing$. Az f külső és g belső függvényből képzett összetett függvényen értjük azt a h függvényt, amelynek értelmezési tartománya a g értelmezési tartományának azon része, ahol g olyan értékeket vesz fel, melyeken f értelmezett. A h összetett függvény hozzárendelési törvénye: $h(x) = f(g(x))$.

PÉLDA

$h(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$ Elemzzük a szerkezetét!

Adjuk meg h függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

külső függvény $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0;\infty[$, $R_f = [0;\infty[$

belső függvény $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $D_g =]0;\infty[$, $R_g = \mathbb{R}$

$R_g \cap D_f = [0;\infty[\neq \varnothing$

h értéktart. meghat. $\log_{\frac{1}{2}} x \geqq 0$

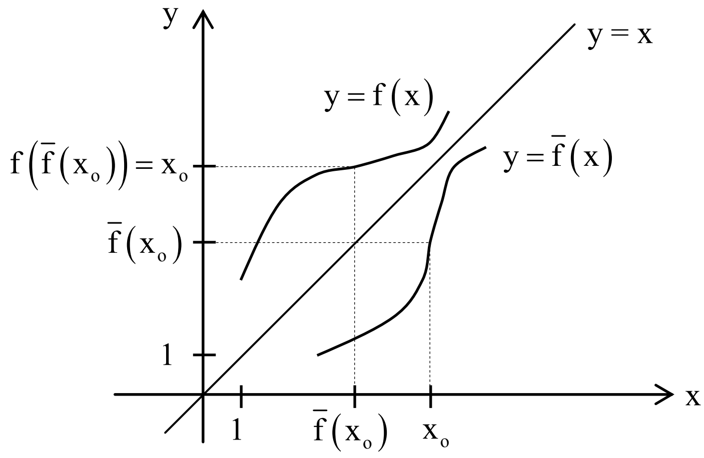
$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} 1$

$0 < x \leqq 1$

$D_h = D_{f_o g} =]0;1] \subset D_g$

3.3.4 Függvények inverze

DEFINÍCIÓ. Legyen az f függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű. Az f függvény inverz függvényén értjük azt az $\bar{f}$ függvényt, melynek értelmezési tartománya az f értékkészlete és hozzárendelési törvénye: egy $x_o \in D_{\bar{f}}$ értékhez azt az $\bar{f}(x_o)$ értéket rendeli, melyre $f(\bar{f}(x_o)) = x_o$



MEGJEGYZÉSEK

1. Az f függvény az értelmezési tartományának H részhalmazán kölcsönösen egyértelmű leképzését valósít meg, ha f a H halmaz különböző elemeihez különböző értékeket rendel az értékkészletéből, azaz ha $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in H$ esetén.
2. Mivel minden szigorúan monoton függvény kölcsönösen egyértelmű leképzést valósít meg, így a szigorúan monoton függvényeknek mindig létezik az inverz függvényük.
3. Van olyan invertálható függvény, amely nem monoton!

PÉLDA Legyen $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 3^{x+2}$
Adjuk meg az inverz függvényét!

Megoldás Vizsgáljuk meg f monotonitását!

$3^x \nearrow \rightarrow 9 \cdot 3^x = 3^{x+2} \nearrow \rightarrow -3^{x+2} \searrow \rightarrow 1 - 3^{x+2} \searrow$

Mivel f szig. mon. csökkenő $\Rightarrow$ invertálható

R_f meghat.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 3^{x+2} \\ 0 > -3^{x+2} \\ 1 > -3^{x+2} + 1 \end{array}\right\} \quad R_f =]-\infty; 1[$$

Az inverz fv. hozzárendelési törvénye: $f(\bar{f}(x)) = x$

Most: $f(\bar{f}(x)) = 1 - 3^{\bar{f}(x)+2} = x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = ?$

$$3^{\bar{f}(x)+2} = 1 - x$$

$$\bar{f}(x) + 2 = \log_3(1 - x)$$

$$\bar{f}(x) = \log_3(1 - x) - 2$$

$D_{\bar{f}} =]-\infty; 1[$

$R_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

$\bar{f}(x) = \log_3(1 - x) - 2$ Az f függvény inverz függvénye

3.4 Egyváltozós elemi függvények

Az elemi függvények osztályát a

konstans függvények
hatványfüggvények
trigonometrikus függvények
logaritmikus függvények

és az ezekből véges számú összeadással, kivonással, szorzással, osztással, összetett és inverzfüggvény képzéssel előállítható függvények alkotják.

Elemi függvények
- **Algebrai függvények**
  - Racionális
    - Egész
    - Tört
  - Irracionális
- **Transzcendens függvények**

Algebrai függvények: azok a függvények, melyek konstansokból és a változóból véges számú összeadás, kivonás, szorzás, osztás és egész kitevőjű gyökvonás útján jönnek létre.

Racionális függvények:azok az algebrai függvények, melyek leképzéséhez a gyökvonást nem kell felhasználni.

Racionális egész függvények v. polinomfüggvények:

n-edfokú $f := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$ $D_f = \mathbb{R}$

ahol $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ adottak

Racionális törtfüggvények:

Olyan törtfüggvény, amelynek számlálója és nevezője is polinomfüggvény.

Transzcendens függvények: azok az elemi függvények, melyek nem algebrai függvények (trigonometrikus, logaritmus függvények és ezek inverzei).

MEGJEGYZÉS Az alapfüggvények, melyek ismerete a későbbiekben nagyon fontos, a jegyzet végén találhatók.

3.5 Függvények határértéke

3.5.1 Függvény véges helyen vett véges határértéke

DEFINÍCIÓ. (Heine-féle) Legyen f(x) fv az x_o hely valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) fv-nek az x_o helyen a határértéke A szám, ha $\forall x_n \to x_o \left(x_n \in D_f, x_n \neq x_o\right)$ sorozatra teljesül az, hogy a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A-hoz konvergál, azaz

$$\begin{array}{lll} \forall x_n \to x_o & \text{esetén} & f(x_n) \to A \\ x_n \neq x_o & & \\ x_n \in D_f & & \end{array}$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$

DEFINÍCIÓ. (Cauchy-f.) Legyen f(x) az x_o hely valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) fv-nek az <u>x_o helyen a határértéke az A szám</u>, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám hogy ha $0 < |x - x_o| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ |.

MEGJEGYZÉSEK

1. A fenti 2 definíció ekvivalens
2. A Cauchy-féle definícióban szereplő

   ha $0 < |x - x_o| < \delta$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenségek

   ekvivalensek az alábbi egyenlőtlenségekkel:

   ha $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, akkor $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

<u>Féloldali határértékek</u> (Bal- és jobboldali hat.ért.)

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) az x_o pont valamely jobb, ill. bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. <u>Az f(x) x_o pontbeli jobb, ill. bal oldali határértéke az A szám</u>, ha $\forall x_n \to x_o \quad (x_o \in D_f, x_n \neq x_o)$.

és $x_n > x_o$ ill. $x_n < x_o$ sorozatra $f(x_n) \to A$, azaz

$\forall x_n \to x_o$, $x_n > x_o$ esetén $f(x_n) \to A$

ill. $\forall x_n \to x_o$, $x_n < x_o$ esetén $f(x_n) \to A$

Jelölések: jobboldali határérték: $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = A$

baloldali határérték: $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = A$

3.5.2 Függvények x_o helyen vett végtelen határértéke

DEFINÍCIÓ. Legyen az f(x) fv az x_o pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_o pontot. Az f(x) fv-nek az <u>x_o helyen a határértéke</u> $+\infty\ (-\infty)$, ha $\forall x_n \to x_o \quad (x_o \in D_f, x_n \neq x_o)$ sorozatra $f(x_n) \to \infty\ (-\infty)$.

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$ v. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$

3.5.3 Függvények végtelenben vett véges határértéke

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) a megfelelő félegyenesen értelmezett.
Az <u>f(x) fv-nek a +∞-ben (-∞-ben) vett határértéke A szám,</u> ha $\forall x_n \to \infty \quad (x_n \in D_f) \quad (x_n \to -\infty)$ esetén $f(x_n) \to A$.

Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ v. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

3.5.4 Végtelenben vett végtelen határérték

DEFINÍCIÓ. Az f(x) függvénynek a +∞-ben (-∞-ben) vett határértéke +∞ ill. -∞, ha $\forall x_n \to \infty$ $(x_n \in D_f)$ $(\text{ill. } x_n \to -\infty)$ esetén $f(x_n) \to \infty$ ill. $f(x_n) \to -\infty$.
Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ stb.

