# Tartók statikája II.

## 1.

## Statikailag határozott síkbeli tartók reakcióerő és igénybevételi hatásábrái statikai és kinematikai elvek alapján

Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem  Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

## 1. Rendszerbe sorolás

Mechanika

- Statika
- Szilárdságtan
- Tartók statikája
  - Munka és energiatételek
  - Statikailag határozatlan tartók
  - Hatásfüggvények

## 2. Idealizálás

A tartó anyagára, a tartó alakjára, elemeire, a kapcsolatok kialakítására és a terhekre vonatkozólag:

- A tartó szilárd test, amely a terhek hatására alakját változtatja. Homogén, izotróp és lineárisan rugalmas.
- A keresztmetszeti síkok az alakváltozás után is síkok maradnak. Megtartják merőleges helyzetüket a tartó hossztengelyére (Bernoulli-Navier hipotézis).

- Kis elmozdulásokról van szó.
- Elsőrendű elmélettel számolunk, azaz az egyenletek felírásakor a szerkezet kiindulási, deformálódásmentes geometriai adatait vesszük figyelembe.
- Érvényes a szuperpozíció elve (egymásra halmozás).

A terhek lehetnek:

Típus szerint:

- állandó terhek,
- esetleges terhek.

Jellegük szerint:

- statikai (erő jellegű),
- kinematikai (elmozdulás, hőmérsékletváltozás).

Az erőterhek lehetnek:

- koncentrált vagy megoszló,
- álló vagy mozgó.

Csak síkbeli tartókkal foglalkozunk.

# 3. Mozgó teher

A tartón mozgó teher működik.

Több egymással párhuzamos, egymáshoz képest kötött helyzetű, mozgó erőkből álló tehercsoport hatásának vizsgálata visszavezethető, egyetlen a tartón végigmenő egységnyi függőleges erő hatásának vizsgálatára.

Ha a mozgó erő helyzetkoordinátája „*X*" (változó), akkor a kötött ξ (kszí) koordinátájú „*K*" keresztmetszetben keletkező hatásváltozást egy függvény írja le, ez a hatásfüggvény.

A hatásfüggvény jele: η (éta)

A hatásfüggvény értéke az erő pillanatnyi helyzetétől függ.

Statikailag határozott tartók hatásfüggvényei mindig elsőrendűek!

Azt a függvényt, amely a rögzített paraméterű keresztmetszetben a változó „*X*" koordinátájú helyen működő függőleges egységerő által létrehozott erőhatást írja le, *erőhatásfüggvénynek* nevezzük. Az erőhatásfüggvényt ábrázoljuk. Ez a *hatásábra*.

A meghatározás módszerei *statikai* és *kinematikai módszerek* lehetnek.

A valóságban gyakoriak a mozgó terhek. Ilyen tipikus példák lehetnek például a darupályán mozgó darukocsi, vagy hídon közlekedő jármű tengelyterhe. Természetesen ezek térbeli szerkezetek, azonban a számítás egyszerűsítése miatt mindig visszavezethetők síkbeli vizsgálatra.

A hatásábrák készítése grafikus úton nagyon egyszerű, azonban más logikát kíván, mint az eddigiekben a belső igénybevételi ábrák készítése.

A megértés megkönnyítése miatt számítás is mellékelve van a mintapéldákhoz, azonban zárthelyi dolgozatban, illetve vizsgán elegendő a grafikus úton való feladatmegoldás.

Minden esetben kótázott ábrákat kell készíteni, a nevezetes keresztmetszetekben minden szükséges értéket fel kell tüntetni.

Az alapvonal előjelezése azonos, mint a belső igénybevételi ábráknál volt. A tengely felső oldala negatív, az alsó oldala pozitív. Az előjeleket hatásábrák esetén nem szoktuk kiírni.

A támaszerőkből rajzolt hatásábrák mindig a pozitív oldalra kerülnek!

A nyomatéki hatásábrák mindig a húzott oldalra kerülnek!

## 4. Statikai elvek alapján

A számítás során csupán statikai egyensúlyi egyenleteket kell használni.

Jelölések:

$\eta(A_y)$, $\eta(B_y)$ − reakcióerő hatásábrák;

$\eta(M_A)$ − befogási nyomaték hatásábra;

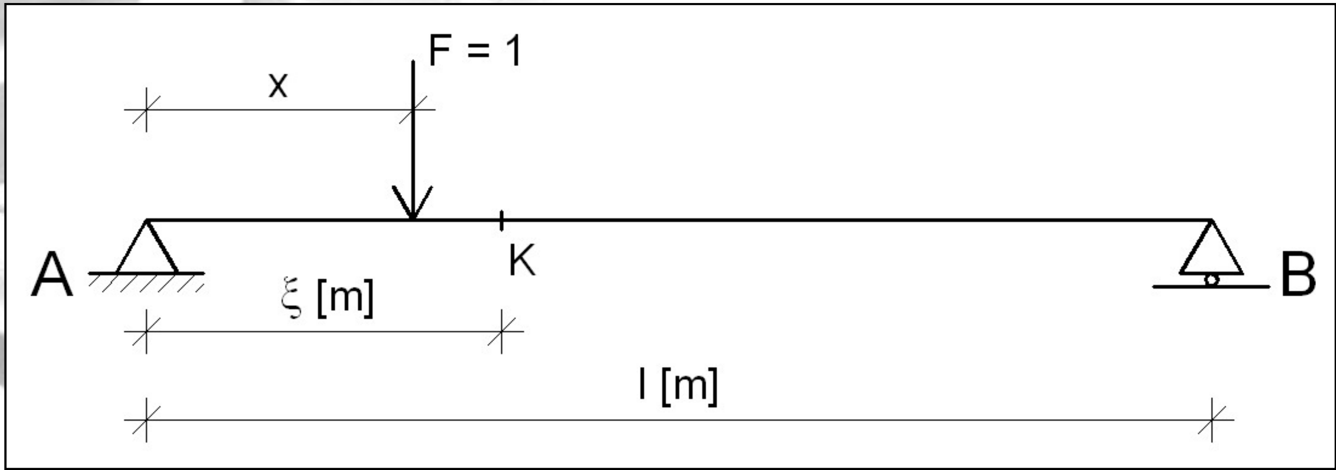
$\eta(N_K)$ − normálerő hatásábra;

$\eta(T_K)$ − nyíróerő hatásábra;

$\eta(M_K)$ − nyomatéki hatásábra;

## 1. mintapélda

Adott egy statikailag határozott, mozgó teherrel terhelt kéttámaszú, tartó. A feladat a tartó hatásábráinak elkészítése.




