Tartók statikája II.

4.

Tartók maximális igénybevételi ábrái koncentrált teherre

Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

A koncentrált erőkből álló erőcsoportok többnyire járművek terheit modellezik. A vonatkozó maximális ábrák legtöbbje olyan elrendezésű, hogy nem alkalmas arra, hogy az állandó teherből származó maximális ábrával grafikusan összegezzük. Ilyen esetekben a tervezés során a jellemző ordináták numerikus összegzése történik. Ezért a továbbiakban csak az esetleges teherből származó ábrákkal foglalkozunk. A legtöbb vizsgálatnál az erőcsoportot először megfordíthatatlannak tekintjük, majd az eredmények összefoglalásánál vesszük figyelembe, ha a teher megfordítható.

1. Maximális nyomatéki ábrák koncentrált teherre

1.1 Konzoltartó maximális nyomatéki ábrái koncentrált erőkre

A jobboldali végén befogott konzoltartót az *1. ábra* mutatja.

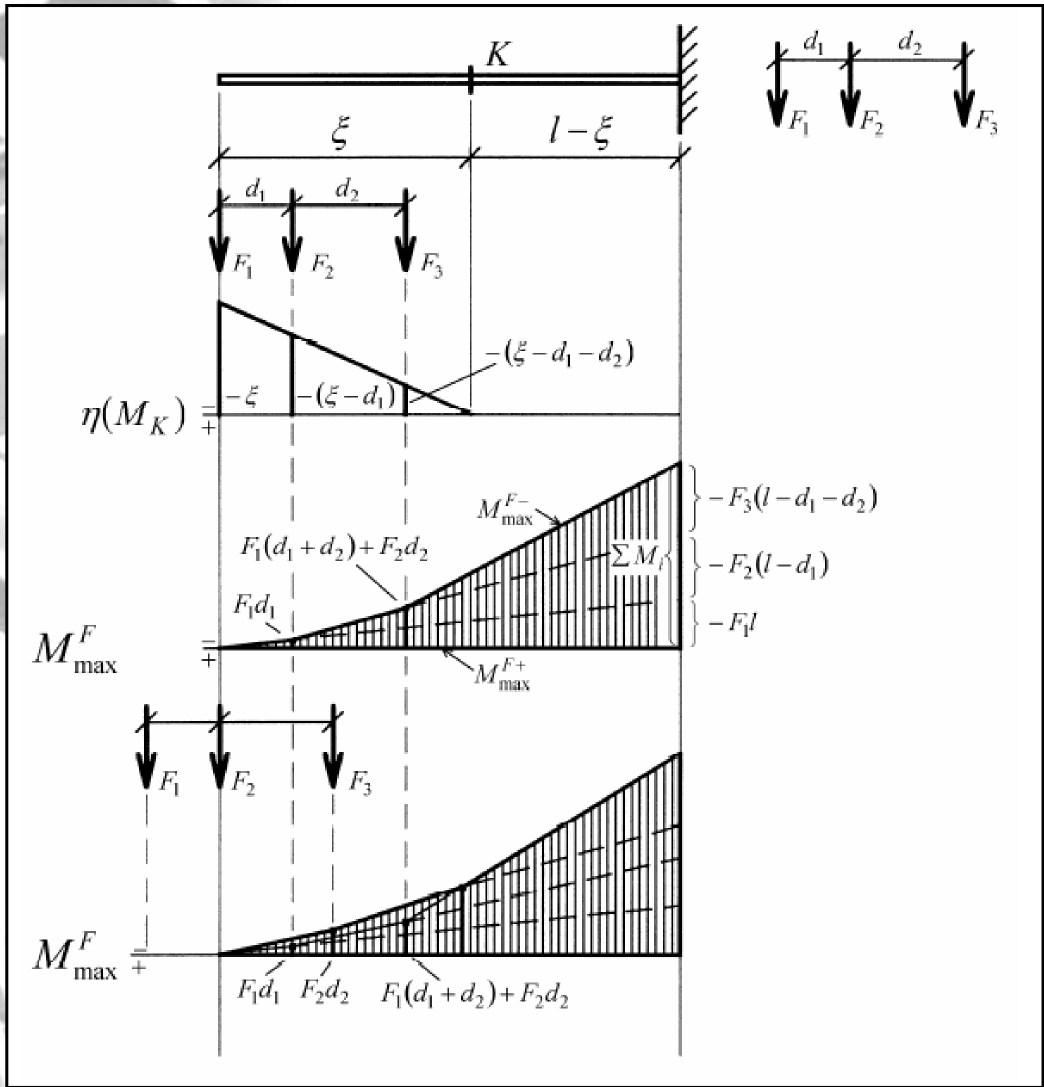
Cél a tartó maximális nyomatéki ábrájának meghatározása a rögzített elrendezésű koncentrált erőkből álló erőcsoport hatására. Feltételezzük, hogy az erőcsoport elfér a konzolon, vagyis $d_1 + d_2 \leq l$.

Rajzoljuk fel a ξ koordinátájú keresztmetszet nyomatéki hatásábráját. Írjuk fel a maximális ábrák függvényét.