3.5.5 A határértékszámítás műveleti szabályai

TÉTEL Ha $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = B$, akkor

1. $\lim\limits_{x\to x_o} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = c\, A$, $\forall c \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to xo} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = A \pm B$
3. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to xo} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to xo} g(x) = A \cdot B$
4. Ha $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)} = \dfrac{A}{B}$

MEGJEGYZÉS A tétel akkor is igaz, ha x_o helyére $+\infty$-t, vagy $-\infty$-t írunk

3.5.6 Nevezetes határértékek

1. $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (Később igazoljuk)
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{k}{x})^x = e^k$, $\forall k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (Később igazoljuk!)

3.6 Függvények folytonossága

DEFINÍCIÓ. Az f(x) függvény az x_o helyen folytonos, ha

1. x_o helyen értelmezett
2. x_o helyen véges határértéke van
3. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$

DEFINÍCIÓ. Az f(x) fv az <u>x_o helyen jobbról folytonos</u>, ha f(x) értelmezett az x_o jobboldali környezetében és

$$\lim_{x\to x_o+0} f(x) = f(x_o)$$

Az f(x) fv az <u>x_o helyen balról folytonos</u>, ha f(x) értelmezett az x_o baloldali környezetében és

$$\lim_{x\to x_o-0} f(x) = f(x_o)$$

DEFINÍCIÓ. Az f(x) függvény egy nyílt intervallumban folytonos, ha az intervallum minden pontjában folytonos.

Az f(x) fv egy zárt intervallumon folytonos, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a bal végpontban jobbról, a jobb végpontban balról folytonos.

DEFINÍCIÓ. Egy függvényt folytonosnak mondanak, ha az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

1. TÉTEL Ha két függvény folytonos az x_o- helyen, akkor összegük, különbségük, szorzatuk is folytonos az x_o pontban. Hányadosuk is folytonos, ha a nevezőben levő fv az x_o pontban 0-tól különböző.

2. TÉTEL Ha g belső függvény folytonos x_o helyen és az f külső fv folytonos $g(x_o)$-ban, akkor az $f \circ g = f(g)$ összetett függvény folytonos az x_o helyen.

3. TÉTEL Ha f az [a;b]-n szigorúan monoton folytonos fv, akkor az inverze $\overline{f}$ is folytonos az $[\alpha ; \beta]$ intervallumon, ahol

$\alpha = \min(f(a), f(b))$, $\beta = \max(f(a), f(b))$.

3.6.1 Az elemi függvények folytonosságáról

Az elemi függvények az értelmezési tartományukon folytonos függvények.

3.6.2 Szakadásos függvények

DEFINÍCIÓ. Az f(x) fv-nek x_o pontban szakadási helye van, ha a fv x_o-ban nem folytonos, de az x_o valamely környezetében folytonos.

A szakadások típusai

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_0-ban hézagpontja van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ létezik $(A \in \mathbb{R})$ de f x_o-ban nem értelmezett.

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_o-ban megszüntethető szakadása van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ létezik, de $A \neq f(x_o)$.

DEFINÍCIÓ. f(x) fv-nek x_o-ban nem megszüntethető szakadása van, ha $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ nem létezik.

Speciálisan, ha $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = \infty$, akkor $f-$nek x_o-ban pólusa van.

V. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

A differenciálszámítás kialakulását geometriai és fizikai problémák siettették.

Pl.:
- Valamely $y = f(x)$ görbe P_o pontbeli érintőjének meghatározása
- Valamely mozgó test sebességének meghat.

1. A differenciálhányados értelmezése a deriváltfüggvény

1.1 A differenciahányados értelmezése

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) függvény az x_o pont valamely környezetében értelmezett, és x legyen e környezet olyan eleme, melyre $x \neq x_o$. Ekkor az

$$(1) \qquad \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

függvényt, az f(x) függvény az x_o helyéhez tartozó differenciahányadosának (differenciahányados függvényének) nevezzük.

A differenciahányados más ablakban:

Ha $x - x_o = \Delta x \quad \Rightarrow \quad x = x_o + \Delta x$

$$(2) \qquad \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \qquad \Delta x \neq 0$$

MEGJEGYZÉS mivel x_o rögzített valós szám, ezért az x_o pontbeli differenciahányados (1) ablakban az x, (2) ablakban a Δx függvénye.

A differenciahányados geometriai jelentése

Az f függvény x_o pontbeli differenciahányados függvényének értékei az f függvény grafikonjának $P_o(x_o; f(x_o))$ pontján átmenő szelők iránytangenseivel egyenlők

1.2 A differenciálhányados értelmezése

DEFINÍCIÓ. Ha az $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ $(x \neq x_o)$ differenciahányados-függvénynek x_o helyen a határértéke valós szám, akkor ezt a határértéket az f(x) fv x_o pontbeli differenciálhányadosának nevezzük és azt mondjuk, hogy az f(x) függvény az x_o pontban differenciálható.

Jelölések: f(x) fv x_o pontbeli differenciálhányadosa:

$$f'(x_o);\ f'(x)_{|x=x_o};\ \frac{df}{dx}_{|x=x_o}$$

A definíció értelmében:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad (1)$$

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \qquad (2)$$

<u>A differenciálhányados geometriai és fizikai jelentése</u>

1. Az $f(x)$ függvény x_o pontbeli differenciálhányadosa, $f'(x_o)$, annak a szögnek a tangense, amelyet az f függvény grafikonjához a $P_o(x_o;f(x_o))$ pontban húzott érintő az x tengely pozitív felével bezár.

2. Az $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ differenciahányados megmutatja, hogy az $[x_o,x]$ intervallumon átlagosan milyen mértékben változik a függvényérték a független változó megváltozásához viszonyítva.

   Az $\underline{f'(x_o)}$ differenciálhányados az <u>f függvény x_0 pontbeli pillanatnyi megváltozásának mértéke</u>.

A fizikában: a <u>sebesség</u> az út idő szerinti differenciálhányadosa

$$v = \frac{ds}{dt}_{|t_o}$$

<u>a gyorsulás</u> a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa

$$a = \frac{dv}{dt}_{|t_o}$$

PÉLDA Számítsuk ki az $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ függvény $x_o=1$ pontbeli differenciálhányadosát!

Megoldás Az $x_o=1$ pontbeli differenciahányados függvény:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{3}{4}}{x-1} = \frac{8x+4-(9x+3)}{4(3x+1)(x-1)} = \frac{1-x}{4(3x+1)(x-1)} = \frac{-1}{4(3x+1)}$$

$$x \neq 1$$

Az $x_o=1$ pontbeli differenciálhányados:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{4(3x+1)} = -\frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \text{f az } x_o=1 \text{ helyen differenciálható és}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{16}$$

1.3 Jobb- és baloldali differenciálhányados

DEFINÍCIÓ. Legyen f(x) az x_o hely megfelelő féloldali környezetében értelmezett.

- Ha a $\lim\limits_{x \to x_o + 0} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ valós szám, akkor ez a határérték az f(x) függvény <u>x_o pontbeli jobboldali differenciálhányadosa.</u>
- Ha a $\lim\limits_{x \to x_o - 0} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ valós szám, akkor ez a határérték az f(x) függvény <u>x_o pontbeli baloldali differenciálhányadosa.</u>

Jelölések: $f'_+(x_o)$; $f'_-(x_o)$

TÉTEL Az $f'(x_o)$ akkor és csak akkor létezik, ha $f'_+(x_o)$ és $f'_-(x_o)$ léteznek és egyenlőek, ekkor

$$f'_+(x_o) = f'_-(x_o) = f'(x_o)$$

PÉLDA Számítsuk ki az $f(x) = |x|$ függvény $x_o = 0$ helyhez tartozó jobb- és baloldali differenciálhányadosát!

Megoldás A jobboldali differenciálhányadosa:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

A baloldali differenciálhányadosa:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

Tehát $f(x) = |x|$ fv az $x_o = 0$ pontban nem differenciálható, mert $f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ nem létezik.

Geometriailag: A $P_o(0;0)$ pontban az $f(x) = |x|$ grafikonjának nincs érintője.

1.4 A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Az előző példában: $f(x) = |x|$ függvény az $x_o = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható! $\Rightarrow$ A folytonosság nem elég a differenciálhatósághoz.

TÉTEL Ha f(x) differenciálható az x_o pontban, akkor ott folytonos is.
(Másképp: a folytonosság a differenciálhatóság szükséges feltétele.)

