EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK

EÖTVÖS JÓZSEF FŐISKOLA * BAJA

MŰEGYETEM 1782

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM GYŐR

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM Pollack Mihály Műszaki Kar

MECHANIKA I. STATIKA

PMSTNB 211 segédlet a PTE PMMK építészmérnök hallgatói részére

„Az építész- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

MECHANIKA I.
STATIKA

Hajósné Temesi Eszter

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar,
Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék
<temesie@witch.pmmf.hu>

2007

Részletes tantárgyprogram:		
Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Statikai alapfogalmak. Síkbeli erők. Síkbeli erőrendszerek. Erővektorok, erőfelbontás, előjelszabályok. A statika alaptételei. Eredő fogalma, meghatározása. Erővektorok, erőfelbontás. Eredő meghatározása szerkesztéssel és számítással, párhuzamos erőkből álló, valamint közös metszéspontú síkbeli erőrendszer esetén.
	2 óra gyakorlat	Eredő nagyságának és helyének meghatározása szétszórt síkbeli erőrendszer esetén szerkesztéssel (kötélsokszög szerkesztés), és számítással
3.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síkbeli erőrendszerek egyensúlyozása. Egyensúlyozás egy, kettő, és három erővel. Síkbeli erőrendszerek egyensúlyozása egy, kettő, és három erővel.
4.	2 óra gyakorlat	Síkbeli erőrendszerek egyensúlyozása egy, kettő, és három erővel.
5.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síkbeli tartók fogalma, a tartók csoportosítása, tartók minősítése, statikailag határozott tartók. Statikai modell. Síkbeli tartók egyensúlyozása
6.		ŐSZI SZÜNET
7.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síkbeli rácsos tartók fogalma, számítási modell, rúderő számítási módszerek. Csomóponti módszer, hármas átmetszés. **I. ZH. SÍKBELI ERŐK EREDŐJÉNEK MEGHATÁROZÁSA, EGYENSÚLYOZÁS** (órarenden kívüli időpontban) Zárthelyi feladatok kiértékelése
8.	2 óra gyakorlat	Síkbeli rácsostartók, csomóponti módszer.
9	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Belső erők fogalma. Előjelszabályok. Belső erő ábrák. Egyenestengelyű tartók belső erői. Síkbeli rácsostartók, hármas átmetszés.
11.	2 óra gyakorlat	Egyenestengelyű, kéttámaszú gerendatartók belső erő ábrái.
12.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Törtvonalú és ágas tartók belső erő ábrái. Ferde helyzetű kéttámaszú tartók belső erő ábrái.
13.	2 óra gyakorlat	Törtvonalú és ágas tartók belső erő ábrái.
14.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Három csuklós kerettartó, csuklós többtámaszú (Gerber) tartók belső erő ábrái Csuklós tartók belső erő ábrái
15.	 2 óra gyakorlat	**II. ZH SÍKBELI TARTÓK BELSŐ ERŐ ÁBRÁI** (órarenden kívüli időpontban) Zárthelyi feladatok kiértékelése, félévzárás.

TARTALOMJEGYZÉK:

1. A statika tárgya

A statika a Mechanika tudománynak azon része, amely a testek nyugalmi állapotával foglalkozik. A Mechanika a természettudományok körébe tartozik, a Fizika tudomány része. A Statika a Mechanika tudományágon belül a nyugalomban lévő testek egymásra hatását vizsgálja.

1.1. Síkbeli erők

Az erő az a hatás, amely a test mozgásállapotát változtatja meg, irány vagy nagyság szerint. Az erő nem látható, jelenlétére csak hatásaiból következtethetünk.

Az erő jellemzői: az erő hatásvonala, iránya és nagysága.
Az erő egysége newton (N), amely egységnyi tömegű (1 kg) testnek egységnyi (1 m/s^2) gyorsulást ad.

A N többszörösei a mérnöki gyakorlatban: 1kN = 10^3 N 1 MN = 10^3 kN = 10^6 N

Az erők fajtái:

Erő	jelölés	mértékegység	gyakorlatban
Koncentrált erő	F, P, Q..... (latin nagy betűkkel)	N, kN, MN	Pillérteher födémre, alapra
Vonal mentén megoszló erő	q, p, g…… (latin kis betűkkel)	N/m, kN/m	Válaszfal teher födémre
Felületen megoszló erő	q, p, g…… (latin kis betűkkel)	N/m^2, kN/m^2	Hóteher tetőn, szélteher falon
Térben megoszló erők	γ (görög kis betűkkel)	kN/m^3	súlyerő

Az erők ábrázolása történhet nézetrajzon és vektorábrán.

A nézetrajz a vizsgált merev test méreteit ábrázolja mérethelyesen, amelyen ábrázoljuk az erő támadáspontját, hatásvonalát, irányát, valamint számszerűen megadjuk az erő nagyságát is.

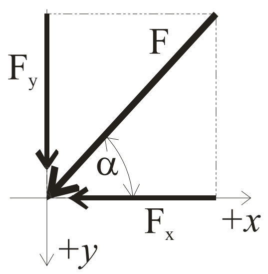
A vektorábrán az erő vektorát ábrázoljuk, amely ábrázolás az erő jellemzőit egyesíti, az erőlépték feltüntetésével az erő nagysága is egyértelművé válik.

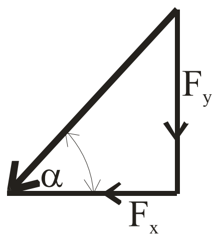
Az erők felbontása vetületeikre:

A síkban egy derékszögű koordináta rendszerben dolgozunk, az általános helyzetű erőt felbontjuk a koordináta tengelyekre vonatkozó vetületeire. Az erőfelbontást az erőnek a tengelyekre történő merőleges vetítésével kapjuk. Az általánosan használt tengelykeresztet a vízszintes-függőleges tengelyekből áll.

Az általános síkbeli erő két egymásra merőleges vetületének meghatározása számítással a derékszögű háromszögekre vonatkozó geometriai összefüggések alapján történik.

A vetületek előjelei megállapodás szerint:





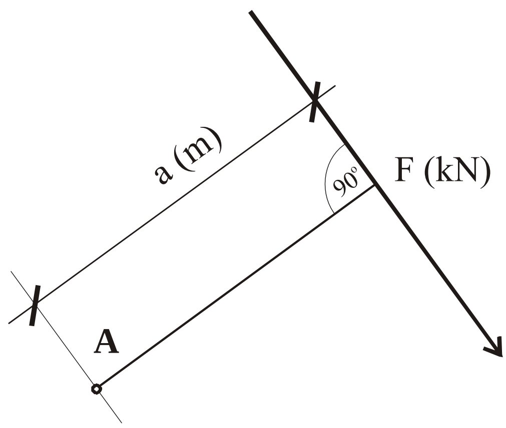
$$F_X = -F \cdot \cos\alpha$$

$$F_Y = F \cdot \sin\alpha$$

$$F = \sqrt{F_X{}^2 + F_Y{}^2}$$

$$tg\alpha = \frac{F_Y}{F_X}$$

Az erő nyomatéka:



A síkbeli erőknek, ugyanazon síkban kiválasztott tetszőleges pontra vonatkoztatott forgató hatását forgató nyomatéknak nevezzük. A nyomatékot a nagysága és az iránya jellemzi.

Mértékegysége. Nm, kNm

Az F erő forgató nyomatéka az A pontra:

$M_A = F \cdot a$ ahol F: az erő nagysága

a: az erő karja (merőleges távolság)

A forgatónyomaték előjele megállapodás alapján: pozitív a forgató nyomaték, ha az erő a forgási pont körül az óramutató járásával megegyezően forgat.

Több síkbeli erő forgatónyomatékát összegezhetjük a sík egy kiválasztott pontjára úgy, hogy az egyes erők forgatónyomatékait előjelhelyesen összegezzük.

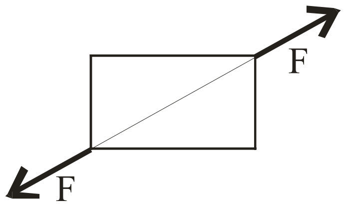
Az erőpár

Két egymással párhuzamos hatásvonalon működő, azonos nagyságú, de ellentétes irányú erő erőpárt alkot. Az erőpár hatása forgatónyomaték, amelyet az erő és a köztük lévő merőleges távolság szorzataként számíthatunk. Az erőpár vetületösszege a sík bármely tengelyére zérus, az erőpár forgatónyomatéka a sík bármely pontjára ugyanakkora.

1.2 A statika alaptételei

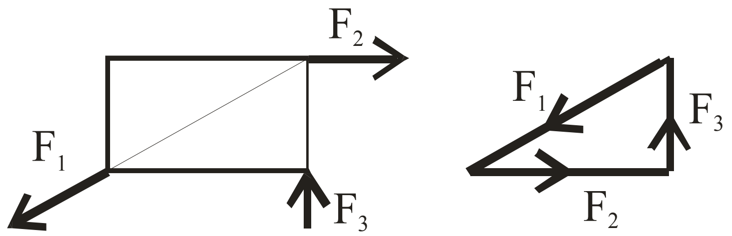
Első alaptétel (két erő egyensúlyára vonatkozik)

Egy merev testre ható két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha azonos hatásvonalon működnek, azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak.



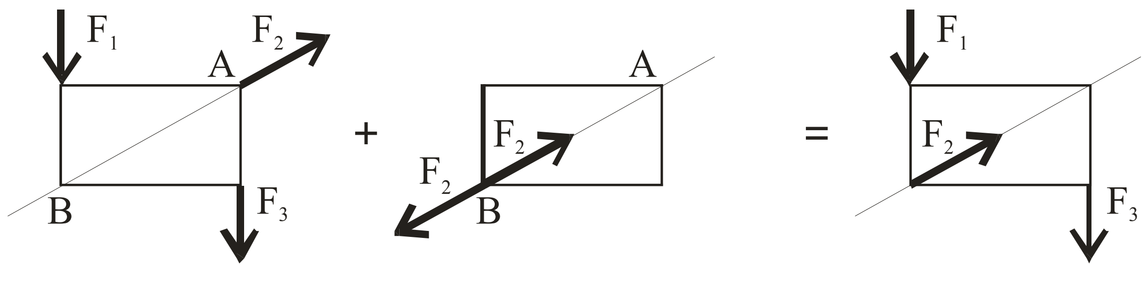
Második alaptétel (három erő egyensúlyára vonatkozik)

Egy merev testre ható, három különböző hatásvonalú erő akkor, és csak akkor van egyensúlyban, ha hatásvonalaik közös pontban metszik egymást, és a három erőből zárt és nyílfolytonos vektorháromszög szerkeszthető.



Harmadik alaptétel:

Merev testre ható erőrendszer hatása nem változik, ha egyensúlyban lévő erőket adunk hozzá, vagy veszünk el belőle. Ez a tétel igazolja, hogy az erő hatásvonalán eltolható, vagyis a támadáspont az erő hatásvonalán bárhol felvehető.



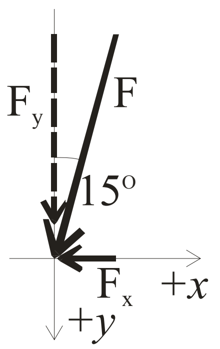
Negyedik alaptétel: Isaac Newton törvénye

Hatás – ellenhatás törvénye. Minden erőhatás (akció) ellenhatást (reakció) vált ki, a párosával jelentkező két hatás közös hatásvonalon működik, azonos nagyságú, de ellentétes irányú.

1.3 Síkbeli erőrendszerek

- Párhuzamos erőkből álló síkbeli erőrendszer (az erők közös tulajdonsága, hogy hatásvonalaik párhuzamosak)
- Közös metszéspontú erőkből álló síkbeli erőrendszer (az erők közös tulajdonsága, hogy hatásvonalaik egy pontban metszik egymást)
- Általános (szétszórt) síkbeli erőrendszer (az erők közös tulajdonsága csupán annyi, hogy hatásvonalaik egy közös síkban fekszenek)

Részletesen megoldott feladatok az erőfelbontásra:

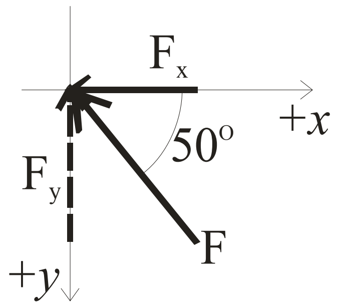


Adott az y tengellyel bezárt szög

F = 30 kN

$F_x = F \cdot \sin 15° = 30 \cdot 0{,}2588 = -7{,}76$ kN

$F_y = F \cdot \cos 15° = 30 \cdot 0{,}9659 = +28{,}98$ kN

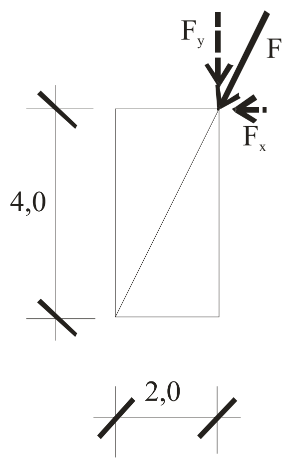


Adott az x tengellyel bezárt szög

F = 50 kN

$F_x = F \cdot \cos 50 = 50 \cdot 0{,}6427 = -32{,}13$ kN

$F_y = F \cdot \sin 50° = 50 \cdot 0{,}7660 = +38{,}3$ kN



Az erők hatásvonalát egy síkbeli alakzathoz kötjük

(az alakzatban fellelhető háromszög, hasonló az erő felbontásához rajzolható vektorháromszöghöz)

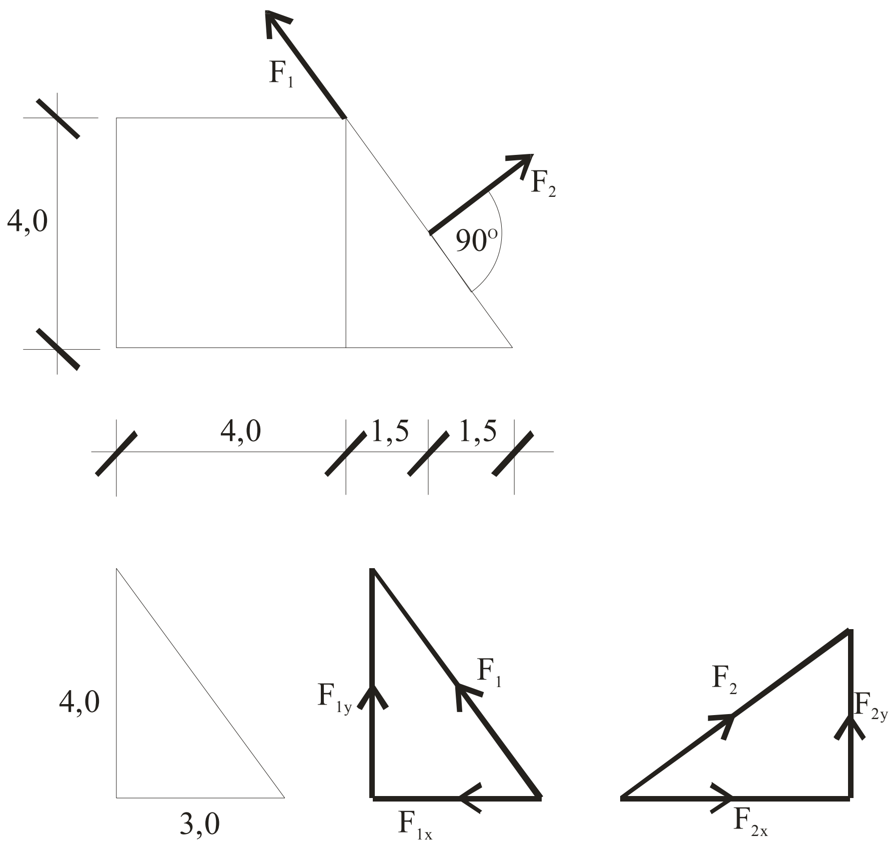
F = 40 kN

$4{,}47 : 4 = F : F_y$

$F_y = 35{,}79$ kN

$4 : 2 = 35{,}79 : F_x$

$F_x = 17{,}895$ kN



Adott egyenessel egybeeső, és arra merőleges hatásvonalú erők felbontása hasonló háromszögekkel

(az alakzatban fellelhető háromszög hasonló az erő felbontásához rajzolható vektorháromszögekkel)

$$F_{1x} = -12 \cdot \frac{3}{5} = -7{,}2\ kN \leftarrow$$

$$F_{1y} = -12 \cdot \frac{4}{5} = -9{,}6\ kN \uparrow$$

$$F_{2x} = 8 \cdot \frac{4}{5} = 6{,}4\ kN \rightarrow$$

$$F_{2y} = 8 \cdot \frac{3}{5} = -4{,}8\ kN \uparrow$$

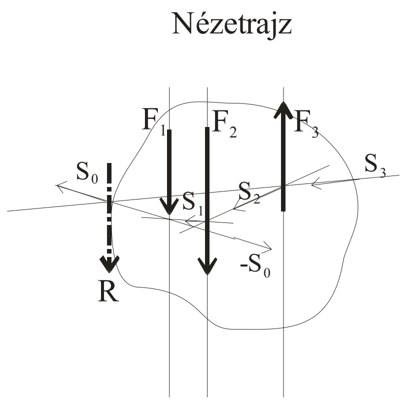
2. Eredő

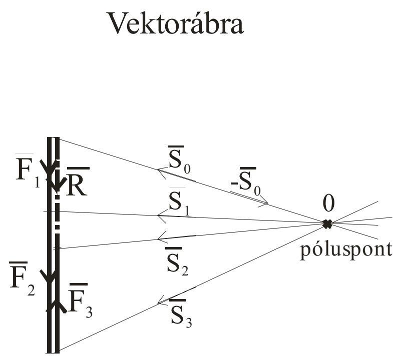
Az eredő fogalma: az eredő a síkbeli erőrendszert mindenféle hatásában helyettesíti, tehát az eredő vetülete a sík bármelyik tengelyére megegyezik az erőrendszernek ugyanezen tengelyre számított vetületösszegével, a sík bármely pontjára vonatkozó nyomatéka pedig megegyező, az erőrendszernek ugyanezen pontra számított előjelhelyes nyomaték összegével.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = R_X \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = R_Y \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{\alpha i} = M_{\alpha R}$$

2.1 Párhuzamos síkbeli erőrendszer eredője

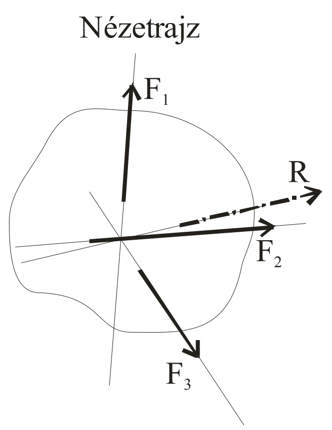
Az eredő hatásvonala az erők hatásvonalával megegyező lesz. Az eredő a vektorábrát nyíl ütközéssel zárja.

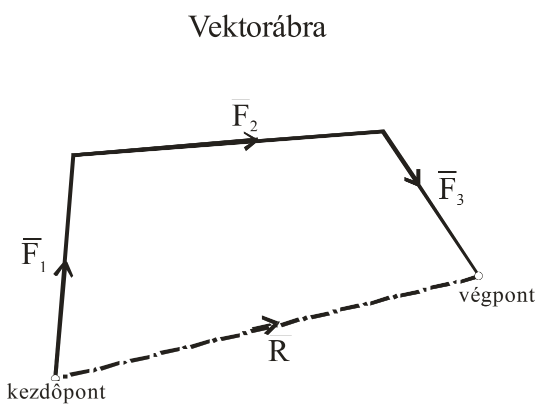




2.2 Közös metszéspontú síkbeli erőrendszer eredője

Az eredő hatásvonala a közös metszésponton keresztül kell, hogy menjen, Az eredő a vektorábrát nyíl ütközéssel zárja.

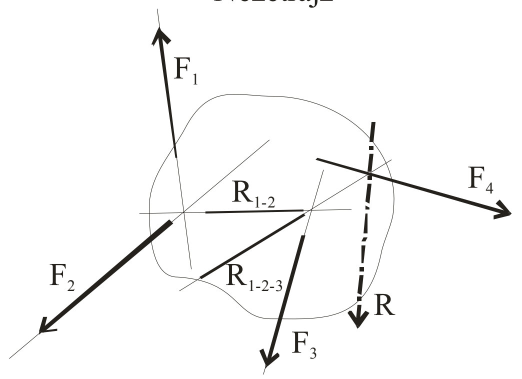




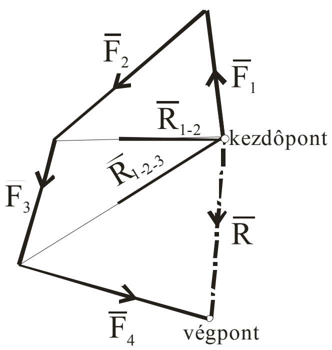
2.3 Szétszórt síkbeli erőrendszer eredője

Az eredő meghatározható közvetlen erőösszetétellel:

Nézetrajz

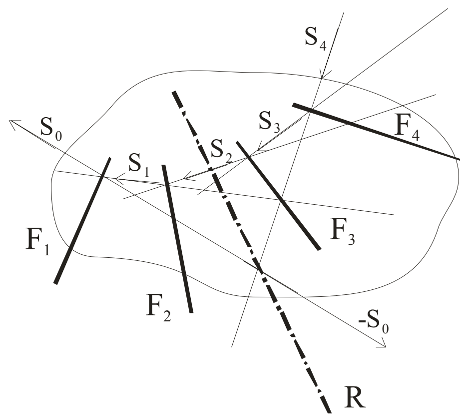


Vektorábra

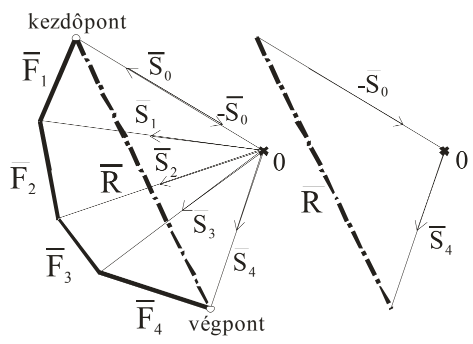


Az eredő meghatározható az un. kötélsokszög szerkesztéssel is.

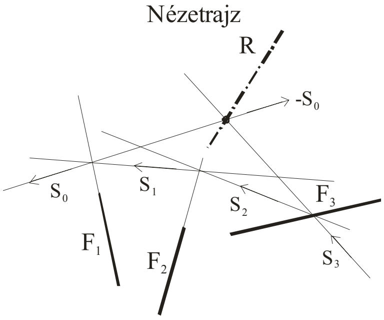
Nézetrajz

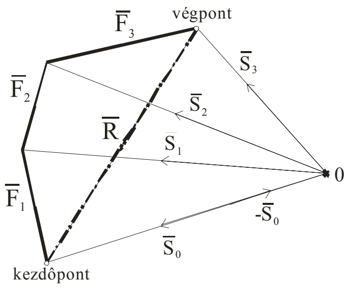


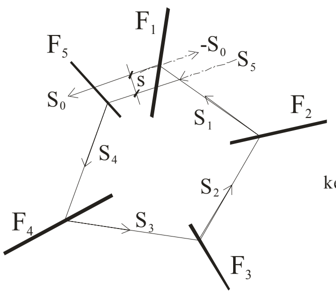
Vektorábra

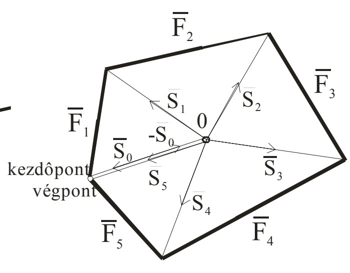


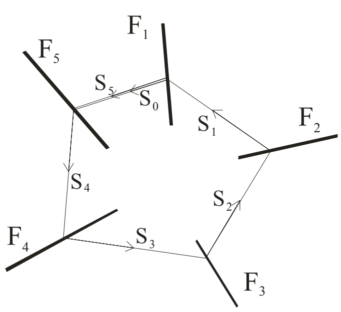
Síkbeli erőrendszer vizsgálata az eredő szempontjából

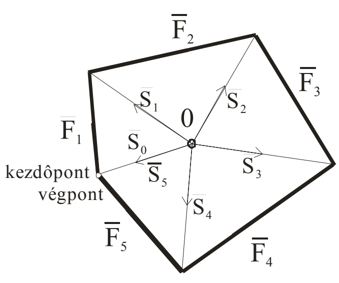
<table>
<tr><th>Eredő lehet</th><th>szerkesztéssel</th><th>számítással</th></tr>
<tr><td>Véges nagyságú erő</td><td>Az erőkből szerkesztett vektorsokszög nyitott, vagyis a vektorábra kezdő és végpontja nem esik egybe.
Nézetrajz


nyitott kötélsokszög
Vektorábra


nyitott vektorsokszög</td><td>Az erőrendszer tagjaiból felírt előjelhelyes vetületösszegek közül, legalább az egyik nem egyenlő zérussal.
$\sum F_{iX} \neq 0 \quad \sum F_{iY} = 0$
az eredő ↔
$\sum F_{iX} = 0 \quad \sum F_{iY} \neq 0$
az eredő ↕
$\sum F_{iX} \neq 0 \quad \sum F_{iY} \neq 0$
az eredő általános helyzetű</td></tr>
<tr><td>Erőpár</td><td>Az erőkből szerkesztett vektorsokszög zárt, a kötélsokszög pedig nyitott. A kötélsokszög első és utolsó oldala egymással párhuzamos.
Nézetrajz


nyitott kötélsokszög
Vektorábra


zárt vektorsokszög</td><td>Az erőrendszer tagjaiból felírt vetületösszegek zérussal egyenlő. A sík bármely pontjára felírt nyomatékösszeg nem egyenlő zérussal.
$\sum F_{iX} = 0$
$\sum F_{iY} = 0$
$\sum M_{\alpha i} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Zérus</td><td>Az erőrendszer egyensúlyban van. A vektorsokszög is és a kötélsokszög is zárt
Nézetrajz


zárt kötélsokszög
Vektorábra


zárt vektorsokszög</td><td>Az erőrendszer tagjaiból felírt vetületösszegek és a nyomatéköszeg is egyenlő zérussal.
$\sum F_{iX} = 0$
$\sum F_{iY} = 0$
$\sum M_{\alpha i} = 0$</td></tr>
</table>

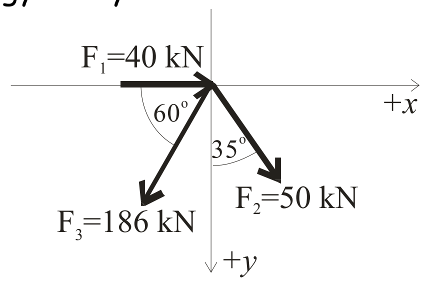
3. Egyensúlyozás

A statikában leginkább azzal foglalkozunk, hogyan lehet egy merev testre ható erőrendszert az erők síkjában működő egy, vagy több erővel egyensúlyozni.
Az erőrendszer egyensúlyban (nyugalomban) van, ha teljesülnek az egyensúly feltételei. Az egyensúlyozó hatást E betűvel jelölve, a következő számítási összefüggésekkel igazolható az egyensúly:

$$\sum F_{iX} + E_X = 0 \qquad \sum F_{iY} + E_Y = 0 \qquad \sum M_{AF_i} + M_{AE} = 0$$

3.1 Egyensúlyozás 1 erővel

A statika első alaptételének felhasználásával, az egyensúlyozó erő az erőrendszer eredőjével azonos nagyságú, vele azonos hatásvonalon működő, de ellentétes irányú lesz. Az egyensúlyozó erő a vektorábrát nyílfolytonosan zárja.