*1. ábra.* 1. mintapélda – mozgó teherrel terhelt kéttámaszú tartó

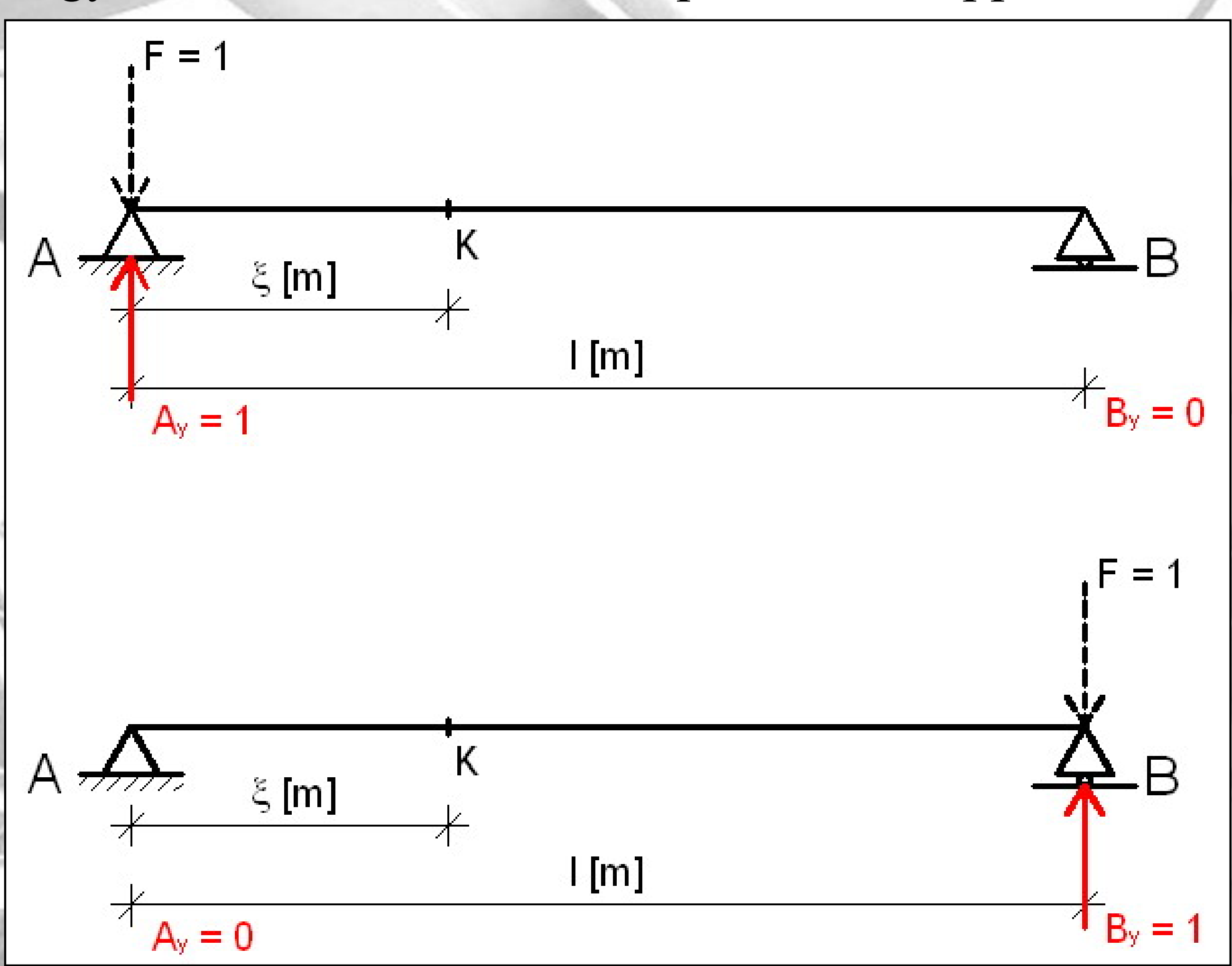
Ha feltételezzük, hogy a mozgó teher épp az „*A*” támasz felett áll, akkor az $A_y$ támaszerő értéke ugyanannyi, azaz egységnyi, mint a teher, ekkor a $B_y$ támaszerő értéke nulla.

Ha feltételezzük, hogy a mozgó teher épp az „*B*” támasz felett áll, akkor a $B_y$ támaszerő értéke lesz ugyanannyi, azaz egységnyi, mint a teher, ekkor az $A_y$ támaszerő értéke lesz nulla.

Ez az egyensúly adja a támaszerők hatásábráit.

Ez nem más, mint egy erővel való egyensúlyozás: egy erőt egy azonos nagyságú, azonos hatásvonalú, de ellentétes irányú erő tud kiegyensúlyozni. (*2. ábra*)

A két végpont között mozgó teher pillanatnyi helyzete dönti el azt, hogy a két támaszerő az adott pillanatban épp mekkora nagyságú lesz.




*2. ábra.* 1. mintapélda – egy erővel való egyensúlyozás

Támaszerők hatásfüggvényei számítással:

$$\sum M_i^{(A)} = 0 \rightarrow B_y$$

$$0 = F \cdot x - B_y \cdot l$$

$$B_y = \frac{F \cdot x}{l}$$

$$\eta_{(B_y)} = \frac{1 \cdot x}{l} = \frac{x}{l}$$

$$\sum M_i^{(B)} = 0 \rightarrow A_y$$

$$0 = -F \cdot (l - x) + A_y \cdot l$$

$$A_y = \frac{-F \cdot (l - x)}{l}$$

$$\eta_{(A_y)} = \frac{-1 \cdot l + 1 \cdot x}{l} = \frac{-l + x}{l}$$

Mivel csak függőleges teher van a tartón, ezért normál irányú hatásfüggvény nem keletkezik.