Bizonyítás Mivel f x_o – ban differenciálható:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\lim_{x\to x_o}(x-x_o)=$$
$$=f'(x_o)\cdot 0=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$$

Ami azt jelenti, hogy $f(x)$ $x_o-\text{ban}$ pontban folytonos.

1.5 A deriváltfüggvény (differenciálhányados-függvény)

DEFINÍCIÓ. Legyen H az f függvény értelmezési tartományának valamely részhalmaza. Ha az f függvény a H minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk hogy f a H halmazon differenciálható.

DEFINÍCIÓ. Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon x_o pontok halmaza, ahol az f függvény differenciálható , és amely függvénynek értéke egy ilyen x_o pontban az f függvény x_o pontbeli differenciálhányadosa, az f függvény differenciálhányados-függvényének , v. deriváltfüggvényének nevezzük.

Jelölése: f'; $f'(x)$; $\dfrac{df}{dx}$

MEGJEGYZÉS f' értelmezési tartománya f értelmezési tartományának nem üres részhalmaza, azaz $D_f{}' \subseteq D_f$, $D_f{}' \neq \emptyset$.

2. Differenciálási szabályok

2.1 Általános differenciálási szabályok

1. TÉTEL Ha f(x) differenciálható x_o-ban, akkor c f(x) is differenciálható x_o-ban és

$$\left(c\,f(x)\right)'_{|x=x_o}=c\cdot f'(x_o) \qquad \left(\forall c\in\mathbb{R} \text{ esetén}\right)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o}\frac{c\,f(x)-c\,f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}c\cdot\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=c\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=c\cdot f'(x_o)$$

2. TÉTEL Ha f(x) és g(x) x_o-ban differenciálható, akkor

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)'_{x=x_o}=f'(x_o)\pm g'(x_o)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(f(x)\pm g(x)\right)-\left(f(x_o)\pm g(x_o)\right)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\pm\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right)=$$
$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\pm\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)\pm g'(x_o)$$

MEGJEGYZÉS 1. Összeget ill. különbséget tagonként differenciálunk.

2. A 2. tétel 2-nél több tag esetén is igaz.

3. TÉTEL Ha f(x) és g(x) differenciálható x_o-ban, akkor $f(x)\cdot g(x)$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(f(x)\,g(x)\right)'_{|x=x_o} = f'(x_o)\,g(x_o) + f(x_o)\,g'(x_o)$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\,g(x)-f(x_o)\,g(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\,g(x)-f(x_o)\,g(x)+f(x_o)\,g(x)-f(x_o)\,g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}g(x)+f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot\lim_{x\to x_o} g(x)+\lim_{x\to x_o} f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)\,g(x_o)+f(x_o)\,g'(x_o)$$

Mivel f és g x_o − ban differenciálható és g x_o − ban folytonos.

MEGJEGYZÉS Kettőnél több tényezőből álló szorzat differenciálása a szorzás asszociatív tulajdonsága alapján visszavezethető két tényezős szorzat differenciálására.

4. TÉTEL Ha g(x) differenciálható x_o-ban és $g(x_o)\neq 0$, akkor $\dfrac{1}{g(x)}$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{|x=x_o} = -\frac{g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

Bizonyítás Az előzőekhez hasonlóan a definíció alapján!

5. TÉTEL Ha f(x) és g(x) differenciálható az x_o-ban és $g(x_o)\neq 0$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható x_o-ban és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{|x=x_o} = \frac{f'(x_o)\,g(x_o)-f(x_o)\,g'(x_o)}{\left(g(x_o)\right)^2}$$

Bizonyítás

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{|x=x_o} = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'_{|x=x_o} = f'(x_o)\frac{1}{g(x_o)} - f(x)\frac{g'(x_o)}{\left(g(x_o)\right)^2} = \frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g(x_o)}{\left(g(x_o)\right)^2}$$

A szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján.

6. TÉTEL Ha g(x) differenciálható x_o-ban és f(x) differenciálható $g(x_o)$-ban, akkor az $(f \circ g)(x) = (f\,g(x))$ összetett függvény differenciálható x_o-ban és

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]'_{|x=x_o} = f'\left(g(x_o)\right)\cdot g'(x_o).$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(x_o)\right)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(x_o)\right)}{g(x)-g(x_o)}\cdot\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

mivel $g(x)$ x_o-ban differenciálható $\Rightarrow$ g x_o-ban folytonos is,

tehát ha $x \to x_o \;\Rightarrow g(x)\to g(x_o)$, átjelölve

$$g(x) := u \quad , \quad g(x_o) := u_o$$

$$= \lim_{u\to u_o}\frac{f(u)-f(u_o)}{u-u_o}\cdot g'(x_o) = f'(u_o)\cdot g'(x_o) = f'\left(g(x_o)\right)\cdot g'(x_o)$$

MEGJEGYZÉS Az összetett függvény deriválási szabályát láncszabálynak nevezzük.

7. TÉTEL Legyen $\overline{f}(x)$ az $f(x)$ függvény inverze. Ha f(x) differenciálható $\overline{f}(x_o)$ helyen, akkor $\overline{f}(x)$ differenciálható x_o pontban és

$$\left(\overline{f}(x)\right)'_{|x=x_o} = \frac{1}{f'\left(\overline{f}(x_o)\right)} \quad , \quad \text{ha} \quad f'\left(\overline{f}(x_o)\right)\neq 0$$

Mivel az előző tételekben x_o az f és g függvények értelmezési pontjának bármely olyan pontja lehet, ahol f és g differenciálható, így a deriváltfüggvényekre érvényesek a következők:

$$\left(c\,f(x)\right)' = c\,f'(x)$$

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

$$\left(\overline{f}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(\overline{f}(x)\right)}$$

2.2 Elemi függvények differenciálása

1. TÉTEL Konstansfüggvény deriváltja az azonosan 0 függvény.

Bizonyítás

$$f(x)=C \qquad (\forall C\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{C-C}{x-x_o}=0$$

$$(C)'_{|x=x_o}=0 \quad , \quad \text{de ez} \quad \forall x_o\in\mathbb{R} \text{ esetén igaz,}$$

tehát

$$C'\equiv 0$$

2. TÉTEL (Hatványfüggvény deriválása)

$$\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1} \quad , \quad \forall n\in N^+ \quad \text{és} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{esetén}$$

Bizonyítás $n=1$ esetén , $\left(x^1\right)'=1\cdot x^0=1$

$$\left(x^1\right)'_{|x=x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{x-x_o}=1$$

$n\geqq 2$ esetén

$$\left(x^n\right)'_{|x=x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x^n-x_o^n}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\left(x-x_o\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_o+x^{n-3}\cdot x_o^2+\ldots+x\cdot x^{n-2}+x_o^{n-1}\right)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_o+\ldots+x\cdot x_o^{n-2}+x_o^{n-1}\right)=n\cdot x_o^{n-1}$$

Mivel x_o tetszőleges volt $\Rightarrow$ $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$

Felhasználtuk az:

$$a^n-b^n=\left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \qquad \text{azonosságot és}$$

$f(x)=x^n$ függvény folytonosságát

MEGJEGYZÉS A fenti tétel tetszőleges α kitevő esetén is igaz!
(Ezt később bizonyítjuk.)

3. TÉTEL Bármely valós x-re $\left(\sin x\right)'=\cos x$

Bizonyítás

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x$$

Felhasználtuk a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ azonosságot ,

az $f(x) = \cos x$ függvény folytonosságát,

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ határértéket , itt $h = \frac{\Delta x}{2}$

4. TÉTEL Bármely valós x-re $(\cos x)' = -\sin x$

Bizonyítás $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x$$

Felhasználtuk:

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$,

$(\sin x)' = \cos x$,

$(-x)' = -1$

5. TÉTEL

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k \in Z\}$$

Bizonyítás Az előző tételek és a hányadosfüggvény differenciálási szabálya alapján

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

6. TÉTEL

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad |x| < 1$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad |x| < 1$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Bizonyítás A bizonyításhoz az előző tételeket és az inverz függvény differenciálási szabályát használjuk fel!

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x|<1$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x|<1$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg} x)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

7. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a>0\,,\, a\neq 1)$$

Bizonyítás

Legyen $x>0$, $x+\Delta x>0$, $\Delta x \to 0$ esetén

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Tetszőleges, de rögzített $x>0$ esetén , ha $\Delta x \to 0$, $\left|\frac{x}{\Delta x}\right| \to \infty$,

tehát $\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to e$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$$

felhasználtuk az $\ln x$ függvény folytonosságát!