Az ábra jelölései szerint:

$$M_{max}^{F+}(\xi) = \sum F_i \eta_i^+ = 0 \quad \text{és}$$

$$M_{max}^{F-}(\xi) = \sum F_i \eta_i^- = \begin{cases} -F_1\xi & \text{ha } 0 \leq \xi \leq d_1 \\ -\left(F_1\xi + F_2\left(\xi - d_1\right)\right) & \text{ha } d_1 \leq \xi \leq d_1 + d_2 \\ -\left(F_1\xi + F_2\left(\xi - d_1\right) + F_3\left(\xi - d_1 - d_2\right)\right) & \text{ha } d_1 + d_2 \leq \xi \leq l \end{cases}$$



1. ábra. Konzoltartó maximális nyomatéki ábrája koncentrált teherre [Kuruczné 2006]

Az $M_{\max}^{F-}$ kifejezése az erőknek a keresztmetszetre vonatkozó nyomatékösszegét adja. Ha $\xi=0$, akkor $M_{\max}^{F-} = 0$, mivel ekkor a konzol szabad végén lévős keresztmetszetről van szó, amelynek hatásábrája a nullvonal.

Ha $\xi = d_1$, akkor $M^{F-}_{max} = -F_1 d_1$, mert ekkor az első erő van mértékadó helyzetben, a második és a többi erő zérus ordináták fölött áll. Ha $\xi = d_1 + d_2$, akkor $M^{F-}_{max} = -F_1(d_1 + d_2) - F_2(d_2)$, mivel ekkor már a második erő is nemzérus ordináta fölé kerül. Ha $\xi = l$, akkor $M^{F-}_{max} = -(F_1 l + F_2(l - d_1) + F_3(l - d_1 - d_2))$, amely a konzol végén álló teljes erőcsoport nyomatékösszegét adja a befogási keresztmetszetre.

Az esetleges teherhez tartozó maximális nyomatéki ábrát az ábrán láthatjuk. Az ábra csak negatív tartománnyal rendelkezik. Töréspontjai azt a változást jelzik, amikor egy újabb erő kerül nemzérus ordináta fölé a hatásábrák leterhelése során.

Láttuk, hogy az erők mindegyik esetben a konzol végén álltak. Ha az erőcsoportot alkotó erők között lényeges nagyságrendi eltérések vannak, előfordulhat, hogy egyes keresztmetszetek mértékadó teherállásához nem az első erőt kell a konzol végére helyezni, bár ekkor az erők egy része már leesik a tartóról. Ezért célszerű az erőcsoportot alkotó erők mindegyikét a konzol végére helyezni, és megrajzolni a vonatkozó nyomatéki ábrát.

Megfordítható erőcsoport esetén a vizsgálatot az erősorrend megfordítására is el kell végezni. A maximális ábrát mindezek burkoló ábrája adja.

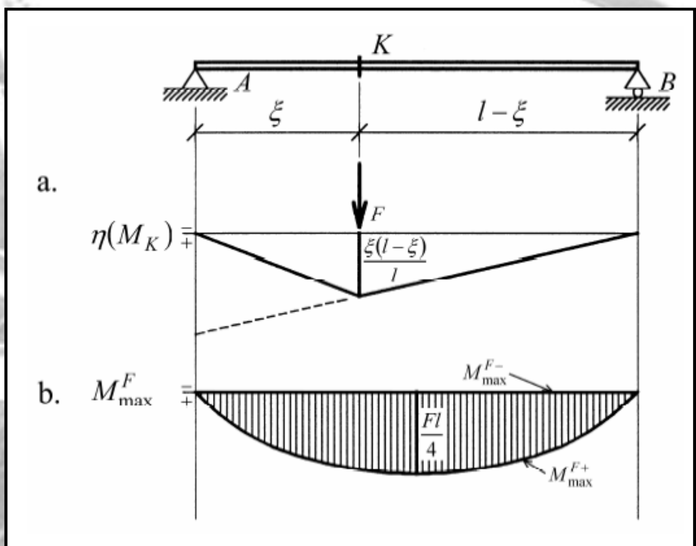
Konzoltartó koncentrált erőkre vonatkozó maximális negatív nyomatéki ábrája a konzol végén elhelyezett, az egyes keresztmetszetekre nézve mértékadó helyzetben lévő erőcsoport nyomatéki ábráinak burkológörbéjével azonos. A maximális pozitív nyomatékok ábrája a nullvonal.

1.2 Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája egy koncentrált erőre

A *2. ábrán* látható kéttámaszú tartón az esetleges teher egyetlen *F* koncentrált erő. A terhet mértékadóan elhelyezve, azaz a ξ koordinátájú keresztmetszet nyomatéki hatásábrájának legnagyobb ordinátája fölé állítva a maximális ábrák függvényei:

$$M_{max}^{F+}(\xi) = F\eta_{max}^{+} = F\frac{\xi(l-\xi)}{l} \quad \text{és} \quad M_{max}^{F-}(\xi) = F\eta_{max}^{-} = 0$$

A függvényből kiolvasható, hogy a pozitív maximális nyomatéki ábra egy másodfokú parabola, amelyet a $\xi=0$ és a $\xi=l$ pontban kell befüggeszteni és a $\xi = l/2$ helyen van maximuma, amelynek értéke $M_{max}^{F+} = Fl/4$. A negatív maximális ábra a nullvonal.