$F_{1x} =$	$= \ 40$ kN ($\rightarrow$)	$F_{1y} =$	$= 0$
$F_{2x} = -186 \cdot 0{,}5$	$= -93$ kN ($\leftarrow$)	$F_{2y} = 186 \cdot 0{,}866$	$= 161{,}08$ kN ($\downarrow$)
$F_{3x} = 50 \cdot 0{,}574$	$= \ 28{,}68$ kN ($\rightarrow$)	$F_{3y} = 50 \cdot 0{,}819$	$= \ 40{,}96$ kN ($\downarrow$)
ΣF_{ix}	$= -24{,}32$ kN($\leftarrow$)	ΣF_{iy}	$= 202{,}04$ kN ($\downarrow$)

$\Sigma F_{ix} + E_x = 0$	$-24{,}32 + E_x = 0$	innen: $E_x = 24{,}32$ kN ($\rightarrow$)
$\Sigma F_{iy} + E_y = 0$	$202{,}04 + Ez = 0$	innen: $E_y = -202{,}04$ kN ($\uparrow$)

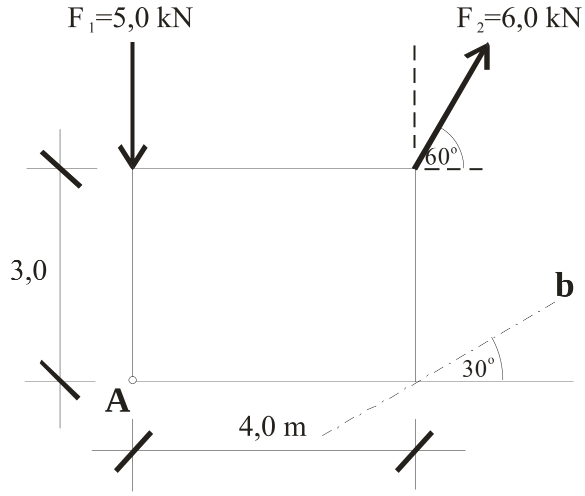
$$E = \sqrt{24{,}32^2 + 202{,}04^2} = 203{,}5 \quad kN$$

$$\alpha = arc\ tg \frac{202{,}04}{24{,}32} = 83{,}14^{\circ}$$

3.2 Egyensúlyozás két erővel (adott hatásvonalú és adott ponton átmenő erővel)

Az adott erőrendszer két erővel történő egyensúlyozásának számtalan megoldása van, ezért az egyensúlyozó erők tekintetében rögzíteni kell az egyik erő hatásvonalát, a másik erőnek pedig egy pontját.

Egyensúlyozzuk az erőrendszert, egy az „A” ponton átmenő és „b” hatásvonalú erővel
$F_{2x} = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3$ kN (→)
$F_{2y} = 6 \cdot \sin 60^\circ = 5{,}2$ kN (↑)



Nyomatéki egyenlet az A pontra (a „b” hatásvonalú erőt balra, lefelé mutatónak feltételezzük)

$$\sum M_A = 0$$
$$-5{,}2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + B_y \cdot 4 = 0$$
$$B_y = 2{,}95\ kN$$

(az eredmény + előjele arra utal, hogy az egyenlet felírásakor jól feltételeztük a B erő irányát)

A B erő hatásvonalát ismerjük, függőleges komponense segítségével a vízszintes komponens és maga a B erő is számítható:

$$B_x = \frac{2{,}95}{tg 30^\circ} = 5{,}11\ kN(\leftarrow)$$
$$B = \frac{2{,}.95}{\sin 30^\circ} = 5{,}9\ kN$$

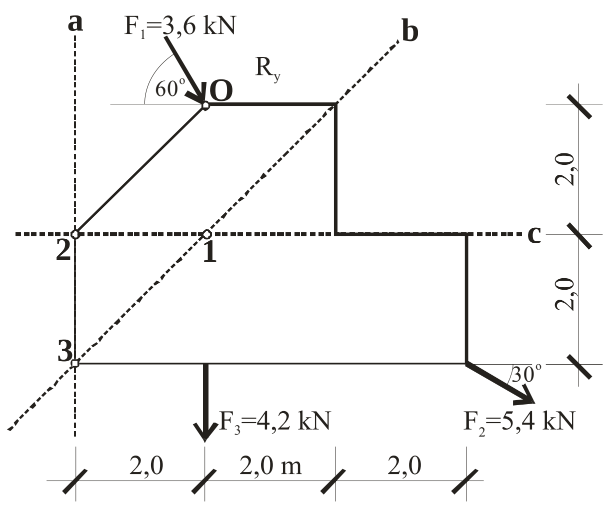
A vetületi egyenletekből A_x és A_y számítható

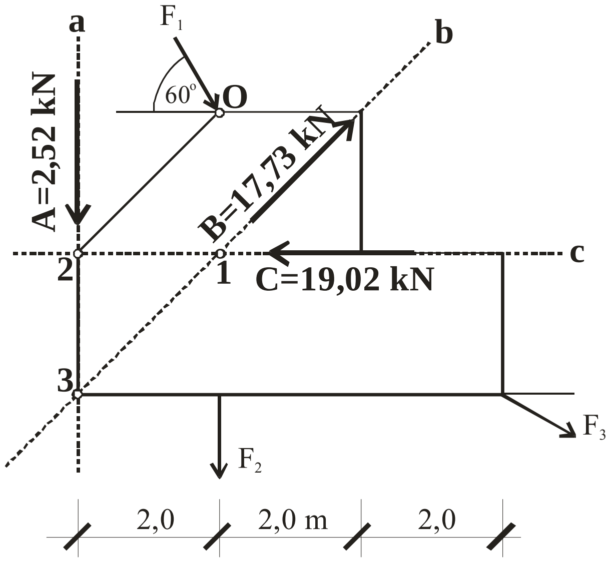
$$\sum F_x = 0 \qquad A_x + 3 - 5{,}11 = 0 \qquad A_x = 2{,}11\ kN(\rightarrow)$$
$$\sum F_y = 0 \qquad A_y + 5 - 5{,}2 - 5{,}11 + 2{,}95 = 0 \qquad A_y = -2{,}75\ kN(\uparrow)$$
$$A = \sqrt{2{,}11^2 + 2{,}75^2} = 3{,}47\ kN$$
$$\alpha = arc\ tg \frac{2{,}75}{2{,}11} = 52{,}5^\circ$$

3.3 Egyensúlyozás három adott hatásvonalú erővel (Ritter módszer)

A három adott hatásvonal tekintetében rögzítenünk kell, hogy a három hatásvonalnak nem lehet közös metszéspontja.
Miután három ismeretlen egyensúlyozó erő van, ezért olyan pontot kell keresni a síkban, amelyre felírt nyomatéki egyenletben csak egy ismeretlen van. Ez a pont, két egyensúlyozó erő metszéspontja lesz, ezt a pontot a harmadik egyensúlyozó erő főpontjának nevezzük.

$F_{1x} = -3{,}6 \cos 60° = -1{,}8$ kN $F_{2x} = -5{,}4 \cos 30° = -4{,}68$ kN
$F_{1y} = -3{,}6 \sin 60° = -3{,}12$ kN $F_{2y} = -5{,}4 \sin 30° = 2{,}7$ kN





Az „A" erő főpontja az 1 pont. Az erő irányát felfelé mutatónak feltételezzük.

$$\sum_{M1} = 0 \qquad +1{,}8 \cdot 2 - 4{,}68 \cdot 2 + 2{,}7 \cdot 4 + A \cdot 2 = 0 \qquad A = -2{,}52\ kN(\downarrow)$$

A „B" erő főpontja a 2 pont. Az erő irányát felfelé mutatónak feltételezzük.

$$\sum_{M2} = 0 \qquad +1{,}8 \cdot 2 + 3{,}12 \cdot 2 - 4{,}68 \cdot 2 + 2{,}7 \cdot 6 + 4{,}2 \cdot 2 - B \cdot 1{,}414 = 0 \qquad B = 17{,}73\ kN$$

A „C" erő főpontja a 3 pont. Az erő irányát jobbra mutatónak feltételezzük.

$$\sum_{M3} = 0 \qquad +1{,}8 \cdot 4 + 3{,}12 \cdot 2 + 2{,}7 \cdot 6 + 4{,}2 \cdot 2 + C \cdot 2 = 0 \qquad C = -19{,}02\ kN(\leftarrow)$$

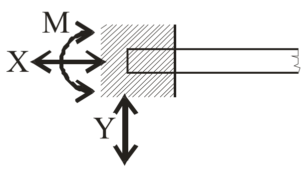
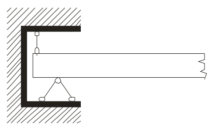
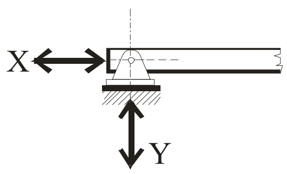
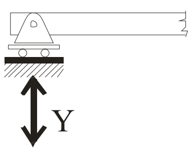
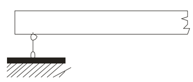
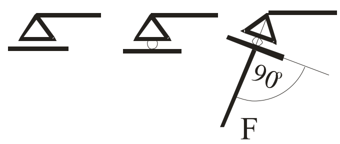
Az egyensúlyt a vetületi egyenletekkel, vagy a sík bármely pontjára felírt nyomatéki egyenlettel leellenőrizhetjük.

4. Síkbeli tartók

Tartószerkezeteknek (röviden: tartóknak) nevezzük azokat a különböző anyagú szerkezeteket, amelyek a terhek hordására, továbbítására alkalmasak, megfelelnek a velük szemben támasztott teherbírási, helyzeti állékonysági, használhatósági és más különleges követelményeknek.

Ebben a jegyzetben csak síkbeli rúdszerkezetekkel foglalkozunk. A síkbeli rúdszerkezeteket tengelyvonalukkal ábrázoljuk.

A tartókat a környezethez, illetve más teherhordó szerkezetekhez rögzíteni kell, a rögzítésre szolgáló szerkezeti elemeket támaszoknak nevezzük.

támasz	Egyensúlyozó erők	helyettesítés	Sematikus ábrázolás
Befogás			
Fix csukló			
Görgő			
Támasztórúd			

4.1 Síkbeli tartók minősítése, tartók csoportosítása

A síkbeli tartókat statikai szempontból két csoportba sorolhatjuk

- Statikailag határozott tartók
- Statikailag határozatlan tartók

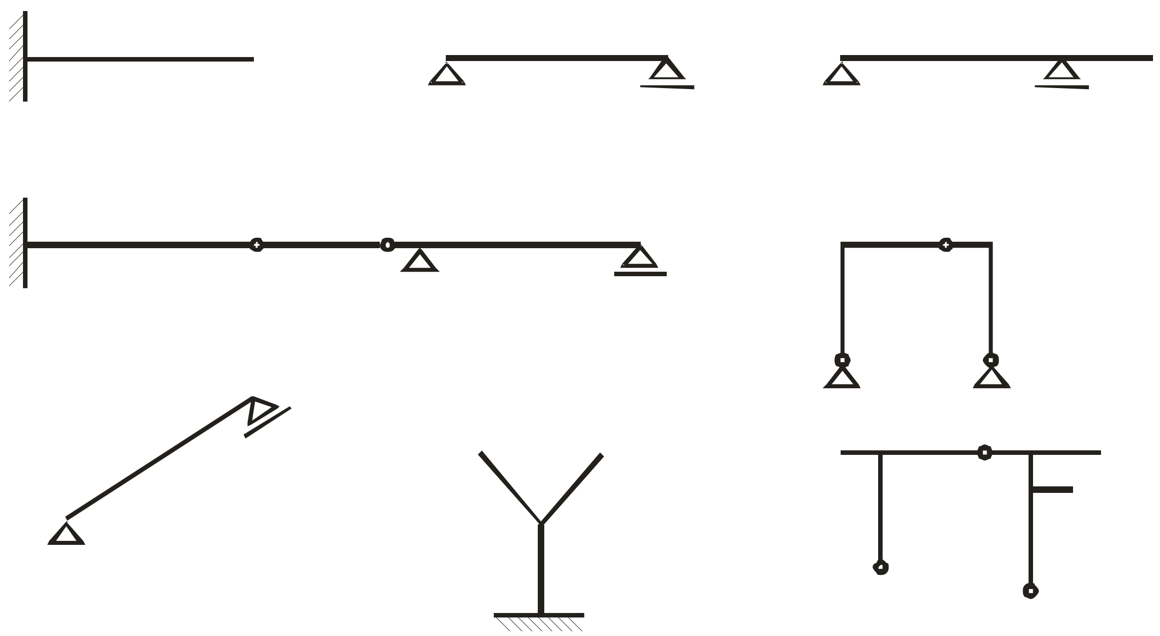
A tartók minősítése a terhelés ismeretében a tartóra ható külső erőrendszer vizsgálatával történik. A külső erőrendszert a terhek és a terheket egyensúlyozó reakció erők alkotják.
A külső erőrendszerben lévő egyensúlyozó ismeretlenek számát hasonlítjuk a max. 3 db egyensúlyi egyenlet számához.

vizsgálat	minősítés
Ismeretlenek száma = egyenletek száma	határozott
Ismeretlenek száma > egyenletek száma	határozatlan
Ismeretlenek száma < egyenletek száma	túlhatározott

A statikailag határozott tartókat csoportosíthatjuk alakjuk, és a környezettel ill. más tartószerkezetekkel kialakított kapcsolatuk szerint, például:

- Egy merev testből álló tartók: kéttámaszú tartó, konzol tartó
- Több merev testből álló szerkezetek: háromcsuklós keret, Gerber tartó

- Egyenes tengelyű tartó
- Törtvonalú, vagy ágas tartó



5. Síkbeli rácsos tartók

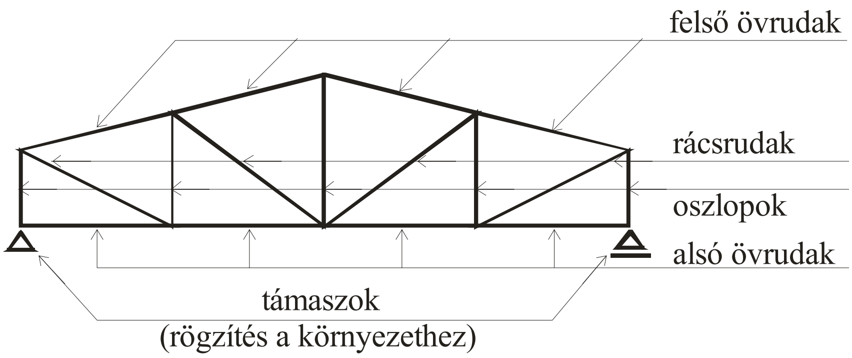
A síkbeli rácsos tartók egymással végükön összekapcsolt rudakból álló szerkezetek. Nagy fesztávok áthidalására alkalmas. A tartónak a környezethez, ill. más tartószerkezetekhez történő rögzítése szerint a rácsos tartó lehet kéttámaszú, háromcsuklós kerettartó, Gerber tartó, stb.

5.1 Rácsos tartó modell

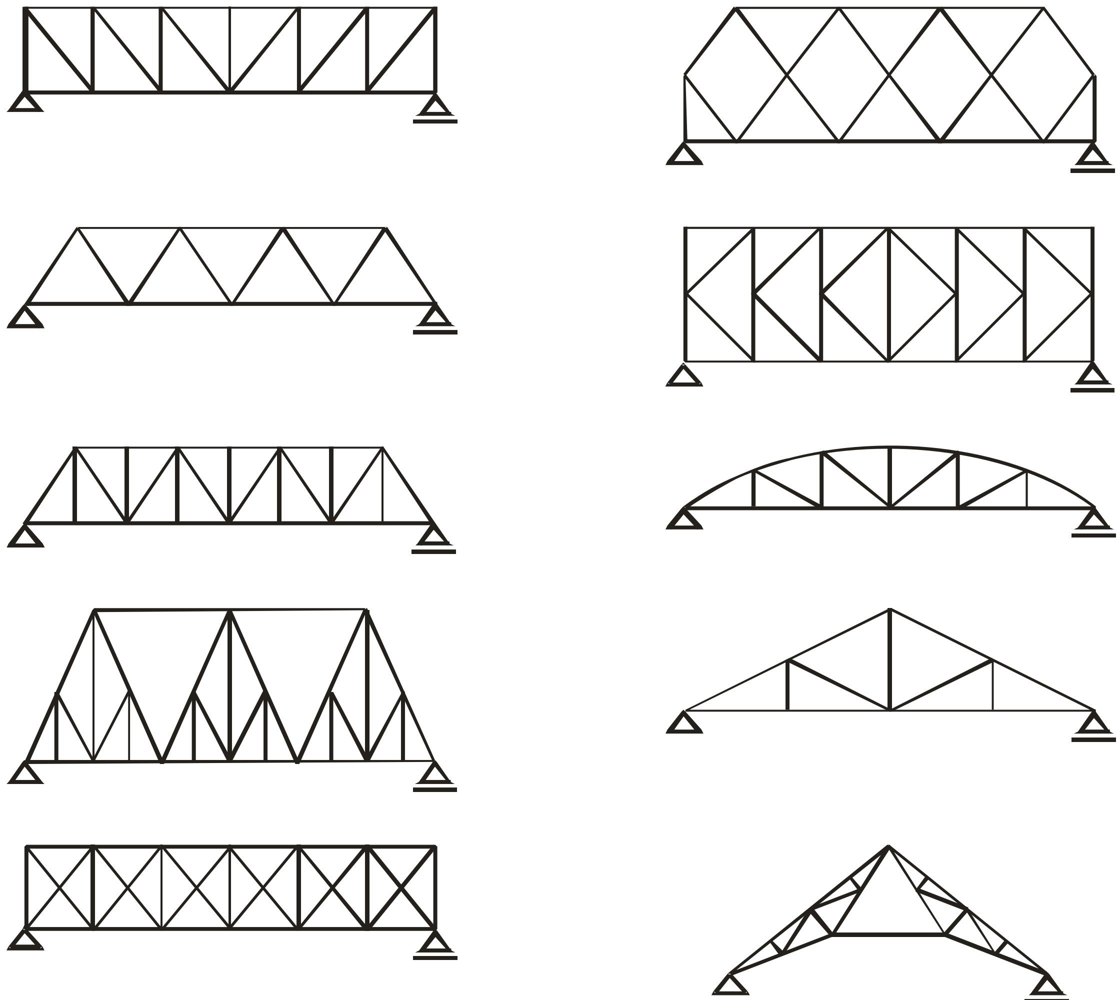
- A szerkezet alaktartó, a rúdhosszak változtatása nélkül a tartó alakja nem módosítható
- A rudak egyenes tengelyűek és merevek
- Egy csomópontban találkozó rudak tengelyei egy pontban metszik egymást
- A rudak a csomópontokban ideális (surlódásmentes) csuklókkal csatlakoznak egymáshoz
- A szerkezetekre ható külső erők a rácsos tartó síkjában hatnak
- A szerkezetet terhelő koncentrált erők csak a csomópontokban hatnak

Jól érzékelhető, hogy a számítási modell a valóságos erőjátékhoz képest közelítéseket tartalmaz, azonban a számítás egyszerű és az eredmény a mérnöki pontosságnak megfelel.

A rácsos tartók hálózati rajzával ábrázoljuk, ahol a rudakat súlyvonalaikkal adjuk meg. A csomópontokat számozással látjuk el a rúdhosszakat $s_{i,j}$, a rúderőket $S_{i,j}$ jelöljük. Az alsó index adja meg, hogy a rúd melyik két csomópontot köti össze.



A rácsos tartók alakjuk, valamint a megtámasztásuk módjától függően különböző típusúak lehetnek:



A számítási modell szerint a rácsos tartót terhelő koncentrált erők a tartó síkjában működnek és csak a csomópontokban hatnak. A terheket egyensúlyozó erők is koncentrált erők, amelyek a támaszpontokban működnek. A terhek és az egyensúlyozó erők egyensúlyban lévő erőrendszert alkotnak, ezt hívjuk külső erőrendszernek. Az egyensúlyban lévő külső erőrendszer hatására a tartóban belső erők ébrednek.

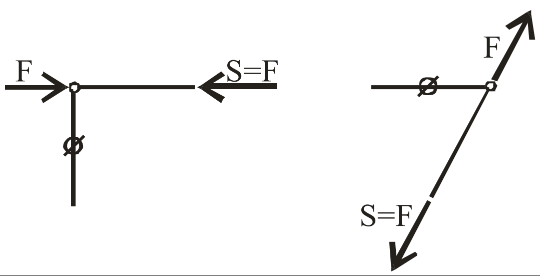
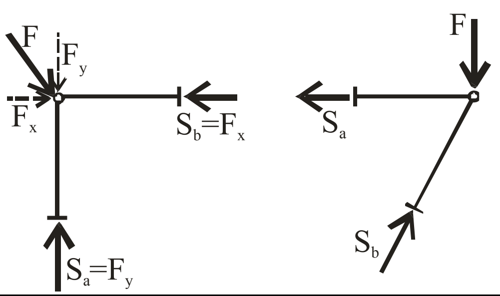
Képzeljük el, hogy a rácsos tartót két részre vágjuk szét, és csak az egyik tartórészt vizsgáljuk. A vizsgált tartórészen lévő külső erők nem lesznek egyensúlyban. A szerkezet belsejében olyan hatásoknak kell ébredniük, amelyek létrehozzák az egyensúlyi helyzetet. Ezeket a hatásokat belső erőknek nevezzük. A rácsos tartóban ébredő belső erők csak rúdirányúak lehetnek.

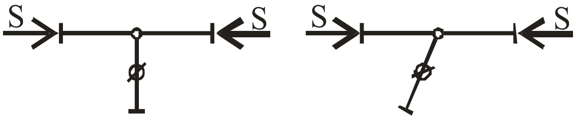
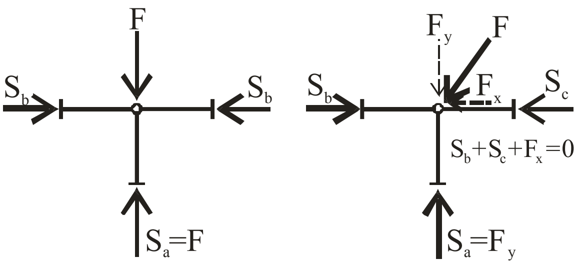
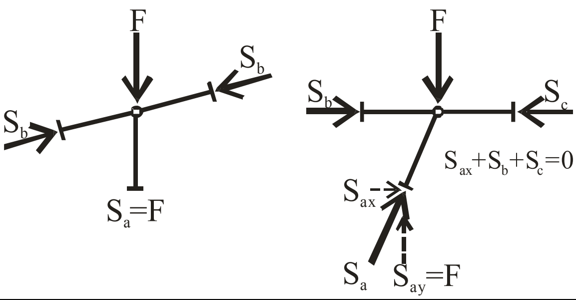
A rúderők előjelének tekintetében a következő előjelszabályban állapodunk meg:

– A rúderő nyíliránya a csomópont felé mutat, vagyis a csomópontot nyomja, a rúdban nyomóerő ébred, előjele: -

– A rúderő nyíliránya a csomóponttól elfelé mutat, a csomópontot húzza, a rúdban húzóerő ébred, előjele: +

A rácsos tartó hálózatában találhatunk olyan csomópontokat, amelyeknél számítás nélkül meghatározhatók a rúderők nagysága és előjele, ezeket „nevezetes” csomópontoknak hívjuk.