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (a>0 \;,\; a\neq 1)$$

8. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ $\left(a > 0\,,\, a \neq 1\right)$

Bizonyítás

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \cdot \ln a$$

felhasználtuk az inverz függvény deriválási szabályát

9. TÉTEL Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$$

Bizonyítás

$$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

10. TÉTEL

$$\left(\operatorname{th} x\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{esetén}$$

$$\left(\operatorname{cth} x\right)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{esetén}$$

11. TÉTEL

$$\left(\operatorname{ar\,sh} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \left(\operatorname{ar\,ch} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \in \left]1\,;\,\infty\right[$$

$$\left(\operatorname{ar\,th} x\right)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \left(\operatorname{ar\,cth} x\right)' = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$|x| < 1 \qquad\qquad |x| > 1$$

PÉLDÁK

1. $$\left(\frac{x^5 + 5x^3}{3}\right)' = \left[\frac{1}{3}(x^5 + 5x^3)\right]' = \frac{1}{3}\left(5x^4 + 15x^2\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. $$\left[(5+6x)(4-3x)\right]' = 6(4-3x) + (5+6x)(-3) = 9 - 36x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. $$\left[\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\right]' = \left(2x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + (-1)\,x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

4. $\left(x \arcsin 2x\right)' = 1 \cdot \arcsin 2x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 \qquad |x| < \frac{1}{2}$

5. $\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \qquad = -\frac{2}{\left(\sin x - \cos x\right)^2}$

6. $\left(\ln 8x\right)' = \frac{1}{8x} \cdot 8 = \frac{1}{x}$

7. $\left(\ln \ln x\right)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$

2.3 Speciális differenciálási szabályok

2.3.1 Logaritmikus differenciálás

Legyen $h(x) = f(x)^{g(x)}$ ahol $f(x) > 0$

mivel $f(x) > 0 \Rightarrow h(x) = f(x)^{g(x)} > 0$

Képezzük $\ln h(x) - \text{et!}$

$$\ln h(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$ Deriváljuk mindkét oldalt!

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$h'(x) = h(x)\left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}\left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

A következő tételben felhasználjuk ezt az eredményt!

TÉTEL $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén , ha $x > 0$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Bizonyítás Legyen $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$

$$\ln f\left(x\right) = \alpha \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

PÉLDA

$$f(x) = \left(\sin 2x\right)^{\ln x} \qquad \left(x > 0 \quad \text{és} \quad \sin 2x > 0\right)$$

Képezzük a deriváltfüggvényét!

Megoldás $\ln f(x) = \ln x \ln\sin 2x$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x}\ln\sin 2x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x \cdot 2$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{\ln\sin 2x}{x} + \frac{2\ln x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}\right]$$

$$f'(x) = (\sin 2x)^{\ln x}\left[\frac{\ln\sin 2x}{x} + \frac{2\ln x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}\right]$$

2.3.2 Paraméteres alakban adott függvény deriváltja

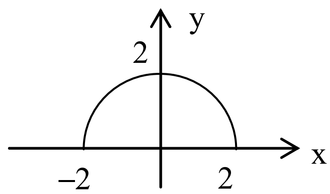
Az $\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}$, $t \in H$

paraméteres egyenletrendszer az xy sík valamely görbéje egyenletének un. paraméteres alakja.

Ha a $\varphi(t)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű (φ invertálható függvény) és $D_\varphi = D_\psi$, akkor a fenti egyenletrendszer un. <u>paraméteres megadású</u> f <u>függvényt</u> határoz meg, melyre $D_f = R_\varphi$.

PÉLDA $\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right\}$ $0 \leqq t \leqq \pi$

egyenletrendszer függvényt ad meg, grafikonja:



TÉTEL

Az $\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}$ $t \in D_\varphi$ és φ invertálható függvény

A paraméteres alakban adott f függvény differenciálható az $x_o = \varphi(t_o) -$ ban

ha $\dot\varphi(t_o) = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t_o}$, $\dot\psi(t_o) = \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t_o}$ és $\dot\varphi(t_o) \neq 0$, és

$$f'(x_o) = \frac{\dot\psi(t_o)}{\dot\varphi(t_o)}$$

2.3.3 Implicit alakban adott függvény differenciálása

Az ilyen alakban megadott függvény differenciálhányadosát megkapjuk, ha a függvényt megadó egyenlet mindkét oldalát differenciáljuk, s közben alkalmazzuk az összetett függvény deriválási szabályát!

3. Differenciálható függvény differenciálja

DEFINÍCIÓ. Ha $f(x)$ függvény az x_o – ban differenciálható, akkor az $f'(x_o)\cdot(x-x_o)$ elsőfokú kifejezést az f függvény x_o pontbeli differenciáljának nevezzük.

Jelölése**:** $df_{|x=x_o}$; v df , $df = f'(x_o)(x-x_o) = f'(x_o)\Delta x$

Speciálisan: Ha $f(x)=x$

$$df = dx = 1\cdot(x-x_o) = 1\cdot\Delta x = \Delta x \qquad \text{azaz}$$

$$dx = \Delta x$$

Ezt felhasználva: $df = f'(x_o)(x-x_o) = f'(x_o)dx$

A differenciál geometriai jelentése

df az ordinátaérték megváltozását jelenti $f(x_o)$-tól az érintőig, miközben az x_o pontból áttérünk az $x_o+\Delta x$ helyre.

MEGJEGYZÉS:

1. df általában különbözik $\Delta f = f(x)-f(x_o)$-tól
2. Ha $\Delta x = dx$ kicsi Δf és df eltérése kicsi, azaz

   $\Delta f = f(x)-f(x_o) \quad \approx \quad df$ azaz

   $f(x) \approx f(x_o)+df$

   $f(x) \approx f(x_o)+f'(x_o)dx$

   Ha x közel van az x_o-hoz, jó a közelítés.

4. Magasabbrendű differenciálhányadosok

Ha $f(x)$ függvény $f'(x)$ deriváltfüggvénye is differenciálható, akkor az $f'(x)$ függvény differenciálhányados függvénye az $f(x)$ függvény második deriváltja.

Jele:

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x), \qquad \text{vagy} \quad \frac{d^2f}{dx^2}$$

De $\quad \left(f''(x)\right)' = f'''(x), \qquad$ vagy $\quad \dfrac{d^3f}{dx^3}$

$$\frac{d^4f}{dx^4},\quad \frac{d^5f}{dx^5},\quad \ldots,\quad \frac{d^nf}{dx^n},\quad \ldots$$

$$f^{(4)},\quad f^{(5)},\quad \ldots,\quad f^{(n)},\quad \ldots$$

<u>Megállapodás:</u> $\qquad f^{(o)} = f$

DEFINÍCIÓ. Az $f(x)$ függvény <u>n-edik deriváltját</u> a következőképpen értelmezzük:

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha} \quad n = 0 \\ \left[f^{(n-1)}(x)\right]', & \text{ha} \quad n \in N^+ \end{cases}$$

Az n számot a derivált rendjének nevezzük.

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény magasabbrendű deriváltjait!

Megoldás

$$f^{(o)}(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

5. A differenciálszámítás középértéktételei

TÉTEL (Rolle tétele) Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és differenciálható az $]a,b[$-n, és $f(a)=f(b)$, akkor $\exists$ legalább egy olyan $\xi \in \,]a,b[$, ahol $f'(\xi)=0$.

TÉTEL (Langrange–féle középértéktétel) Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és differenciálható az $]a,b[$-n, akkor $\exists$ legalább egy olyan $\xi\in]a,b[$, ahol $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

6. A differenciálszámítás alkalmazásai

6.1 Határértékszámítás, a L'Hospitál-szabály

Gyakran adódnak olyan határértékszámítási problémák, amelyek megoldása az eddig jól ismert módszerekkel nem, vagy nagyon körülményesen oldhatók meg.

Pl: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; vagy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

TÉTEL Legyen f és g az x_o valamely H környezetében differenciálható és $g'(x)\neq 0$, ha $x\in H$, és $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0.$

Ha $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik , akkor $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TÉTEL Legyen f és g az x_o valamely H környezetében differenciálható és $g'(x)\neq 0$, ha $x\in H$ és $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}|g(x)|=\infty.$

Ha $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik , akkor $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TÉTEL Ha f és g az $]x_o,\infty[$-on differenciálható és

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0 \text{ v. }(\pm\infty)$, valamint $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik ,

akkor $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

PÉLDÁK

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}(-x)=0$

6.2 Függvényvizsgálat (Függvénydiszkusszió)

6.2.1 A függvény növekedése, csökkenése, szélsőértékei

TÉTEL Legyen f az $]a,b[$-on differenciálható. Az f függvény az $]a,b[$-on akkor és csak akkor növekedő (ill. csökkenő) ha $\forall x\in\,]a;b[$ esetén $f'(x)\geqq 0$ $\left(\text{ill.}\, f'(x)\leqq 0\right)$.