Nyíró hatásfüggvény számítással:

$T_k$

$x < \xi_K$

$T_k = +A_y - F$

$\eta_{(T_k)} = +\eta_{(A_y)} - 1$

$x > \xi_K$

$T_k = +A_y$

$\eta_{(T_k)} = +\eta_{(A_y)}$

A számítás során balról jobbra haladva összegezni kell a nyíró hatást kifejtő erőket. Kikötjük, hogy a mozgó teher a „*K*” keresztmetszet előtti, vagy már utána lévő tartórészen mozog.

A grafikus ábrázolásnál halványan lerajzoljuk az eredeti $\eta(A_y)$ hatásábrát, majd minden pontjából kivonunk „*F*”-et, azaz egységnyit, tehát gyakorlatilag párhuzamos eltolás történik negatív irányba (felfelé). Így megkapjuk a végleges ábrát. Balról jobbra haladva a „*K*” keresztmetszetig a párhuzamosan eltolt ábra lesz a végleges, majd a „*K*” keresztmetszet utáni szakaszon az eredeti $\eta(A_y)$ vonala adja a végleges ábrát.

Nyomatéki hatásfüggvény számítással:

$$M_k$$

$$x < \xi_K$$

$$M_k = +A_y \cdot \xi_K - F \cdot (\xi_K - x)$$

$$\eta_{(M_k)} = +\eta_{(A_y)} \cdot \xi_K - \xi_K + x$$

$$x > \xi_K$$

$$M_k = +A_y \cdot \xi_K$$

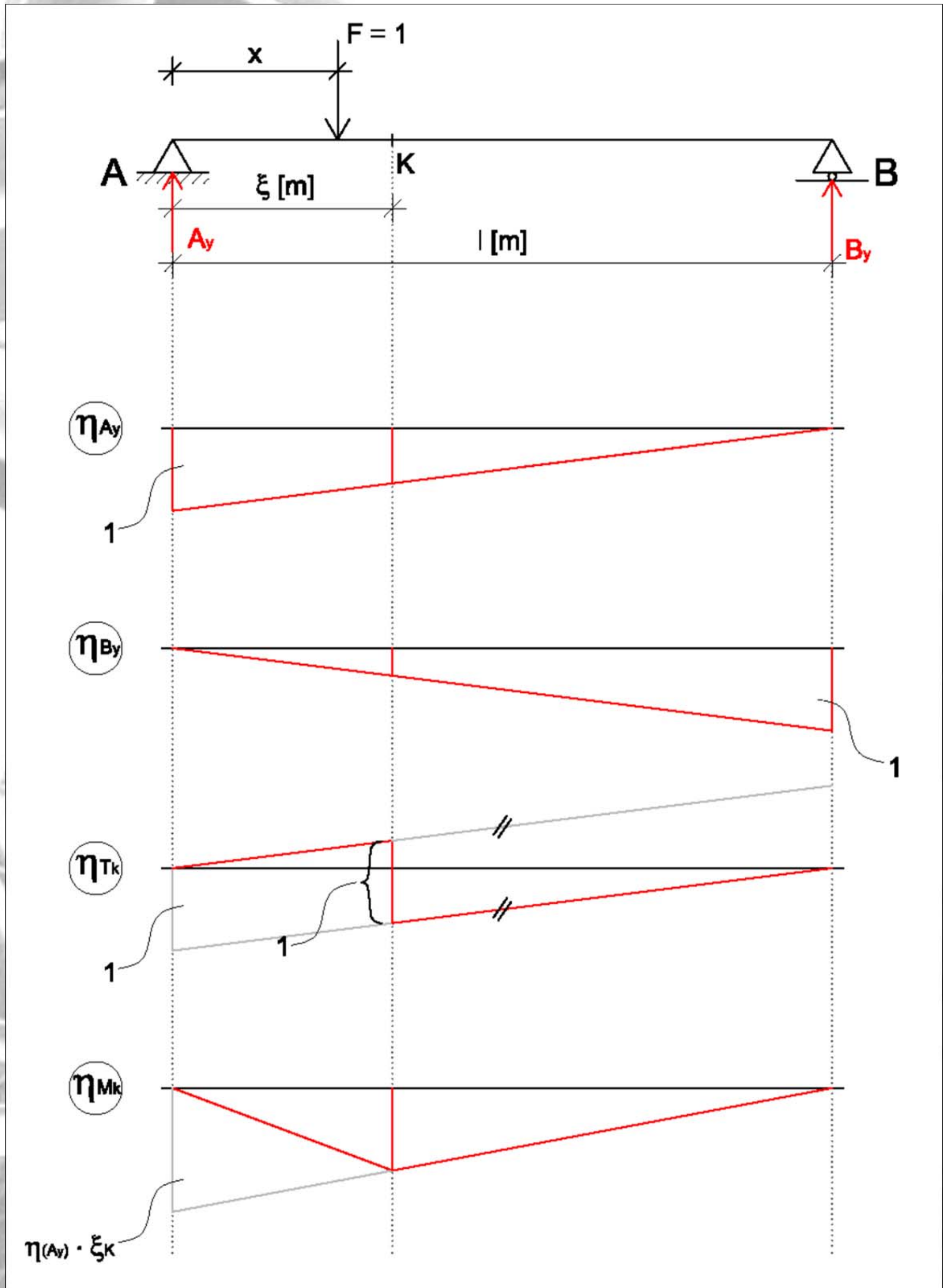
$$\eta_{(M_k)} = +\eta_{(A_y)} \cdot \xi_K$$

A számítás során balról jobbra haladva összegezni kell a nyomatékokat, ugyanúgy, mint amikor adott keresztmetszetben nyomatékot akarunk számolni balról jobbra.

Itt is kikötjük, hogy a mozgó teher a „*K*” keresztmetszet előtti, vagy már utána lévő tartórészen mozog.