„V” csomópont	
	Terheletlen „V” csomópont A csomóponton nem hat külső erő, a rudak erőmentesek (azokat a rudakat amelyekben a számítás szerint nem ébred erő, vakrudaknak nevezzük)
	Terhelt „V” csomópont A teher hatásvonala az egyik rúd hatásvonalával egybeeső Ebben a rúdban a terhelő erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányú erő ébred, a másik rúd vakrúd.
	Terhelt „V” csomópont A teher hatásvonala általános irányú Minkét rúdban ébred erő. Nagyságuk és irányuk a vetületi egyensúlyi egyenletekből meghatározható

„T" csomópont	
	Terheletlen „T" csomópont A csomópontban nincs külső erő, akkor a bekötő rúd, (a „T" szára) vakrúd. A másik két rúderő ellentetten egyenlő (azonos előjelű)
 	Terhelt „T" csomópont A terhelő erő hatásvonala a bekötő rúddal azonos hatásvonalú a bekötő rúdban ébredő erő megegyezik a terhelő erővel, de vele ellentétes irányú. A másik két rúderő ellentetten egyenlő (azonos előjelű) Terhelt „T" csomópont A terhelő erő hatásvonala általános helyzetű. A rúderők nagyságuk és iránya a vetületi egyensúlyi egyenletekből meghatározható

5.2 Rácsos tartó rúderő számítás – csomóponti módszer

A számítás lényege, hogy a rácsos tartó minden egyes, kiragadott csomópontjában igazoljuk a csomópontban ható külső erőkből és a rudakban ébredő belső erőkből álló közös metszéspontú síkbeli erőrendszer egyensúlyát.

A módszer a csomópontok egymás utáni vizsgálatához alkalmas, a tartó közepéből kiragadott csomópont számítására nem használható (túl sok az ismeretlen)

A közös metszéspontú síkbeli erőrendszer egyensúlyát a két db egymástól független vetületi egyensúlyi egyenlet segítségével igazolhatjuk.

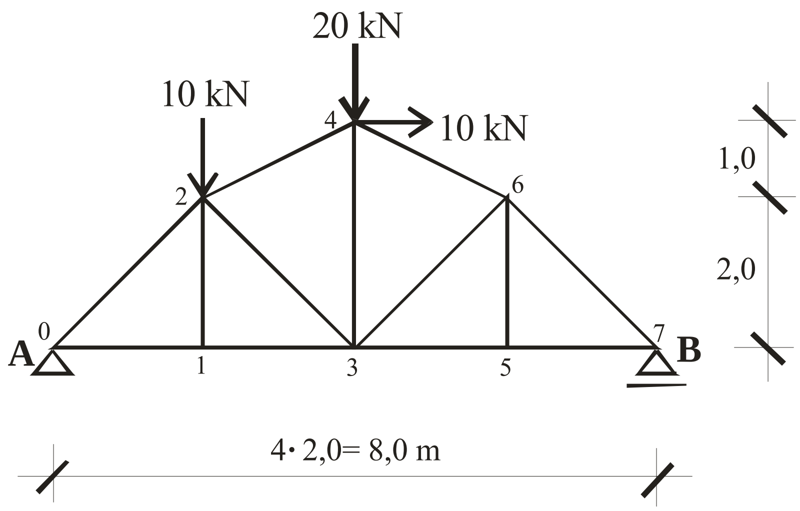
A számítás során csomópontról csomópontra haladunk (például balról-jobbra), hiszen két szomszédos csomópontot összekötő rúdban ébredő erő mindkét csomópontban

azonos nagyságú és előjelű. (a rácsos tartó nincs a rúdjain terhelve, tehát a rúderő értéke a rúd hossza mentén nem változhat!!)
A rúderők meghatározásához a derékszögű háromszögekre vonatkozó alapvető geometriai összefüggéseket használjuk (szögfüggvények, hasonlóság)

5.3 Rácsos tartó rúderő számítás – hármas átmetszés

A módszert „Ritter" féle módszernek, illetve főponti módszernek is nevezik.

A számítási módszer mindig alkalmazható amennyiben a tartó szétvágható két részre, oly módon, hogy a képzeletbeli metszősík csak 3 rudat vág el. A szétvágott tartó egyik felét vizsgáljuk, ahol a tartórészen ható külső erőket az átvágott rudakban ébredő rúderők egyensúlyozzák. A feladat megoldása nem más, mint a tartórészen ható külső erők egyensúlyozása három adott hatásvonalú erővel. Alkalmazzuk a „Ritter" féle módszert, vagyis a nyomatéki egyensúlyi egyenletet a vizsgált tartórészen ható külső erőkből, valamint az átvágott rudakban ébredő rúderőkből, a rúderők főpontjaira írjuk fel. A nyomatéki egyenlet felírásához feltételeznünk kell azt, hogy az ismeretlen rúderő a főpontra milyen előjelű forgatónyomatékot fejt ki. Amennyiben jól feltételeztük, az egyenlet megoldásaként pozitív eredményt fogunk kapni. A feltételezett iránnyal rárajzoljuk a metszősíkra a kiszámított rúderőt. Ha a rúderő nyíliránya a metszősík felé mutat, a rúdban nyomóerő ébred, ha a nyílirány a metszősíktól elfelé mutat, a rúdban húzóerő ébred.



$$\sum M_A = 0$$

$$10 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 3 - B_y \cdot 8 = 0 \qquad B_y = 16{,}25\ kN \uparrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$10 + 20 - 16{,}25 - A_y = 0 \qquad A_y = 13{,}75\ kN \uparrow$$

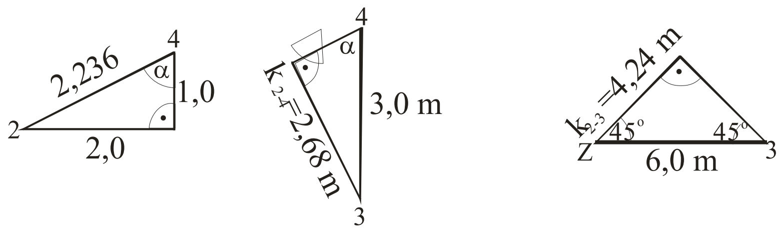
$$\sum F_x = 0 \qquad A_x + 10 = 0 \qquad A_x = 10\ kN \leftarrow$$

Számítsuk ki az S_{1-3}, az $S_{2-3,}$ és az S_{2-4} rúderők nagyságát, értelmezzük a rúderők előjeleit is. Vágjuk szét a tartót egy képzeletbeli metszősíkkal, úgy hogy csak azokat a rudakat vágjuk át, amelyekben ébredő rúderőket akarjuk meghatározni.

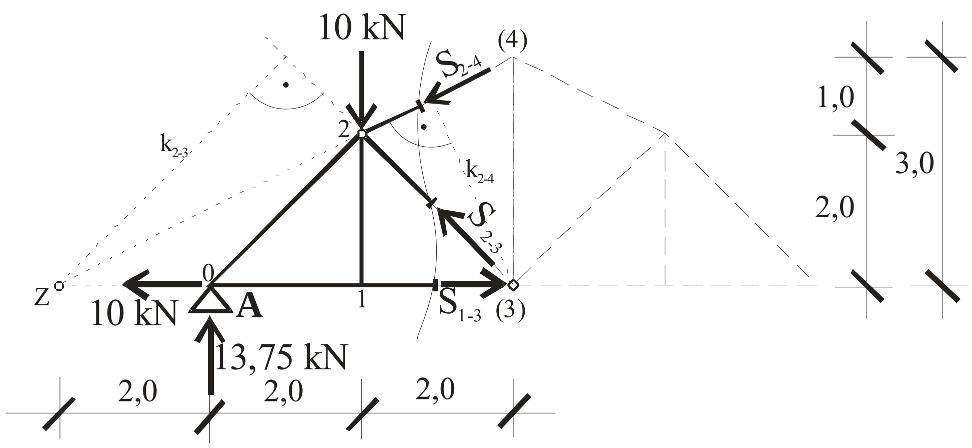
A metszősíktól balra lévő tartórészt vizsgáljuk.

A rúderők főpontjait keressük. Az S_{1-3} rúderő főpontja a „2" pont, az S_{2-3} főpontja a „Z" pont, az S_{2-4} főpontja a „3" pont.

A főpontokra történő nyomaték felírásához meghatározzuk az erők karjait (merőleges távolság)



$$k_{2-4} = \frac{2{,}828}{2{,}236} \cdot 2{,}0 = 2{,}68\ m \qquad k_{2-3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6{,}0 = 4{,}24\ m$$



Az S_{2-4} rúderő kiszámításához a nyomatéki egyensúlyi egyenletet „3" pontra írjuk fel.

$$\sum M_3 = 0 \qquad 13{,}75 \cdot 4{,}0 - 10 \cdot 2{,}0 - S_{2-4} \cdot 2{,}68 = 0 \qquad S_{2-4} = 13{,}06\ kN$$

A rúderő a metszősík felé mutat, tehát nyomóerő (-)

Az S_{1-3} rúderő kiszámításához a nyomatéki egyensúlyi egyenletet „2" pontra írjuk fel.

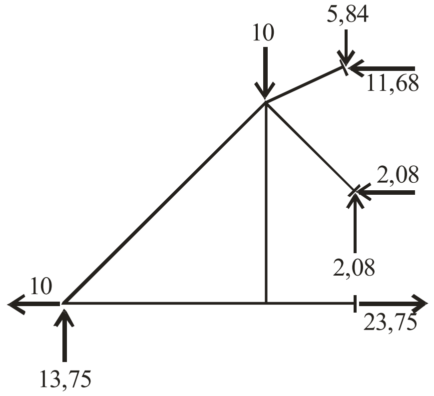
$\sum M_2 = 0 \qquad 13{,}75 \cdot 2{,}0 + 10 \cdot 2{,}0 - S_{1-3} \cdot 2{,}0 = 0 \qquad S_{1-3} = 23{,}75\ kN$

A rúderő a metszősíktól elfelé mutat, tehát húzóerő (+)

Az S_{2-3} rúderő kiszámításához a nyomatéki egyensúlyi egyenletet „Z" pontra írjuk fel.

$\sum M_Z = 0 \qquad -13{,}75 \cdot 2{,}0 + 10 \cdot 4{,}0 - S_{2-3} \cdot 4{,}24 = 0 \qquad S_{2-3} = 2{,}94\ kN$

A rúderő a metszősík felé mutat, tehát nyomóerő (-)



Ellenőrzésképpen felírhatók a vetületi egyensúlyi egyenletek a rúderők függőleges és vízszintes vetületeivel. (Az erőfelbontást nem részletezzük)

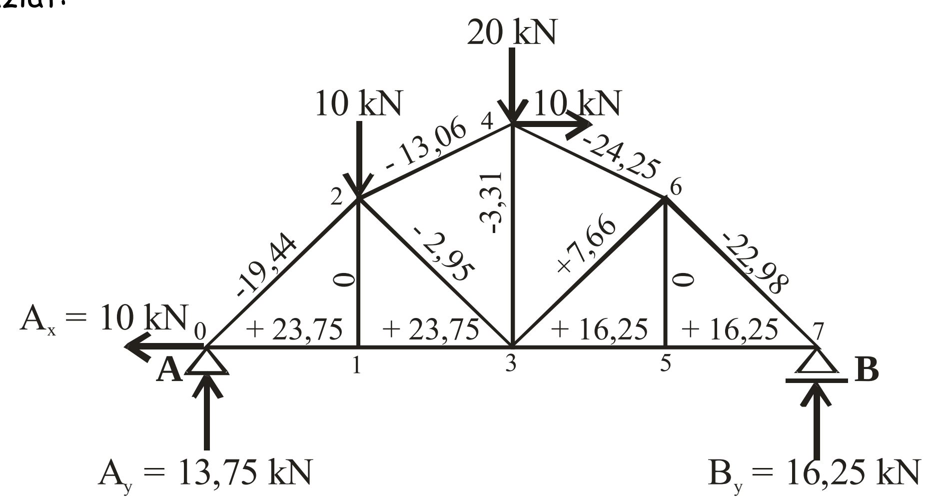
$$S_{2-4X} = \frac{2}{2{,}236} \cdot 13{,}06 = 11{,}68\ kN(\leftarrow) \qquad S_{2-4Y} = \frac{11{,}68}{2} = 5{,}84\ kN(\downarrow)$$

$$S_{2-3X} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2{,}95 = 2{,}08\ kN(\leftarrow) \qquad S_{2-3Y} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}08\ kN(\uparrow)$$

$$\sum F_X = 0 \qquad -10 - 11{,}68 - 2{,}08 + 23{,}75 = 0$$

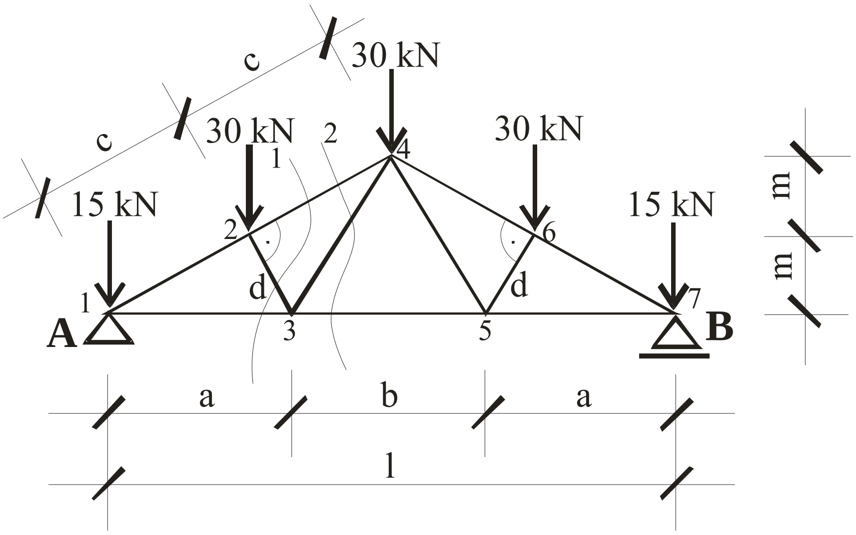
$$\sum F_Y = 0 \qquad -13{,}75 + 10 + 5{,}84 - 2{,}08 = 0$$

Eredményvázlat:



Részletesen megoldott feladat a hármas átmetszés módszerének alkalmazására:

l=8,4 m
m=1,4 m

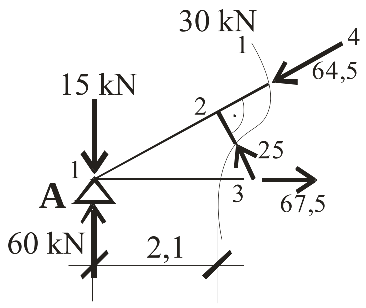


Az „a" és „b" méretek meghatározása hasonló háromszögek segítségével:

$$\frac{5{,}04}{4{,}2} = \frac{a}{2{,}52} \qquad a = 3{,}024\ m$$

$$\frac{4{,}2}{2{,}8} = \frac{2{,}52}{b} \qquad b = 1{,}68\ m$$

I. metszősík



$$\sum M_7 = 0$$

$$+45 \cdot 2{,}1 - S_{1-2} \cdot 1{,}4 = 0 \qquad S_{1-2} = 67{,}5\ kN \quad (+\ húzott)$$

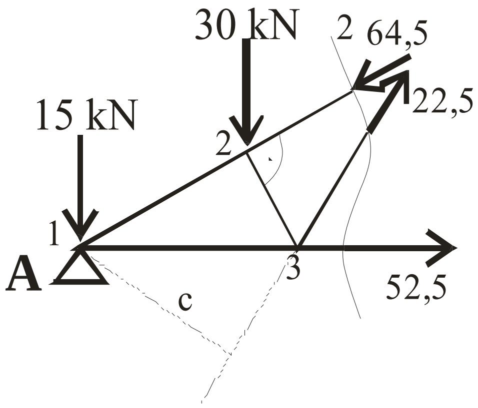
$$\sum M_2 = 0$$

$$+45 \cdot 3{,}024 - 30 \cdot 0{,}924 - S_{6-7} \cdot 1{,}68 = 0 \qquad S_{6-7} = 64{,}5\ kN \quad (-)$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$+30 \cdot 2{,}1 - S_{2-7} \cdot 2{,}52 = 0 \qquad S_{1-2} = 25\ kN \quad (-\ nyomott)$$

II. metszősík



$$\sum M_6 = 0$$

$$45 \cdot 4{,}2 - 30 \cdot 2{,}1 - S_{2-3} \cdot 2{,}4 = 0$$

$$S_{2-3} = 52{,}5\ kN \qquad (+\ h\acute{u}zott)$$

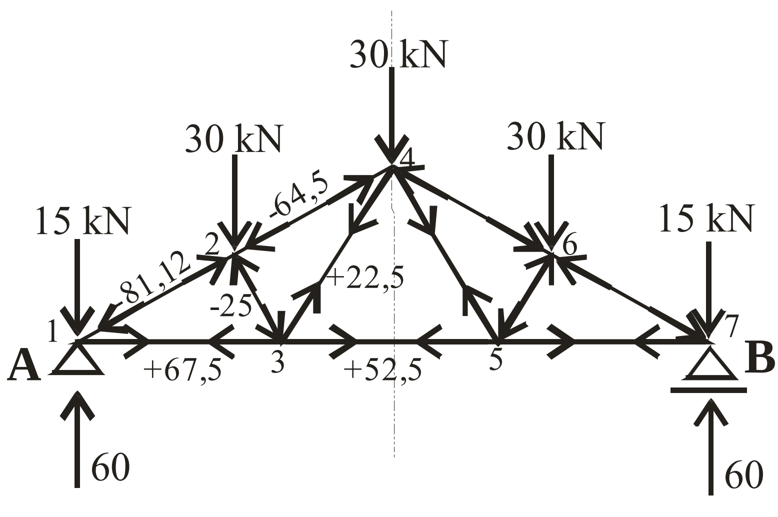
$$\frac{3{,}024}{1{,}68} = \frac{5{,}04}{c} \qquad c = 2{,}8\ m$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$30 \cdot 2{,}1 - S_{2-6} \cdot 2{,}8 = 0$$

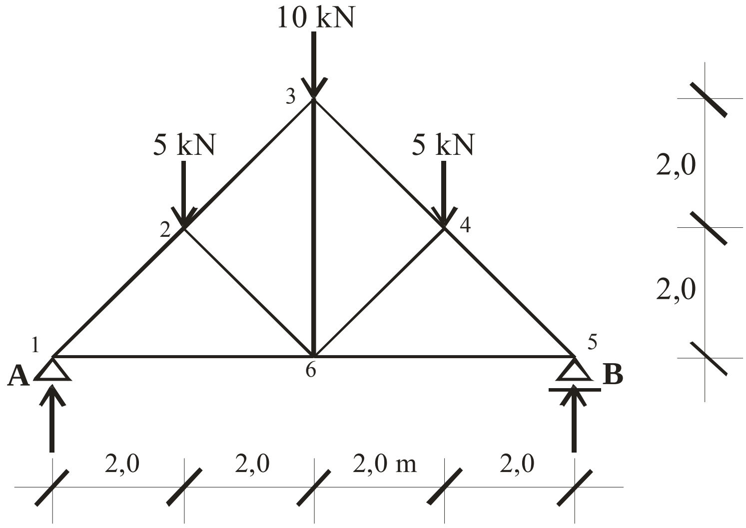
$$S_{2-6} = 22{,}5\ kN \qquad (+\ h\acute{u}zott)$$

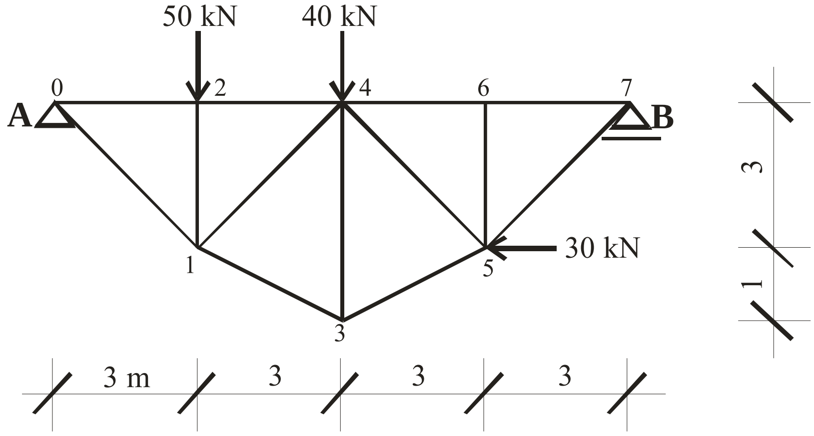
Eredményvázlat (szimmetrikus geometriájú, szimmetrikusan terhelt rácsos tartók rúderői is szimmetrikusak lesznek)

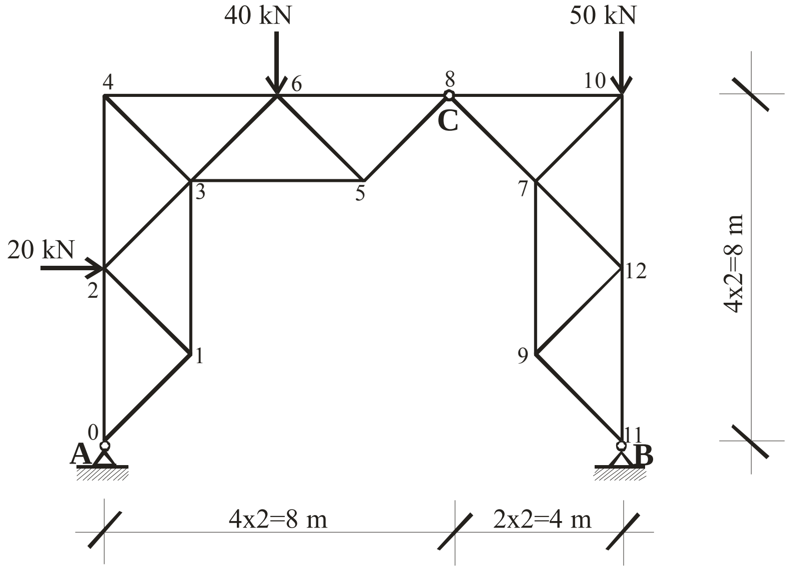


Javasolt feladatok a gyakorláshoz:

Határozzák meg a rúderőket tetszőleges módszerrel!







Megjegyzés:
Javasoljuk a feladat megoldását a félév végén, amikor a háromcsuklós kerettartó reakcióerőinek meghatározásával megismerkedtek.

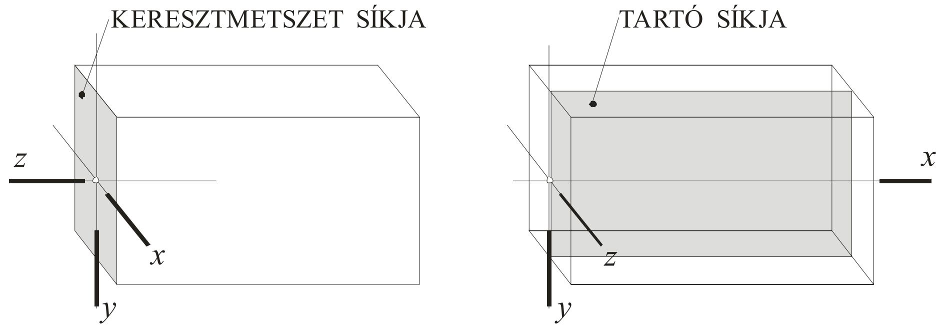
6. Síkbeli Tartók belső erői

6.1 A belső erők fogalma:

Az eddig megismert külső erők (a terhelés és a reakció erők) a tartómodellen egyensúlyban lévő erőrendszert alkotnak. A külső erőrendszer hatására ébrednek a tartóban a belső erők, amelyek szintén egyensúlyban lévő erőrendszert alkotnak.

A rúd egy tetszőleges keresztmetszetében a belső erők (az igénybevételek) meghatározásához ismerjük meg a következő fogalmakat:

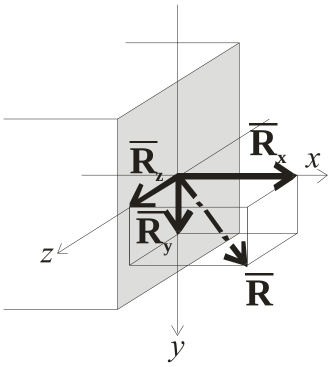
- A tartó síkja: síkbeli tartók esetén a tartó síkja a tartót terhelő erők síkjával azonos.
- A keresztmetszet síkja: a tartót, egy a rúd tengelyére merőleges síkkal elmetszve kapjuk a keresztmetszet síkját. A tartó síkja és a keresztmetszet síkja egymásra merőleges.