2. ábra. Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája egy koncentrált teherre [Kuruczné 2006]

1.2 Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája két koncentrált erőre

Az F_1 és F_2 koncentrált erők d távolsága rögzített, járművek terhét szemléltetik. Legyen $F_1 > F_2$, és bár az ilyen teher sorrendje megfordítható, a vizsgálat kezdetén ezt a feltételt még nem tekintjük érvényesnek. A *3. ábra* egy tetszőleges ξ koordinátájú keresztmetszet nyomatéki hatásábráját mutatja. A legnagyobb nyomaték akkor ébred a keresztmetszetben, ha a két erő egyike áll a csúcs felett. Ha a keresztmetszet baloldali támasz közelében van, akkor az F_1 erő áll a csúcs felett, hogy a legnagyobb nyomaték keletkezzen a keresztmetszetben, ha viszont a jobboldali támasz közelében van, akkor az F_2 erő van mértékadó helyzetben. Határozzuk meg a két esetet megkülönböztető, a támaszközt két részre osztó ξ_1 szakaszt. A viszonyított terhek szabálya alapján annak feltétele, hogy az F_1 erő álljon a csúcs felett, az $F_1 + F_2 = R$ eredő figyelembevételéve a

$$0 \le \frac{\xi}{l} R \le F_1, \quad \text{azaz} \quad 0 \le \xi \le \frac{F_1}{R} l$$

feltétel teljesülése, amelyből ξ_1 kifejezhető: $\xi_1 = \frac{F_1}{R} l$

Ha tehát $0 \le \xi \le \xi_1$, akkor F_1 erő áll a csúcs felett, ha pedig $\xi_1 \le \xi \le l$, akkor F_2, ahhoz, hogy a teherállás mértékadó legyen. A maximális nyomatéki ábrát a két szakaszon külön-külön kell meghatározni.

A $0 \le \xi \le \xi_1$ szakasz vizsgálata:

Ekkor F_1 áll a csúcs felé, így a maximális nyomatékok függvénye

$$M_{max}^{F+}(\xi)_1 = F_1\eta_1^+ + F_2\eta_2^+ = F_1\frac{\xi(l-\xi)}{l} + F_2\frac{\xi(l-\xi-d)}{l} \quad \text{és} \quad M_{max}^{F-}(\xi)_1 = 0$$

A pozitív maximális nyomaték függvényét az erők eredője segítségével is felírhatjuk a *3. ábra* jelölései szerint

$$M_{max}^{F+}(\xi)_1 = R\eta_R^+ = R\frac{\xi(l-\xi-t_1)}{l}$$

ahol t_1 az R eredő F_1 erőtől való távolsága. A pozitív maximális nyomaték függvénye másodfokú parabolát ír le, amelyet a $\xi=0$ és a $\xi=l-t_1$ pontokban kell befüggeszteni, mivel itt $M_{max,1}^{F+} = 0$.

A legnagyobb pozitív nyomaték a

$$\frac{dM_{max}^{F+}(\xi)_1}{d\xi} = \frac{R}{l}\left(l - t_1 - 2\xi\right) = 0$$

alapján a *(ξ=l-t_1)/2* helyen keletkezik, és nagysága ennek behelyettesítésével

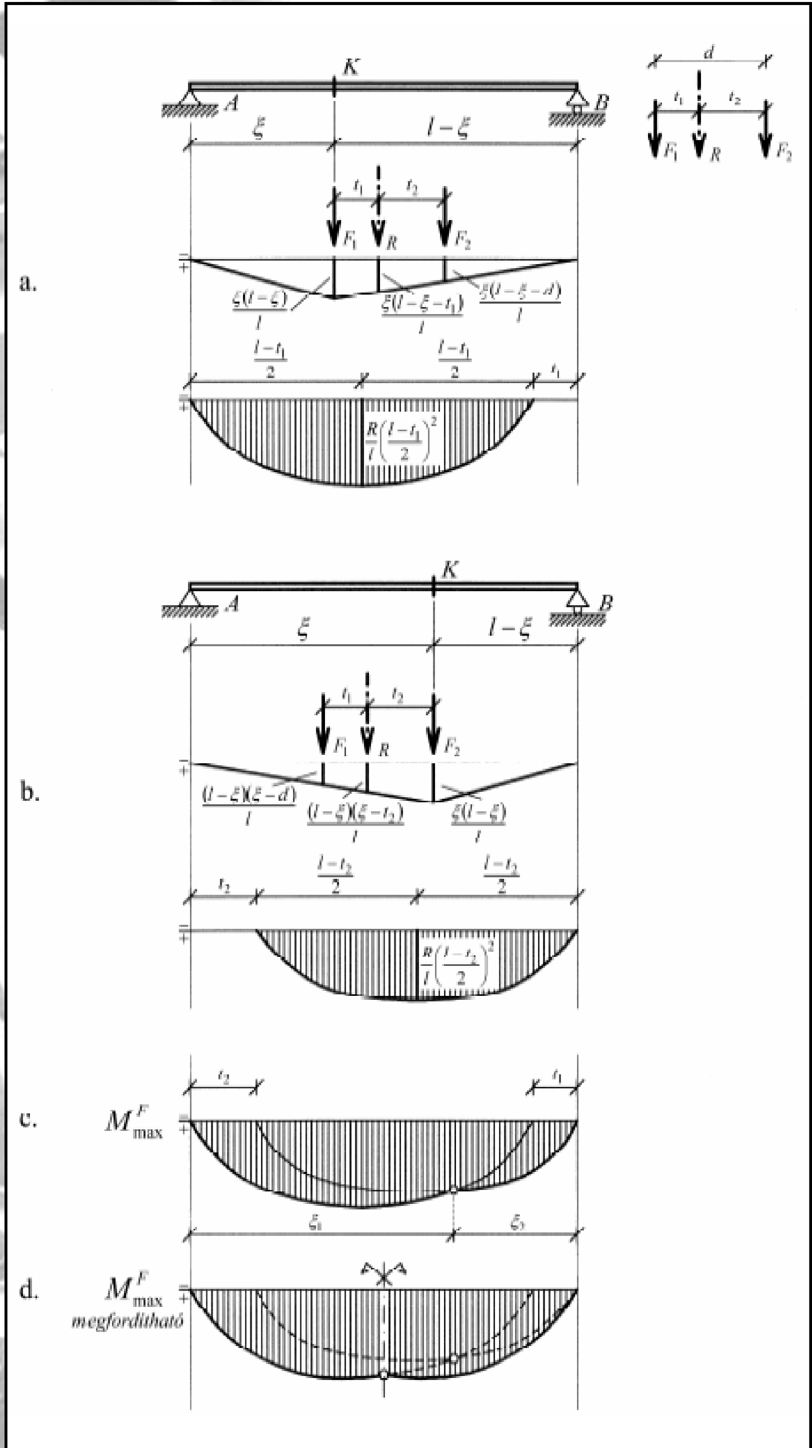
$$\hat{M}_{max}^{F+} = \frac{R}{l}\left(\frac{l - t_1}{2}\right)^2$$

