



Tartók statikája

1. előadás

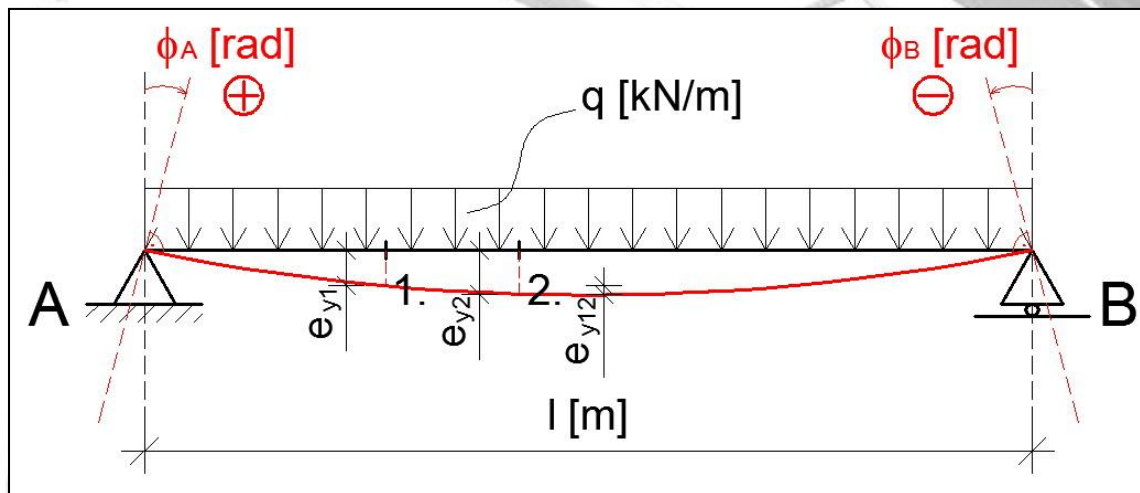
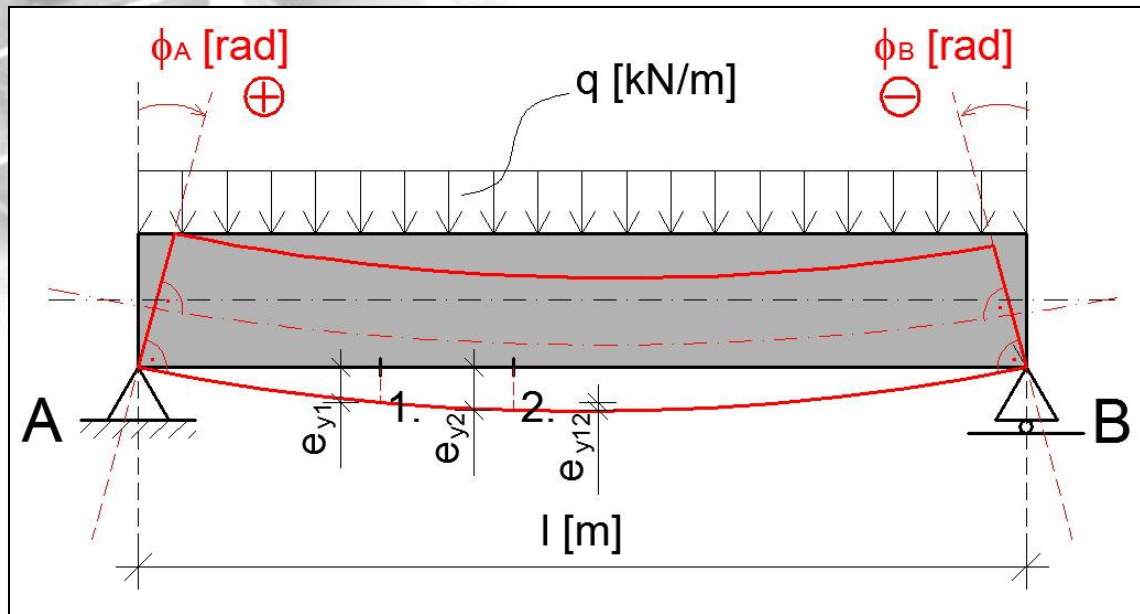
Hajlított tartók rugalmas alakváltozása

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

1. Statikailag határozott gerendatartók rugalmas alakváltozása

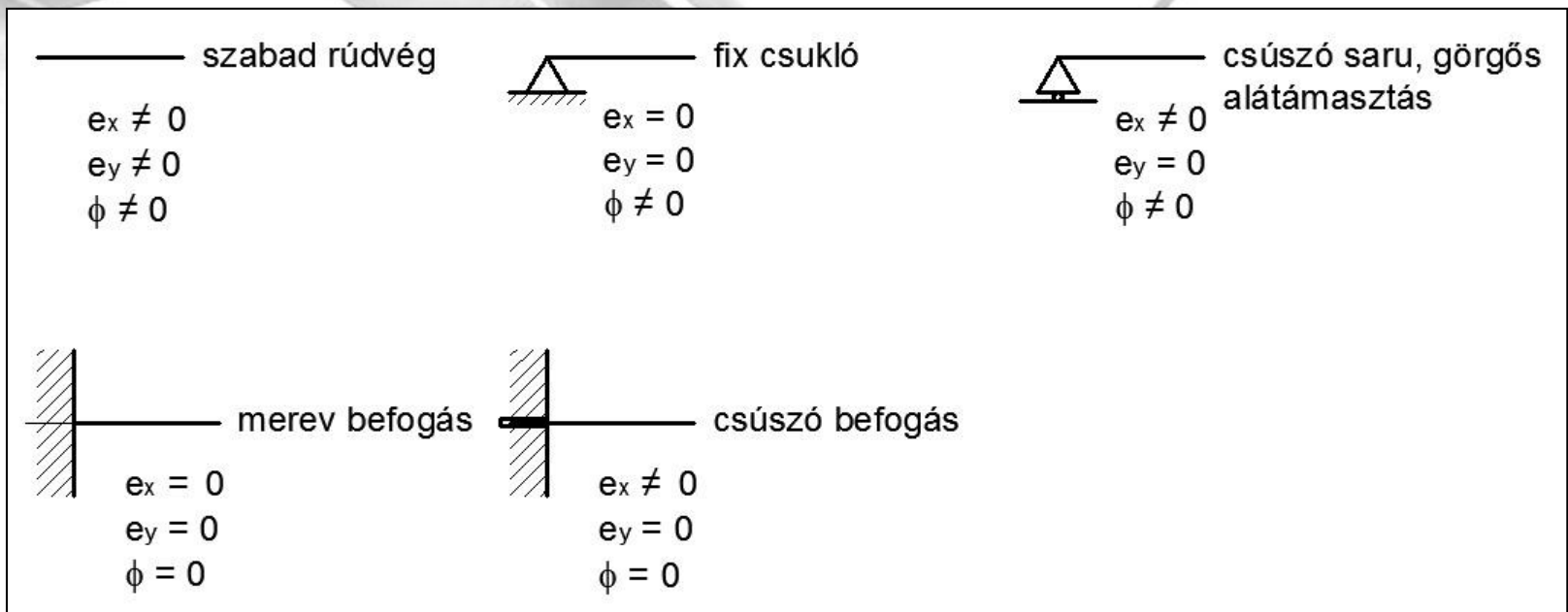


1-2. ábra. Hajlított gerendatartó rugalmas alakváltozása

Mitől függ a deformálódott tartóalak?

- a terheléstől,
- a tartó megtámasztásainak módjától.

A megtámasztások lehetnek:



3. ábra. Megtámasztások kialakítása

A meggömbült tengelyvonal egyenlete:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ahol: ρ – a meggömbült tengelyvonal sugara;

y – a meggömbült tengelyvonalat leíró függvény.