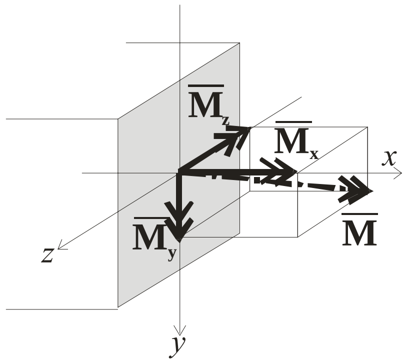
A belső erőket a tartó tetszőlegesen kiválasztott keresztmetszetén értelmezhetjük. A keresztmetszetre ható dinámok (erők és nyomatékok) a keresztmetszet igénybevételei.

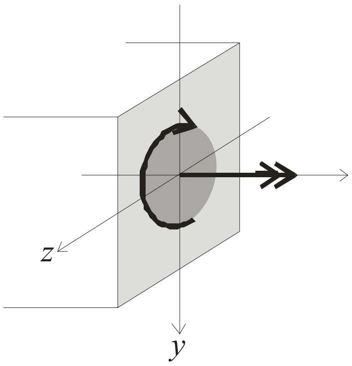
A tetszőleges keresztmetszeten értelmezhető belső erők:

- NORMÁL ERŐ: a keresztmetszet síkjára merőleges, rúdtengely irányú erő, „N"
- NYÍRÓ ERŐ: a keresztmetszet síkjába eső, z és y irányú erők, „T"
- HAJLÍTÓ NYOMATÉK: a keresztmetszet síkjára merőleges síkban működő M_Y és M_Z nyomatékok
- CSAVARÓ NYOMATÉK: a keresztmetszet síkjában működő M_x nyomaték

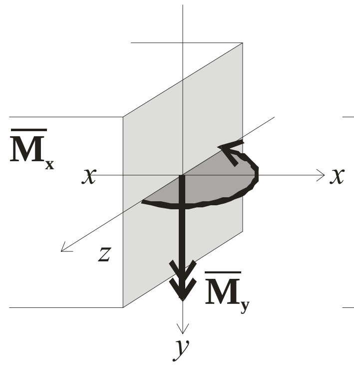


$\overline{R}_x$: NORMÁLERŐ
(a keresztmetszet síkjára merőleges)
$\overline{R}_y$: NYÍRÓERŐ
(a km. síkjában)
$\overline{R}_z$: NYÍRÓERŐ
(a km. síkjában)

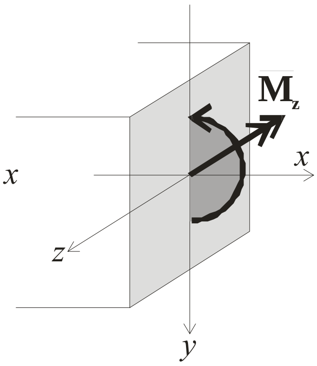




"*x*" körül forgató
yz síkú nyomaték
CSAVARÓNYOMATÉK
(a km. síkjában)



"*y*" körül forgató
xz síkú nyomaték
HAJLÍTÓNYOMATÉK
(merőleges a km. síkjára)



"*z*" körül forgató
xy síkú nyomaték
HAJLÍTÓNYOMATÉK
(merőleges a km. síkjára)

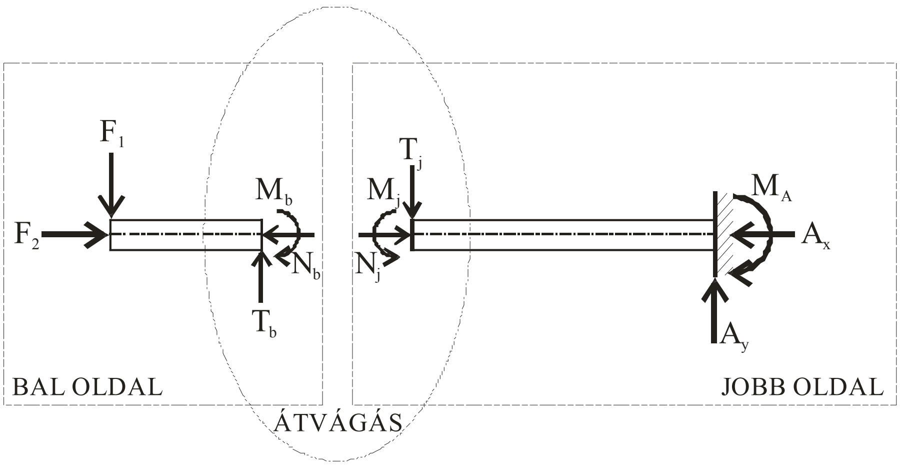
A tetszőleges dinámok esetén, az erővektor felbontható x, y, z irányú vetületeire (a „z" és „y" tengelyek a keresztmetszet síkjában lévő, egymásra merőleges súlyponti tengelyek, az „x" tengely a rúd hossztengelye)

A nyomatékvektor (merőleges a síkra, amelyben működik) is felbontható, x, y, z irányú vetületeire, ahol:

- M_X, az x tengely körül forgató, yz síkban működő nyomaték = csavaró nyomaték
-
- M_Y, az y tengely körül forgató, xz síkban működő nyomaték = hajlító nyomaték
-
- M_Z, az z tengely körül forgató, xy síkban működő nyomaték = hajlító nyomaték

A belső erők meghatározása:

Egy a síkjában terhelt, statikailag határozott, egyensúlyban lévő gerendatartó tetszőleges „k" keresztmetszetében ébredő belső erők meghatározásához, gondolatban vágjuk ketté a tartót, egy, a tartó hossztengelyére merőleges síkkal, a vizsgált keresztmetszetben. Szedjük szét a kettévágott tartót, baloldali és jobboldali tartórészre. A két tartórésznek külön-külön is egyensúlyban kell lennie. A két külön tartórészen az egyensúlyt a keresztmetszetben ébredő belső erők fogják biztosítani. Ezek a belső erők az átvágás mindkét oldalán azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak.



A három bekeretezett erőrendszer külön-külön is egyensúlyban van !

A belső erők előjele:

– Normálerő (N)
  (+) pozitív, tehát húzóerő, ha a vizsgált keresztmetszetben a tartó hossztengelyével párhuzamos erő, a keresztmetszettől elfele mutat, azaz húzza.
  (-) negatív, tehát nyomóerő, ha a vizsgált keresztmetszetben a tartó hossztengelyével párhuzamos erő a keresztmetszet felé mutat, azaz nyomja.
– Nyíró erő (T)
  (+) pozitív, ha a keresztmetszet síkjába eső erő a vizsgált tartórész belső, anyagi pontja körül az óramutató járásával megegyező irányban forgat.
  (-) negatív, ha a keresztmetszet síkjába eső erő a vizsgált tartórész belső, anyagi pontja körül az óramutató járásával ellenkező irányban forgat.
– Hajlító nyomaték M)
  (+) pozitív, ha a forgatás iránya az óramutató járásával megegyező.
  (-) negatív, ha a forgatás iránya az óramutató járásával ellentétes.

6.2 Belső erő ábrák

A síkbeli, statikailag határozott tartókon a megadott, statikus (állandó intenzitású), álló (helyzetét a tartón nem változtató) terhelés, és a reakció erők hatására keletkező belső erők változását a rúd hossza mentén, matematikai úton, függvény formájában is megadhatjuk. Ezeket a függvényeket belső erő (N, T, M) függvényeknek hívjuk. A függvények grafikus megjelenítése, a függvény „képe", a belső erő (N, T, M) ábra.
A belső erő ábrákat úgy hozzuk létre, hogy a tartó tengelyvonalára, minden keresztmetszetben felmérjük a keresztmetszetben ébredő belső erő nagyságát, tetszőlegesen felvett erőlépték alkalmazásával, egy megállapodás szerinti előjelszabály figyelembevételével. A belső erő értékeket mindig a tartó tengelyére merőlegesen mérjük fel.

A tartók esetében nem kell az összes keresztmetszetet vizsgálni, azokban a keresztmetszetekben számítjuk ki a belső erőket, ahol a teherfüggvényben, illetve a tartó geometriájában változás van. Ezeket a keresztmetszeteket jellemző keresztmetszeteknek hívjuk.

A belső erők számításánál, a koncentrált erők, illetve a koncentrált nyomatékok működési helye előtti és utáni, végtelenül közel eső keresztmetszeteket kell vizsgálni.

- A tartó vizsgált keresztmetszetében ébredő normálerő nagyságát megkapjuk, ha a keresztmetszettől balra (vagy jobbra) lévő tartórészen előjelhelyesen összegezzük a normál irányú külső erőket

- A tartó vizsgált keresztmetszetében ébredő nyíró erő nagyságát megkapjuk, ha a keresztmetszettől balra (vagy jobbra) lévő tartórészen előjelhelyesen összegezzük a tangenciális irányú külső erőket

- A tartó vizsgált keresztmetszetében ébredő hajlító nyomaték nagyságát megkapjuk, ha a keresztmetszettől balra (vagy jobbra) lévő tartórészen előjelhelyesen összegezzük a külső erőket forgató nyomatékait.

A belső erő ábrákat a tartó hossztengelyének megfelelő alapvonalon szerkesztjük. A keresztmetszetek vizsgálatát általában balról-jobbra haladva folytatjuk. A T és N ábrák „+" tartománya, egyenes tengelyű, vízszintes tartók esetén, a tengelyvonal alatti.

A nyomatéki ábra tekintetében az elkövetkezendőkre vonatkozóan, szokjuk meg, hogy a nyomatéki ábrának nincs előjele. A nyomatéki függvény értékeit mindig a tartó húzott övére kell mérni. Ennek eldöntéséhez segítséget nyújt, ha el tudjuk képzelni, hogy a külső erőrendszer hatására milyen lesz a tartó meggörbült tengelyvonala. A „húzott öv" ott értelmezhető, amelyik oldalon domború a meggörbült tengelyvonal.

A teherfüggvény, a nyíróerő függvény és a nyomatéki függvény (ebben a sorrendben!), mindig eggyel magasabb rendű. Pl: a teher függvény konstans, azaz 0 fokú, akkor a nyíróerő függvény elsőrendű, azaz lineáris, a nyomatéki függvény pedig másodrendű lesz.
A függvénytani összefüggésekből adódik, hogy az előző függvény zérus helyén (előjel váltáskor), a követő függvénynek szélső értékhelye lesz (maximum, vagy minimum)

A belső erő ábrák készítése előtt a következőket kell elvégezni:

- A ferde helyzetű erők felbontása vízszintes és függőleges komponensekre
- Megoszló terhek eredőinek (részeredőinek kiszámítása)
- Reakció erők meghatározása, egyensúlyozás
- Jellemző keresztmetszetek meghatározása
  - Támaszok
  - Koncentrált erők
  - Koncentrált nyomatékok
  - Megoszló terhek kezdete és vége

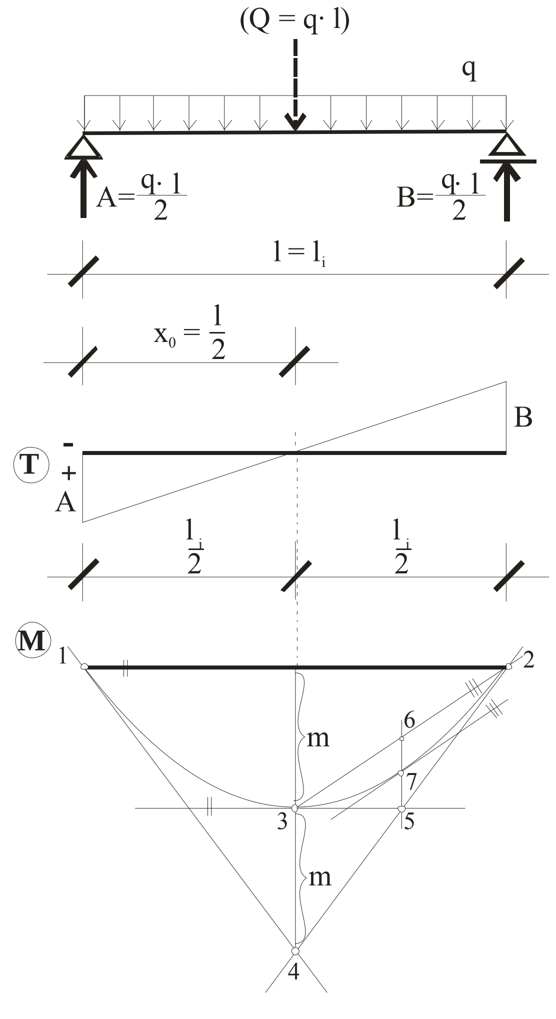
Ezek után meghatározzuk a jellemző keresztmetszetek igénybevételeit, felmérjük az előjeles értékeket a tartó tengelyre merőlegesen, majd a jellemző keresztmetszetekben kiszámított függvényértékeket, a terhelés változásának megfelelően, a tartó tengellyel párhuzamos ill. ferde egyenesekkel, vagy görbékkel kötjük össze

A reakció erők meghatározásánál és a belső erő ábrák szerkesztésénél is alkalmazható a szuperpozició, az egymásra halmozás módszere. Célszerű a módszert használni bonyolult, összetett terhelések esetén, hiszen minden összetett terhelés létrehozható egyszerű terhelések összegeként. A reakcióerők számítása és a belsőerő ábrák meghatározása az egyszerű terhelésekből, egyszerűen elvégezhető. Az egymásra halmozás matematikai módszerekkel és grafikusan is elvégezhető.

A következőkben bemutatjuk a különböző típusú és terhelésű, statikailag határozott síkbeli tartók igénybevételi ábráinak elkészítési módját.

6.3 Kéttámaszú egyenes tengelyű gerendatartók

Kéttámaszú tartó, egyenletesen megoszló teherrel terhelve, parabola szerkesztés

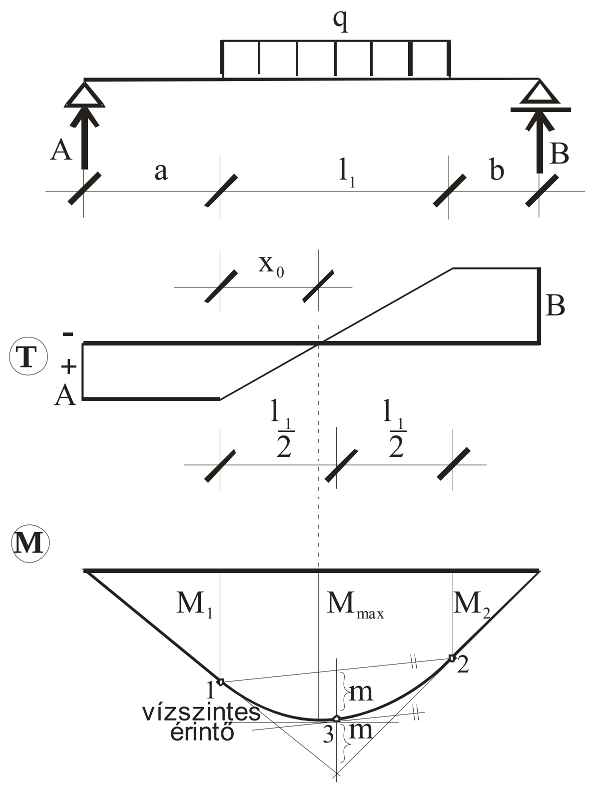


$$|A| = |B| = \frac{q \cdot l}{2} \qquad x_0 = \frac{A}{q} = \frac{q \cdot l}{2 \cdot q} = \frac{l}{2} \quad \textit{a szimmetria miatt}$$

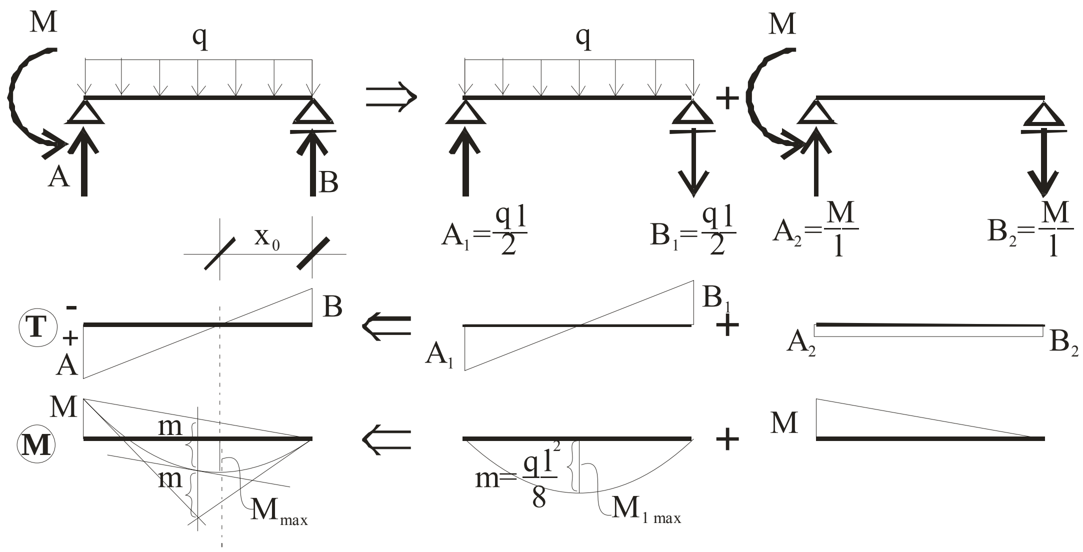
$$M_{\max} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q \cdot l^2}{8} \qquad \textit{a parabóla belógása "m"}$$

Rajzoljuk meg a tartószakasz felező merőlegesét, erre a vonalra, abban az irányban amerre hat a megoszló teher, mérjük fel kétszer az „m" értékét. A kapott pontot kössük össze a támaszpontokkal, így megkapjuk a parabola végérintőit. A 3-as pontban, ahol a nyíróerő ábrának zérus helye van, a nyomatéki ábrának szélső értéke lesz, tehát

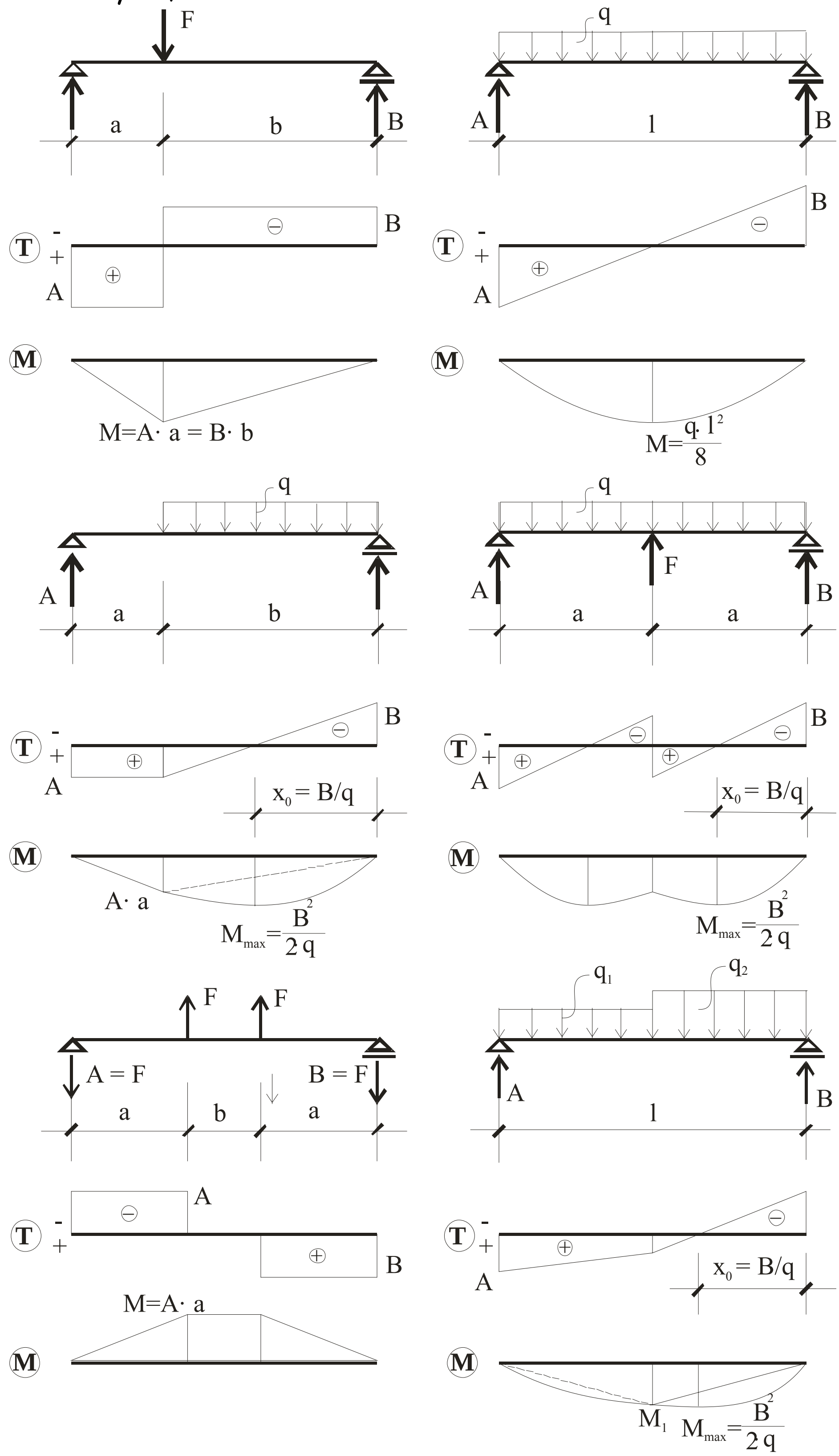
itt vízszintes az érintője. A további parabolapontokat illetve érintőket az ábra szerint kaphatjuk meg.
Parabola szerkesztés általános esetben:

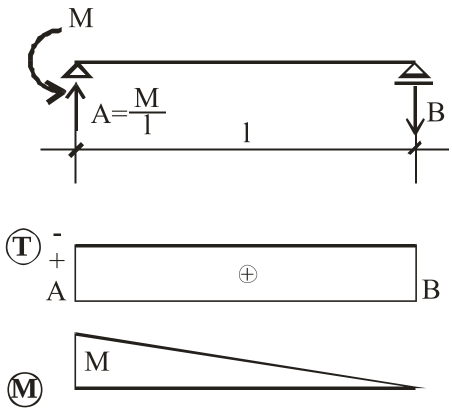


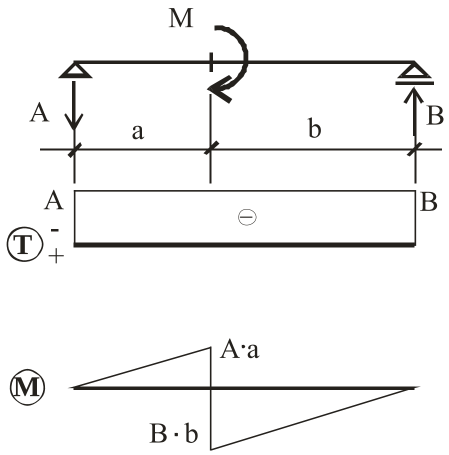
Szuperpozició (egymásra halmozás) bemutatása a reakcióerők és a belső erő ábrák meghatározásához.