TÉTEL Legyen f az $]a,b[$-on differenciálható. Az f függvény az $]a,b[$- on akkor és csak akkor szigorúan növekedő (ill. csökkenő), ha $f'(x)\geqq 0$ $\left(\text{ill.}\, f'(x)\leqq 0\right)$ teljesül $\forall x\in\,]a,b[$ esetén, és $f'(x)=0$ az $]a;b[$ egyetlen részintervallumán sem azonosan zérus.

TÉTEL Ha $f'(x)=0$ $\forall x\in\,]a,b[$ esetén, akkor f az $]a,b[$-n konstans.

PÉLDA Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az $f(x)=\ln\frac{x^2}{(1+x)^3}$ függvényt!

Megoldás $D_f=\,]-1;0[\,\cup\,]0;\infty[$

$$f'(x)=\frac{(1+x)^3}{x^2}\cdot\frac{2x(1+x)^3-x^2\cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6}=\frac{2(1+x)-3x}{x(1+x)}=\frac{2-x}{x(1+x)}\quad ;\quad D_{f'}=D_f$$

$f'(x)=0$ ha $x=2$ $\Rightarrow$ Mivel $f'(x)$ függvény csak 1 pontban zérus, $f(x)$ függvény D_f egy részintervallumán sem lehet konstans.

x	$]-1;0[$	$]0;2[$	$]2;\infty[$
f'	+	+	−
f	↗	↗	↘

TÉTEL Ha f differenciálható az x_o környezetében és f -nek x_o -ban helyi szélsőértéke van, akkor $f'(x_o)=0$.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha $f'(x_o) = 0$, akkor f-nek x_o-ban lehet, de nem biztos, hogy van szélsőértéke.
2. Ha $f'(x_o) \neq 0$, akkor f-nek nincs szélsőértéke x_o-ban.

TÉTEL Ha f differenciálható x_o valamely környezetében és $f'(x_o) = 0$, valamint az $f'(x)$ függvény az x_0 pontban előjelet vált, akkor az f függvénynek x_o-ban helyi szélsőértéke van.

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x) = (x-4)^2 (x-3)^2$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(x-4)(x-3)^2 + (x-4)^2 \cdot 2(x-3) = 2(x-3)(x-4)(x-3+x-4)$$

$$f'(x) = 2(x-3)(x-4)(2x-7) \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \qquad 2(x-3)(x-4)(2x-7) = 0$$

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 3{,}5 \qquad x_3 = 4$$

x	$]-\infty;3[$	3	$]3;3{,}5[$	3,5	$]3{,}5;4[$	4	$]4;\infty[$
f′	+	0	+	0	–	0	+
f	↘	h. min.	↗	h. min	↘	h. min.	↗

$f(3) = 0$
$f(3{,}5) = 0{,}06$
$f(4) = 0$

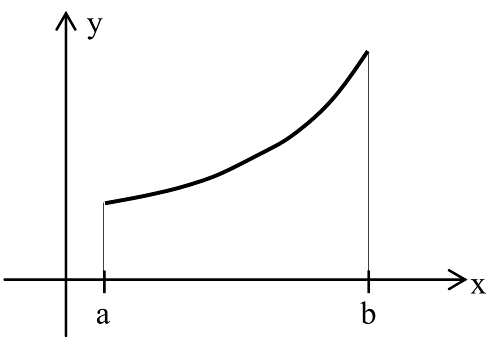
Abszolút minimuma $x_1 = 3$, $x_3 = 4$-nél $f(3) = f(4) = 0$
Abszolút maximuma nincs.

6.2.2 Konvex, konkáv függvények, inflexiós pont

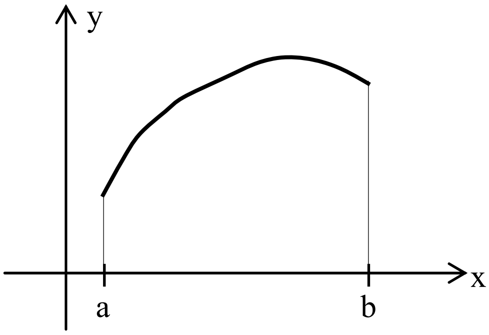
DEFINÍCIÓ. Az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvényt az $[a,b]$-n konvexnek nevezzük, ha $\forall\, c,d \in [a;b]$-re érvényes a következő:

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{f(c)+f(d)}{2}$$

Ha az egyenlőtlenség jelét megfordítjuk, akkor f függvény $[a,b]$-n konkáv.



szigorúan konvex függvény grafikonja

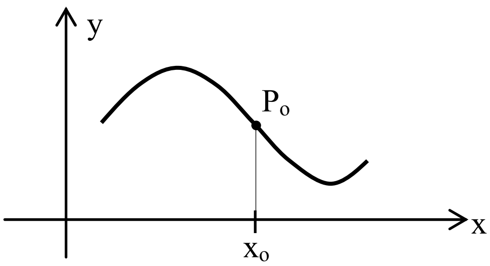


szigorúan konkáv függvény grafikonja

MEGJEGYZÉS:

1. A görbéket mindig alulról nézzük!
2. Ha egyenlőséget nem engedünk meg, szigorúan konvex, ill. szigorúan konkáv.

DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az x_o pontban inflexiós pontja van, ha x_o-nak van olyan jobb és bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény konvex, a másikban konkáv, vagy fordítva.



P_o az f grafikonjának inflexiós pontja

TÉTEL Az $[a,b]$-n folytonos, $]a,b[$-n kétszer differenciálható f függvény akkor és csak akkor konvex (ill. konkáv) az $[a,b]$-n, ha $f''(x) \geqq 0$, $\left(f''(x) \leqq 0\right)$ $\forall x \in]a,b[$ esetén.

TÉTEL Az $[a,b]$-n folytonos, $]a,b[$ kétszer differenciálható f fügvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (szigorúan konkáv) az $[a,b]$-n, ha $f''(x) \geqq 0$, $\left(\text{illetve } f''(x) \leqq 0\right)$ $\forall x \in]a,b[-n$, de $f''(x)$ az $]a,b[$ egyetlen részintervallumán sem azonosan zérus.

PÉLDA $f(x) = x \ln x$ $D_f = \mathbb{R}^+$

Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából!

Megoldás $f'(x) = \ln x + 1$ $D_f = \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R}^+$

Az f görbe alakja $f''(x)$ függvény előjelétől függ.

Mivel $f''(x)=\frac{1}{x}>0\ \ (x\in D_{f''})$ $\Rightarrow$ f D_f-en konvex.

TÉTEL Ha az x_o hely valamely környezetében kétszer differenciálható f függvénynek x_o-ban inflexiós pontja van, akkor $f''(x_o)=0$.

TÉTEL Ha az f függvény az x_o valamely környezetében differenciálható és $f''(x_o)=0$, valamint az $f''(x)$ függvény az x_o helyen előjelet vált, akkor f-nek x_o-ban inflexiós pontja van.

PÉLDA Határozzuk meg az $f(x)=x^4+x^3$, $D_f=\mathbb{R}$ függvény inflexiós pontjait!

Megoldás $f'(x)=4x^3+3x^2$ $D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}$

$$f''(x)=12x^2+6x=6x\,(2x+1)=0$$

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 12x^2+6x=6x\,(2x+1)=0$$

$$x_1=-\frac{1}{2} \qquad x_2=0$$

x	$\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$	$-\frac{1}{2}$	$\left]-\frac{1}{2};0\right[$	0	$]0;\infty[$
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$	infl. p	$\cap$	infl. p	$\cup$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16} \qquad f(0)=0$$

Inflexiós pontok: $P_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{16}\right)$ $P_2(0;0)$

6.2.3 A függvénydiszkusszió vázlata (Teljes függvényvizsgálat)

I. Megállapítjuk $f(x)$ függvény

a) értelmezési tartományát, ha nem adott
b) paritását, periodicitását (a vizsgálati intervallum ezek után esetleg szűkíthető)
c) zérushelyét, az $f(x)=0$ egyenletből
d) határértékeit, a kritikus helyeken és az értelmezési tartomány szélein
e) folytonosságát, szakadási típusait (ha vannak)

II. $f'(x)$ segítségével (ha létezik) megállapítjuk:

a) $f(x)$ lehetséges szélsőértékhelyeit az $f'(x)=0$ egyenletből
b) $f(x)$ monotonitási intervallumait és szélsőértékhelyeit

III. $f''(x)$ segítségével (ha létezik) megállapítjuk

a) $f(x)$ lehetséges inflexiós pontjait az $f''(x)=0$ egyenletből

b) $f(x)$ konvexitási intervallumait és inflexiós pontjait

IV. A függvény grafikonjának megrajzolása (az eddigi információk alapján)

V. Az értékkészlet meghatározása, korlátosság vizsgálata

6.3 Taylor polinom; Taylor – formula

DEFINÍCIÓ. Legyen f függvény az x_o pontban legalább n-szer differenciálható. Az f függvény x_o helyhez tartozó n-edik Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x - x_o) + \frac{f'(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

röviden $$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_o)}{i!}(x - x_o)^i$$

PÉLDA $f(x) = e^x$ $x_o = 0$ Írjuk fel f függvény x_o helyhez tartozó n-edik Taylor polinomját!