A grafikus ábrázolásnál halványan lerajzoljuk az eredeti $\eta(A_y)$ hatásábra $\xi_k$-szorosát. A „*K*” keresztmetszet levetített vonalában lesz a nyomatéki hatásfüggvény maximuma. Ezt a pontot össze kell kötni az „*A*” támasz nulla pontjával (a támaszban nulla a nyomaték értéke). Az „*A*” támasz és a „*K*” keresztmetszet között ez a vonal lesz a nyomatéki hatásfüggvény első része. A „*K*” keresztmetszet és a „*B*” támasz közötti szakaszon pedig a megrajzolt $\eta(A_y)$ hatásábra $\xi_k$-szorosának vonala lesz az ábra további része.

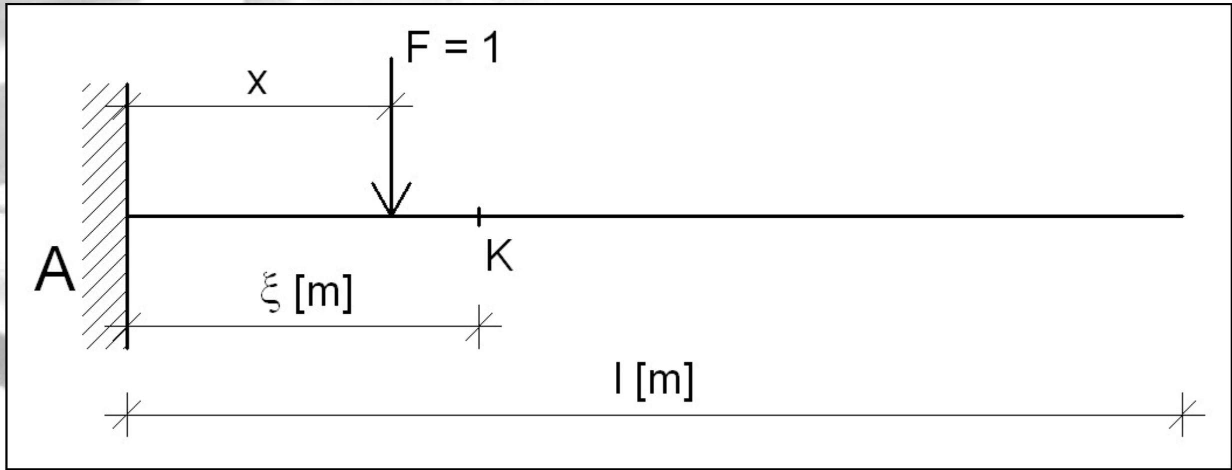
# Hatásábrák készítése:




*3. ábra.* 1. mintapélda – hatásábrák

## 2. mintapélda

Adott egy statikailag határozott, mozgó teherrel terhelt konzoltartó. A feladat a tartó hatásábráinak elkészítése.




*4. ábra.* 2. mintapélda – mozgó teherrel terhelt konzoltartó

Befogási nyomaték és támaszerő hatásfüggvényei számítással:

$$\sum M_i^{(A)} = 0 \rightarrow M_A$$

$$0 = F \cdot x - M_A$$

$$M_A = F \cdot x$$

$$\eta_{(M_A)} = 1 \cdot x = x$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow A_y$$

$$0 = -F + A_y$$

$$A_y = F$$

$$\eta_{(A_y)} = 1$$

Mivel csak függőleges teher van a tartón, ezért normál irányú hatásfüggvény nem keletkezik.

Nyíró hatásfüggvény számítással:

$T_k$

$x < \xi_K$

$T_k = +A_y - F$

$\eta_{(T_k)} = +\eta_{(A_y)} - 1$

$x > \xi_K$

$T_k = +A_y$

$\eta_{(T_k)} = +\eta_{(A_y)}$

Nyomatéki hatásfüggvény számítással:

$M_k$

$x < \xi_K$

$$M_k = +A_y \cdot \xi_K - F \cdot (\xi_K - x) - M_A$$

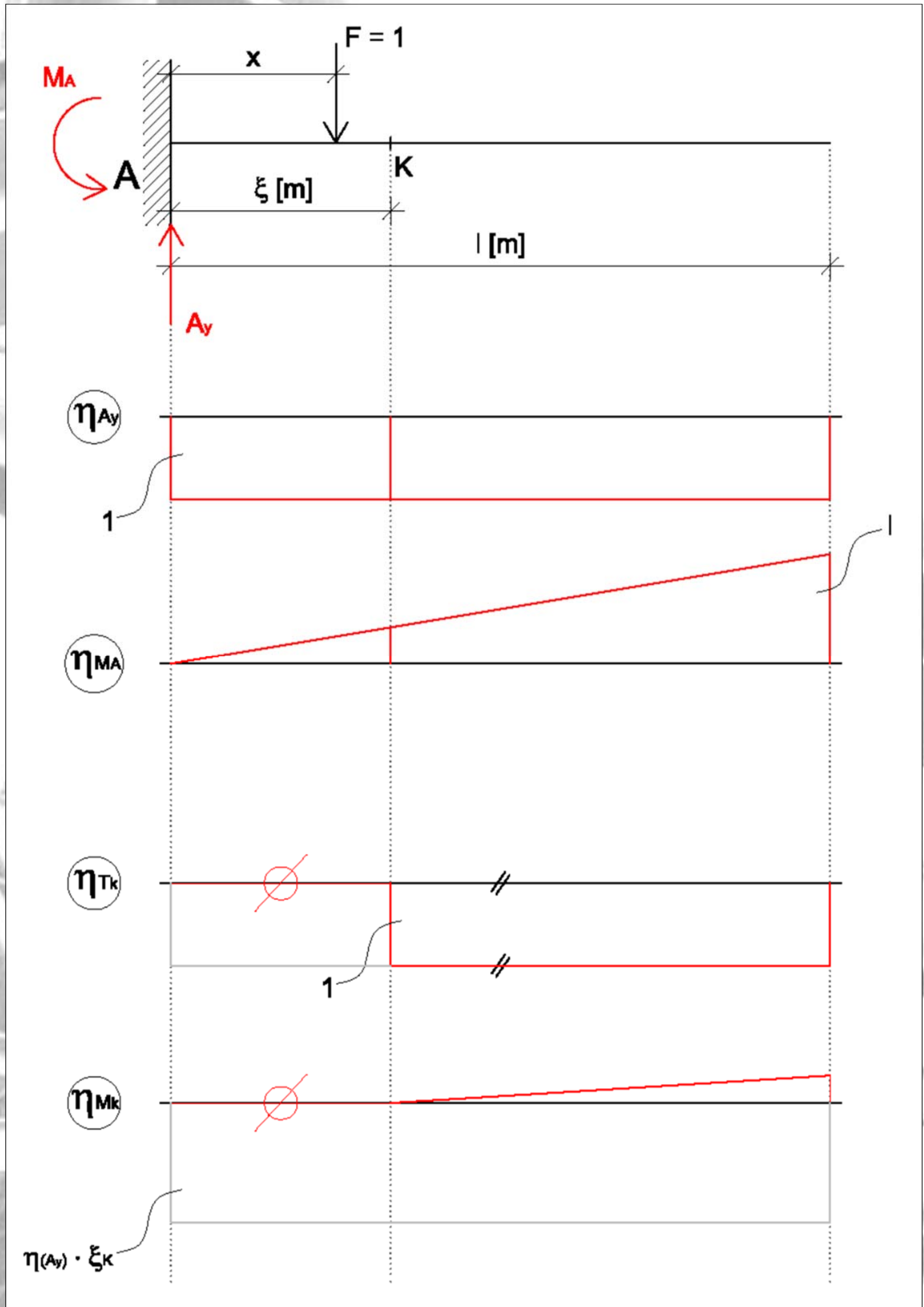
$$\eta_{(M_k)} = +\eta_{(A_y)} \cdot \xi_K - \xi_K + x - \eta_{(M_A)}$$