Miután az elmozdulások (alakváltozások) igen kicsinyek, ezért a $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ tag az egyenletből elhanyagolható.

$$\frac{1}{\rho} = y'' \quad \rho = \frac{1}{k_{(x)}} \quad \text{így} \quad \frac{1}{\rho} = k_{(x)} \quad \text{és} \quad k_{(x)} = -\frac{M}{E \cdot I_x}$$

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I_x} \quad \rightarrow \quad -M = y'' \cdot E \cdot I_x$$

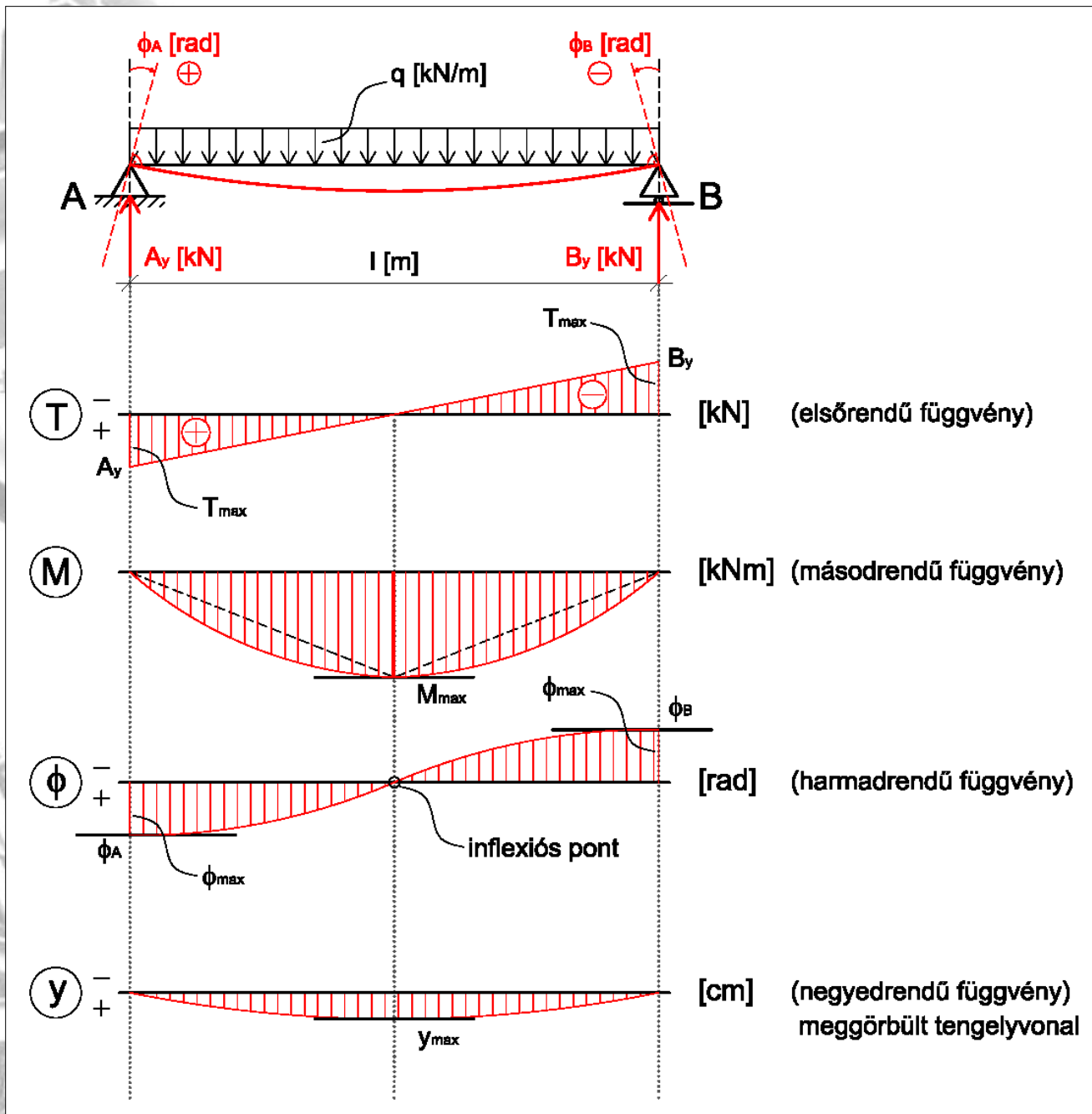
ahol: E – rugalmassági modulus;

I_x – a keresztmetszet „x” irányú inercianyomatéka.

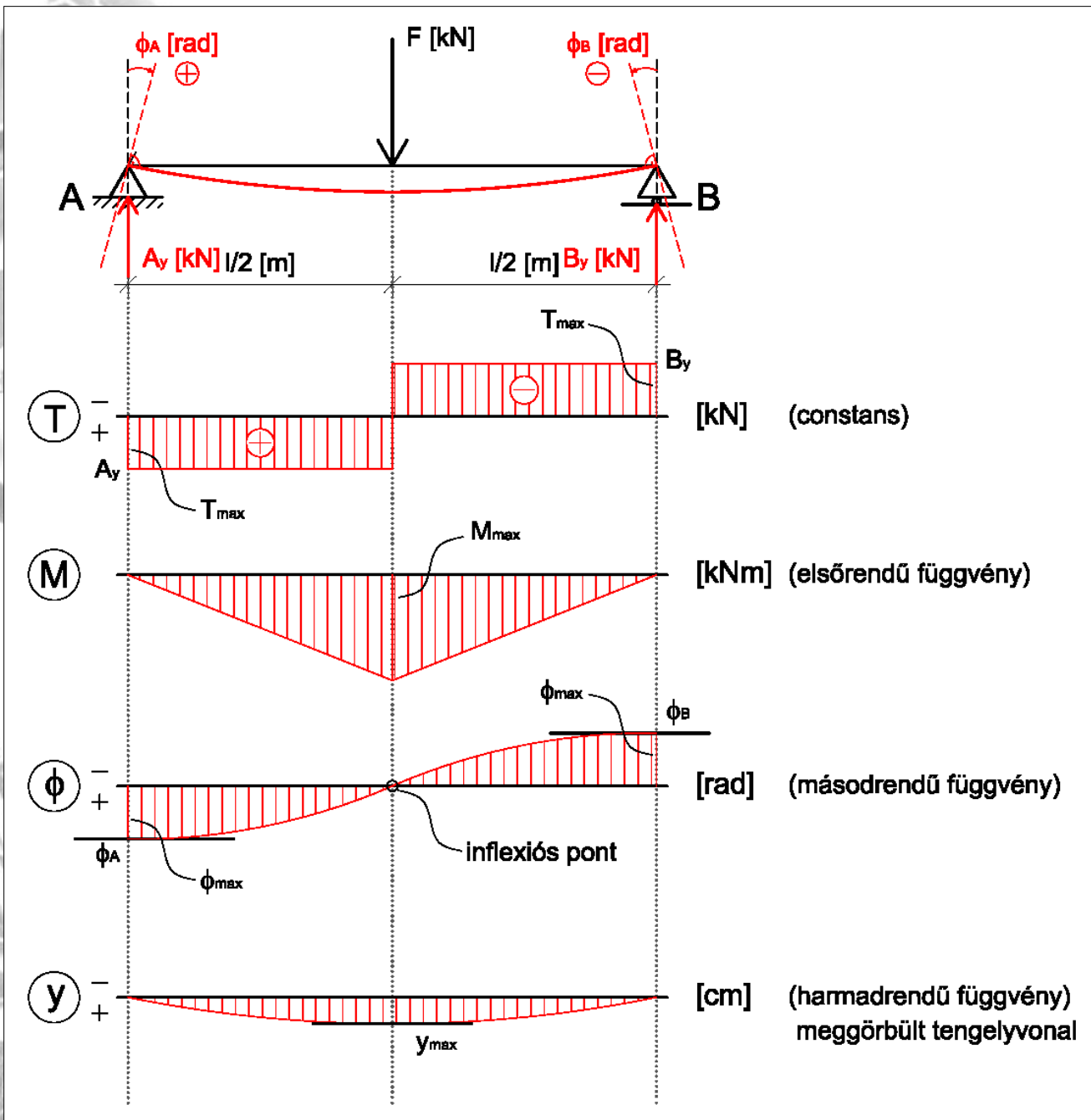
2. Függvénykapcsolatok

A teher-, a nyíróerő- és a nyomatékfüggvények közötti függvénykapcsolat kiegészítése a szögelfordulás és elmozdulás ábrákkal:

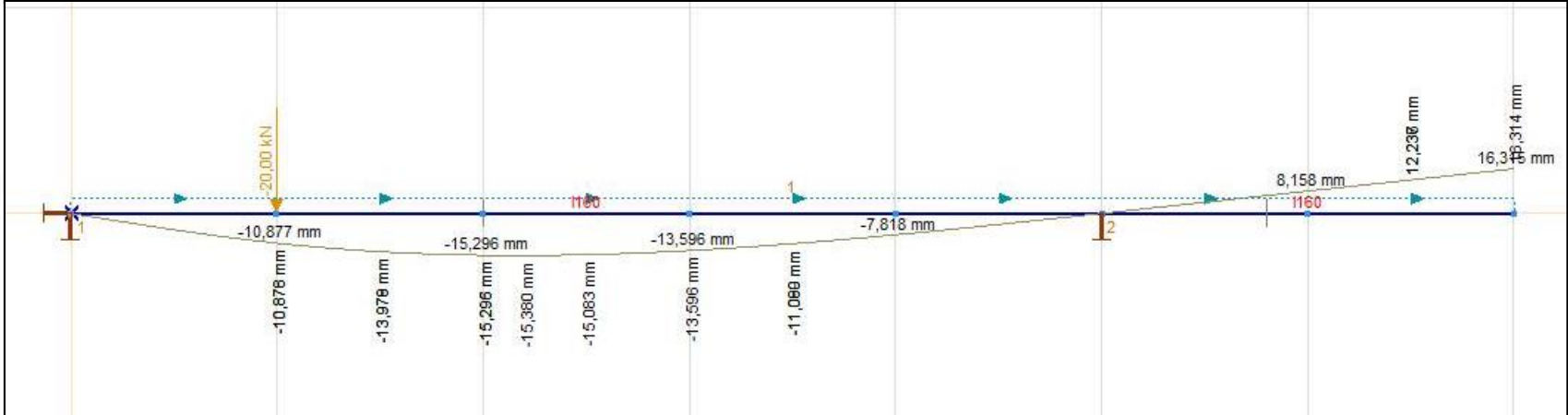
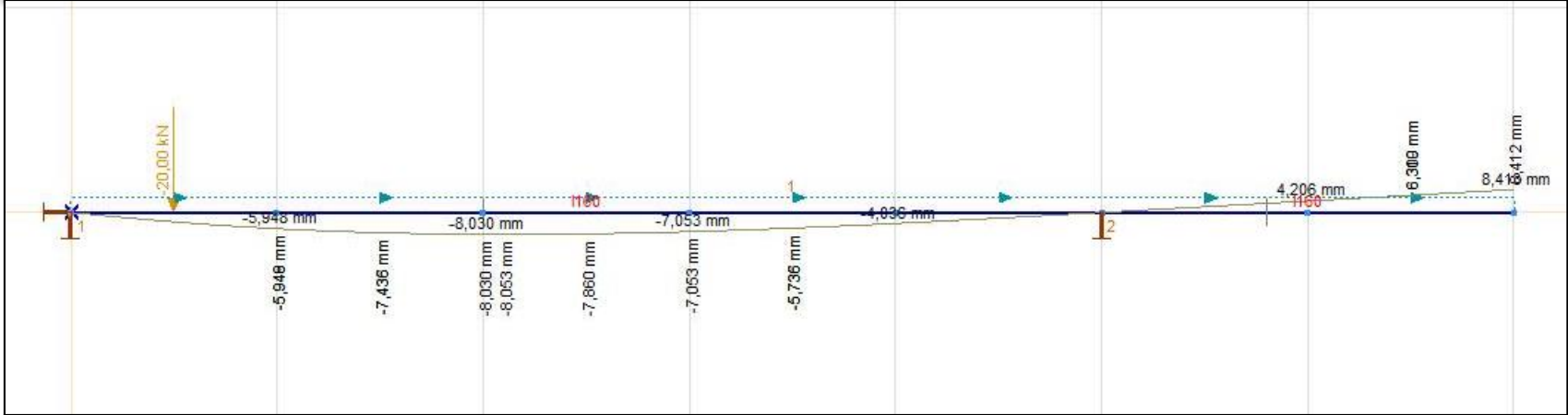
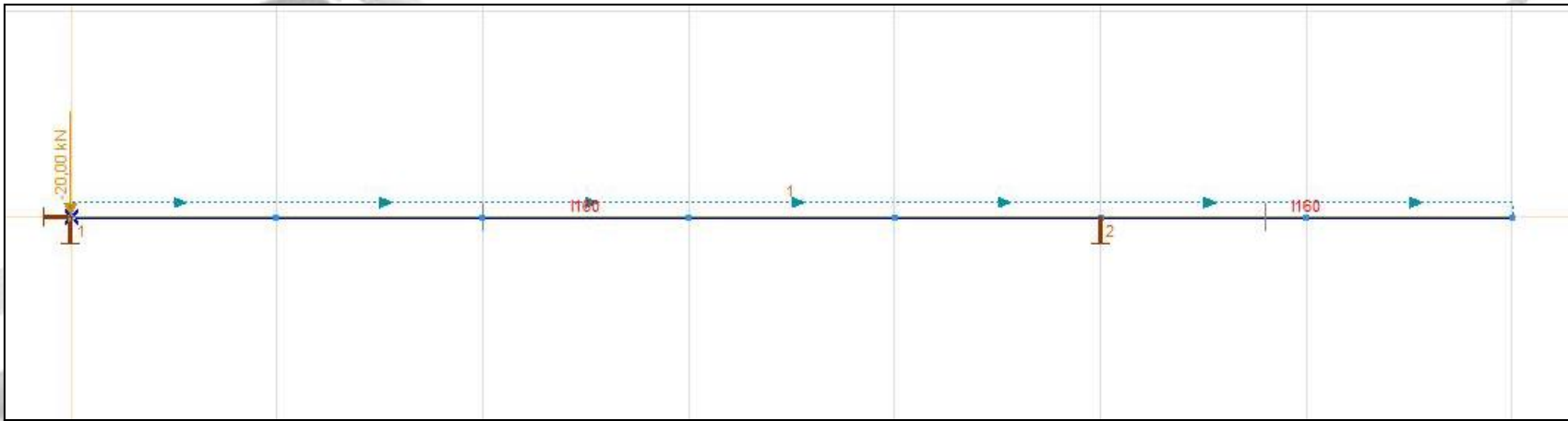
$q = y^{IV} \cdot E \cdot I_x$	DERIVÁLÁS → ↓ INTEGRÁLÁS	$q_{(z)}$ teherfüggvény
$T = y^{III} \cdot E \cdot I_x$		$T = \int_0^1 q_z$
$-M = y^{II} \cdot E \cdot I_x$		$M = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^1 T$
$\varphi = y^I_{(z)}$		$\varphi = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^1 M$
$y = y_{(z)}$ meggörbült tengelyvonalat leíró függvény		$y = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^1 \varphi$