A vonatkozó parabola a *3. ábrán* látható.

A $\xi_1 \le \xi \le l$ szakasz vizsgálata:

Ekkor F_2 áll a csúcs felett, így a maximális nyomatékok függvénye

$$M_{max}^{F+}(\xi)_2 = F_1\eta_1^+ + F_2\eta_2^+ = F_1\frac{(\xi - d)-(l-\xi)}{l} + F_2\frac{\xi(l-\xi)}{l} \quad \text{és} \quad M_{max}^{F-}(\xi)_2 = 0$$



3. ábra. Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája két koncentrált teherre [Kuruczné 2006]

Írjuk fel ezt is az eredő segítségével az ábra jelölései szerint

$$M_{\max}^{F+}(\xi)_2 = R\eta_R^{+} = R\,\frac{\xi(l-\xi)(\xi-t_2)}{l}$$

ahol t_2 az R eredő F_2 erőtől való távolsága. A pozitív maximális nyomaték függvénye most is másodfokú parabolát ír le, amelyet a $\xi=t_2$ és a $\xi=l$ pontokban kell befüggeszteni, mivel itt $M_{\max}^{F+}(\xi)_2 = 0$.

A legnagyobb pozitív nyomaték az

$$\frac{dM_{\max}^{F+}(\xi)_2}{d\xi} = \frac{R}{l}(l-t_2-2\xi) = 0$$

alapján $(\xi=l+t_2)/2$ helyen keletkezik, és nagysága ennek behelyettesítésével

$$\hat{M}_{\max,2}^{F+} = \frac{R}{l}\left(\frac{l-t_2}{2}\right)^2$$

A szakaszhoz tartozó parabola a *3. ábrán* látható.

A maximális nyomatéki ábrát a fentiekben meghatározott két parabola burkológörbéje adja meg az ábra szerint. A két parabola metszéspontja a ξ_1 értéknél van, egyszersmind az egyes parabolák érvényességi határát választja el.

Mivel $F_1 > F_2$ feltétellel éltünk, a $t_1 < t_2$ következtében a nagyobbik erőhöz tartozó parabola maximális ordinátája nagyobb. Ha a két erő egyenlő nagyságú, akkor szimmetrikus ábrát kapunk a $t_1 = t_2$ feltételből.

Mindeddig úgy tekintettük, hogy az erőcsoport nem megfordítható. Most oldjuk fel ezt a megszorítást: ha a teher megfordítható, akkor a kapott maximális ábrát is „megfordíthatjuk”, vagyis a támaszközépre tükrözzük. A maximális nyomatéki ábrát megfordítható teher esetén a nem megfordítható teherre rajzolt maximális ábra tükrözésével nyerjük.

Két erőből álló megfordítható erőcsoport esetén tehát elegendő a parabolát a nagyobbik erőre elkészíteni, és a tartó szimmetriatengelyére tükrözni.

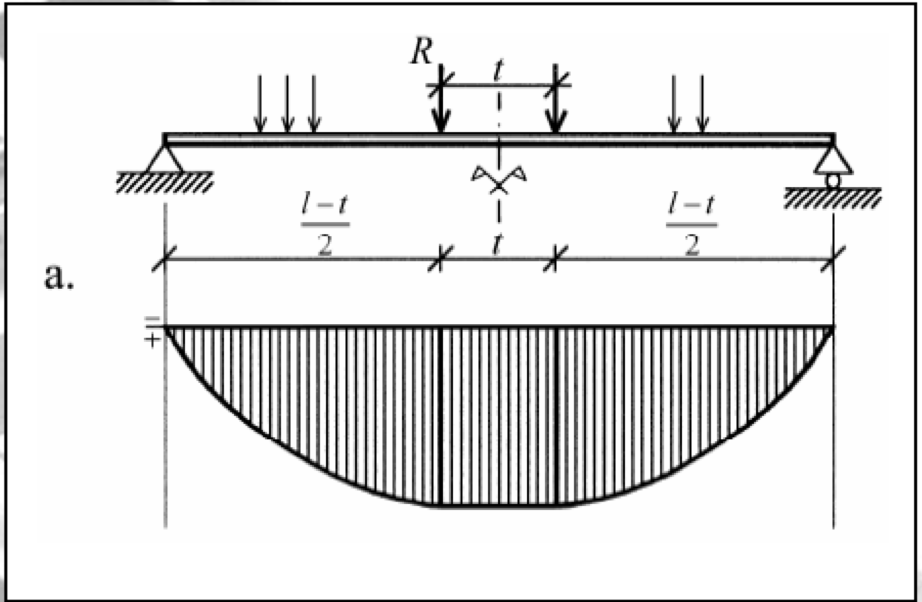
1.3 Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája több koncentrált erőre

Háromnál több koncentrált erőből álló erőcsoport esetén a feladat az előzőkhöz hasonló, de sokkal bonyolultabb. Két és három erő esetén láttuk, hogy a legnagyobb nyomatékot eredményező mértékadó teherállásban az eredő és a mértékadó helyzetben lévő erő szimmetrikusan közrefogja a tartó közepét.