$x > \xi_K$

$$M_k = +A_y \cdot \xi_K - M_A$$

$$\eta_{(M_k)} = +\eta_{(A_y)} \cdot \xi_K - \eta_{(M_A)}$$

# Hatásábrák készítése:




*5. ábra.* 2. mintapélda – hatásábrák

# 5. Kinematikai elvek alapján

A módszer a belső erő-külső mozgás felcserélhetőségén alapul.

Az erőhatásábrákat a tartó mozgása révén kinematikus úton nyert eltolódási ábra megszerkesztésével kapjuk.

Felcserélhetőségi tételek:

$$P \cdot e_{pq} = Q \cdot e_{qp} \quad \text{ha} \quad P = Q = 1$$

$$e_{pq} = e_{qp}$$

Maxwel-tétel

Belső erő-külső mozgás felcserélhető

$$C_{12} = e_{12}$$

Munkatételek:

$$L_K = L_B$$

$$L_K^{QP} = L_B^{QP}$$

$$L_K^{PP} = L_B^{BP}$$

## 5.1 Virtuális elmozdulások tétele

Egy erőrendszer akkor, és csak akkor statikailag lehetséges (egyensúlyi), ha bármilyen virtuális elmozdulás-rendszeren végzett munkája zérus. Vagyis az egységerő által okozott külső és belső erők tetszőleges virtuális elmozdulás-rendszeren végzett munkájának összege, az egységerő minden helyzetében zérus.

A virtuális munka felírásához a tartón egy tetszőleges elmozdulás-rendszert kell felvenni, ez kompatibilis, azaz geometriailag lehetséges kell, hogy legyen.

Az egységerő a virtuális elmozdulás-rendszeren végez munkát. Ha a vizsgált erőhatás külső erő (reakció), akkor virtuális elmozdulást, ha belső erő (igénybevétel), akkor virtuális alakváltozást, vagyis relatív elmozdulást iktatunk be.

Ahhoz, hogy a virtuális elmozdulásnak helyet csináljunk, a tartót át kell alakítani:

- virtuális elmozduláshoz az eredeti kényszer komponenst kell eltávolítani,

- virtuális alakváltozáshoz az alakváltozás jellegének megfelelően egy szabadságfokú belső átvágást kell végrehajtani.

Ez az átalakítás a tartó elmozdulási (kinematikai) szabadságfokát eggyel növeli, azaz fellazítja. Az átalakítással a tartó egy egyszabadságfokú kényszer láncolattá alakul, amelynek elmozdulásait a beiktatott elmozdulás, vagy alakváltozás egyértelműen meghatározza. A láncolat mentén csak elmozdulások jönnek létre, alakváltozások nem.

<u>Virtuális külső munka:</u>

- a vizsgált külső erőnek (reakció) munkája a beiktatott virtuális elmozduláson,
- a tartón mozgó egységerő munkája a határvonalába eső virtuális elmozduláson.