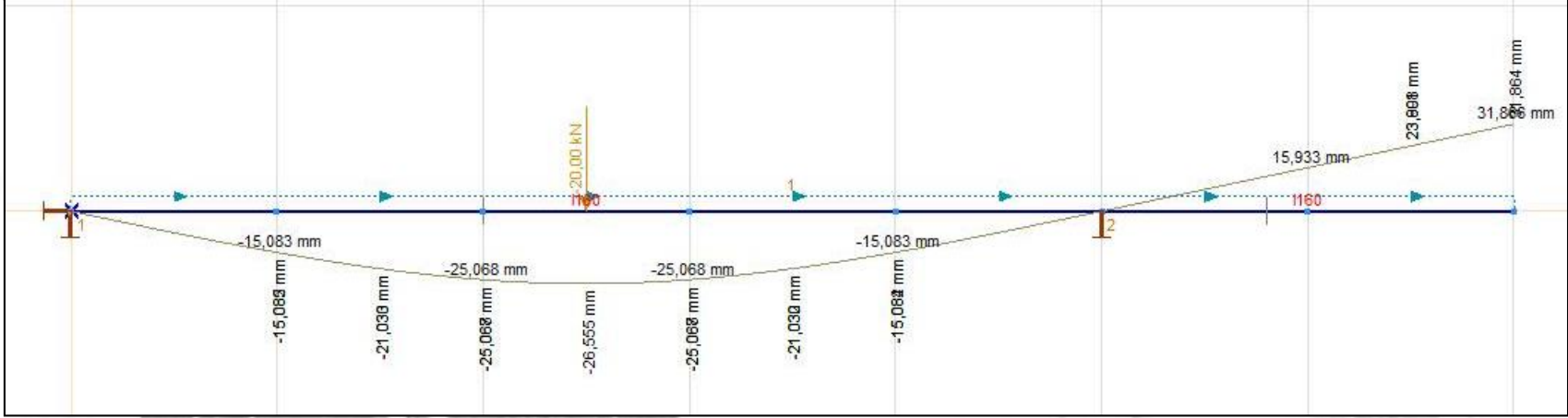
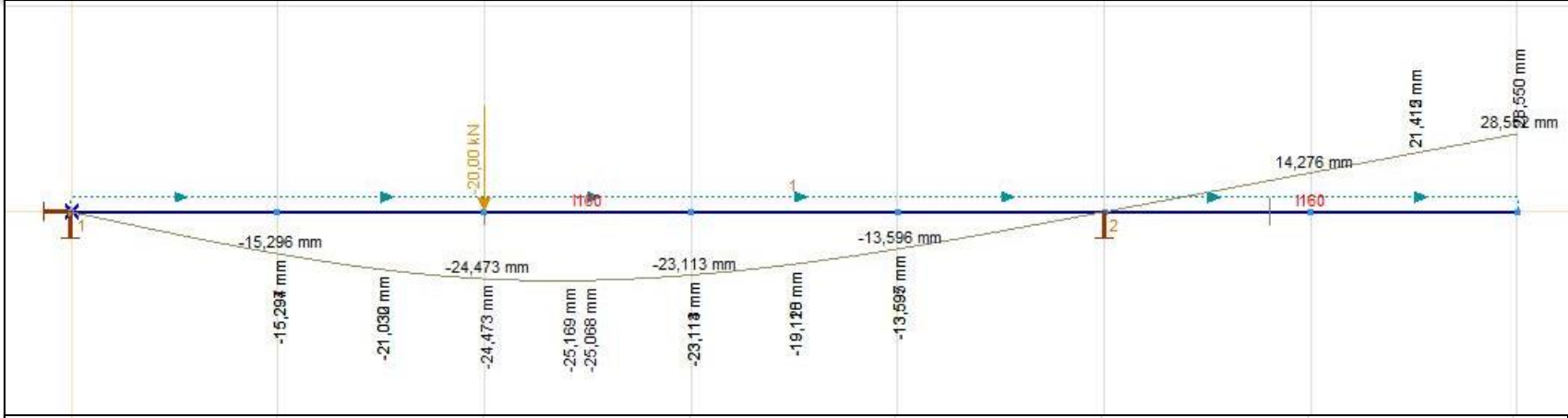
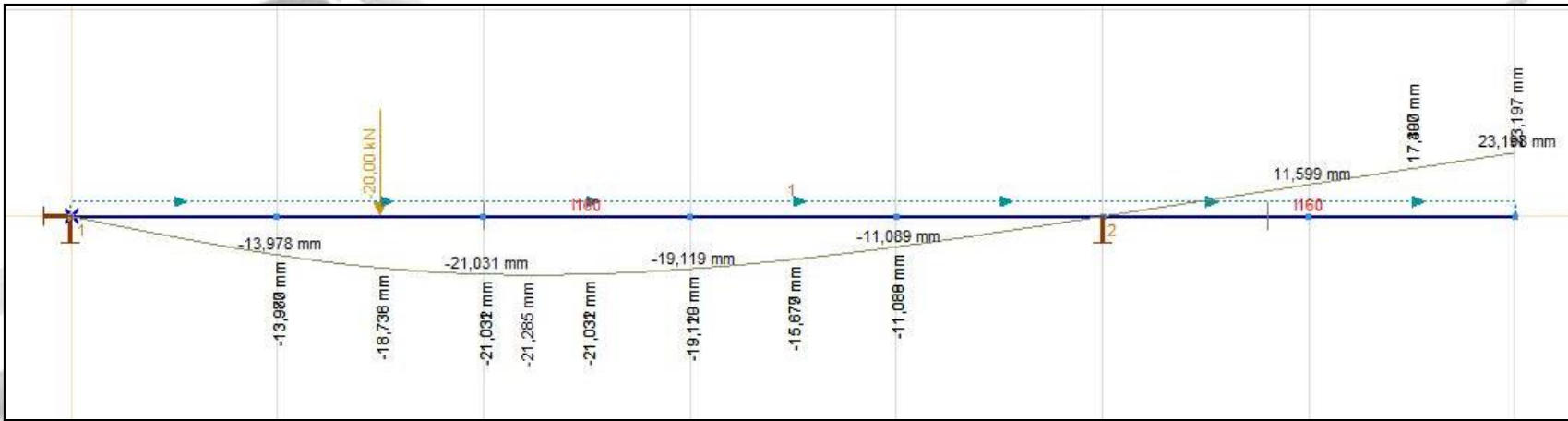