Ugyanakkor az is látható, hogy a megfordíthatóság miatti tükrözés során a tartóközép környezetében egy konstansnak tekinthető szakasz jelenik meg. Ennek alapján úgy közelíthetjük a maximális ábrát, hogy a tartó közepét közrefogjuk az eredővel és a hozzá legközelebb eső erővel, és az ott kialakított vízszintes szakaszon felmérjük az

$$\hat{M}^{F+}_{max,2} = \frac{R}{l}\left(\frac{l-t}{2}\right)^2$$

értéket, majd attól jobbra és balra parabolát rajzolunk.



4. ábra. Kéttámaszú tartó maximális nyomatéki ábrája több koncentrált teherre [Kuruczné 2006]

2. Maximális nyíróerő ábrák koncentrált teherre

2.1 Konzoltartó maximális nyíróerő ábrái koncentrált erőkre

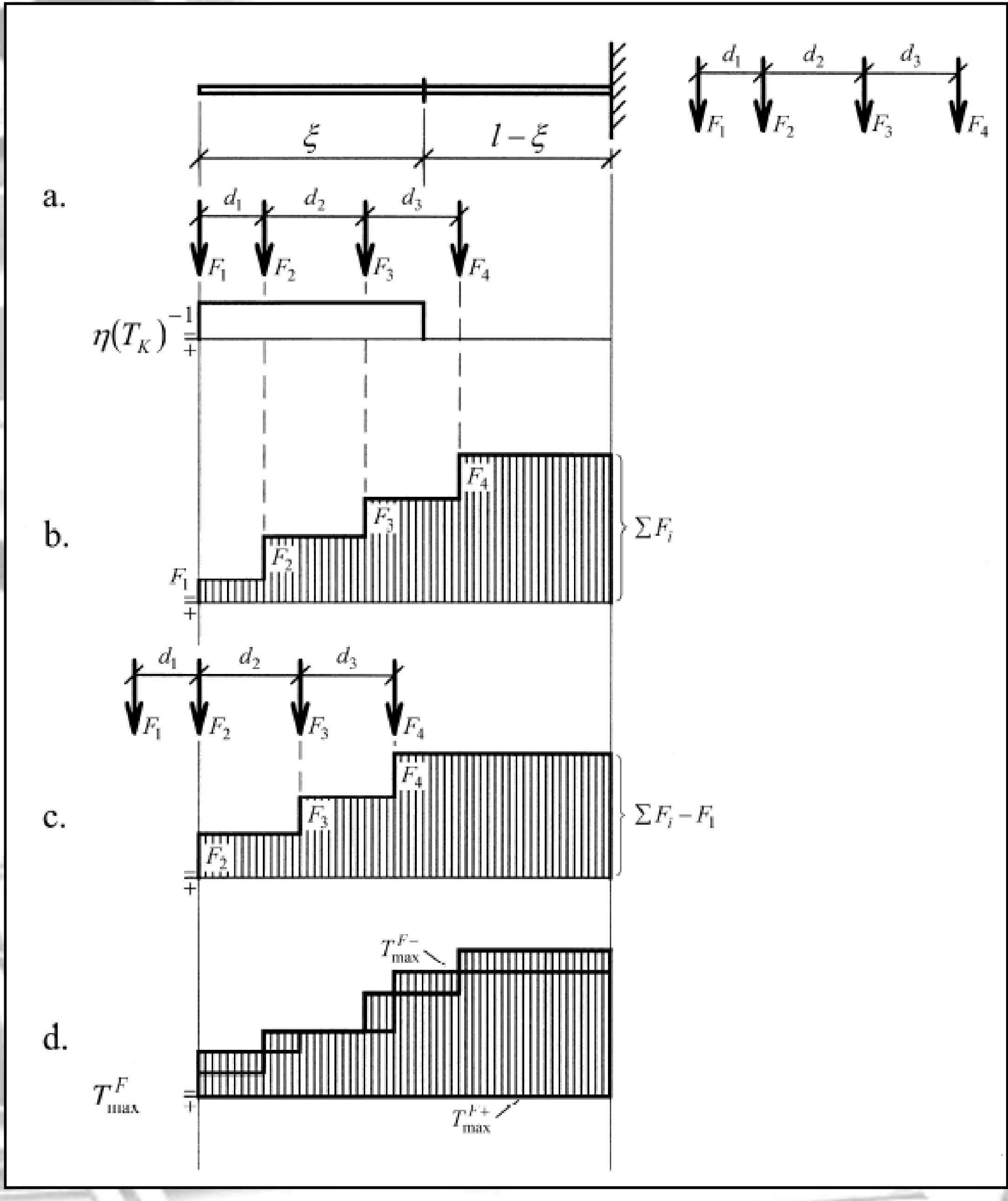
A konzoltartó az *5. ábrán* látható. Célunk a tartó maximális nyíróerő ábrájának meghatározása az egymástól rögzített távolságra lévő koncentrált erőkből álló erőcsoport hatására. Tételezzük fel, hogy $d_1 + d_2 + d_3 \le l$, vagyis hogy a teljes erőcsoport elfér a tartón.