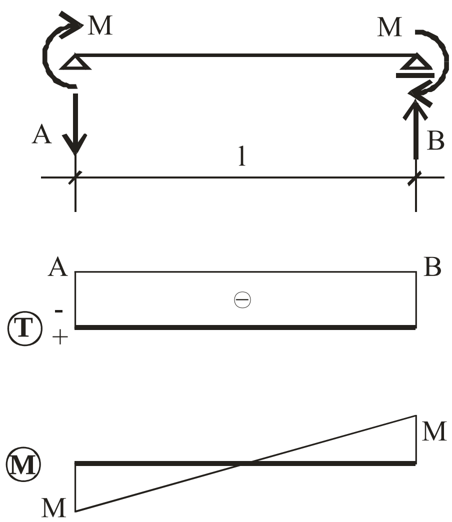


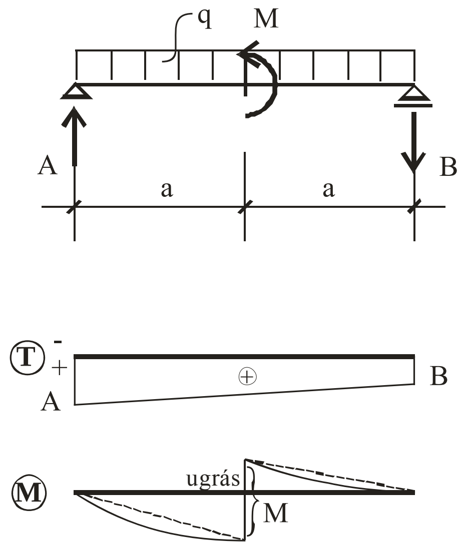
Alapesetek bemutatása, egyenes tengelyű, kéttámaszú, kéttámaszú konzolosan túlnyúló, valamint konzoltartók különböző terheléseire

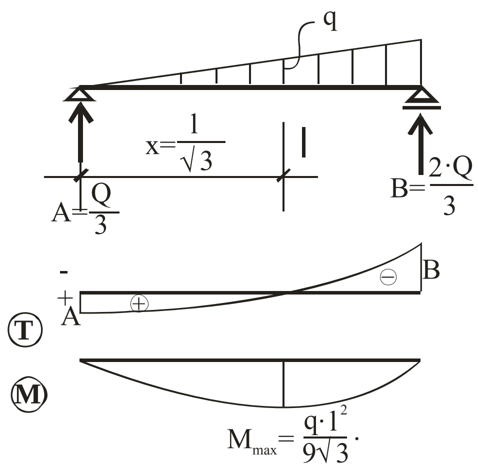


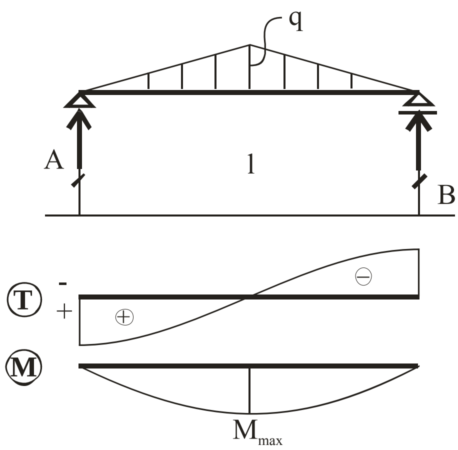

M
A=M/l
l
B
T
A
B
M
M

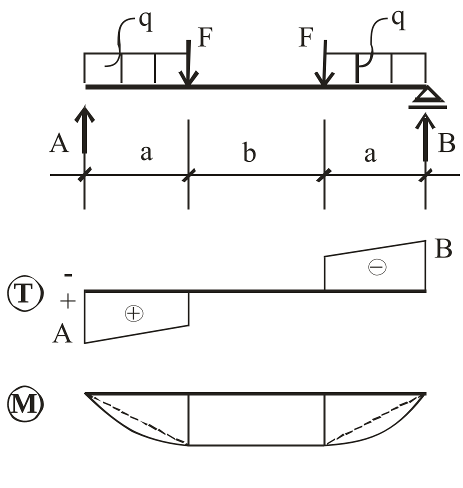

M
A
a
b
B
T
A·a
B·b
M

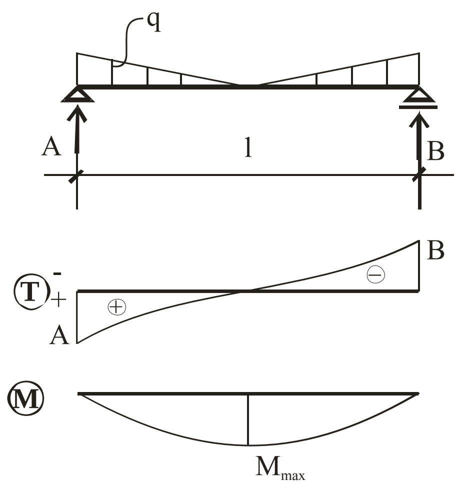

M
M
A
l
B
T
M
M
M

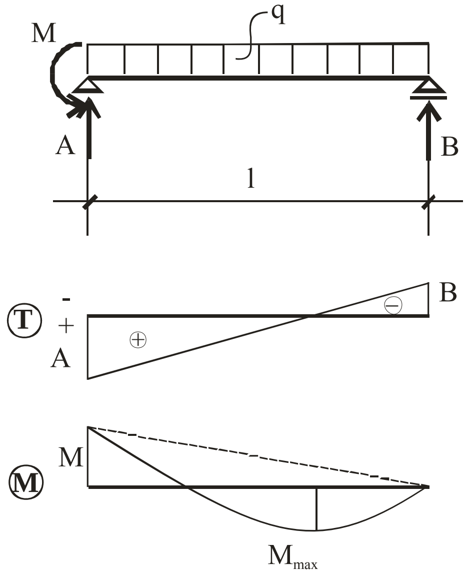

q
M
A
a
a
B
T
ugrás
M
M

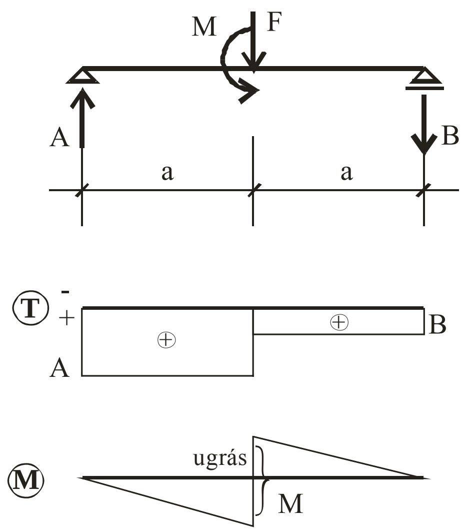

q
x=l/√3
A=Q/3
B=2·Q/3
T
M
M_max = q·l²/9√3 ·

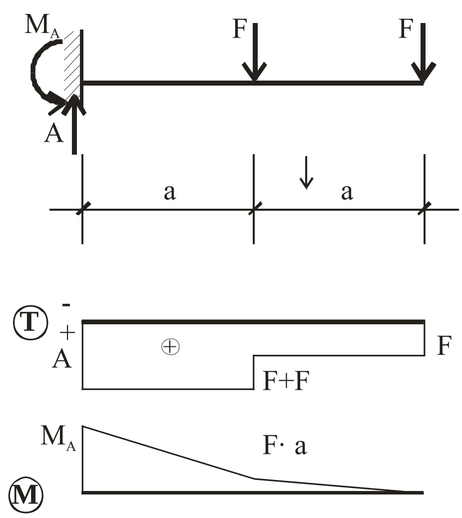

q
A
l
B
T
M
M_max

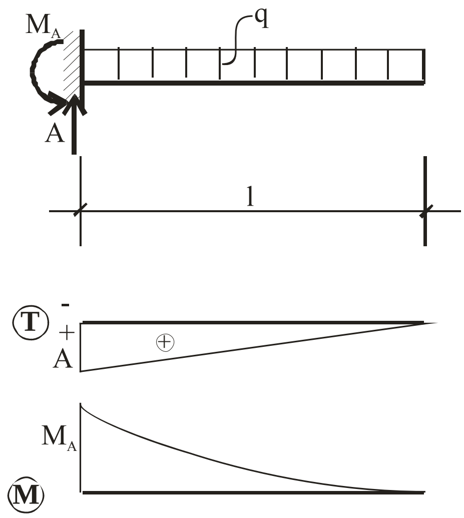

q
F
F
q
A
a
b
a
B
B
T
A
M


q
A
l
B
B
T
A
M
M_{max}

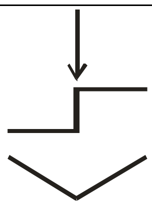
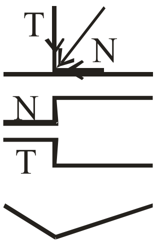
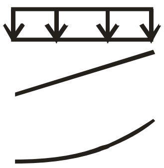
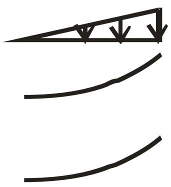
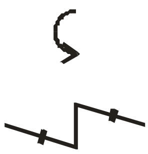
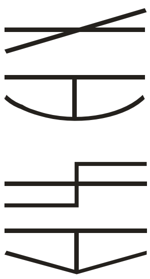

M
q
A
B
l
B
T
A
M
M
M_{max}


M
F
A
B
a
a
T
B
A
ugrás
M
M


M_A
F
F
A
a
a
T
A
F
F+F
M_A
F· a
M


M_A
q
A
l
T
A
M_A
M

Igénybevételi ábrák közötti összefüggések összefoglalása

	Tartótengelyre merőleges koncentrált erő Ugrás a T ábrán, az ugrás mértéke megegyezik az erő nagyságával Töréspont az M ábrán (a törés iránya az erő irányával azonos)
	Általános helyzetű koncentrált erő Ugrás az N ábrán, az ugrás mértéke megegyezik az erő normál irányú vetületével Ugrás a T ábrán, az ugrás mértéke megegyezik az erő tangenciális vetületével Töréspont az M ábrán (a törés iránya az erő tangenciális összetevőjének irányával azonos)
	Egyenletesen megoszló teher T ábra lineáris M ábra 2.fokú parabola, belógása a teher irányával megegyező
	Egyenletesen változó, líneáris megoszló teher T ábra 2. fokú parabola M ábra 3.fokú görbe, belógása a teher irányával megegyező
	Koncentrált nyomaték Az N és a T ábrán nincs változás Az M ábrán ugrás van, az ugrás mértéke megegyezik a koncentrált nyomaték nagyságával
	T ábra zérushelyénél az M ábrán szélső érték, vízszintes érintő T ábra előjelváltásnál az M ábrán szélső érték

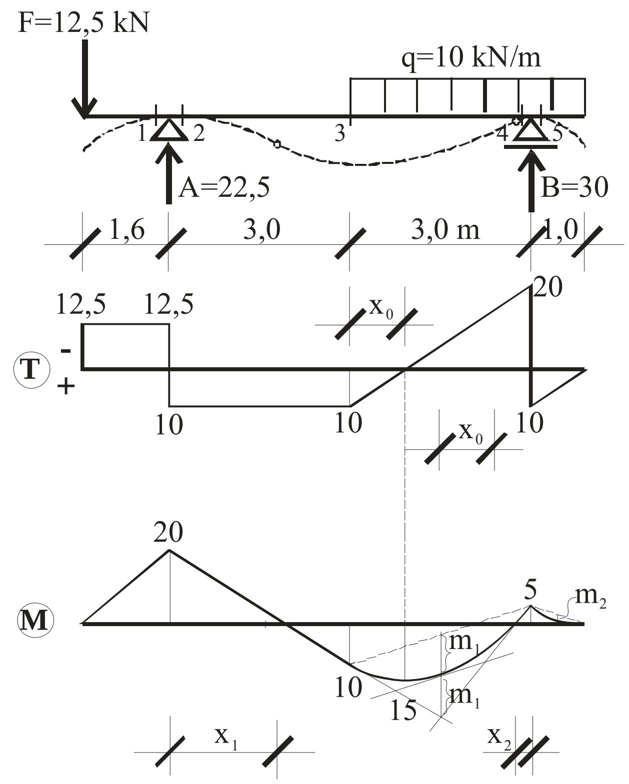
Részletesen megoldott feladatok:

- kéttámaszú, egy oldalon konzolosan túlnyúló gerendatartó, koncentrált erőkkel, különböző intenzitású megoszló terhekkel

$$Q = 10 \cdot 4 = 40\ kN$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 5 - B \cdot 6 = 0 \qquad B = 30\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad -A - 30 + 12{,}5 + 40 = 0 \qquad A = 22{,}5\ kN\ (\uparrow)$$



$$M_3 = -12{,}5 \cdot 4{,}6 + 22{,}5 \cdot 3 = +10\ kNm \quad (balról\ felírva)\ a\ tartó\ alsó\ övén$$

$$M_5 = +10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = +5\ kNm \quad (jobbról\ felírva)\ a\ tartó\ felső\ övén$$

$$M_4 = M_5$$

$$m = \frac{10 \cdot 3^2}{8} = 11{,}25 \qquad x_0 = \frac{10}{10} = 1{,}0\ m$$

$$M_{\max} = 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 30 \cdot 2 = -15\ kNm \quad (jobbról\ felírva)\ a\ tartó\ alsó\ övén$$

$$nyomatéki\ nullpontok\ helye: \quad \frac{x_1}{20} = \frac{3{,}0}{30} \qquad x_1 = 2{,}0\ m$$

$$10 \cdot (1 + x_2) \cdot \frac{1 + x_2}{2} - 30 \cdot x_2 = 0 \qquad x_2 = 0{,}25\ m$$

– Konzol tartó megoszló teherrel, koncentrált erővel, koncentrált nyomatékkal

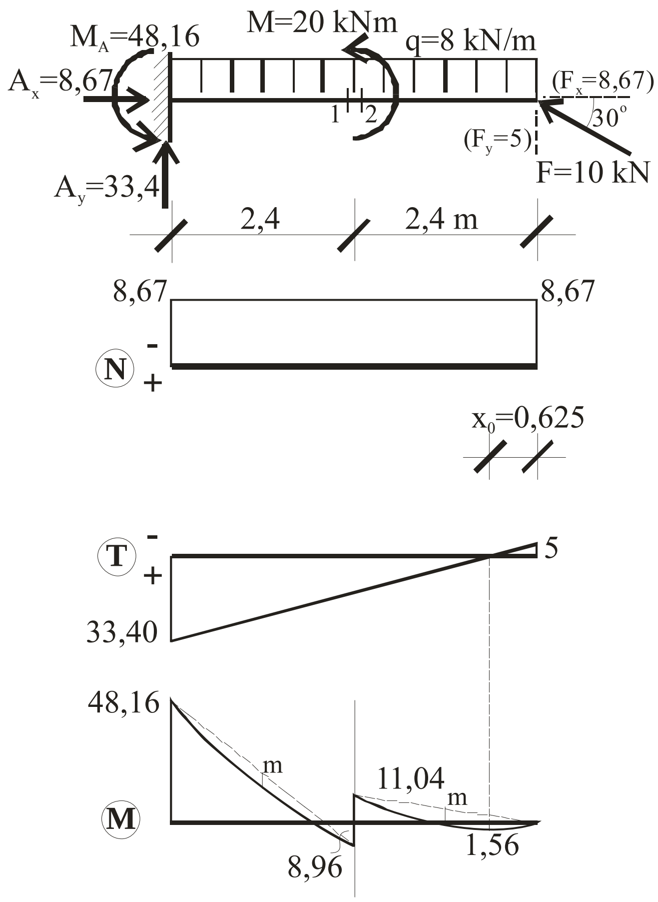
$$Q = 38{,}4\ kN \qquad F_X = 8{,}67\ kN \qquad F_Y = 5{,}0\ kN$$

$$\sum M_A = 0 \qquad 38{,}4 \cdot 2{,}4 - 20 - 5 \cdot 4{,}8 - M_A = 0 \qquad M_A = 48{,}16\ kNm$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad 38{,}4 - 5 - A_Y = 0 \qquad A_Y = 33{,}4\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum F_X = 0 \qquad -8{,}67 + A_X = 0 \qquad A_X = 8{,}67\ kN\ (\rightarrow)$$

$$x_0 = \frac{5}{8} = 0{,}625\ m$$



$$M_1 = -48{,}16 + 33{,}4 \cdot 2{,}4 - 8 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 = 8{,}96\ kNm \quad (\textit{balról felírva})$$

$$M_2 = M_1 - 20 = -11{,}04\ kNm\ (\textit{balról felírva})$$

$$M_{\max} = +\frac{8 \cdot 0{,}625^2}{2} - 5 \cdot 0{,}625 = -1{,}56\ kNm \quad (\textit{jobbról felírva}),\ \textit{alul húzott}!$$

$$\textit{parabóla belógás}: \quad m = \frac{8 \cdot 2{,}4^2}{8} = 5{,}76\ kNm$$

6.4 Törtvonalú, ferde helyzetű és ágas tartók belső erő ábrái

Azon statikailag határozott tartókkal foglalkozunk, amelyek tengelyvonala egy egyenessel nem adható meg.

A keresztmetszetek mindig merőlegesek a tartó tengelyvonalára!
Jellemző ezekre a tartókra, hogy egy adott erő a tartó egyik részén lehet normál erő, míg a másik részen ugyan ezen erő nyíróerőként jelenik meg.
Továbbá jellemző még ezekre a tartókra, hogy a külső erők felbontása, a reakció erők meghatározásához vízszintes és függőleges komponensekre történik, majd a belső erő ábrák megszerkesztéséhez ugyanezen erőket, a tartótengellyel párhuzamos (normál) irányú, és a tartó tengelyre merőleges (tangenciális) irányú komponensekre is fel kell bontanunk.

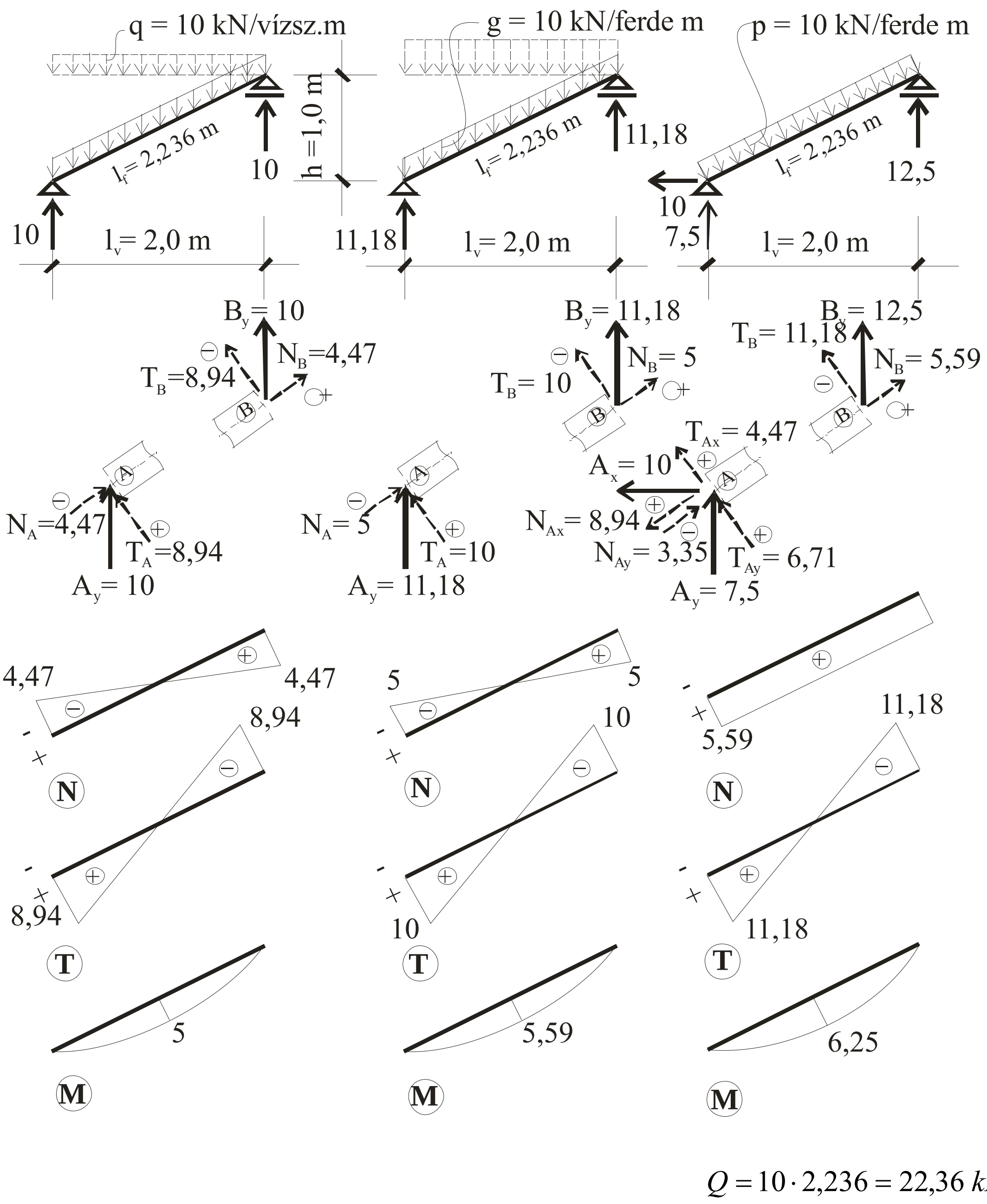
A belső erők előjeleinek ábrázolása:

- ajánlott, hogy azonos előjeleket mindig azonos irányban mérjük fel, vagyis a vízszintes tartószakaszoknál a + értékeket alulra, a függőleges, vagy ahhoz közeli helyzetű rudaknál a tengelyvonal jobb oldalára mérjük.
- „úszó szabály" a tartó valamelyik oldalán végighaladva mindig azonos előjelű értékeket mérünk fel, ez az ábrázolási mód az ágas tartóknál nem teljesíthető.
- A nyomatéki ábrának nincs előjele, a függvény értékek mindig a tartó húzott oldalán (domború oldalán) kerülnek felmérésre.

Sarokmerev csomópontok

A törtvonalú és ágas tartóknál a tartó csomópontjaiban esetleg kettőnél több rúd is csatlakozhat egymáshoz. A kapcsolat akkor sarokmerev, ha minden becsatlakozó rúd képes nyomatékot felvenni. A csomópontban a rudak hossztengelyei egy pontban metszik egymást.
A csomópontban a rudakra számított nyomatékok algebrai összege zérus kell, hogy legyen (csomóponti egyensúly).
Két rúd kapcsolatánál kialakuló egyszerű csomópont esetén, a két nyomaték algebrai összege zérus, ebből következik az úgynevezett „átkörzőzési" szabály, ami azt jelenti, hogy a külső erővel nem terhelt csomópontban, amennyiben az egyik rúd a külső övén húzott, akkor a másik rúd is a külső övén lesz húzott, vagyis arra az övre kell a nyomatéki értéket felmérni.
Külső erővel terhelt csomópont esetén az egyensúlyi feltételek igazolásánál a külső erőt is figyelembe kell venni.

Ferde helyzetű tartók belső erő ábrái különböző típusú megoszló teherrel

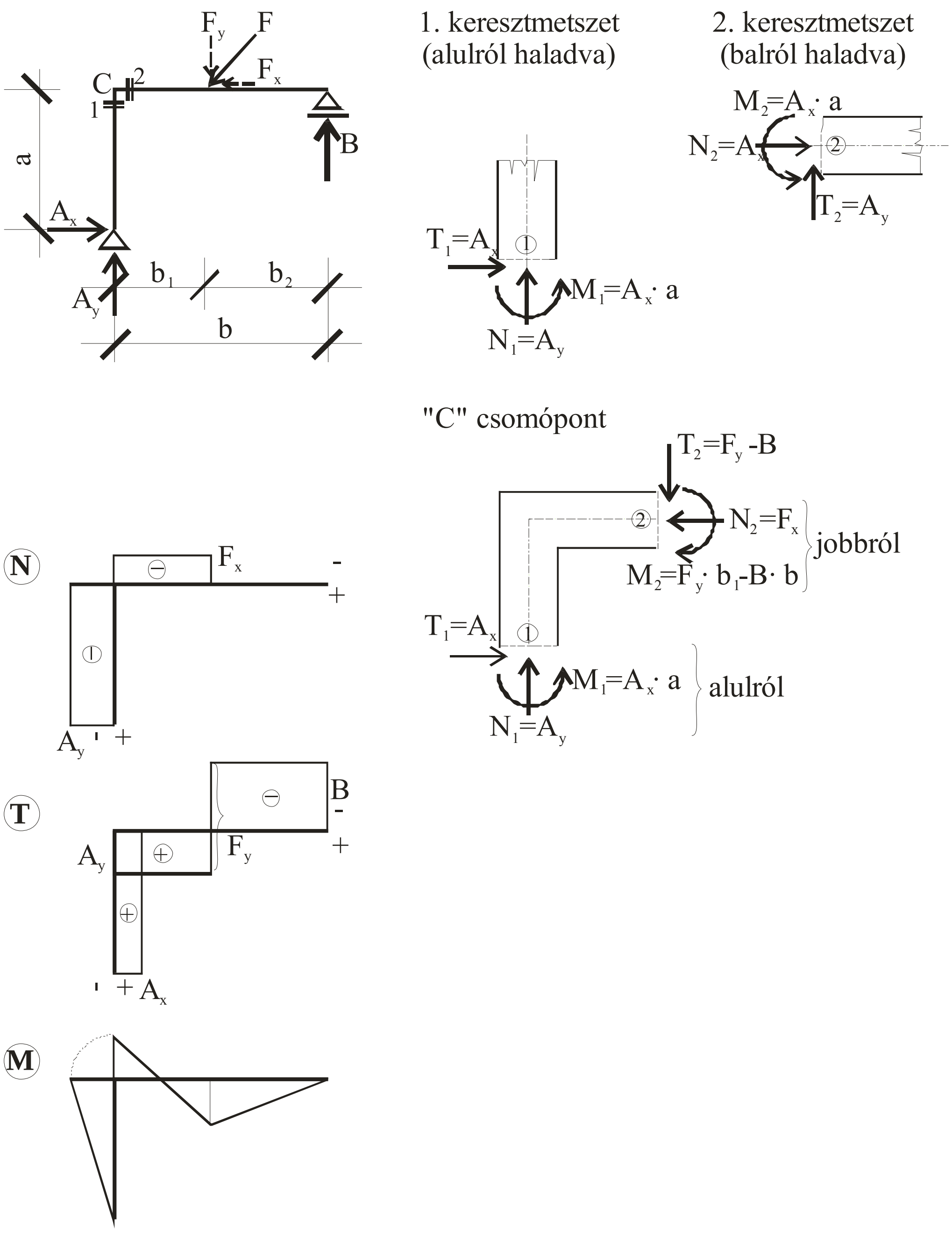


$$Q = 10 \cdot 2{,}0 = 20{,}0\ kN$$
$$A = B = 10\ kN \uparrow$$
$$M_{\max} = \frac{q \cdot l_V^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8}$$
$$M_{\max} = 5\ kNm$$

$$Q = 10 \cdot 2{,}236 = 22{,}36\ kN$$
$$A = B = 10\ kN \uparrow$$
$$M_{\max} = \frac{q \cdot l_V \cdot l_f}{8} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 2{,}236}{8}$$
$$M_{\max} = 5{,}59\ kNm$$

$$Q = 10 \cdot 2{,}236 = 22{,}36\ kN$$
$$A_X = 10\ kN\ (\leftarrow)$$
$$A_Y = 7{,}5\ kN(\uparrow)$$
$$B_Y = 12{,}5\ kN(\uparrow)$$
$$M_{\max} = \frac{q \cdot l_f^2}{8} = \frac{10 \cdot 2{,}236^2}{8}$$
$$M_{\max} = 6{,}25\ kNm$$