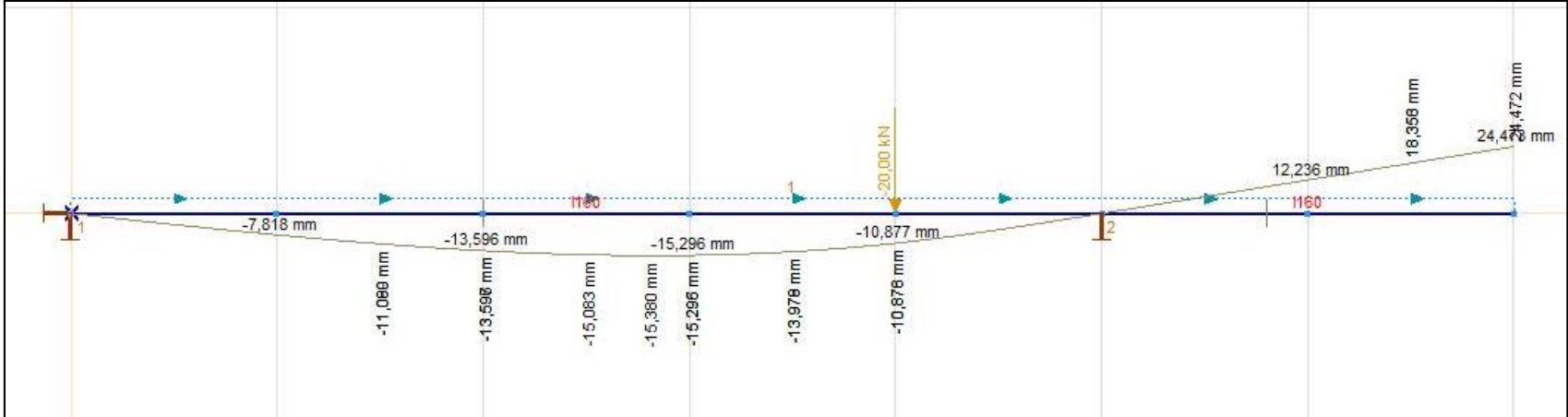
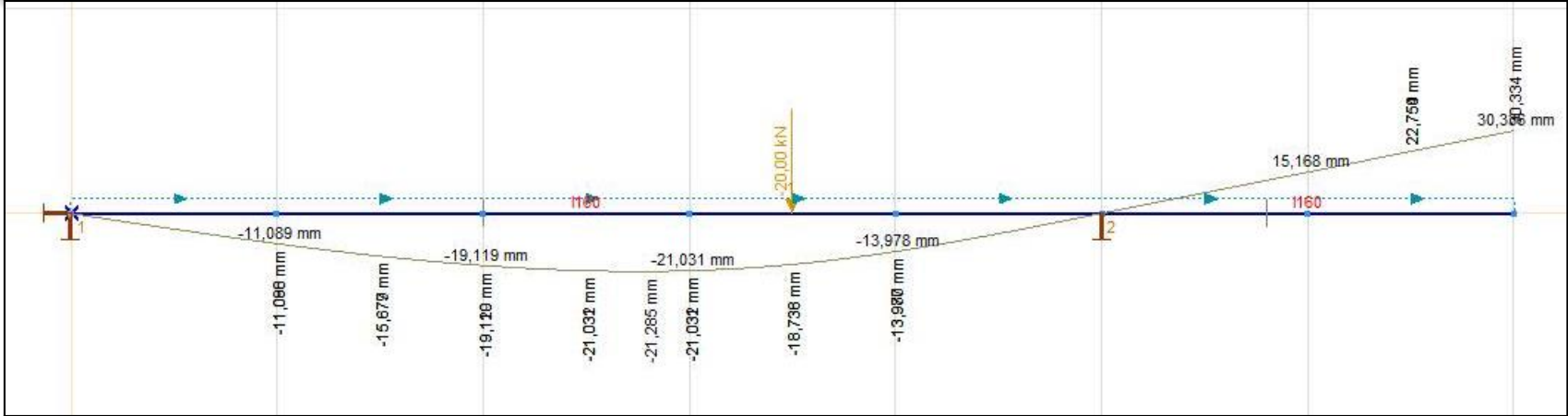
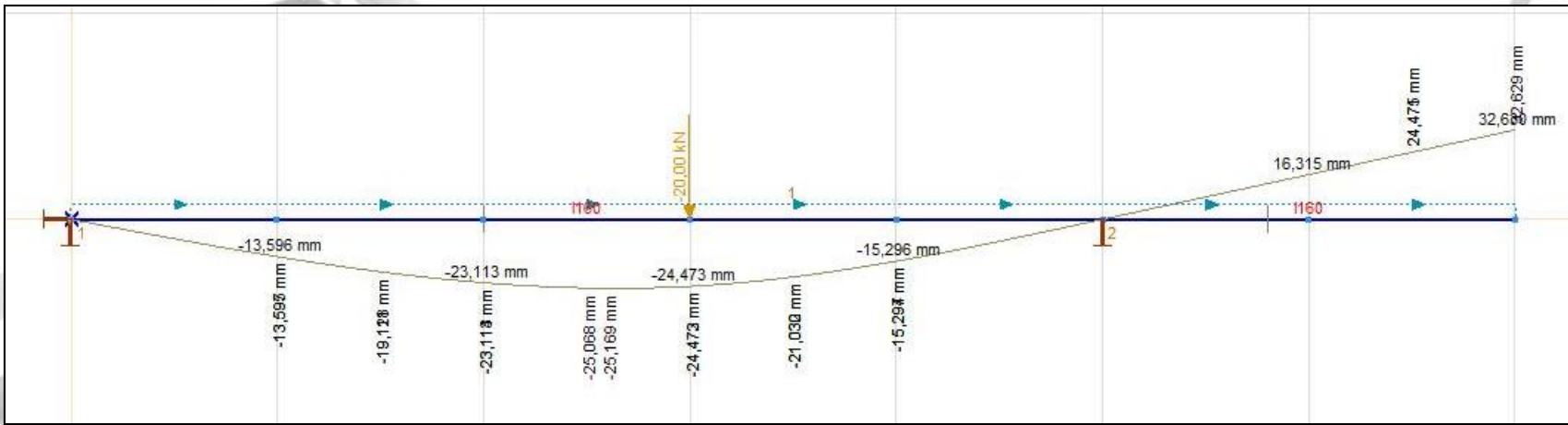
4. ábra. Kéttámaszú tartó alakváltozásai I.

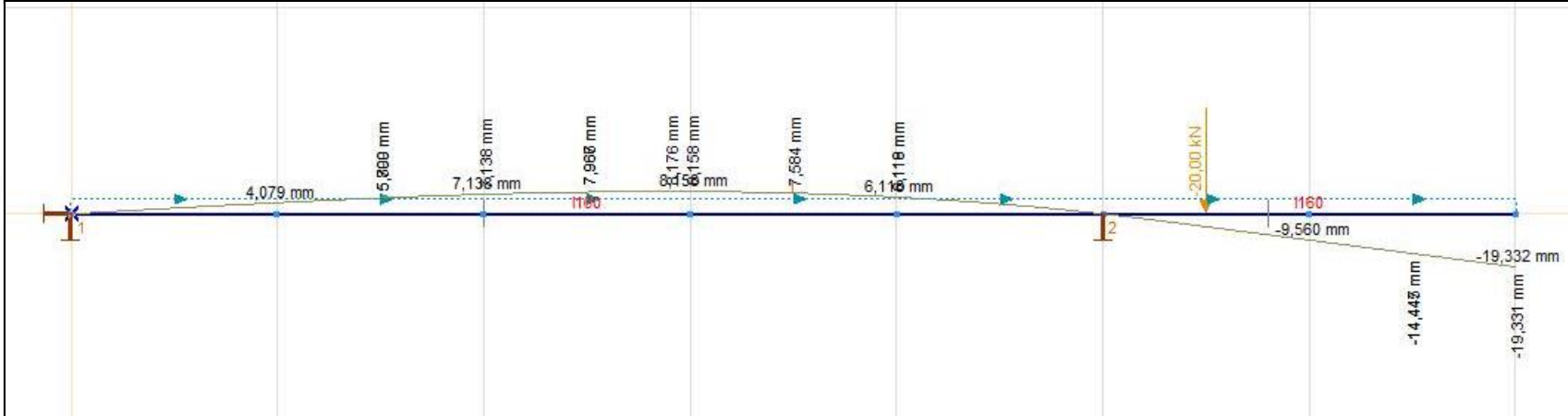
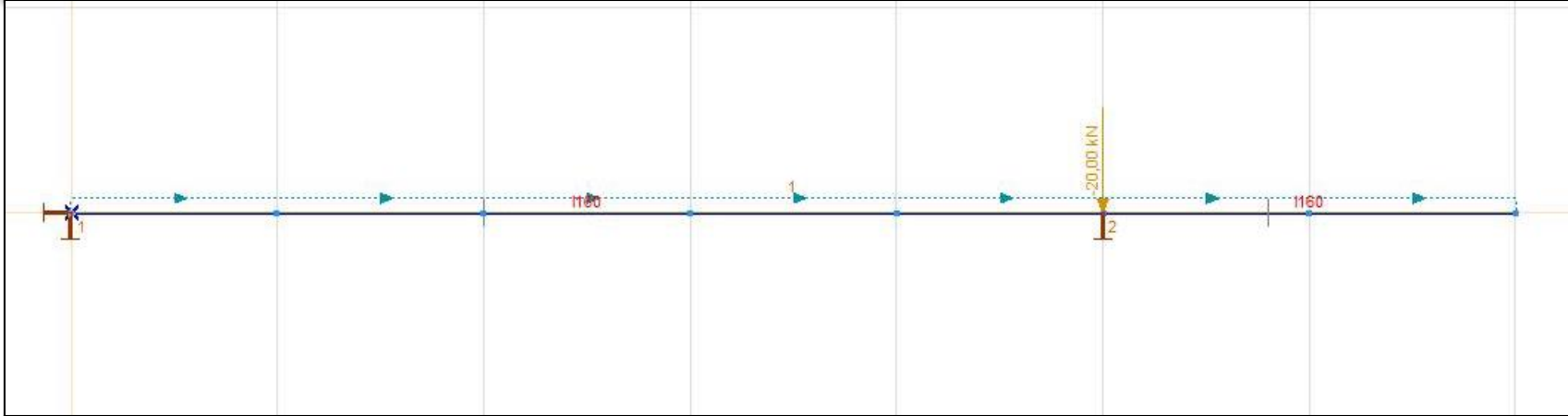
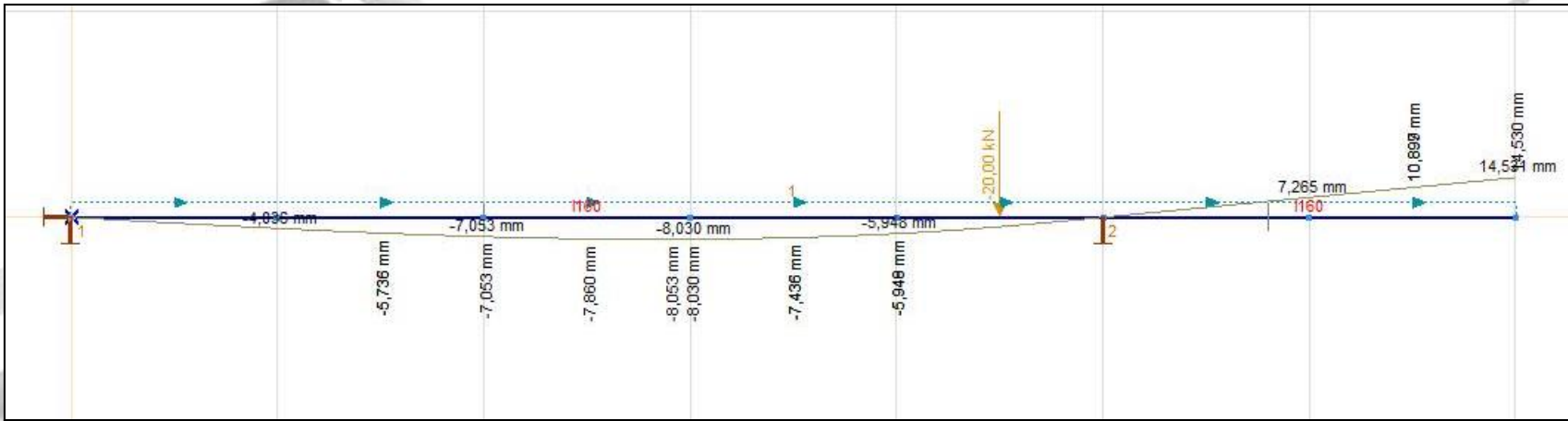