Rajzoljuk fel a ξ koordinátájú keresztmetszet nyíróerő hatásábráját. Írjuk fel a maximális ábrák függvényét.

Az ábra jelölései szerint:

$$T_{max}^{F+}(\xi) = \sum F_i \eta_i^+ = 0 \quad \text{és}$$

$$T_{max}^{F-}(\xi) = \sum F_i \eta_i^- = \begin{cases} -F_1 & \text{ha } 0 \le \xi < d_1 \\ -(F_1 + F_2) & \text{ha } d_1 \le \xi < d_1 + d_2 \\ -(F_1 + F_2 + F_3) & \text{ha } d_1 + d_2 \le \xi < d_1 + d_2 + d_3 \\ -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) & \text{ha } d_1 + d_2 + d_3 < \xi \le l \end{cases}$$



5. ábra. Konzoltartó maximális nyíróerő ábrája több koncentrált teherre [Kuruczné 2006] azaz, mivel $\eta_i^- = -1$, $T_{\max}^{F-}(\xi)$ kifejezése az erők keresztmetszetekre vonatkozó vetületösszegét adja.

Ha $0 \le \xi < d_1$, akkor $T_{\max}^{F-} = -F_1$, mert ekkor csak az első erő fér el a hatásábra nemzérus szakaszán.

Ha $d_1 \le \xi < d_1 + d_2$, akkor $T_{\max}^{F-} = -(F_1 + F_2)$, mivel ekkor már a második erő is nemzérus ordináták felett mozog.

Ha $\xi = l$, akkor mindazon erők vetületösszegét vesszük, amelyek elférnek a konzolon.

A $T_{\max}^{F-}(\xi)$ függvény ugrásfüggvényt ad meg. Ugrás jelentkezik a függvényben, amikor egy erő a zérus ordinátáról az egység-ordinátára lép. Ez megfelel a nyíróerőábrákban és hatásábrákban a koncentrált erők miatt jelentkező szingularitásnak.

Az erőcsoporthoz tartozó nyíróerő ábrát az ábrán láthatjuk. Ez az ábra azonban még nem biztos, hogy a maximális ábrát adja. Ha ugyanis az erőcsoportot alkotó erők között lényeges nagyságrendi eltérések vannak, előfordulhat, hogy egyes keresztmetszetek mértékadó teherállásához nem az első erőt kell a konzol végére helyezni, bár ekkor az erők egy része már leesik a tartóról.

Ezért célszerű az erőcsoportot alkotó erők mindegyikét a konzol végére helyezni, és megrajzolni a vonatkozó nyíróerőábrát. Megfordítható erőcsoport esetén a vizsgálatot az erősorrend megfordítására is el kell végezni. A maximális ábrát mindezek burkoló ábrája adja.

Konzoltartó koncentrált erőkre vonatkozó maximális negatív (pozitív) nyíróerőábrája a konzol végén elhelyezett, az egyes keresztmetszetekre nézve mértékadó helyzetben lévő erőcsoport nyíróerő ábráinak burkológörbéjével azonos. A pozitív (negatív) nyíróerők ábrája a nullvonal.

2.2 Kéttámaszú tartó maximális nyíróerő ábrái koncentrált erőkre

A hidak esetleges terhe főleg koncentrált erőkből áll, amelyek járművek, vonat, villamos vagy tehergépkocsik kerékterheiből adódik. Tekintsük a *6. ábrán* látható tartót és a három erőből álló megfordítható erőcsoportot. Rajzoljuk fel a ξ koordinátájú keresztmetszet nyíróerő hatásábráját. Írjuk fel először a pozitív maximális nyíróerőábrák függvényét a ξ koordinátájú keresztmetszet mértékadó leterhelése alapján:

$$T_{max}^{F+}(\xi) = F_i \eta_i^+ = F_1 \frac{l-\xi}{l} + F_2 \frac{l-\xi-d_1}{l} + F_3 \frac{l-\xi-d_1-d_2}{l} = \frac{1}{l} \sum M_i^B = A$$

azaz a maximális nyíróerő a mértékadóan elhelyezett teherből származó A reakcióerővel azonos, amely viszont a teher *B* támaszra vonatkozó nyomatékösszegével arányos. Ezt a nyomatékösszeget a statikában tanult kötélsokszög-szerkesztés segítségével meg is tudjuk szerkeszteni.

Ehhez fel kell rajzolnunk az erők vektorsokszögét valamely tetszés szerint választott lépték szerint. Ugyancsak fel kell vennünk a *H* pólustávolságot, amellyel a szerkesztés alapján kapott nyomaték arányos lesz: $M = H \cdot m$, ahol *m* a szerkesztett nyomatéki metszék a választott lépték szerint.

azaz a maximális nyíróerő a mértékadóan elhelyezett teherből származó A reakcióerővel azonos, amely viszont a teher *B* támaszra vonatkozó nyomatékösszegéve

Mivel a fenti összefüggés szerint a *B* támaszra vonatkozó nyomatékösszeg *l* támaszközzel osztott értékére van szükségünk, célszerű, ha a pólustávolságot éppen a támaszközzel azonosan *H=l* értékkel vesszük fel. Ha amértékadó helyzetben lévő erőcsoportra így megrajzoljuk a kötélsokszöget, akkor annak *B* támasz alatti ordinátája éppen a kívánt $T_{max}^{F+}(\xi)=\left(\sum M_i^B\right)/l$ értéket adja meg a választott erőléptékben. Ha a szerkesztést egy másik keresztmetszet mértékadó leterhelésével megismételjük, ugyancsak a vonatkozó legnagyobb nyíróerőt kapjuk meg, de megint a *B* támasz függőlegesében. Ez utóbbi szerkesztés során lényegében nem tettünk mást, mint az előzőleg megrajzolt kötélsokszöget csúsztattuk arrébb. A *B* támasz függőlegesében tehát mindig az egyes keresztmetszetek maximális nyíróerőinek az értéke jelenik meg.