Megoldás $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

MEGJEGYZÉS f (x) függvény n-edfokú (n-edik Taylor–polinomja) az x_o pontban legalább n-edrendben érintkezik az f függvény grafikonjával.

Taylor – formula

TÉTEL Ha f függvény az x_o valamely környezetében legalább (n+1)-szer differenciálható, akkor ebbe a környezetbe eső $\forall x$ helyen érvényes a következő egyenlőség:

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow}}{T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1} \quad \text{, ahol} \quad x_o < \xi < x \quad \text{v.} \quad x < \xi x_o$$

n-edfokú Taylor polinomja f függvénynek

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}$$ — Langrange – féle maradéktag

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha n nagy, akkor általában $R_n(x)$ kicsi, így $f(x) \approx T_n(x)$

2. Az $R_n(x)$ maradéktagot legtöbbször közelítő értékek számításakor elkövetett hibabecslésre használják.

PÉLDA Számítsuk ki $\sin 0,4$ közelítő értékét a harmadfokú Taylor–polinom segítségével és becsüljük meg a közelítés hibáját!

Megoldás $f(x)=\sin x$ $x=0,4$ $x_o=0$

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1$$
$$f^{IV}(x)=\sin x$$

$$T_3(x)=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3=x-\frac{1}{6}x^3$$
$$\sin 0,4\approx T_3(0,4)=0,4-\frac{1}{6}0,4^3=0,3893$$

A Taylor formula:

$$\sin x=T_3(x)+R_3(x) \qquad R_3(x)=\frac{\sin\xi}{4!}x^4$$
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{\sin\xi}{4!}x^4 \qquad 0<\xi<0,4$$
$$\left|R_3(0,4)\right|=\left|\frac{\sin\xi}{4!}0,4^4\right|<\frac{0,4^4}{4!}=\frac{0,0256}{24}=1,0\dot{6}\cdot 10^{-3}=0,0010\dot{6}$$
$$0<\xi<0,4 \qquad \sin\xi<1 \qquad \text{A hiba kisebb mint } 1,06\cdot 10^{-3}$$

6.4 Síkgörbék néhány jellemzője.

6.4.1 Síkgörbe érintője; normálisa

Legyen f x_o környezetében értelmezett, x_o-ban differenciálható. A $P_o(x_o;f(x_o))$ pontban érintőt húzunk f függvény grafikonjához.

Az érintő egyenlete:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

P_o-ban az érintőre merőleges egyenes <u>a görbe normálisa</u>.

A normális egyenlete:

$$y-f(x_o)=\frac{-1}{f'(x_o)}(x-x_o) \qquad \text{ha} \quad f'(x_o)\neq 0$$

6.4.2 Síkgörbék hajlásszöge

DEFINÍCIÓ. Két a P_o-ban egymást metsző síkgörbe hajlásszöge a két görbéhez a metszéspontban húzott érintők által bezárt – derékszögnél nem nagyobb szög.

6.4.3 Síkgörbék érintkezése

DEFINÍCIÓ. Az f és a g függvények legyenek az x_o pontban legalább n-szer differenciálhatók és

$$f(x_o)=g(x_o),\quad f'(x_o)=g'(x_o),\quad f''(x_o)=g''(x_o),\ldots,f^{(n)}(x_o)=g^{(n)}(x_o)$$

de $f^{(n+1)}(x_o)$ és $g^{(n+1)}(x_o)$ nem egyenlők v. nem léteznek,

akkor f és g függvények görbéi x_o-ban n-edrendben érintik egymást.

6.5 Egyenletek közelítő megoldása Newton – módszerrel

6.5.1 Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

1. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f korlátos az $[a,b]$-n.

2. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f az $[a,b]$-on felveszi legnagyobb és legkisebb értékeit.

3. TÉTEL Ha f folytonos $[a,b]$-n és $f(a)\cdot f(b)<0$; akkor $\exists\, c\in\,]a,b[$, ahol $f(c)=0$.

4. TÉTEL Legyen f folytonos az $]a;b[$ – n, $\forall\, x_1,x_2\in\,]a;b[$ esetén, ha $f(x_1)\neq f(x_2)$, akkor f minden $f(x_1)$ és $f(x_2)$ közötti értéket felvesz az $]x_1;x_2[$-on.

6.5.2 Egyenletek közelítő megoldása

Egyismeretes egyenlet általános alakja:

$$f(x)=0$$

A gyakorlatban az egyenletek megoldásait elég csak bizonyos pontossággal megadni, azaz a gyököket közelítő eljárással határozhatjuk meg.

Az $f(x)=0$ egyenlet megoldásait 2 lépésben határozhatjuk meg:

1. Tájékozódunk az egyenlet gyökeinek számáról és elhelyezkedéséről, majd ha tudjuk, elkülönítjük a gyököket, azaz olyan véges, zárt intervallumokat határozunk meg, amelyekben csak egyetlen gyök van. (Ezt gyakran grafikusan oldjuk meg.)
2. Az előzőleg meghatározott intervallumokban valamilyen közelítő módszerrel kiszámítjuk a gyökök közelítő értékét.

PÉLDÁK

1. Bizonyítsuk be, hogy a $10^x-2x-5=0$ egyenletnek csak egyetlen megoldása van a $[0;1]$ – ban.

Megoldás

$f(x)=10^x-2x-5 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-4 \\ f(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Mivel f folytonos a $[0;1]-$on $\Rightarrow$

$\exists\, c \in]0;1[$, melyre $f(c)=0$

$f'(x)=10^x\cdot \ln 10-2$

$f''(x)=10^x\cdot(\ln 10)^2>0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ szigorúan monoton nő , de ekkor

$f'(0)=\ln 10-2>0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$ a $[0,1]-$on,

tehát $f(x)$ szigorúan monoton nő a $[0,1]-$on $\Rightarrow$

f -nek egyetlen zérushelye van a $[0,1]-$on.

6.5.3 Newton – féle érintőmódszer

Numerikus módszer az $f(x)=0$ egyenlet közelítő megoldására

$f(\xi)=0$ és $\xi\in[a,b]$ ξ közelítő értékét keressük.

A Newton–módszer alkalmazható, ha $f(x)$ az $[a;b]-$n teljesíti a következőket:

1) kétszer differenciálható
2) $f'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in[a,b]$ (tehát $f'(x)$ állandó előjelű $\Rightarrow$ f szig. monoton!)
3) $f''(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in[a,b]$ (tehát $f'(x)$ állandó előjelű $\Rightarrow$ f-nek nincs inflexiós pontja)

Az $[a,b]$ intervallum azon végpontjából indulunk, ahol a függvényérték előjele azonos $f''(x)$ előjelével.

A kezdőpont legyen pl. a **b** pont. Ekkor **b** pontban felírjuk az érintő egyenletét:

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

Megkeressük az érintő egyenes x tengellyel való metszéspontját ez legyen x_1

$$0-f(b)=f'(b)(x_1-b)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Majd a következő érintőt az x_1 pontban húzzuk a görbéhez, ennek az x tengellyel való metszéspontja x_2 ,

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

és így tovább

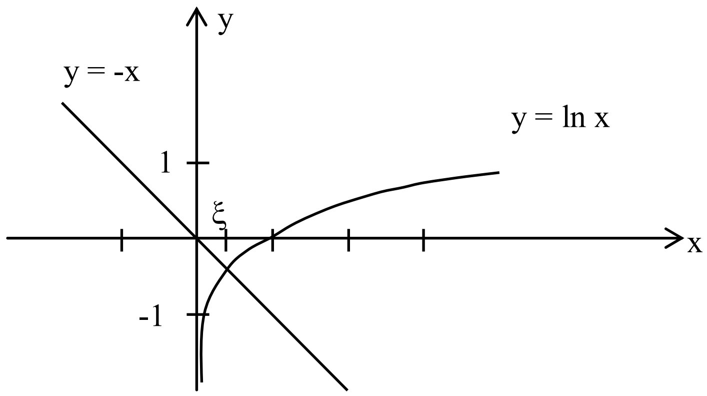
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_n)}$$

$x_1,\ x_2,.......x_n$ értékek monoton közelítenek a ξ értékhez.