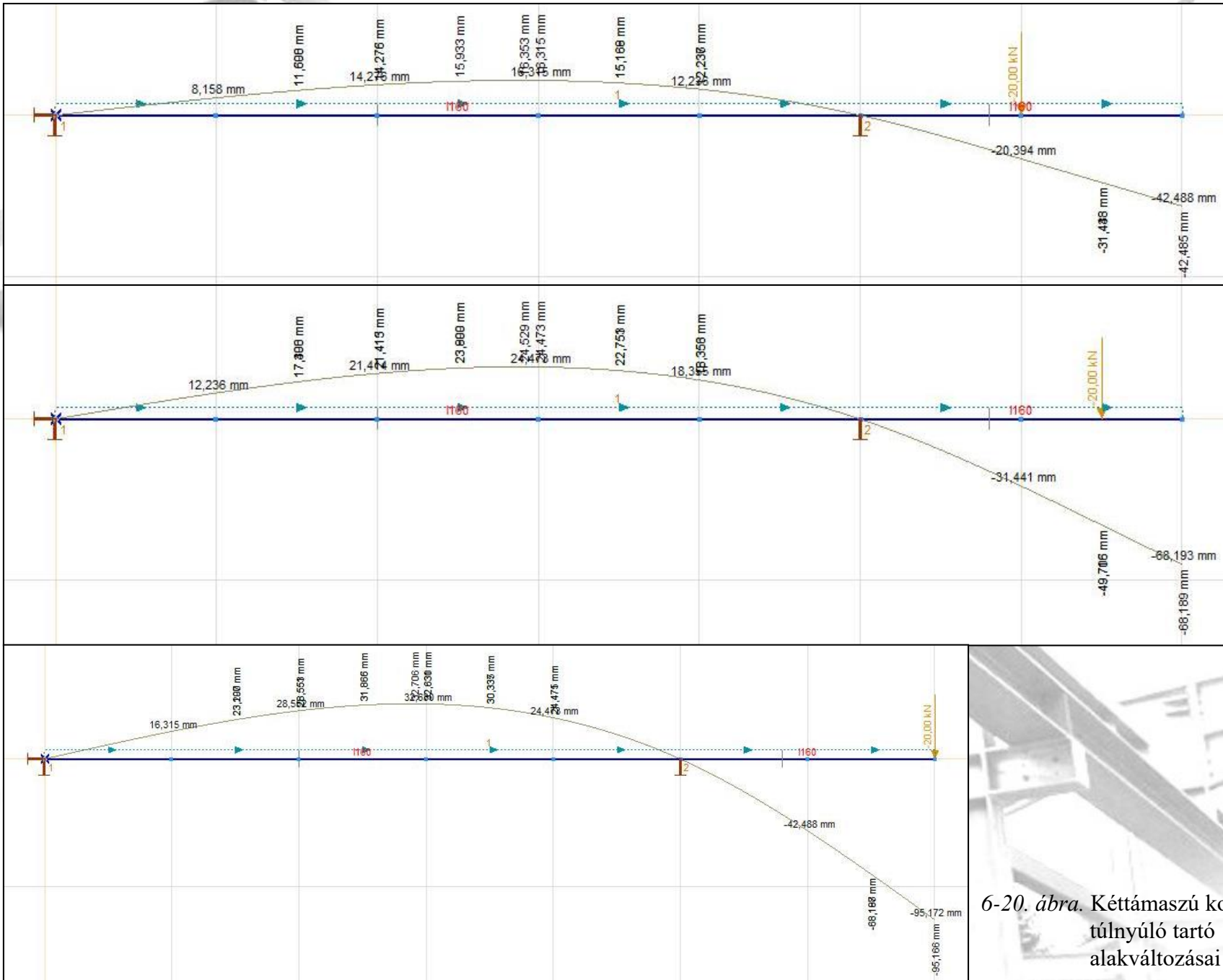
5. ábra. Kéttámaszú tartó alakváltozásai II.