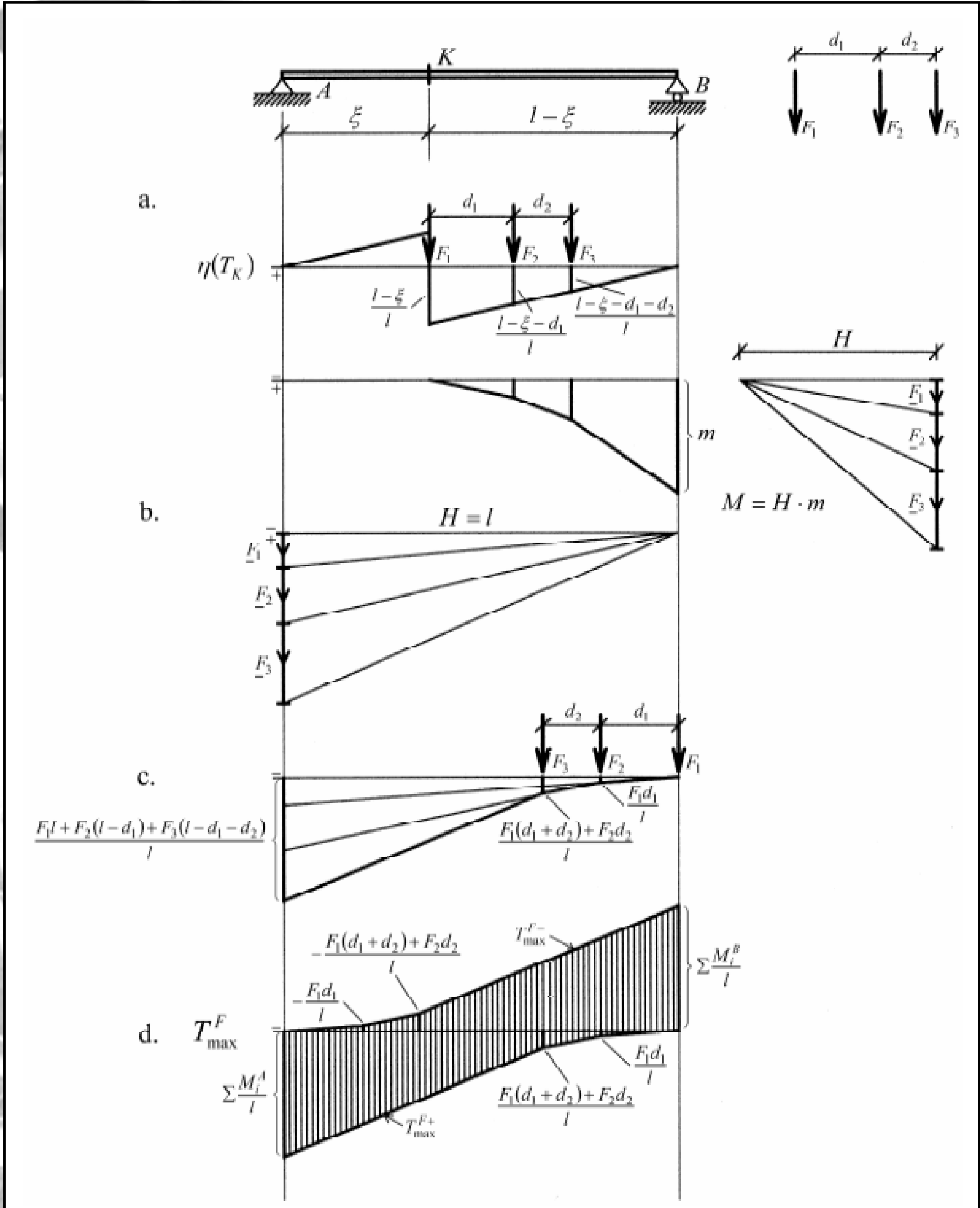
A megismételt munkát célszerű ötlettel takaríthatjuk meg, és egyben valamennyi keresett maximális nyíróerőt a helyén, a saját keresztmetszete alatt jeleníthetjük meg.

Ha az erőrendszert és a hozzá tartozó kötélsokszöget megfordítjuk, akkor F_1 erő a B támasz felett áll, és a megszerkesztett kötélsokszög maga a kívánt maximális ábra. Az eljárás a „fordított vonat kötélpoligonja” néven vált ismertté. Ezt mutatja az ábra.

A maximális ábra függvényét ennek megfelelően az alábbi alakban kapjuk

$$T_{\max}^{F+}(\xi) = \frac{1}{l} = \begin{cases} F_1(l-\xi) + F_2(l-d_1-\xi) + F_3(l-d_1-d_2-\xi) & \text{ha } 0 \le \xi \le l-d_1-d_2 \\ F_1(l-\xi) + F_2(l-d_1-\xi) & \text{ha } l-d_1-d_2 \le \xi \le l-d_1 \\ F_1(l-\xi) & \text{ha } l-d_1 \le \xi \le l \end{cases}$$

A negatív nyíróerők maximális ábráját a pozitív nyíróerők maximális ábrájának a tartó középpontjára vonatkozó kettős tükrözésével kapjuk.