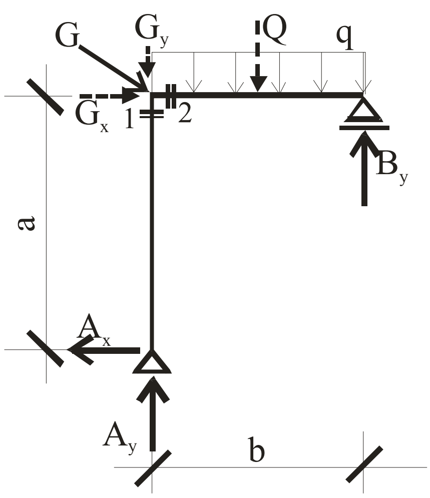
Törtvonalú tartó, terheletlen sarokmerev csomóponttal

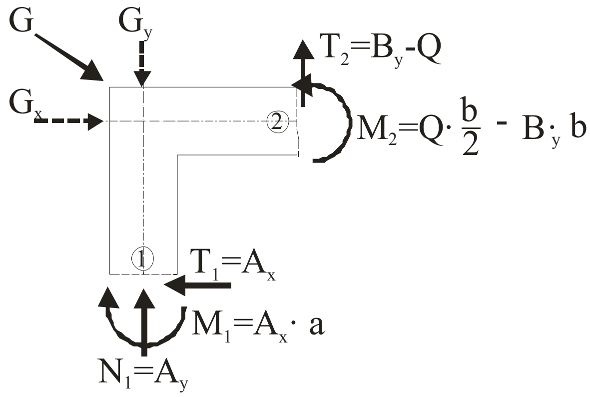


Javasolt adatok a feladat megoldásához:

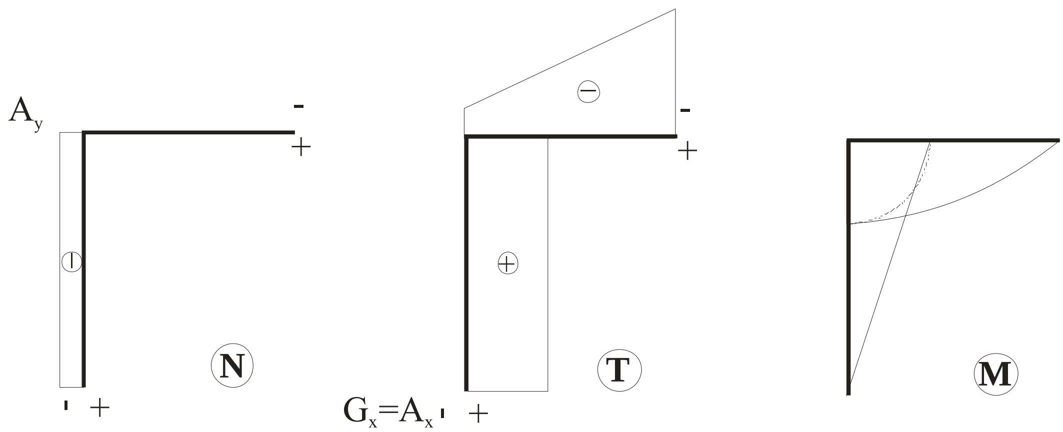
$a=5$ m $b_1=1$ m $b_2=2$ m $\alpha=60°$ $F=10$ kN

Törtvonalú tartó, koncentrált erővel terhelt sarokmerev csomóponttal





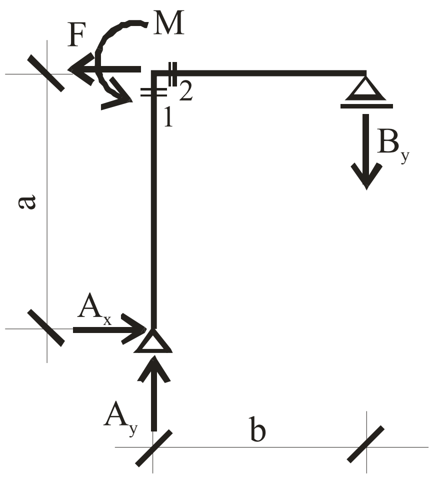
$\sum F_x=0$	$A_x=G_x$
$\sum F_y=0$	$G_y=N_1+T_2$
$\sum M_x=0$	$M_1=M_2$

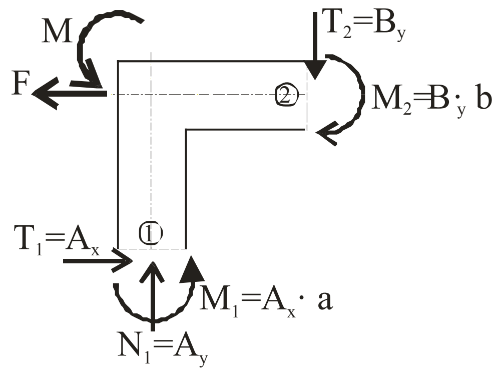


Javasolt adatok a feladat megoldásához:

a=5 m   b=4 m   G=12 kN α=30°   q=2 kN/m

Törtvonalú tartó, koncentrált nyomatékkal terhelt sarokmerev csomóponttal

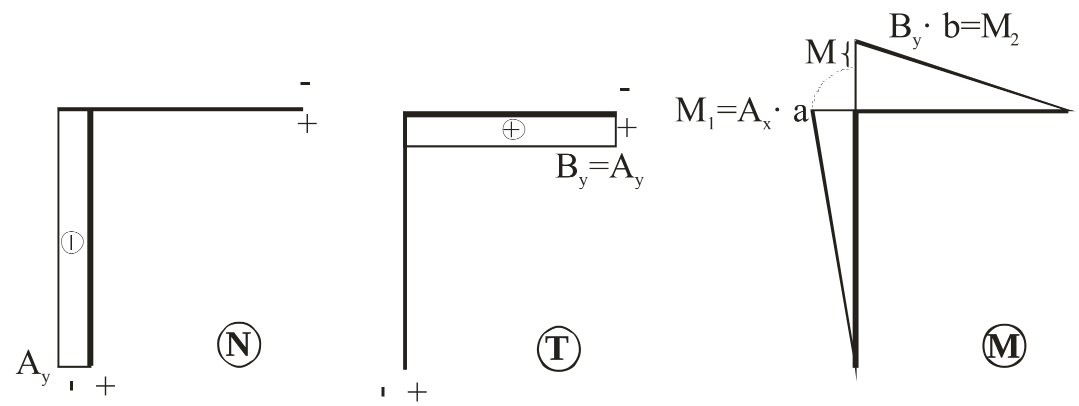




$\sum F_x=0 \qquad T_1=F$

$\sum F_y=0 \qquad T_2=N_1$

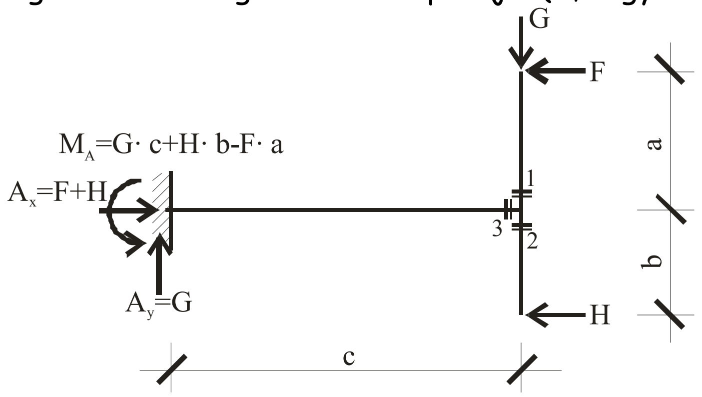
$\sum M_x=0 \qquad M_1+M=M_2$

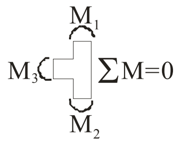


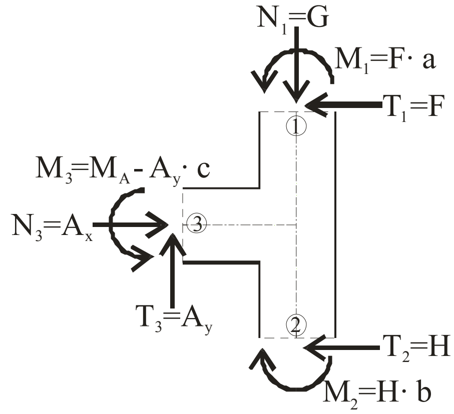
Javasolt adatok a feladat megoldásához:

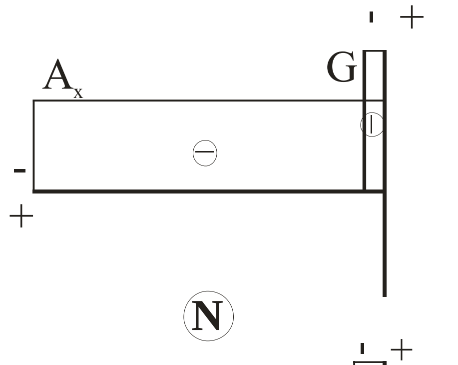
a=5 m b=4 m F=20 kN M=60 kNm

Ágas tartók elágazási csomópontjai (3, vagy több rúd esetén)

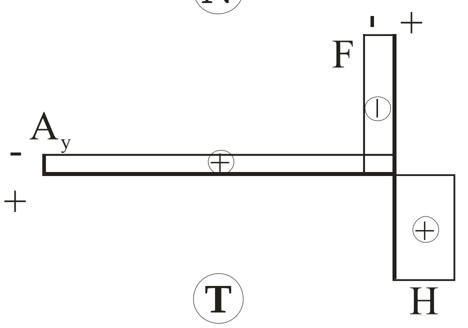


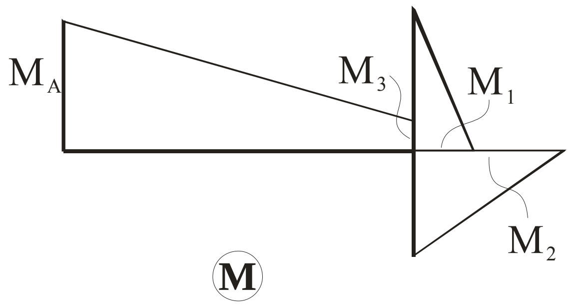






$$\sum F_X = 0 \qquad -T_1 - T_2 + N_3 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \qquad +N_1 - T_3 = 0$$
$$\sum M = 0 \qquad -M_1 + M_2 - M_3 = 0$$



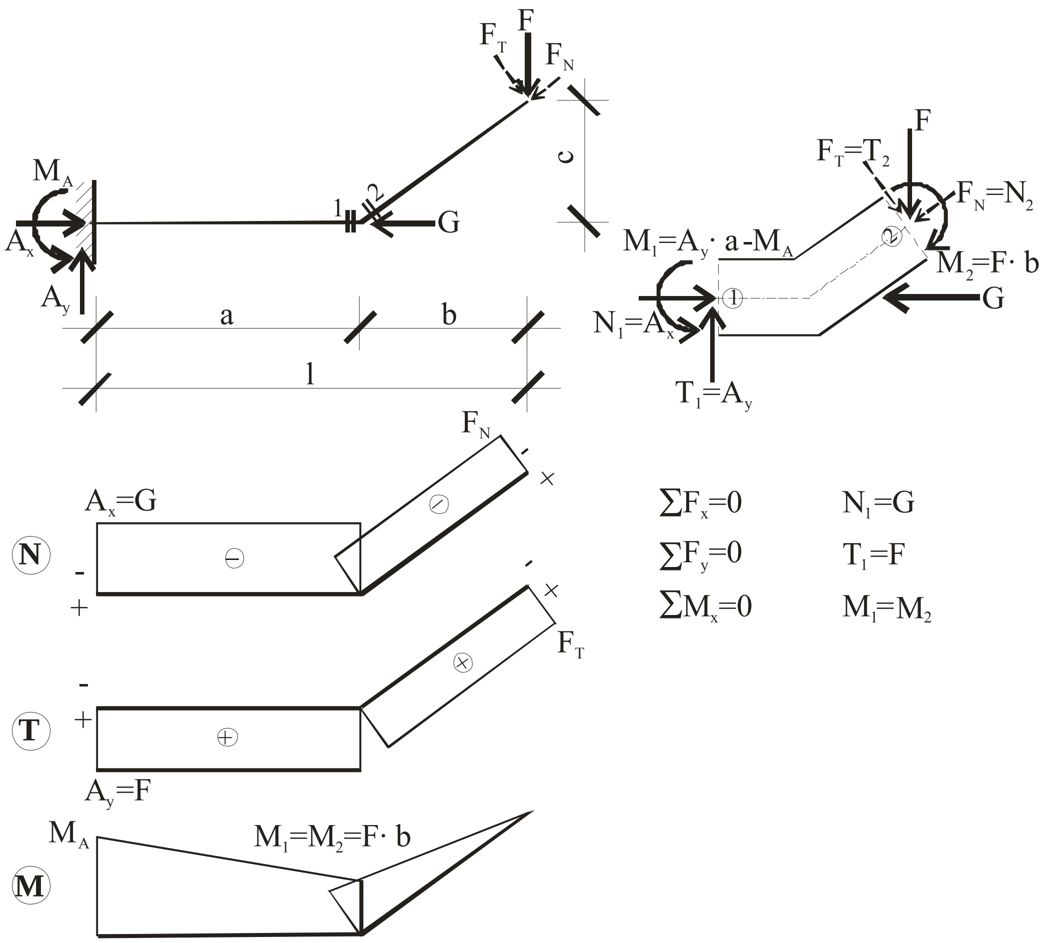


Javasolt adatok a feladat megoldásához:

a=2 m b=1,5 m c=5 m F=3 kN F=10 kN G=2 kN H=6 kN

Ferde helyzetű, koncentrált erőkkel terhelt törtvonalú tartók belső erőinek meghatározása

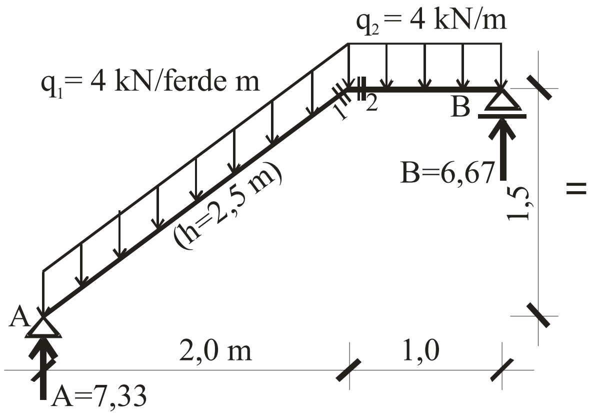
- Ferde rúdhosszak meghatározása
- Erők, támaszerők felbontása normál és nyíróerő irányú vetületeire

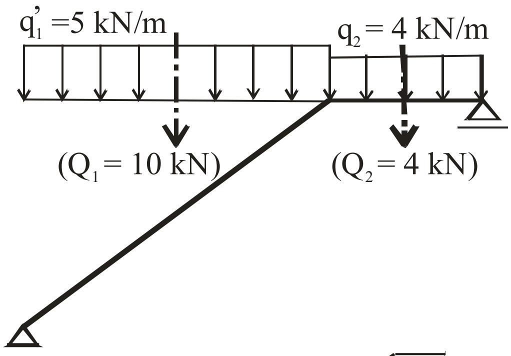


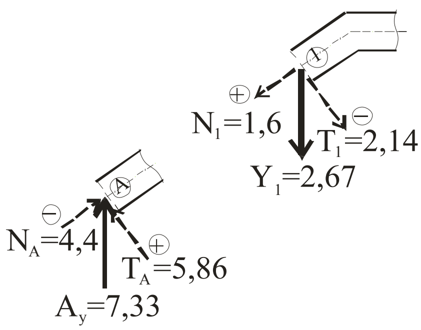
Javasolt adatok a feladat megoldásához:

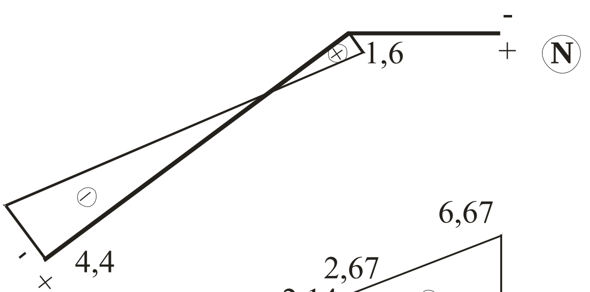
a=3 m b=1,5 m l=4,5 m c=1 m F=6 kN G=8 kN

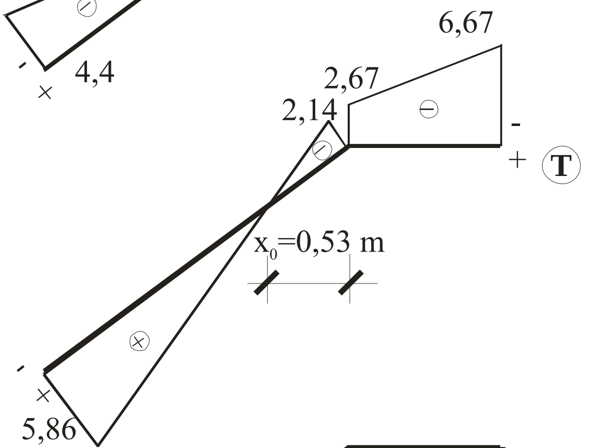
Ferde helyzetű, függőleges megoszló teherrel terhelt, törtvonalú tartó belső erőinek meghatározása (részletesen kidolgozott feladat)











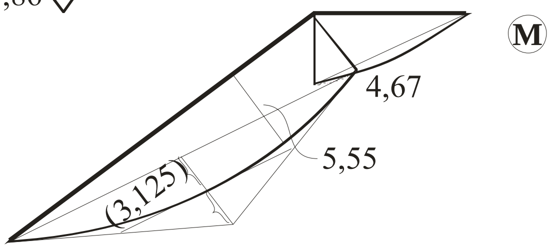
$$\sum M_A = 0$$

$$4 \cdot 2,5 \cdot 1,0 + 4 \cdot 2,5 - B \cdot 3,0 = 0$$

$$B = 6,67 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = 5 \cdot 2,0 + 4 \cdot 1,0 - 6,67 - A_y$$

$$A_y = 7,33 \text{ kN } (\uparrow$$



$$x_0 = \frac{2,67}{5} = 0,53 \text{ m}$$

$$M_1 = -6,67 \cdot 1,0 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5$$

$$M_1 = -4,67 \text{ kNm (jobbról)}$$

$$M_{max} = -6,67 \cdot 1,53 + 4 \cdot 1,53 \cdot 0,76$$

$$M_{max} = -5,55 \text{ kNm (jobbról)}$$

$$m = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2,5}{8} = 3,125 \text{ kNm}$$

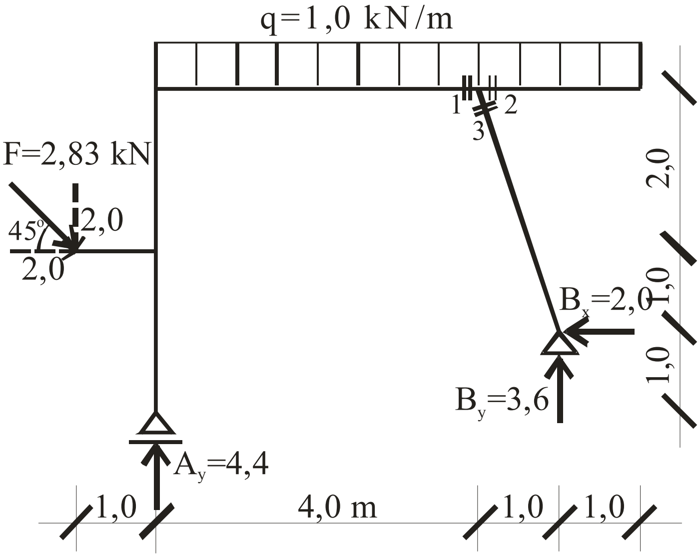
Kéttámaszú kerettartó komplex vizsgálata (részletesen kidolgozott feladat)

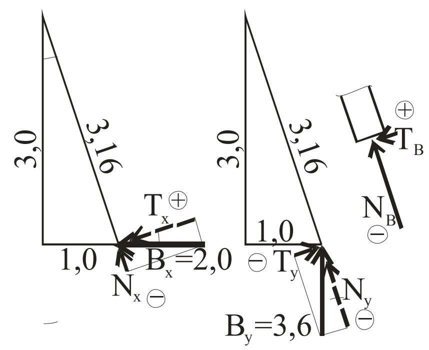
$$F_X = F_Y = 2{,}83 \cdot \cos 45^\circ = 2\ kN$$

$$\sum F_X = 0 \qquad 2 - B_X = 0 \qquad B_X = 2\ kN(\leftarrow)$$

$$\sum M_A = 0 \qquad 2 \cdot 2{,}0 - 2 \cdot 1{,}0 + 1 \cdot 6{,}0 \cdot 3 - 2 \cdot 1{,}0 - B_Y \cdot 5{,}0 = 0 \qquad B_Y = 3{,}6\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad 2 + 1 \cdot 6{,}0 - 3{,}6 - A_Y = 0 \qquad A_Y = 4{,}4\ kN\ (\uparrow)$$





B_X erő felbontása

$$B_{XT} = 2 \cdot \frac{3}{3{,}16} = 1{,}9\ kN$$

$$B_{XN} = 2 \cdot \frac{1}{3{,}16} = 0{,}63\ kN$$

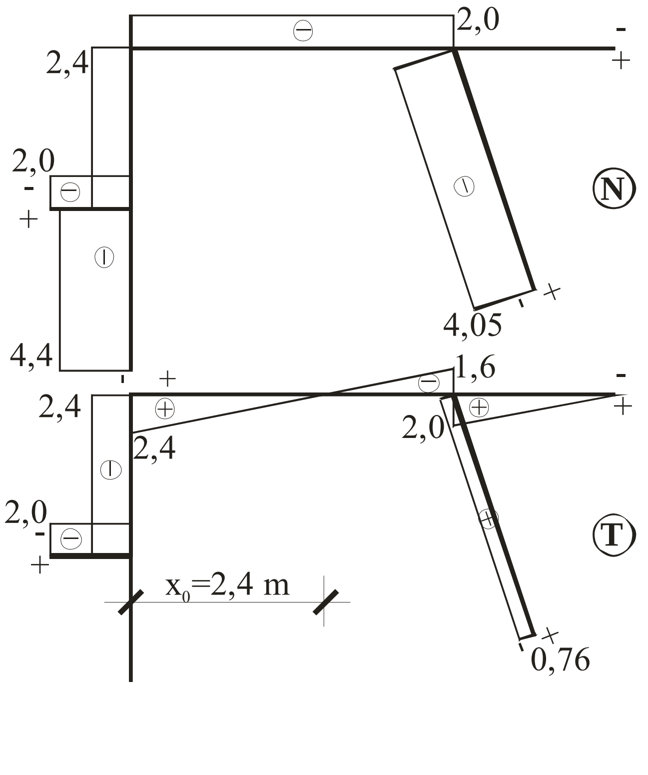
B_Y erő felbontása

$$B_{YT} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{3{,}16} = 1{,}14\ kN$$

$$B_{YN} = 3{,}6 \cdot \frac{3}{3{,}16} = 3{,}42\ kN$$

$$B_T = 1{,}9 - 1{,}14 = 0{,}76\ kN$$

$$B_N = -0{,}63 - 3{,}42 = -4{,}05\ kN$$



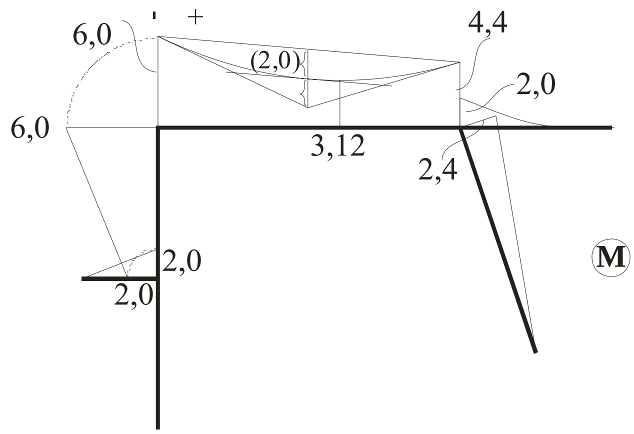
$$x_0 = \frac{2{,}4}{1} = 2{,}4\ m$$

$$M_{\min} = 4{,}4 \cdot 2{,}4 - 2 \cdot 3{,}4 - 2 \cdot 2{,}0 - 1 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 = -3{,}12\ kNm\ \left(balról\ \ felírva\right)$$

$$M_2 = 1 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0 = 2{,}0\ kNm\ \left(jobbról\right)$$

$$M_3 = +2 \cdot 3{,}0 - 3{,}6 \cdot 1{,}0 = 2{,}4\ kNm\ \left(jobbról\right)$$

$$M_1 = 4{,}4\ kNm$$



6.4 „Gerber" tartók belső erő ábrái

A "Gerber" tartók a statikailag határozott csuklós tartók körébe tartoznak. Ezekre a tartókra jellemző, hogy a külső erőrendszerben szereplő ismeretlenek száma meghaladja rendelkezésre álló egymástól független statikai egyensúlyi egyenletek számát. Azonban tudjuk, hogy a belső csuklók nyomaték felvételére nem képesek, így minden beépített belső csukló további nyomatéki egyenlet felírását teszi lehetővé, vagyis csökkenti a külső erőrendszer ismeretlenjeinek számát.