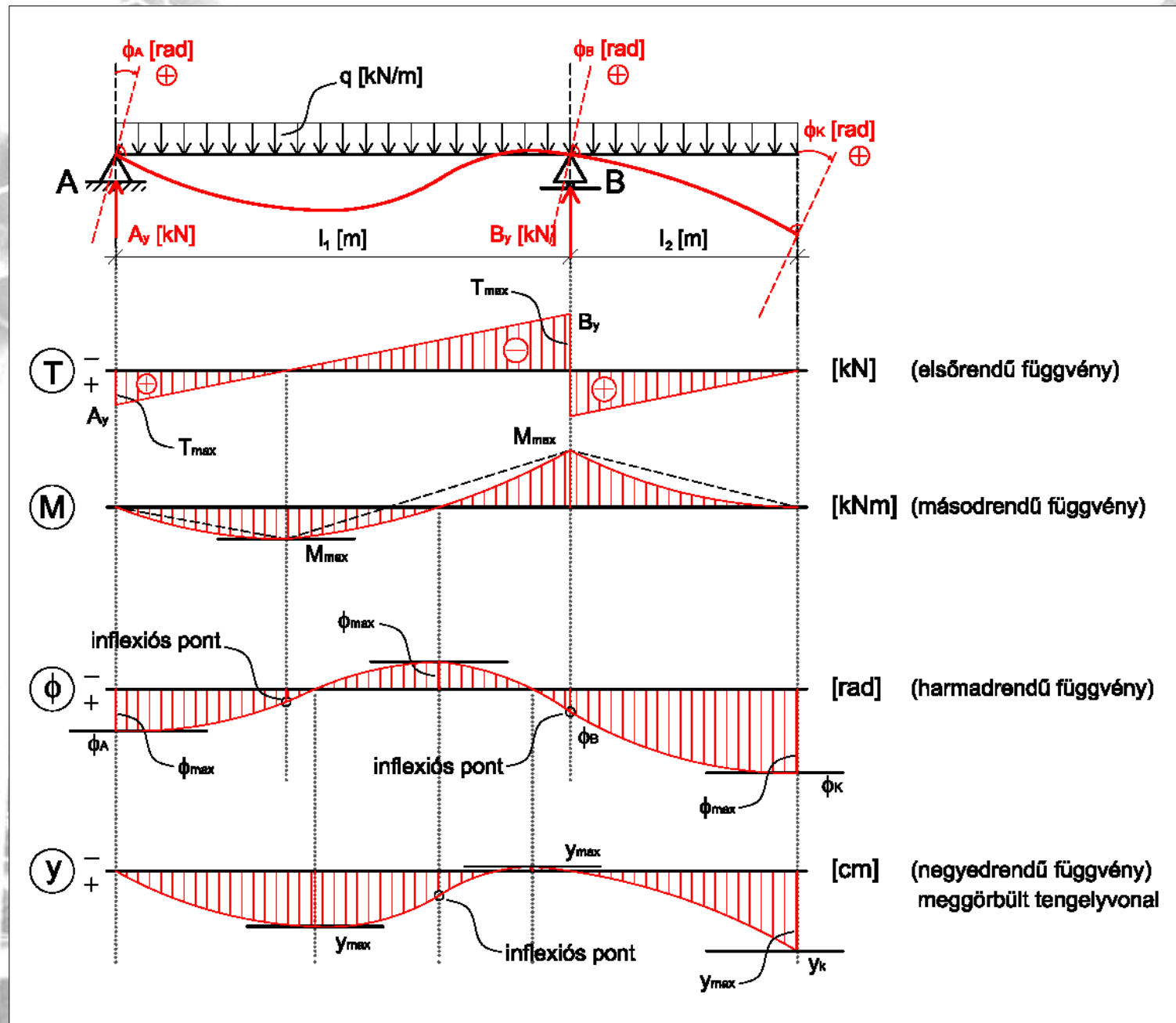








6-20. ábra. Kéttámaszú konzolos túlnyúló tartó alakváltozásai I.

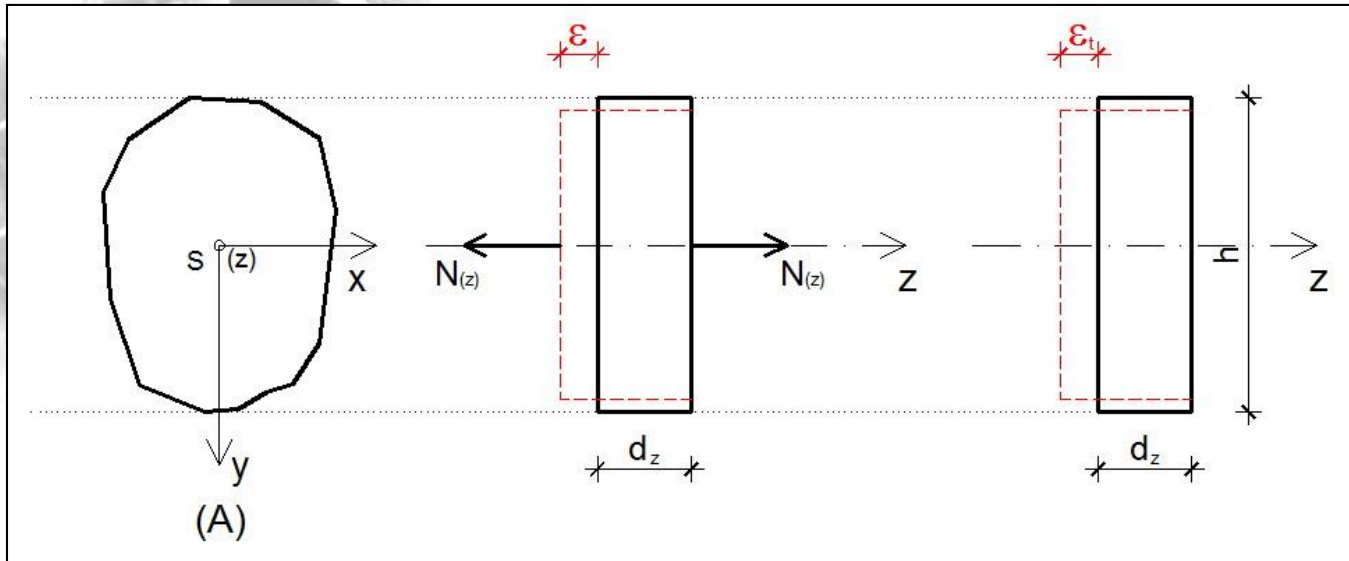


21. ábra. Kéttámaszú konzolosan túlnyúló tartó alakváltozásai II.

3. Feltételek

- a rúd egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű, anyaga homogén, lineárisan rugalmas,
- az elmozdulások és alakváltozások igen kicsinyek, érvényesek a kis elmozdulásokra vonatkozó közelítések,
- érvényesek az elemi szilárdságtan összefüggései,
- elhanyagolható a fajlagos nyúlás és fajlagos szögváltozás hatása az alakváltozásokra, csak a fajlagos elfordulással kell számolni.

4. Alakváltozások számítása



22. ábra. Normálerő és hőmérsékletváltozás hatása

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} \quad \varepsilon(t) = \alpha \cdot \Delta t$$

ahol: ε – alakváltozás (megnyúlás);

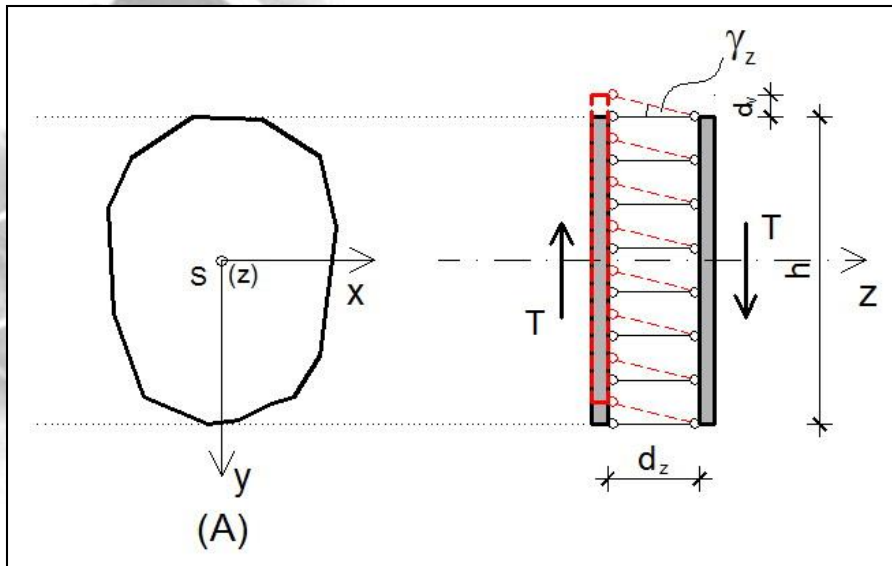
N – normálerő;

E – rugalmassági modulus;

A – a keresztmetszet felülete;

α – hőtágulási együttható;

Δt – egyenletes hőmérsékletváltozás.