PÉLDA Oldjuk meg az $x + \lg x = 0$ egyenletet!

Megoldás $f(x) = x + \lg x$ $D_f = \mathbb{R}^+$

$\lg x = -x$ mindkét oldalt ábrázoljuk



$\xi \in [0,1;1]$

mert $f(0,1) = -0,9$

$f(1) = 1$

$$f(x) = x + \lg x$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x \ln 10} > 0$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2 \ln 10} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0,1 - \text{ből indulunk}$$

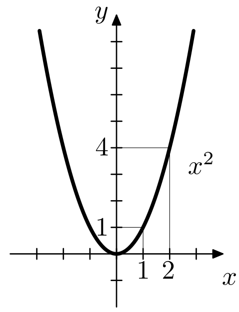
n	x_n	$f(x_n) = x_n + \lg x_n$	$f'(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n \ln 10}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,1	- 0,9	5,343	0,2684
1	0,2684	- 0,3028	2,618	0,3841
2	0,3841	- 0,0315	2,131	0,3989
3	0,3989	- 0,00025	2,08873	0,3991
4	0,3991	- 0,000018	2,08818	

Tehát $\xi \approx 0,3991$

Hatványfüggények

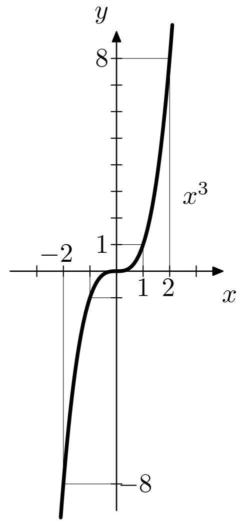
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

- n páros (Pl.: x^2, x^4, x^6 stb.)



$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0, \infty)$
ZH $= \{0\}$
páros
nem monoton (szig. mon. csökkenő $(-\infty, 0]$-on,
szig. mon. növekvő $[0, \infty)$-on)

- n páratlan (Pl.: x^3, x^5, x^7 stb.)

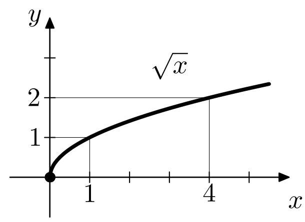


$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{R}$
ZH $= \{0\}$
páratlan
szig mon. növő

Gyökfüggények

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \{2, 3, 4, \dots\})$

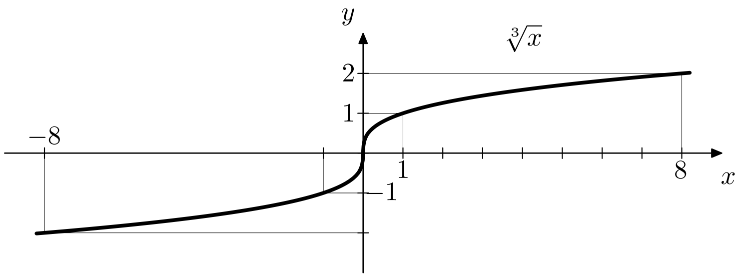
- n páros (Pl.: $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$ stb.)



$D_f = [0, \infty)$
$R_f = [0, \infty)$
ZH $= \{0\}$

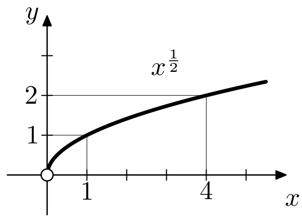
szig. mon. növő

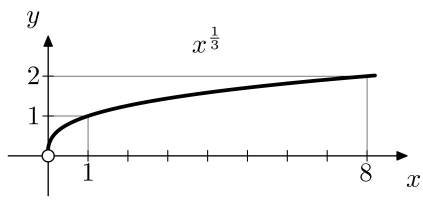
- n páratlan (Pl.: $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[7]{x}$ stb.)



$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{R}$
ZH $= \{0\}$
páratlan
szig. mon. növő

Megjegyzés: A gyökfüggvények nem azonosak a nekik megfelelő törtkitevős hatványfüggvényekkel! Pl.: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ minden pozitív valós számra, de amint az a grafikonok összehasonlításából látható, mint függvények, korántsem egyeznek meg: amíg a gyökfüggvények értelmezettek a 0-ban is, addig a törtkitevős hatványfüggvények csak a pozitív számokon. Természetesen az $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ és az $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ sem azonosak, de itt az értelmezési tartományok már nem csak egy pontban különböznek.



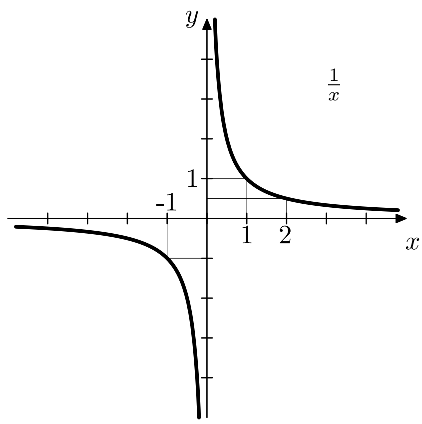


Törtfüggények

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

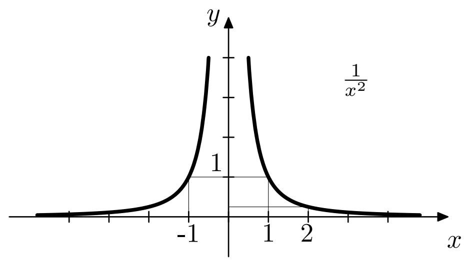
- n páratlan (Pl.: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}$ stb.)

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  ZH $= \emptyset$
  páratlan
  nem monoton (szig. mon. csökkenő a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$-okon)



- n páros (Pl.: $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}$ stb.)

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  $R_f = \mathbb{R}^+$
  ZH $= \emptyset$
  páros
  nem monoton (szig. mon. növekvő a $(-\infty, 0)$-on, szig. mon. csökkenő a $(0, \infty)$-on)



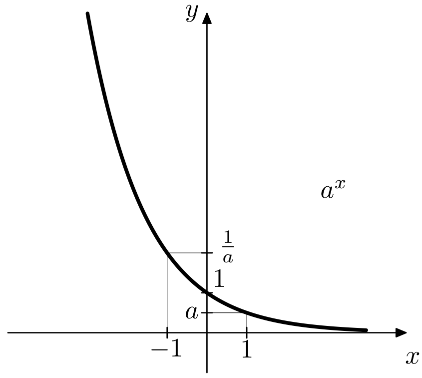
Exponenciális és logaritmus függvények

$f(x) = a^x$ $\qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

- $a \in (0,1)$ $\qquad$ (Pl.: $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{10}\right)^x, \left(\frac{1}{e}\right)^x$ stb.)

  $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
  $\mathrm{R}_f = (0, \infty)$
  $\mathrm{ZH} = \emptyset$

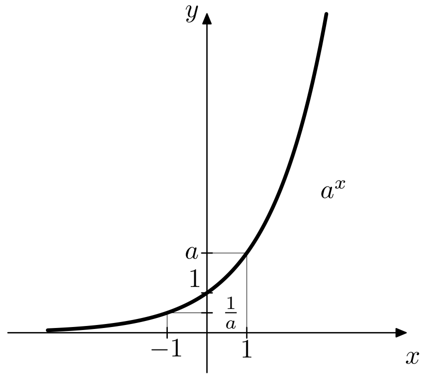
  szig. mon. csökkenő



- $a \in (1,\infty)$ $\qquad$ (Pl.: $2^x, 10^x, e^x$ stb.)

  $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
  $\mathrm{R}_f = (0, \infty)$
  $\mathrm{ZH} = \emptyset$

  szig. mon. növő

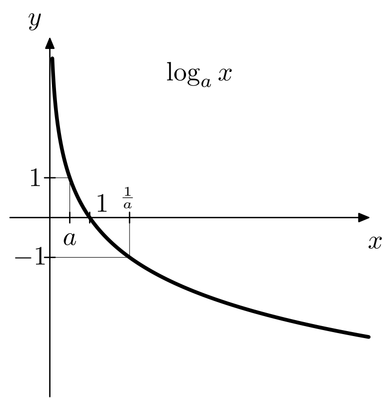


$f(x) = \log_a x$ $\qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

- $a \in (0,1)$ $\qquad$ (Pl.: $\log_{\frac{1}{2}} x, \log_{\frac{1}{10}} x, \log_{\frac{1}{e}} x$ stb.)