Tehát a folytatólagos többtámaszú, statikailag határozatlan tartókból, határozott tartót tudunk létrehozni, megfelelő számú belső csuklók beiktatásával.
A szükséges csuklók száma, a külső erőrendszerben keletkező ismeretlenek számának és a rendelkezésre álló egymástól független statikai egyensúlyi egyenletek számának különbsége.

A csuklós tartók típusai:
- csuklós gerendatartók („Gerber" tartók)
- háromcsuklós tartók
- összetett csuklós szerkezetek

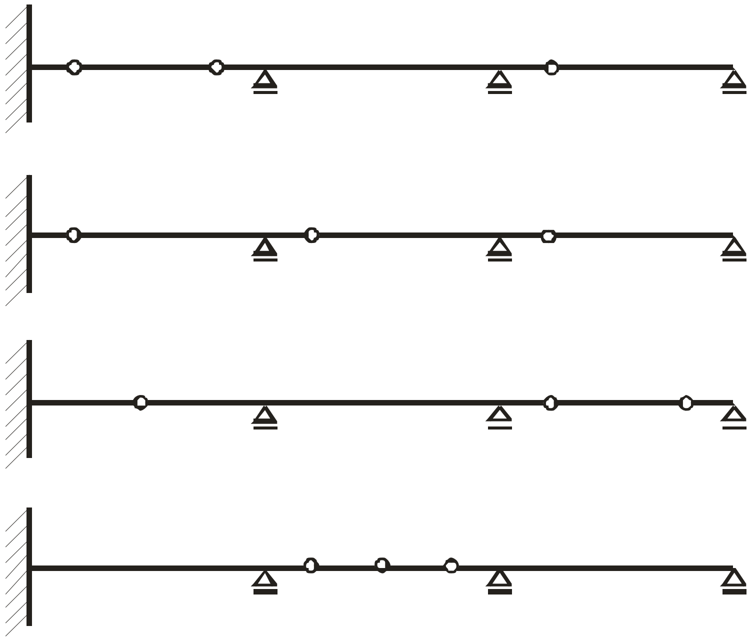
A csuklós többtámaszú gerendatartó („Gerber" tartó) gyakran alkalmazott szerkezeti megoldás, hiszen a beiktatott belső csuklók miatt kisebb az elemek hossza, amely körülmény a gyártást, a szállítást és a szerelést egyszerűsíti, továbbá a csuklók célszerű elhelyezésével a szerkezet gazdaságossá tehető.

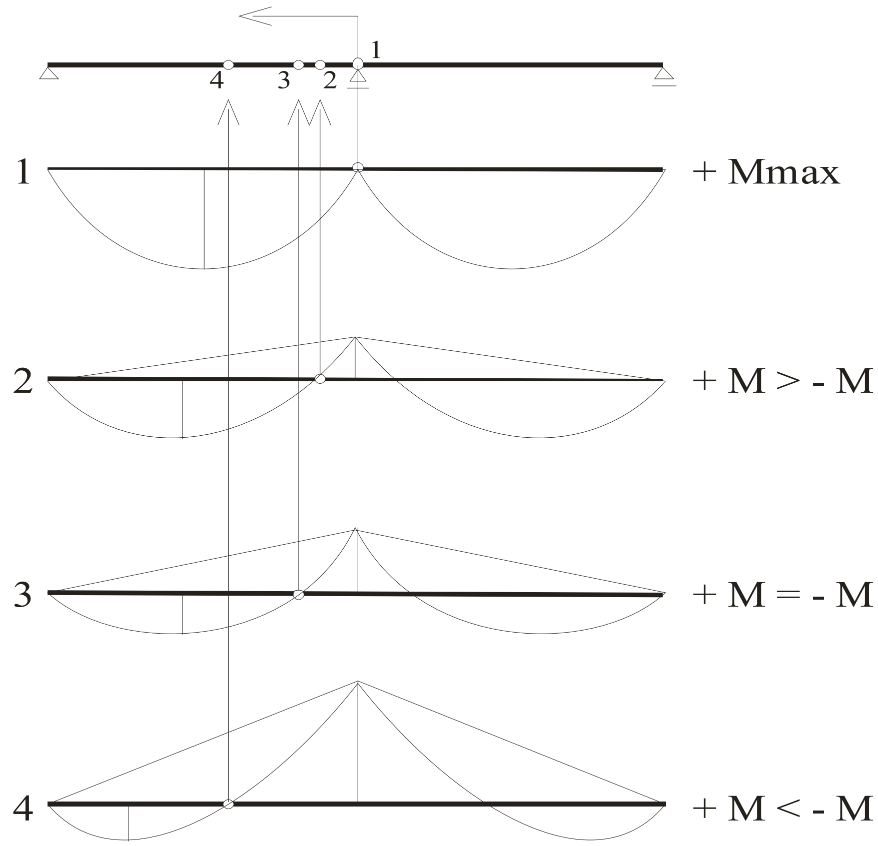
A belső csuklók elhelyezésének szabályai:

- Lehetőleg csuklós és csuklómentes szakaszok váltsák egymást
- Az elhelyezendő csuklók száma az ismeretlen külső erők számának és a rendelkezésre álló, egymástól független statikai egyensúlyi egyenletek számának különbsége
- Csuklókkal megtámasztott szélső szakaszon belül csak egy belső csukló lehet
- 1 szakaszon belül, max. 2 db belső csukló lehet

A "Gerber" tartó belső csuklókkal összekapcsolt konzolos és kéttámaszú tartókból áll. A tartót a környezethez rögzítő támaszokban ébredő erőket külső reakcióknak, az összekapcsoló belső csuklókban ébredő erőket belső reakcióknak nevezzük. A külső és belső reakciók meghatározása egyensúlyozási feladat, amelyet már a korábbiakban ismertettünk.

A belső csuklók helye befolyásolja a nyomatéki ábra jellegét és értékeit. A csuklók helyének változtatásával a nyomatékok szélső értékeit tág határok között változtathatjuk.



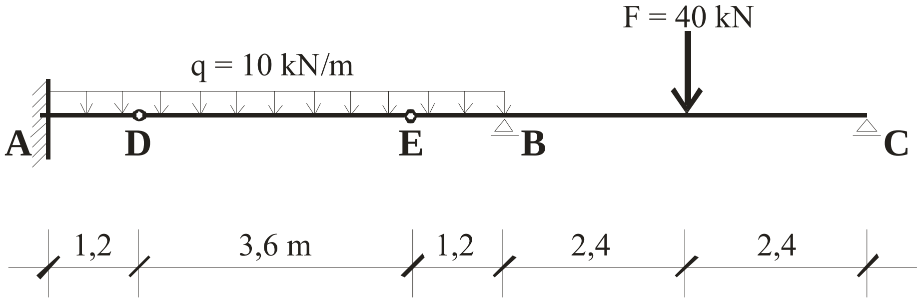


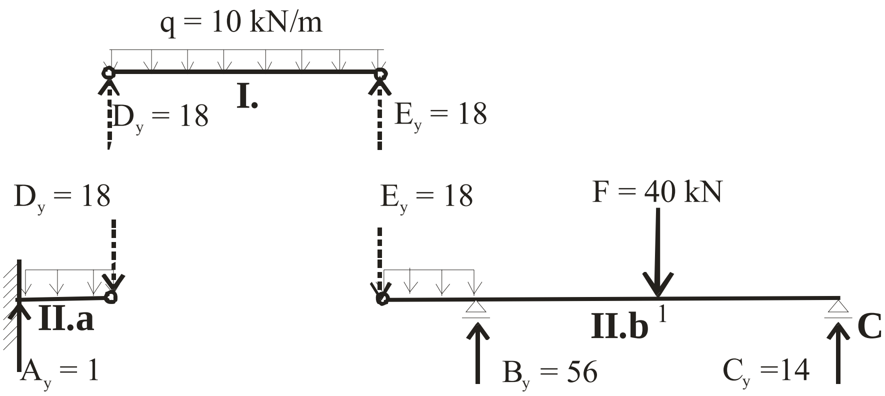
A reakcióerők számításához a tartót szét kell bontani a belső csuklók által határolt szakaszokra, (merev testekre). Azokat a tartórészeket, amelyek önmagukban nem állékonyak, beakasztott (befüggesztett) tartóknak nevezzük. Azokat a tartóelemeket, amelyek önmagukban is megállnak, megtámasztó tartóknak nevezzük. A beakasztott tartók a rájuk ható külső erőket a belső csuklón keresztül a megtámasztó tartóknak adják át. A szétbontást javasoljuk grafikusan is ábrázolni, így könnyebben követhető az erők elrendezése és iránya.

Először mindig a beakasztott tartó reakció erőit határozzuk meg, miután a beakasztott tartó a megtámasztó tartót terheli, a megtámasztó tartó konzolvégén a beakasztott tartó reakcióerejének ellentettje működik.
A megtámasztó tartón a reakcióerőket a tartó saját terhelése, valamint a beakasztott tartóról átadódó erő figyelembevételével határozzuk meg.

A belső erő ábrákat megrajzoljuk a szétbontott tartórészekre, majd egy tengelyre fűzzük fel, hiszen a belső csuklók két oldalán a belső erők azonosak, ezért az ábrákban a belső csukló erők ugrást, vagy törést nem okoznak. Kivétel, az az eset, amikor a belső csukló külső erővel is terhelt. Ebben az esetben a csukló keresztmetszetében terhelő külső erőt, a megtámasztó tartó számításánál kell figyelembe venni, hiszen a beakasztott tartót is a megtámasztó tartó támasztja meg.

Csak függőleges teherrel terhelt „Gerber" tartó, két belső csuklóval





$$D_Y = E_Y = \frac{10 \cdot 3{,}6}{2} = 18\ kN\ (\uparrow)$$

Alátámasztó konzol tartó :

$$\sum F_Y = 0 \qquad A_Y + 18 + 10 \cdot 1{,}2 = 0 \qquad A_Y = -30\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum M_A = 0 \qquad M_A + 18 \cdot 1{,}2 + 10 \cdot \frac{1{,}2^2}{2} = 0 \qquad M_A = -28{,}8\ kNm$$

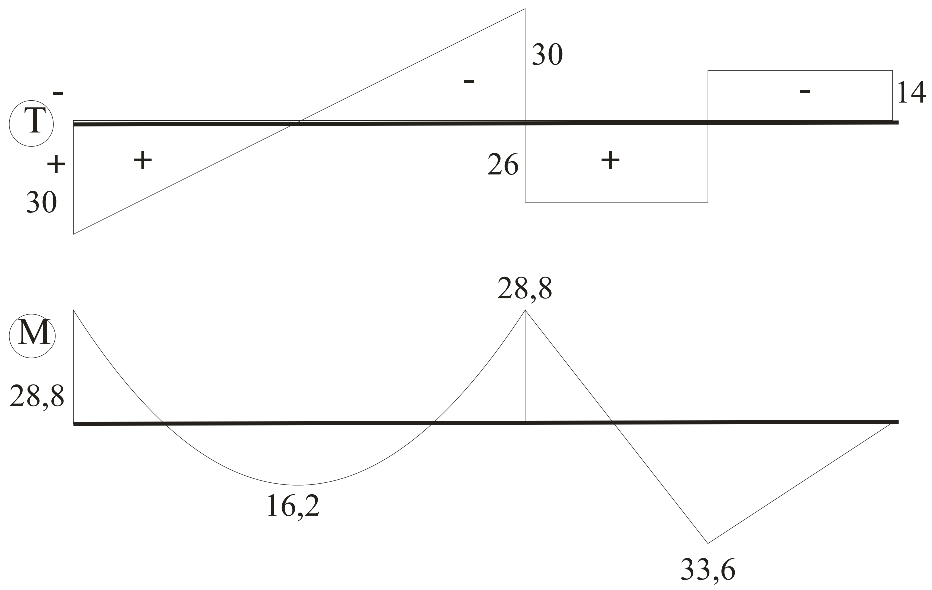
Alátámasztó kéttámaszú tartó :

$$\sum M_C = 0 \qquad -18 \cdot (1{,}2 \cdot 4{,}8) - 10 \cdot 1{,}2 \cdot (0{,}6 + 4{,}8) - 40 \cdot 2{,}4 + B_Y \cdot 4{,}8 = 0 \qquad B_Y = 56\ kN\ (\uparrow)$$

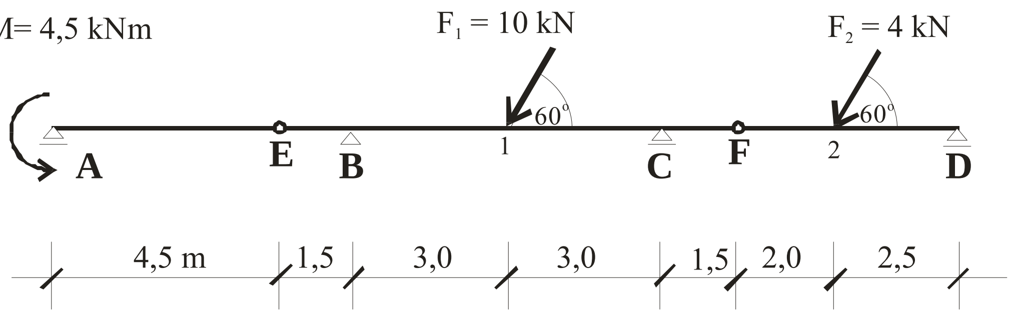
$$\sum F_Y = 0 \qquad C_Y + 10 \cdot 1{,}2 + 18 + 40 - 56 = 0 \qquad C_Y = -14\ kN\ (\uparrow)$$

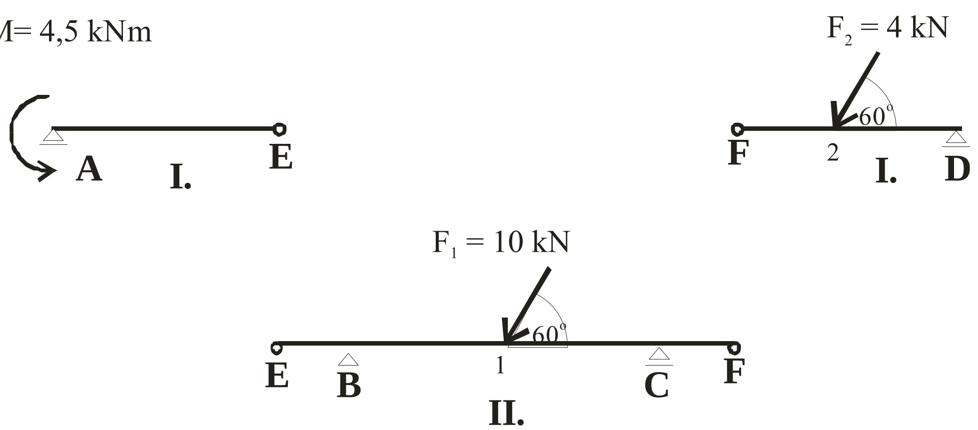
nyomatéki értékek :

$$M_{\max I} = \frac{10 \cdot 3{,}6^2}{8} = 16{,}2\ kNm \qquad M_{\max II\,b} = 14 \cdot 2{,}4 = 33{,}6\ kNm \qquad M_A = M_B = 28{,}8\ kNm$$



Koncentrált erővel és koncentrált nyomatékkal terhelt csuklós többtámaszú tartó, két belső csuklóval.





A ferde erők komponenseinek számítása:

$F_{1X} = 10 \cdot \cos 60^{\circ} = 5{,}0\ kN(\leftarrow)$ $\qquad$ $F_{1Y} = 10 \cdot \sin 60^{\circ} = 8{,}66\ kN(\downarrow)$

$F_{2X} = 4 \cdot \cos 60^{\circ} = 2{,}0\ kN(\leftarrow)$ $\qquad$ $F_{2Y} = 4 \cdot \sin 60^{\circ} = 3{,}46\ kN(\downarrow)$

A beakasztott tartók reakció erői

I. tartórész (A,E)

$$\left|A_Y\right| = \left|E_Y\right| = \frac{4{,}5}{4{,}5} = 1\ kN$$

II. tartórész (F,D)

$$\sum M_F = 0$$

$$D_Y = \frac{3{,}46 \cdot 2}{4{,}5} = 1{,}54\ kN(\uparrow)$$

$$F_Y = 3{,}46 - 1{,}54 = 1{,}92\ kN(\uparrow)$$

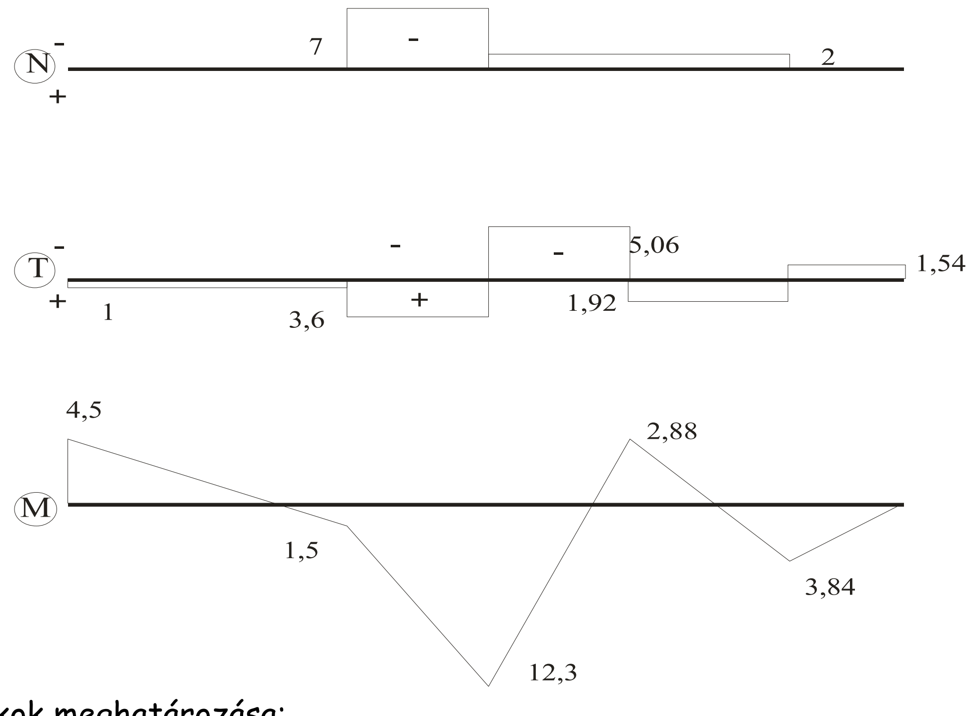
$$F_X = 2\ kN(\rightarrow)$$

Megtámasztó tartó reakciói

$$\sum M_C = 0 \qquad 1 \cdot 7{,}5 - 8{,}66 \cdot 3 + 1{,}92 \cdot 1{,}5 + B_Y \cdot 6 = 0 \qquad B_Y = 2{,}6\ kN(\uparrow)$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad C_Y - 1 + 8{,}66 - 2{,}6 + 1{,}92 = 0 \qquad C_Y = -6{,}98(\uparrow)$$

$$\sum F_X = 0 \qquad B_X - 5{,}0 - 2{,}0 = 0 \qquad B_X = 7{,}0\ kN(\rightarrow)$$



Nyomatékok meghatározása:

$$M_B = 1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5\ kNm$$

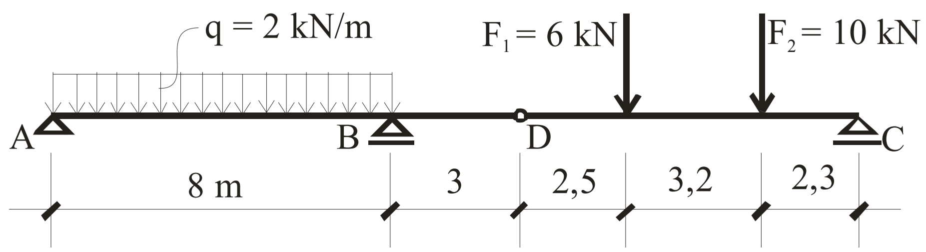
$$M_1 = 1 \cdot 4{,}5 + 2{,}6 \cdot 3 = 12{,}3\ kNm \qquad (\textit{megtámasztó tartó mezőezőközn})$$

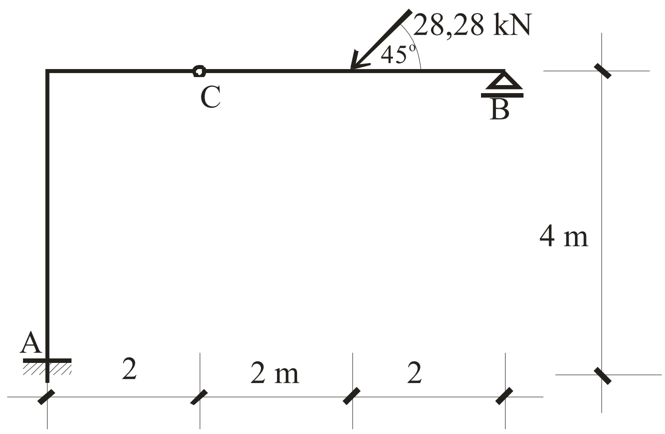
$$M_C = -1{,}92 \cdot 1{,}5 = 2{,}88\ kNm$$

$$M_2 = 1{,}92 \cdot 2{,}0 = 3{,}84\ kNm(\textit{beakasztott tartó } F - D)$$

Javasolt feladatok a gyakorláshoz

Készítsék el a tartók belső erő ábráit!

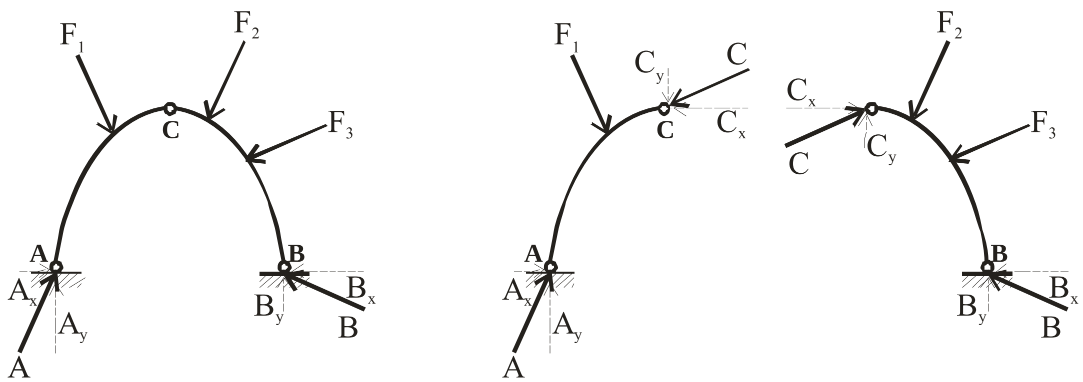




5.6 Három csuklós keret tartók

Azokat a tartókat, ahol a két törtvonalú, vagy íves tartóelemet egymáshoz is és a környezethez is csuklókkal kapcsolunk, három csuklós tartóknak nevezzük. A tartó csak akkor statikailag határozott, ha a három csukló nem esik egy egyenesbe.
Ahogy a többtámaszú csuklós tartóknál, ebben az esetben is, a tartó szétbontható merev testekre. A merev testeknek önmagukban is egyensúlyban kell lenniük, vagyis teljesülniük kell az egyensúlyi feltételeknek. (nyomatéki, vetületi egyensúlyi egyenletek). Ugyanakkor az egyensúlyi feltételek az egész tartóra is érvényesek.