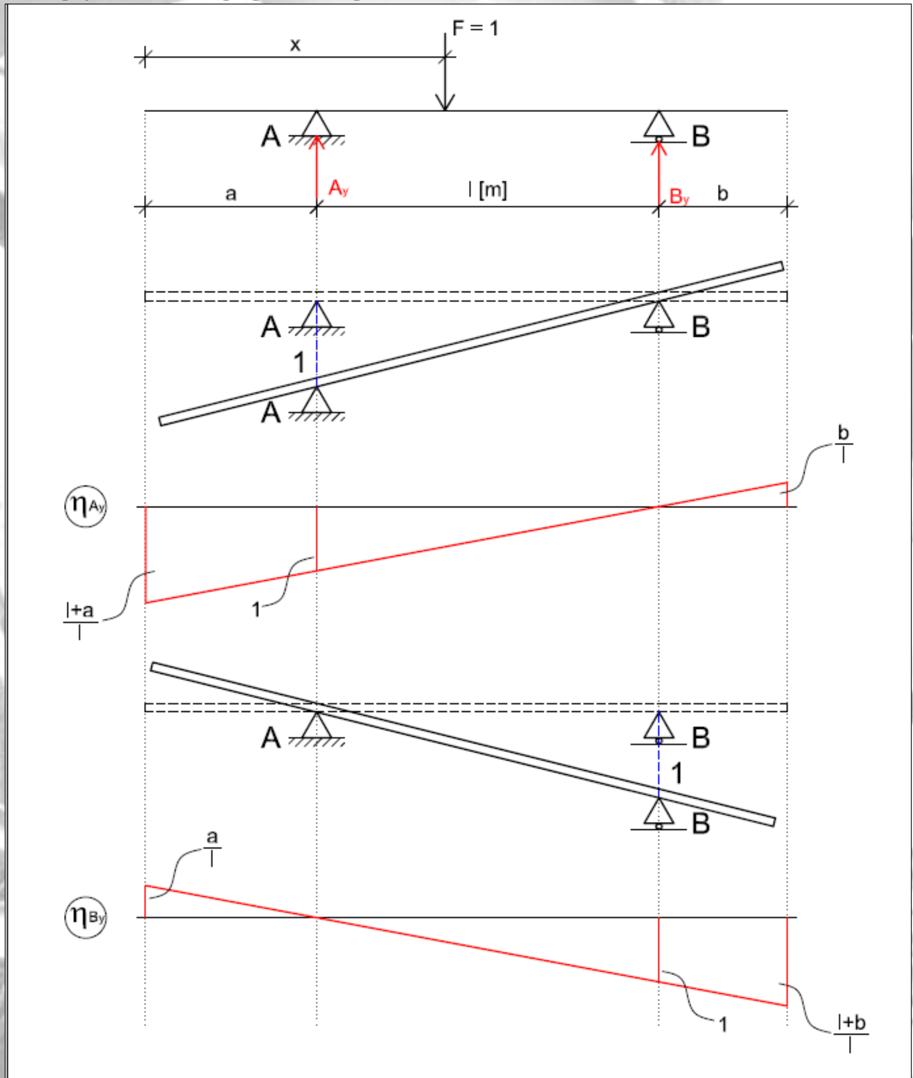
<u>Virtuális belső munka:</u>

- a vizsgált belső erőnek (igénybevétel) munkája a beiktatott virtuális alakváltozáson,
- a tartón mozgó egységerőből keletkező belső erők munkája a virtuális alakváltozási rendszeren.

Miután az egyszabadságfokú láncolaton nem keletkezik alakváltozás, ezért a virtuális belső erők munkája zérus.

## 5.2 Külső erők (reakciók) hatásábrái kinematikai elvek alapján

A reakcióerő hatásfüggvénye a támasz helyén beiktatott, a reakcióerővel kompatibilis – azaz ellentétes irányú – egységnyi virtuális elmozdulásból kapott, egységteher irányú eltolódás függvénnyel azonos, vagyis függőleges eltolódási ábra.




*6. ábra.* Külső erők hatásábrái kinematikai elvek alapján

## 5.3 Belső erők (igénybevételi) hatásábrái kinematikai elvek alapján

A vizsgált keresztmetszetbe a belső erővel (igénybevétellel) munkakompatibilis, azaz megegyező irányú virtuális alakváltozást (relatív elmozdulást) iktatunk be, ehhez egyszabadságfokú átvágást végzünk a tartón.

A statikailag határozott tartók igénybevételi hatásábrái egy egyszabadságfokú síkbeli láncolat függőleges eltolódási ábráira vezethető vissza. A síkbeli láncolatok több merev tárcsából állnak, amelyeket síkbeli kényszerekkel, legtöbbször csuklókkal kapcsolunk egymáshoz, illetve a környezethez. Az eltolódási ábrákat létrehozhatjuk számítással és szerkesztéssel.

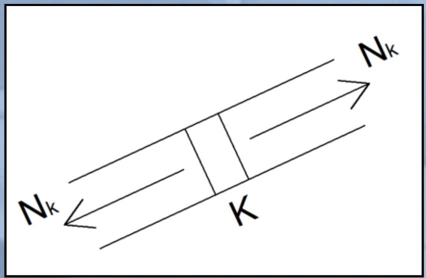
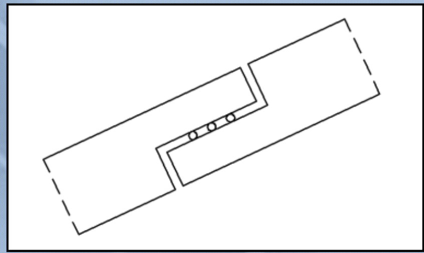
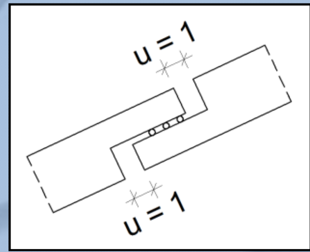
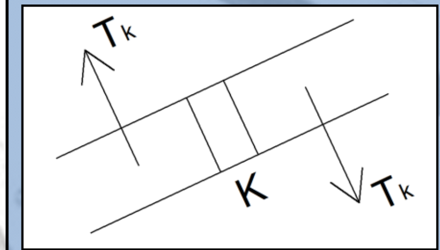
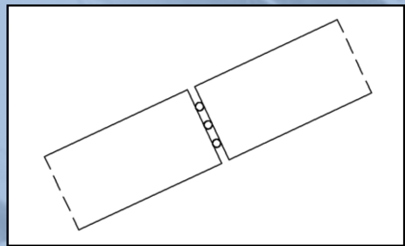
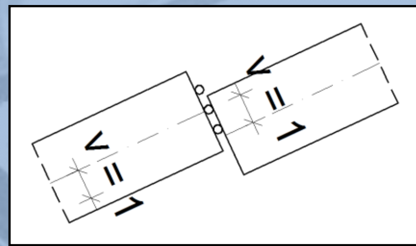
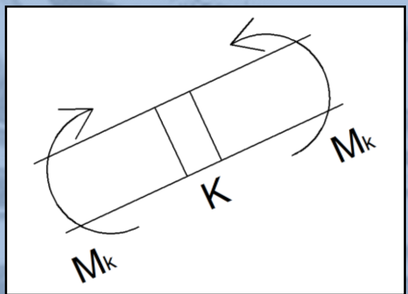
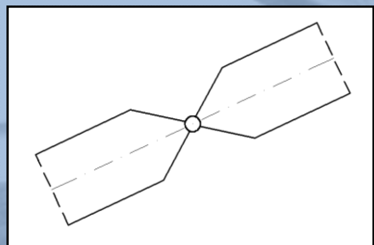
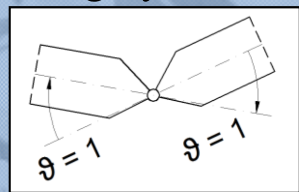
Számítás:

Valamely keresztmetszet abszolút elmozdulása egyenértékű egy megelőző keresztmetszet elmozdulásának és a köztük lévő relatív elmozdulásoknak együttesével. A haladási irány jobbról balra

$$(\varphi_j, e_j) = (\varphi_i, e_i, \vartheta_{ij}, u_{ij})$$

Zárt vonal elmozdulásai egyenértékűek zérussal.

$$(\vartheta_{ij}, u_{ij}) = 0$$

| Hatásábra | Jele | Egy egyszabadságfokú belső átvágást biztosító kapcsolat | Beiktatott alakváltozás (relatív eltolódás) |
|---|---|---|---|
| normálerő, rúderő<br> | $\eta_{(N_k)}$<br>$\eta_{(S_i)}$ | tengelyirányú relatív eltolódást engedélyező görgők<br> | egységnyi relatív eltolódás a rúd tengelyének irányában<br> |
| nyíróerő<br> | $\eta_{(T_k)}$ | tengelyre merőleges relatív eltolódást engedélyező görgők<br> | egységnyi relatív eltolódás a rúd tengelyére merőlegesen<br> |
| nyomaték<br> | $\eta_{(M_k)}$ | relatív elfordulást engedélyező csukló<br> | egységnyi relatív elfordulás, elfordulási középpont a rúd tengelyében<br> |

*1. táblázat.* Relatív elmozdulások beiktatása

Szerkesztés:

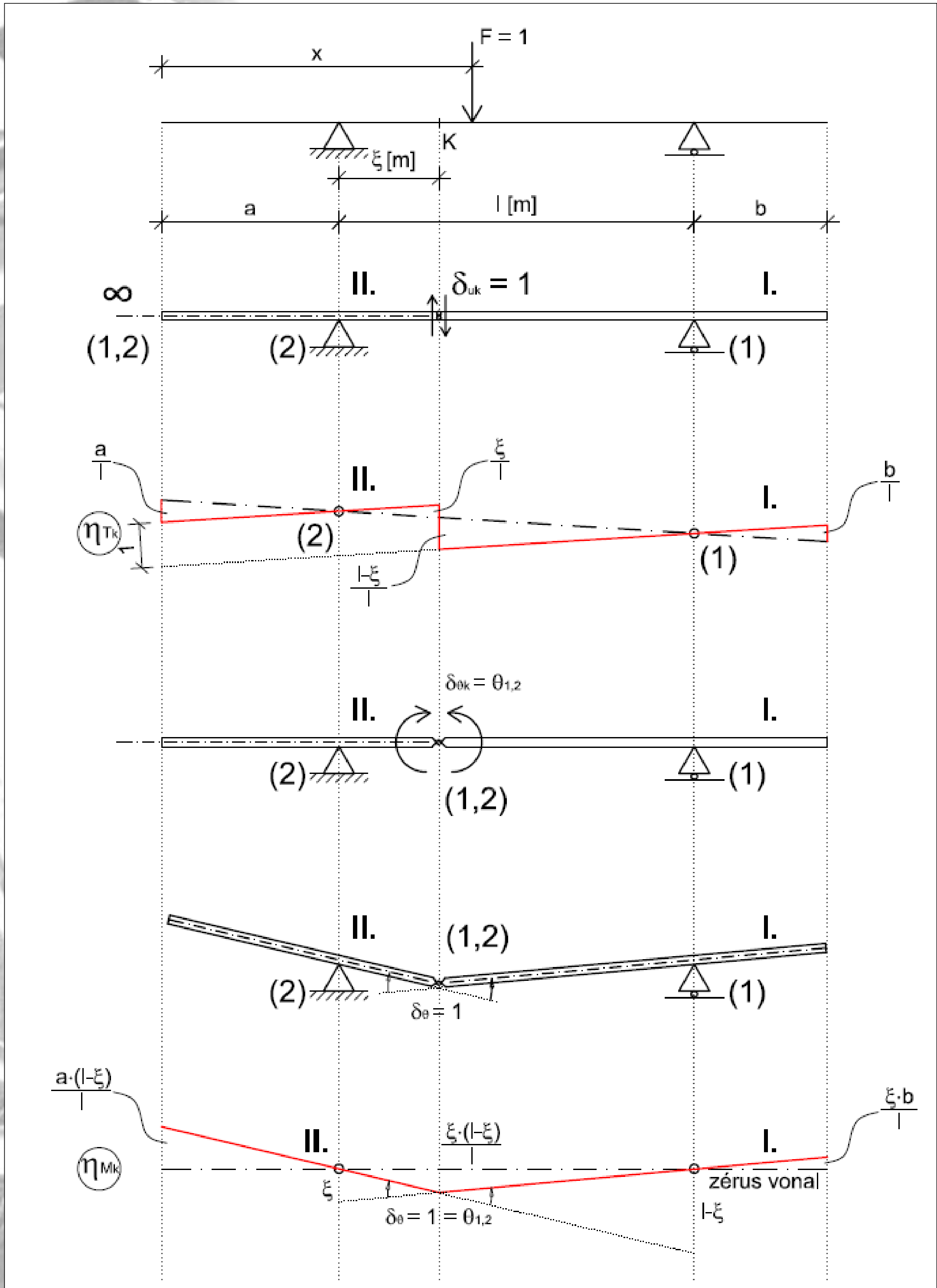
1. A kérdéses külső vagy belső erőnek megfelelően átalakítjuk a tartót, azaz létrehozzuk az egyszabadságfokú láncolatot.
2. A láncolaton beszámozzuk a tárcsákat és a hozzájuk tartozó, közvetlenül meghatározható abszolút és relatív pólusokat.