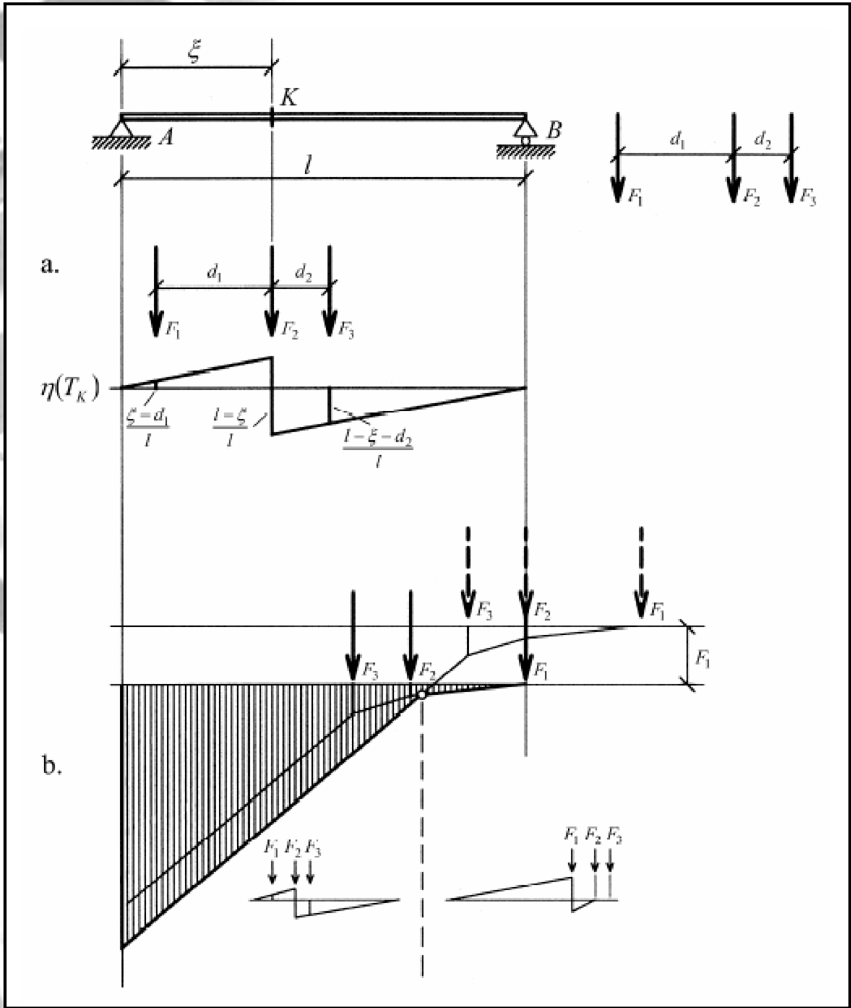
6. ábra. Kéttámaszú tartó maximális nyíróerő ábrája több koncentrált teherre [Kuruczné 2006]

Bizonyos tehertípusoknál, például mozdonyterheknél előfordul, hogy az elsőkerék könnyű, így a jóval súlyosabb második erő veszi át a szerepét. Ilyenkor a ξ koordinátájú keresztmetszet mértékadó leterhelésénél az első erőt a negatív szakasz fölé engedjük, hogy a második erő állhasson a legnagyobb pozitív ordináta fölé. Ekkor a maximális ábra függvénye:

$$T_{max}^{F+}(\xi) = F_i \eta_i^+ = F_1 \frac{\xi - d_1}{l} + F_2 \frac{l - \xi}{l} + F_3 \frac{l - \xi - d_1}{l} =$$

$$= F_1 \frac{l - \xi + d_1}{l} - F_1 \frac{l}{l} + F_2 \frac{l - \xi}{l} + F_3 \frac{l - \xi - d_1}{l} = \frac{1}{l} \sum M_i^B - F_1$$

amely természetesen ilyenkor azt jelenti, hogy a keresztmetszeti nyíróerő $T_K = A - F_1$, hiszen az F_1 erő a keresztmetszettől balra van Ez a megfordított kötélsokszögnél azt jelenti, hogy az F_2 erő kerül a B támasz fölé, míg az F_1 erő a támaszon kívülre esik. Ilyenkor csak annyi a változás, hogy a megszerkesztett kötélsokszöget eltoljuk: kezdőpontját a támaszon kívülre eső F_1 erő hatásvonalán F_1 értékkel felfelé toljuk, Ezt mutatja a *7. ábra*:



7. ábra. Kéttámaszú tartó maximális nyíróerő ábrája több koncentrált teherre, erőeltolás [Kuruczné 2006]

A maximális ábrát ilyenkor a két ábra burkológörbéje adja. A két ábra metszéspontja azt a keresztmetszetet jelenti, amelynél változik a mértékadó teherállás konstrukciója: a tőle jobbra lévő keresztmetszetek esetén a mértékadó teherállásnál F_1 áll a legnagyobb pozitív ordináta felett, míg a tőle balra lévő keresztmetszeteknél F_1 a negatív rész felett mozog, és F_2 áll a legnagyobb pozitív ordináta felett.

Felhasznált irodalom

KURUCZNÉ DR. KOVÁCS MÁRTA: *Tartók statikája. Előadás-vázlat.* Elektronikus jegyzet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Kar Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, Budapest, 2006