  $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^+$
  $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$
  $\mathrm{ZH} = \{1\}$

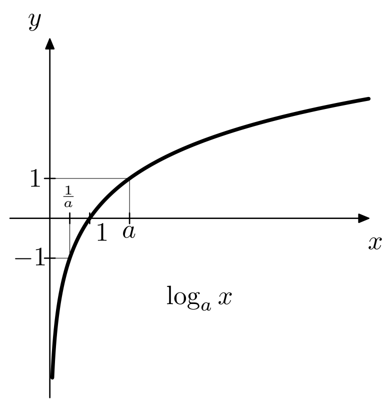
  szig. mon. csökkenő



- $a \in (1,\infty)$ $\qquad$ (Pl.: $\log_2 x, \lg x, \ln x$ stb.)

  $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^+$
  $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$
  $\mathrm{ZH} = \{1\}$

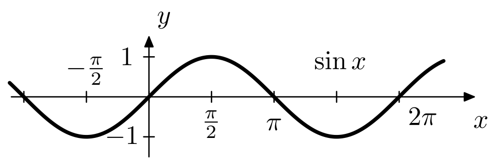
  szig. mon. növő



Trigonometrikus függények

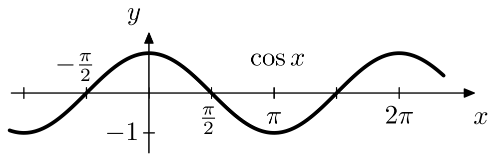
$f(x) = \sin x$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{R}_f = [-1, 1]$
ZH $= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
páratlan, periodikus (p=2π)
nem monoton (szig. mon. növő a
$(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$,
szig. mon. csökkenő a
$(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$)



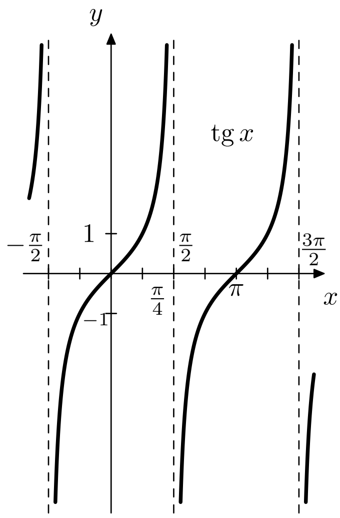
$f(x) = \cos x$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathrm{R}_f = [-1, 1]$
ZH $= \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
páros, periodikus (p=2π)
nem monoton (szig. mon. növő a
$(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$,
szig. mon. csökkenő a
$(2k\pi, \pi + 2k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$)



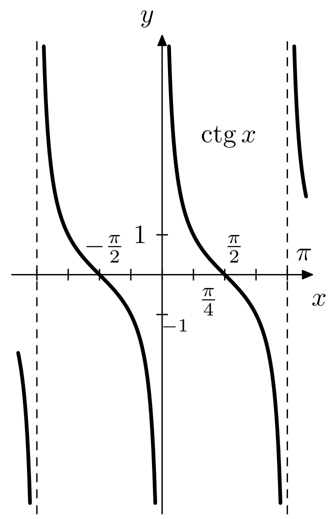
$f(x) = \operatorname{tg} x$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$
ZH $= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
páratlan, periodikus (p=π)
nem monoton (szig. mon. növő a
$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$)



$f(x) = \operatorname{ctg} x$

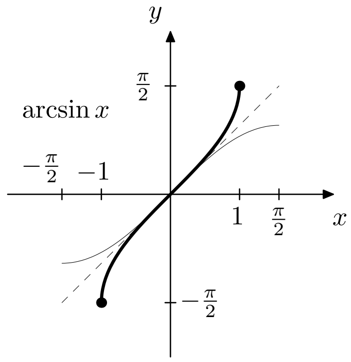
$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$
ZH $= \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
páratlan, periodikus (p=π)
nem monoton (szig. mon. csökkenő a
$(k\pi, \pi + k\pi)$-okon $(k \in \mathbb{Z})$)



Trigonometrikus függények inverzei (árkusz függvények)

$f(x) = \arcsin x$

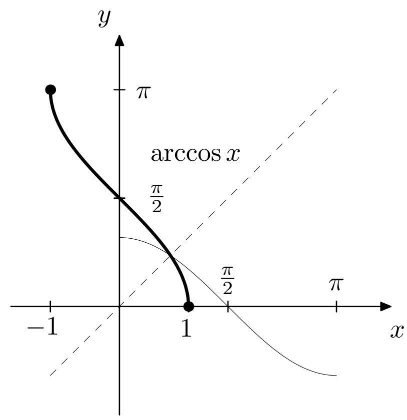
$D_f = [-1, 1]$
$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
ZH $= \{0\}$
páratlan
szig. mon. növő



$f(x) = \arccos x$

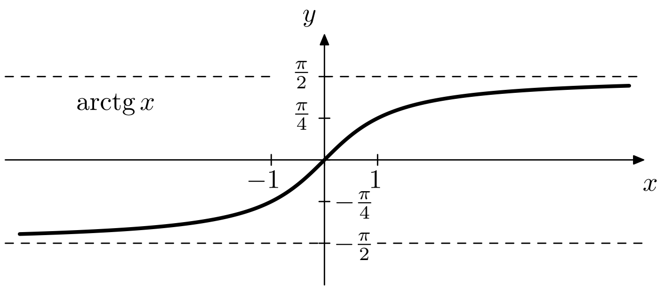
$D_f = [-1, 1]$
$R_f = [0, \pi]$
ZH $= \{1\}$

szig. mon. csökkenő



$f(x) = \mathrm{arctg}\, x$

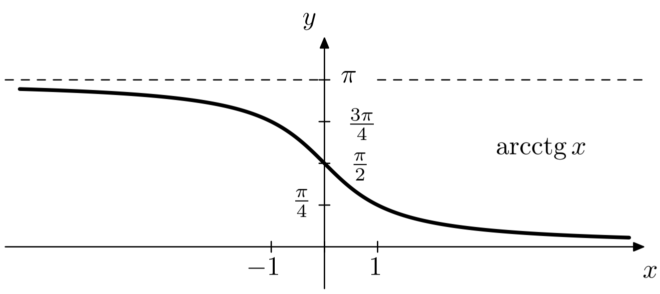
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
ZH $= \{0\}$
páratlan
szig. mon. növő



$f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = (0, \pi)$
ZH $= \emptyset$

szig. mon. csökkenő



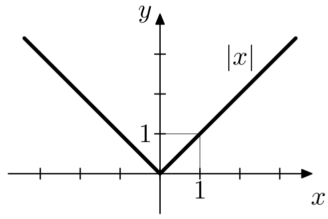
Egyéb (nem elemi) függények

$f(x) = |x|$

Az abszolútérték definíciója:

$$|x| := \begin{cases} x\,, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ -x\,, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0, \infty)$
ZH $= \{0\}$
páros
nem monoton (szig. mon. csökkenő $(-\infty, 0]$-on,
szig. mon. növekvő $[0, \infty)$-on)

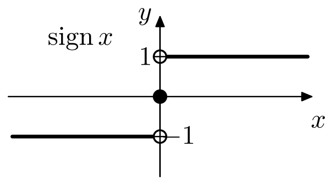


$f(x) = \operatorname{sign} x$

A sign definíciója:

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} \frac{x}{|x|}\,, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \{-1, 0, 1\}$
ZH $= \{0\}$
páratlan
monoton növő

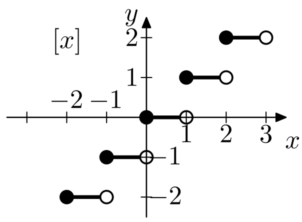


$f(x) = [x]$

Az egészrész definíciója: $[x] := \max\{\, m \mid m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$

$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{Z}$
ZH $= [0, 1)$

monoton növő



$f(x) = \{x\}$

A törtrész definíciója: $\{x\} := x - [x]$

$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [0, 1)$
ZH $= \mathbb{Z}$
periodikus (p=1)
nem monoton (szig. mon. növekvő az $[m, m+1)$
intervallumokon $(m \in \mathbb{Z})$)