- A láncolati elemek (merev tárcsák) abszolút elmozdulásainak $(\varphi_i, e_i)$ elfordulási középpontját abszolút pólusnak, a két tárcsa relatív elmozdulásinak $(\vartheta_{ij}, u_{ij})$ elfordulási középpontját relatív pólusnak nevezzük.
- A két tárcsa abszolút pólusai a két tárcsa relatív pólusaival egy egyenesben vannak.
- Három tárcsa relatív pólusai egy egyenesen vannak.
- Abszolút pólus nem mozdul el, ezért a képe az eltolódási ábra zérus tengelyén van.
- Az a tárcsa, amelyen egynél több abszolút pólus van, nem mozdul el, így képe az eltolódási ábra zérus tengelyén van.
- Ha egy tárcsa abszolút pólusa a végtelenben van, a tárcsa önmagával párhuzamosan tolódik el.

- Abszolút eltolódás pólusa az eltolódásra merőleges egyenesen van.
- Relatív eltolódás pólusa az eltolódásra merőlegesen a végtelenben van.

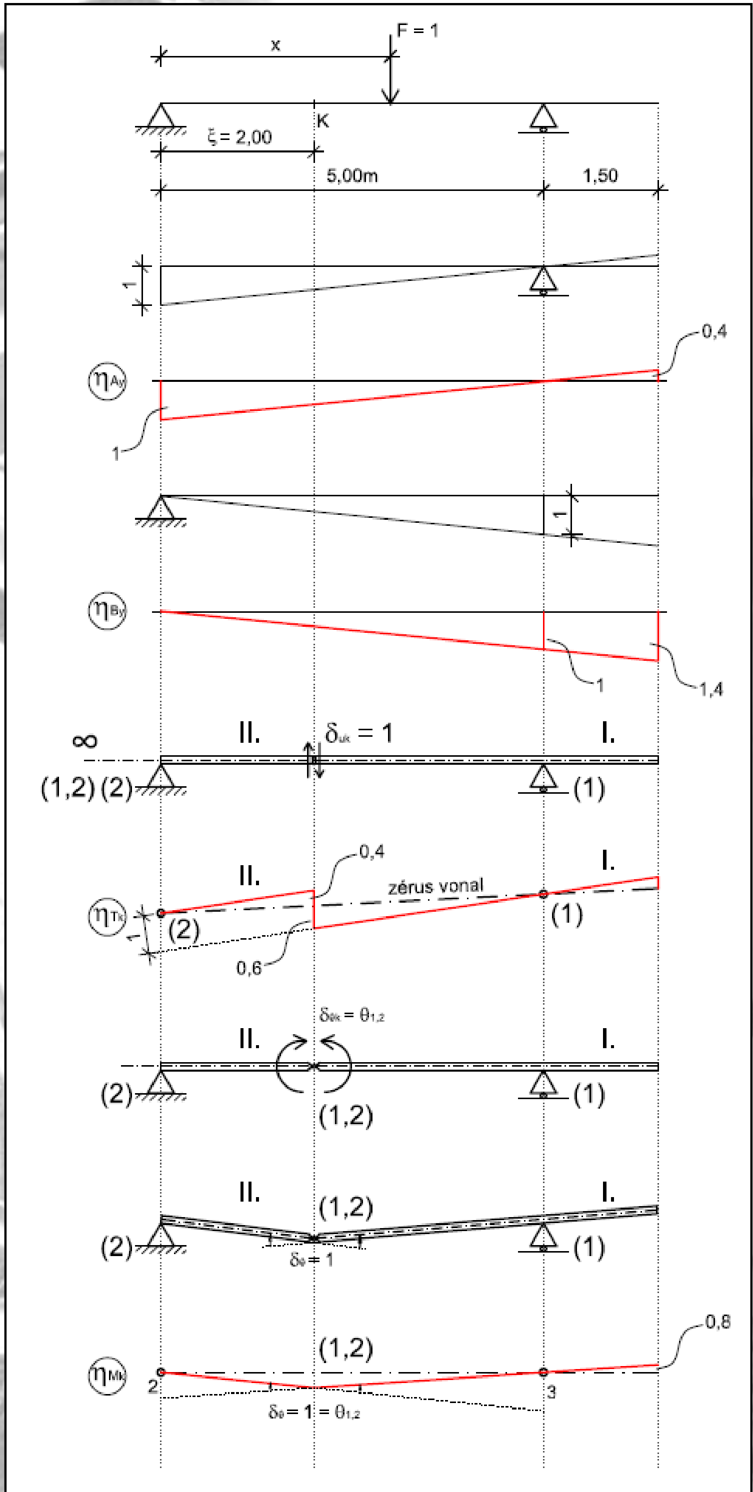
3. Szabadon felvesszük egy olyan tárcsa kimozdult képét, amelyik a kívánt elmozduláshoz tartozik.
4. A kimozdított tárcsához viszonyítva beillesztjük az egységnyi abszolút elmozdulást (a + külső erővel ellentétes irányban), illetve az egységnyi relatív elmozdulást (a + igénybevétellel azonos irányban).
5. Megszerkesztjük a láncolaton a pályát alkotó tárcsák elmozdult képét, ehhez megkeressük a szükséges abszolút és relatív pólusokat, felhasználva a pólusokra vonatkozó összefüggéseket.
6. Végül megszerkesztjük a zérus tengelyt, amely az abszolút pólusok képének geometriai helye.

A hatásábrát a pályát alkotó tárcsák képe és a zérus tengely közötti tartomány alkotja. A tartó geometriája és a beiktatott virtuális relatív elmozdulások birtokában az ábra jellemző ordinátái számíthatók.




I., II. − Tárcsák
(1,2) − Relatív pólus
(1), (2) − Abszolút pólus

*7. ábra.* Virtuális elmozdulások beiktatása, 1. példa




*8. ábra.* Virtuális elmozdulások beiktatása, 2. példa

# Felhasznált irodalom

**Hajósné Temesi Eszter :** *Tartók statikája. Statikailag határozott síkbeli tartók reakcióerő és igénybevételi hatásábrái. Statikai elvek alapján.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012

**Hajósné Temesi Eszter :** *Tartók statikája. Statikailag határozott síkbeli tartók reakcióerő és igénybevételi hatásábrái. Kinematikai elvek alapján.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012