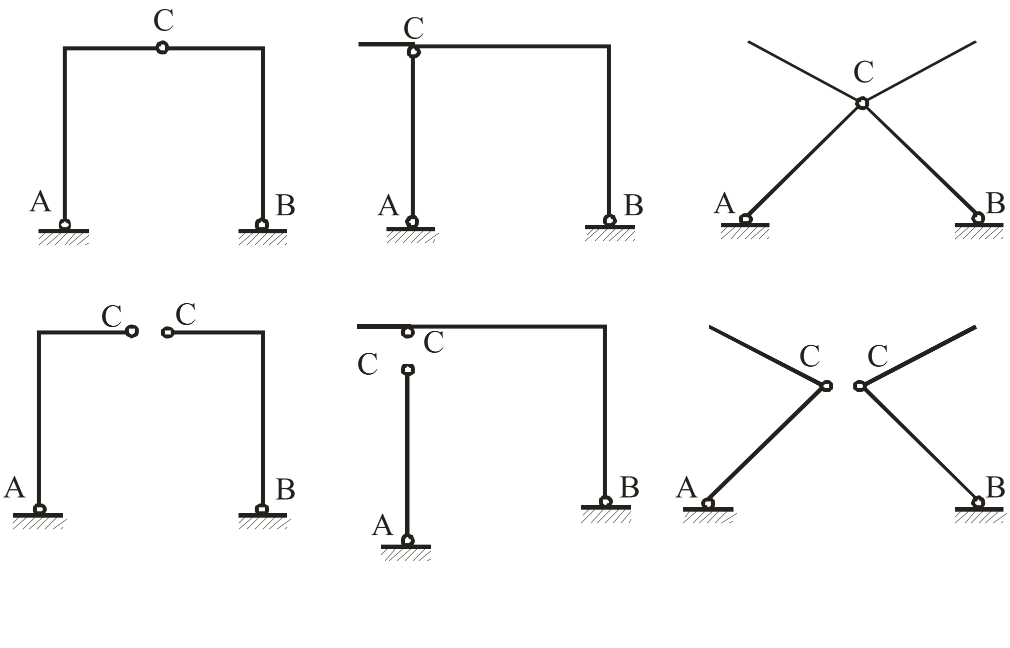
A szétbontott tartó:



Terhelô erôk: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$

Külsô támaszerôk: **A, B** (A_x, A_y, B_x, B_y)

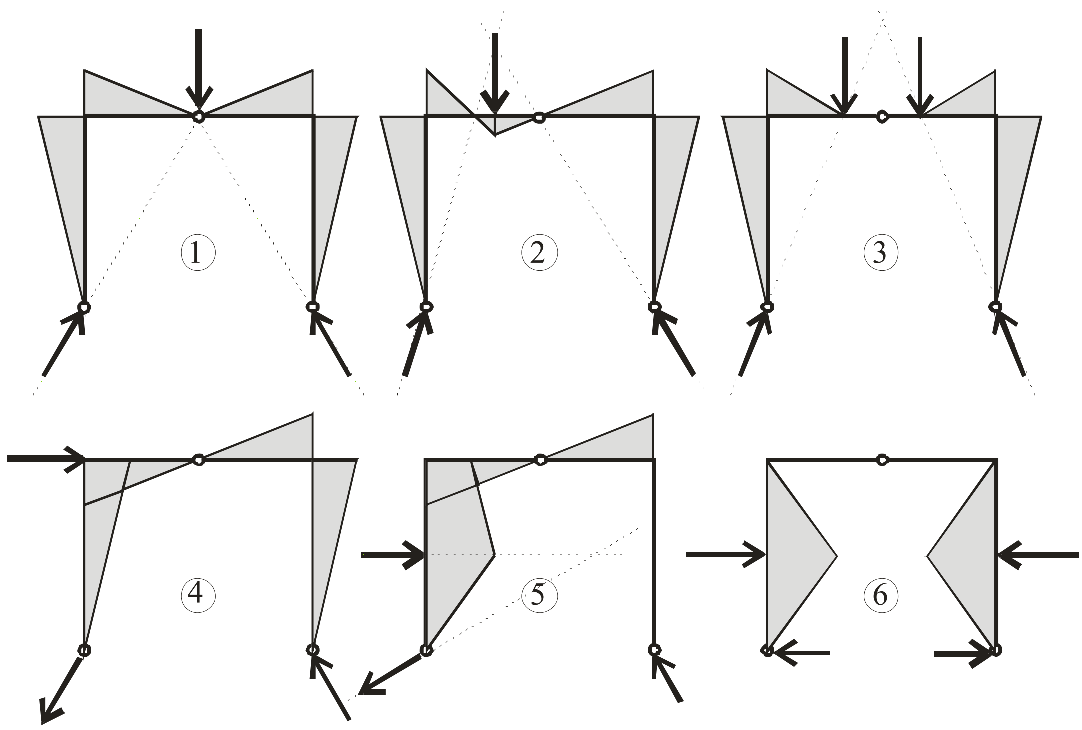
Belsô támaszerô: **C** (C_x, C_y)

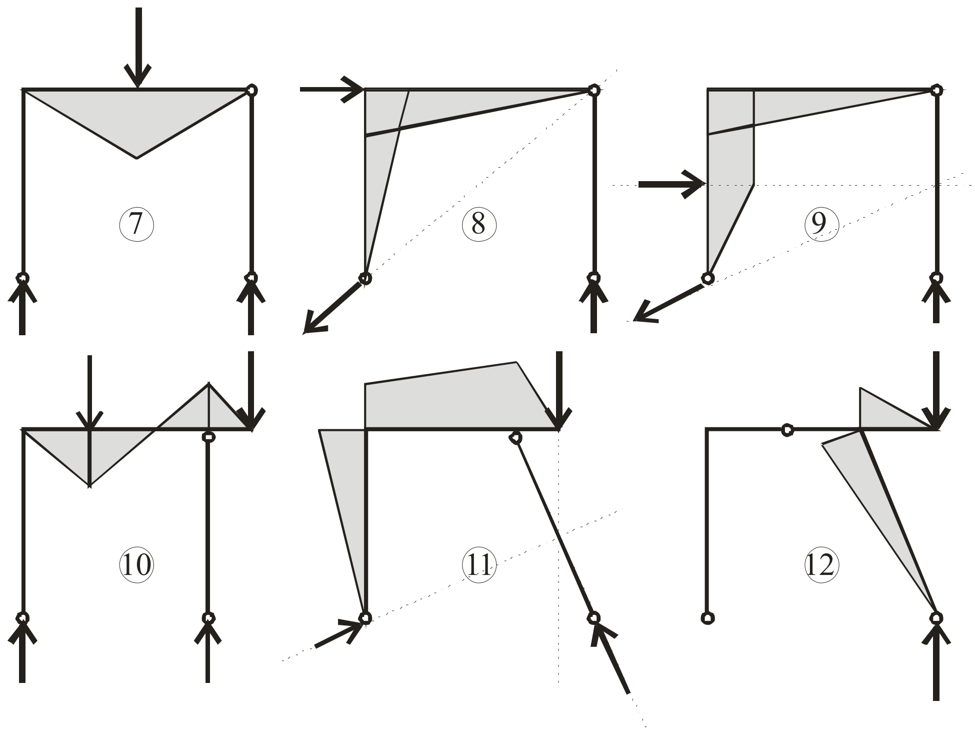


A támaszerők meghatározása számítással a statikai egyensúlyi egyenletek segítségével történik. Az egyenletek felírási sorrendjének helyes megválasztásával az egyenletek egy ismeretlent tartalmaznak, így könnyen megoldhatók. Kivétel, amikor a két támaszcsukló nem azonos magasságban helyezkedik el, ebben az esetben két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg a támaszreakciókat. Amennyiben a belső csukló, külső koncentrált erővel terhelt, a vetületi egyensúlyt a belső csuklóra is igazolni kell.

A háromcsuklós kerettartók alakja, és a belső csukló elhelyezése igen változatos lehet. Bizonyos egyszerű terhelések esetén az egyensúlyozó erőkre vonatkozóan összefüggéseket vonhatunk le.

A következő ábráknál a terhelés ábrázolásával egyidejűleg, az alakhelyes nyomatéki ábrát is rászerkesztettük a tartók tengelyvonalára.





Az ábrák alapján a következő összefüggéseket vonhatjuk le:

- A szimmetria feltételeinek teljesülése esetén (a teher is és a tartó geometriája is szimmetrikus) a „C" belső csukló erő vízszintes lesz (3, 6 eset)
- Amennyiben a csukló külső erővel nem terhelt, a nyomatéki ábra a csuklóponton keresztül, törés nélkül halad át (2, 4, 5 eset)
- Amennyiben a tartón a terhelés csak függőleges erőkből áll, a két talpcsuklóban ébredő reakció vízszintes komponensei azonos nagyságúak de ellentétes irányúak lesznek (1, 2, 3 eset)
- Az ingaoszlop (keretláb, amely két végén csuklós és terheletlen) görgős támasznak felel meg (7, 8, 9, 10, 11 eset)
- Amennyiben az egy terhelő erő a támasz fölé esik, hatásvonala átmegy a támaszponton, a kerettartó egyik felén van csak belső erő. (12 eset)
- Amennyiben a kerettartó egyik fele terheletlen, a terheletlen részen lévő talpcsuklóban ébredő reakció erő hatásvonalát megadja a talpcsuklót és a belső csuklópontot összekötő egyenes (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 eset)
- Amennyiben a teher 1 db koncentrált erő, akkor három erő egyensúlyának feltétele alapján a terhelő erő és a két reakció erő hatásvonalának egy közös pontban kell metszenie egymást (statika II. alaptétele)

Vízszintes megoszló teherrel terhelt tartó, talpcsuklók azonos magasságban

Támaszerők meghatározásának sorrendje:

- Nyomatéki egyensúlyi egyenlet az egész keretre → B_Y
- Függőleges erők vetületi egyensúlyi egyenlete az egész keretre → A_Y
- Nyomatéki egyenlet a baloldali merev testre, a belső csuklóra felírva → A_X
- Vízszintes erők vetületi egyenlete az egész keretre → B_X

$$\sum M_A = 0 \qquad 4\cdot 6\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 3 - B_Y\cdot 9 = 0 \qquad B_Y = 12\ kN\,(\uparrow)$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad -12 + A_Y = 0 \qquad A_Y = 12\ kN\,(\downarrow)$$

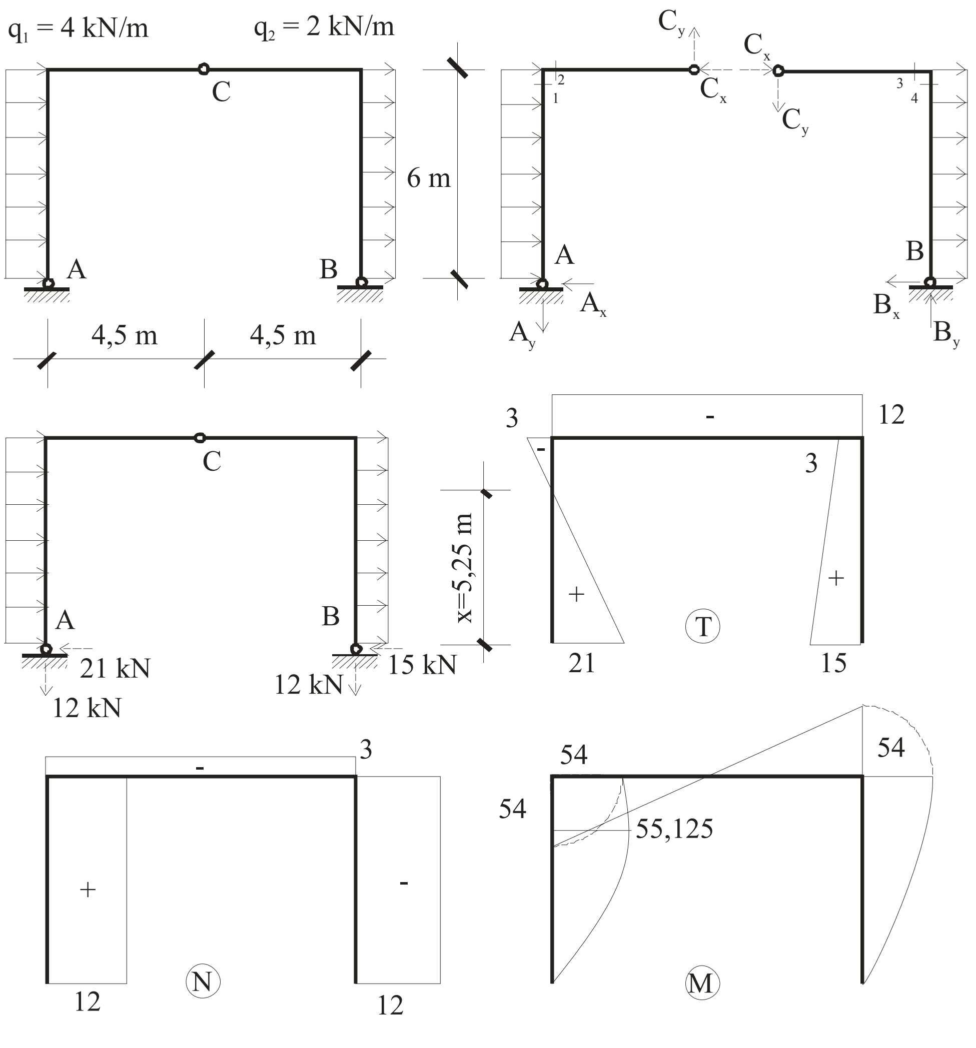
$$\sum M_{C\,bal} = 0 \qquad -4\cdot 6\cdot 3 - 12\cdot 4{,}5 - A_X\cdot 6 = 0 \qquad A_X = 21\ kN\,(\leftarrow)$$

$$\sum F_X = 0 \qquad 4\cdot 6 + 2\cdot 6 - 21 - B_X = 0 \qquad B_X = 15\ kN\,(\leftarrow)$$

Nyomatéki értékek :

$M_1 = M_2 = +21\cdot 6 - 4\cdot 6\cdot 3 = -54\ kNm$ *balról belül húzott*

$M_3 = M_4 = +15\cdot 6 - 2\cdot 6\cdot 3 = +54\ kNm$ *jobbról kívül húzott*



Függőleges megoszló teherrel terhelt tartó, a talpcsuklók azonos magasságban (a tartó geometriája is, és a teher is szimmetrikus!)

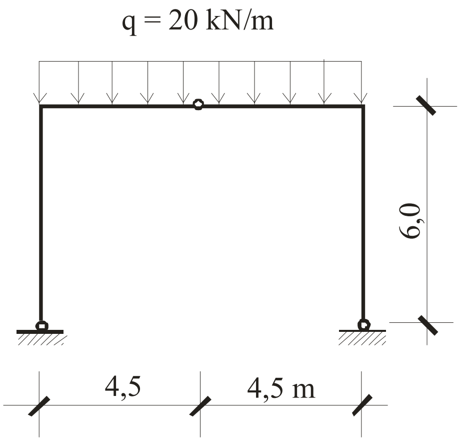
$$A_Y = B_Y = \frac{20 \cdot 9}{2} = 90\ kN\ (\uparrow)$$

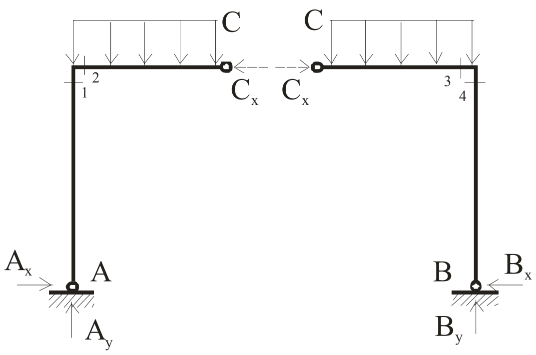
$$\sum M_{C\,bal} = 0 \qquad 90 \cdot 4{,}5 - 20 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}25 - A_X \cdot 6{,}0 = 0 \qquad A_X = 33{,}75\ kN\ (\rightarrow)$$

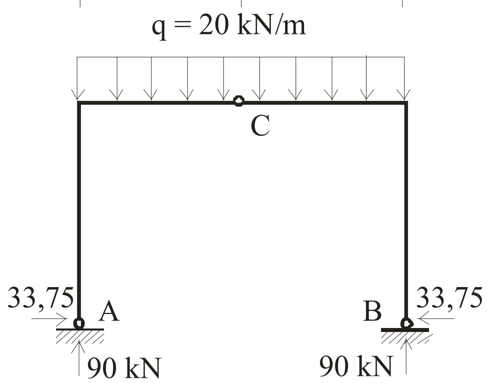
$$\sum F_X = 0 \qquad B_X = 33{,}75\ kN\ (\leftarrow)$$

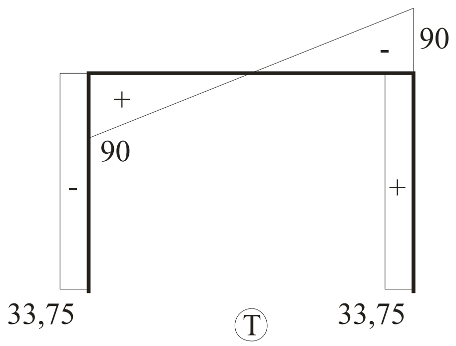
$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 33{,}75 \cdot 6 = 202{,}5\ kNm\ (kívül\ húzott)$$

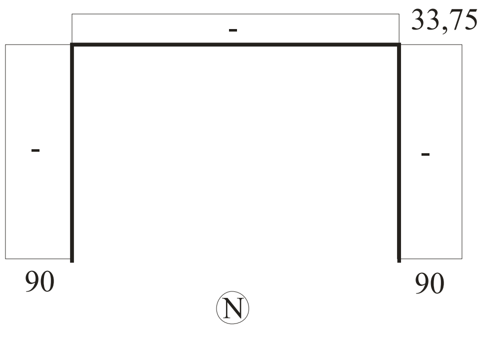
$$x = \frac{21}{4} = 5{,}25\ m \qquad M_{\max} = 21 \cdot 5{,}25 - 4 \cdot \frac{5{,}25^2}{2} = 55{,}125\ kNm$$

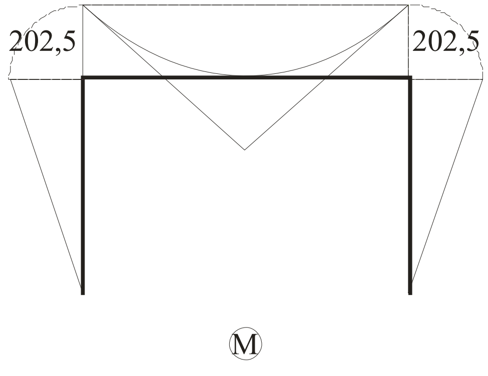




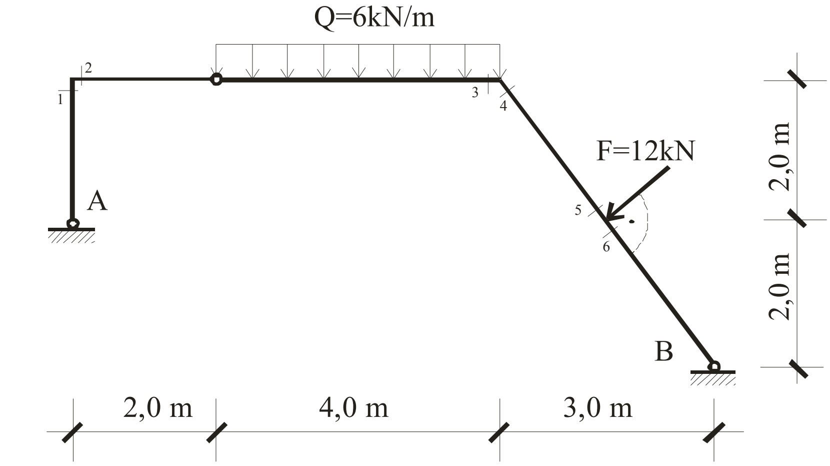


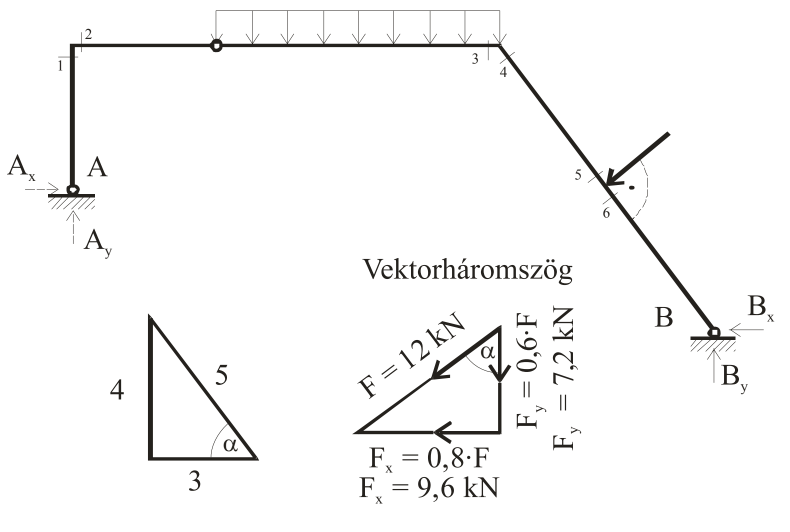


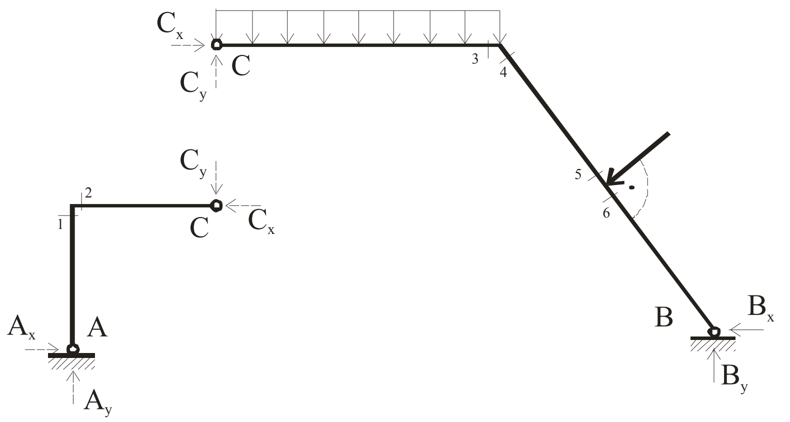




Általános teherrel terhelt tartó, a talpcsuklók nem azonos magasságban
(a keret egyik fele terheletlen!)







A terheletlen tartórészen a támaszerő hatásvonala a két csuklót összekötő egyenes.

$$\sum M_B = 0 \qquad A_X = A_Y = 0{,}707 \cdot A \qquad (az\ erő\ hatásvonala\ 45^\circ)$$

$$-6 \cdot 4 \cdot (2+3) - 7{,}2 \cdot 1{,}5 - 9{,}6 \cdot 2 + A_Y \cdot 9 + A_X \cdot 2 = 0$$

$$-6 \cdot 4 \cdot (2+3) - 7{,}2 \cdot 1{,}5 - 9{,}6 \cdot 2 + 0{,}707 \cdot A \cdot 9 + 0{,}707 \cdot A \cdot 2 = 0 \qquad A = 19{,}29\ kN$$

$$A_X = A_Y = 13{,}64\ kN \qquad A_X\ (\rightarrow) \qquad A_Y\ (\uparrow)$$

$$\sum F_X = 0 \qquad 13{,}64 - 9{,}6 - B_X = 0 \qquad B_X = 4{,}04\ kN\ (\leftarrow)$$

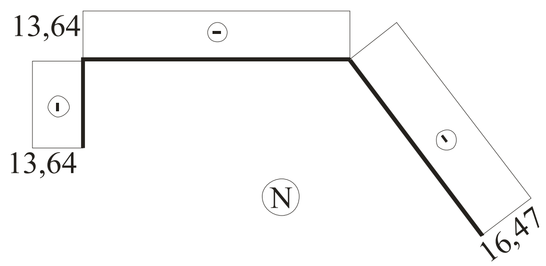
$$\sum F_Y = 0 \qquad 6 \cdot 4 + 7{,}2 - 13{,}64 - B_Y = 0 \qquad B_Y = 17{,}56\ kN\ (\uparrow)$$

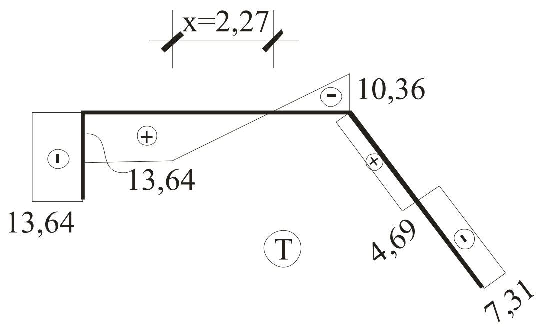
A belső erő ábrák megszerkesztéséhez szükség van a B_X és B_Y támaszerő komponensek felbontására, normál és tangenciális összetevőkre.

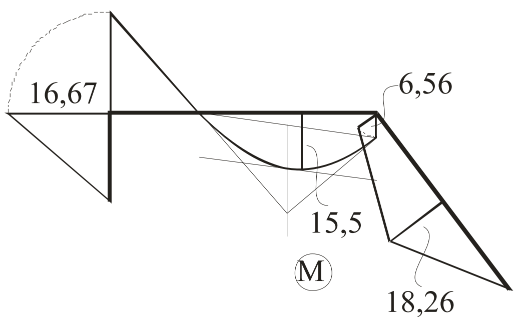
$$B_X\ erő\ felbontása \qquad N_X = 0{,}6 \cdot 4{,}04 = 2{,}42\ kN(-) \qquad T_X = 0{,}8 \cdot 4{,}04 = 3{,}23\ kN(+)$$

$$B_Y\ erő\ felbontása \qquad N_Y = 0{,}8 \cdot 17{,}56 = 14{,}05\ kN(-) \qquad T_Y = 0{,}6 \cdot 17{,}56 = 10{,}54\ kN(-)$$

$$N_B = -2{,}42 - 14{,}05 = -16{,}47\ kN \qquad T_B = +3{,}23 - 10{,}54 = -7{,}31\ kN$$







Nyomatéki értékek:

$$M_1 = M_2 = -16{,}34 \cdot 2 = -27{,}28\ kNm \qquad (balról)$$

$$M_3 = M_4 = 13{,}64 \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 6{,}56\ kNm \qquad (szétbontott\ tartón\ balról)$$

$$M_5 = M_6 = -17{,}56 \cdot 1{,}4 + 4{,}04 \cdot 2 = -18{,}26\ kNm \qquad (jobbról)$$

$$x = \frac{13{,}64}{6} = 2{,}24\ m \qquad M_{\max} = 13{,}64 \cdot 2{,}27 - 6 \cdot \frac{2{,}27^2}{2} = 15{,}5\ kNm \quad (szétbontott\ tartón\ balról)$$

Javasolt feladatok a gyakorláshoz:

Készítsék el a tartók kótázott belső erő ábráit