23. ábra. Nyíróerő hatása

$$\gamma = \frac{T}{G \cdot A}$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{T}{G \cdot A} \quad (\text{T + M esetén})$$

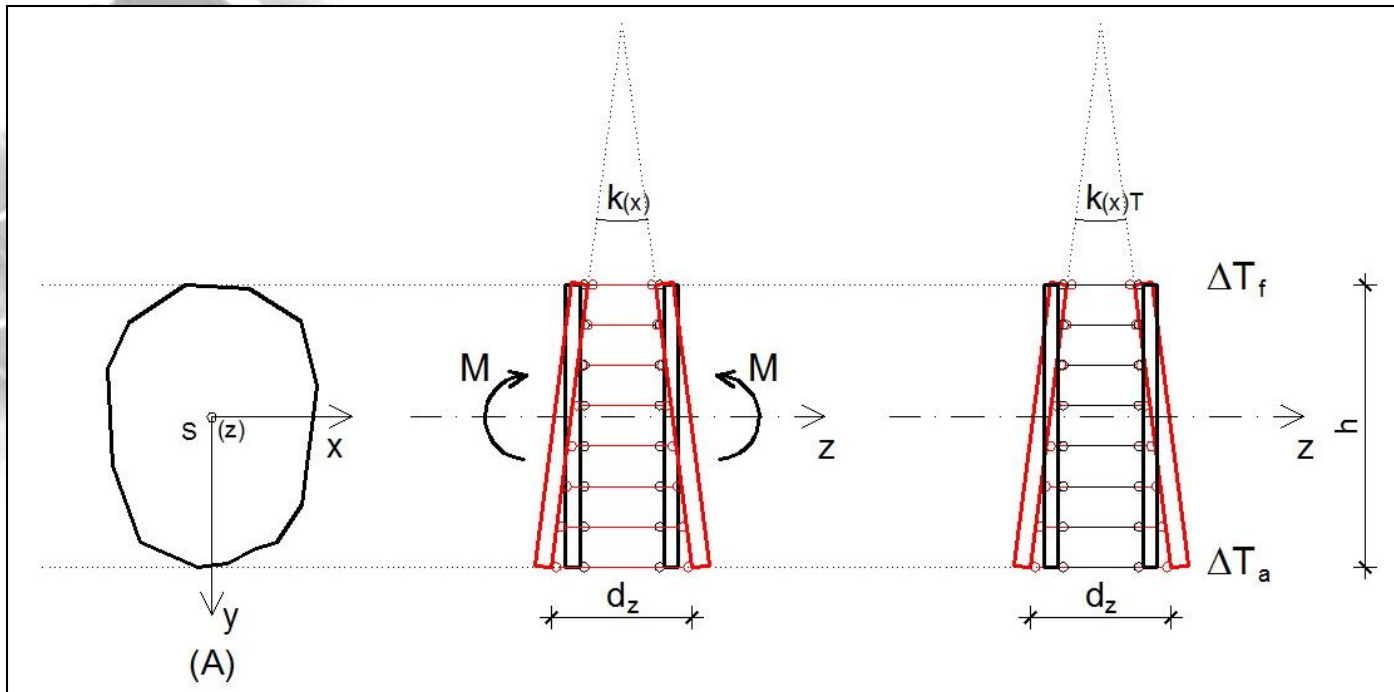
ahol: γ – alakváltozás (szögtorzulás);

T – nyíróerő;

G – nyírási modulus;

A – a keresztmetszet felülete;

ρ – a meggörbült tengelyvonal sugara.



24. ábra. Nyomaték és relatív hőmérsékletváltozás hatása

$$k_{(x)} = \frac{M}{E \cdot I_x} \quad k_{(x)T} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_f}{h}$$

ahol: k – alakváltozás (szögelfordulás);

M – forgatónyomaték;

E – rugalmassági modulus;

I_x – a keresztmetszet inercianyomatéka;

ΔT – hőmérsékletváltozás.

4. Munkatétel

A munka jele: L

Az erő munkája: támadáspontjának eltolódása

$$L = P \cdot e$$

(skalár szorzatként)

ahol: L – munka;

P – erő;

e – a támadáspont eltolódásának erő irányú vetülete.

Az erőpár munkája:

$$L = M \cdot \varphi$$

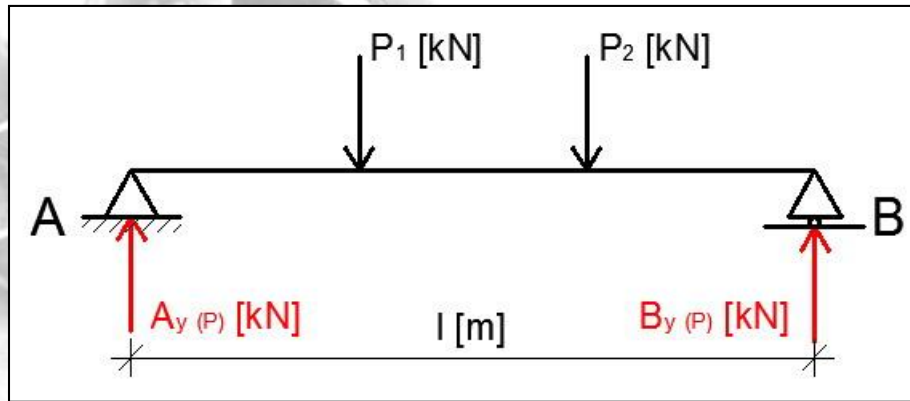
(skalár szorzatként)

ahol: L – munka;

M – nyomaték;

φ – szögelfordulás.

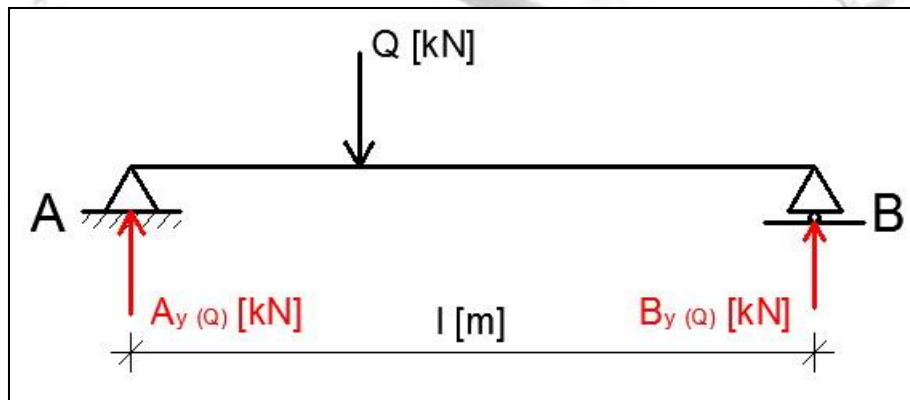
Tényleges, egyensúlyban lévő külső erőrendszer:



25. ábra. Egyensúlyban lévő külső erőrendszer

$$(P) = (A_{(P)}, B_{(P)}, P_1, P_2)$$

Virtuális külső erőrendszer:



26. ábra. Virtuális külső erőrendszer

$$(Q) = (A_{(Q)}, B_{(Q)}, Q)$$

Virtuális: tetszőleges, önkényesen felvett, de statikailag lehetséges, egyensúlyban lévő erőrendszer.

Külső munkát a testre ható egyensúlyban lévő dinámrendszer végez valamilyen elmozdulásrendszeren.

1. lépés: működtessük a tartón először a (P) tényleges dinámrendszert, amely létrehozza az alakváltozásokat (e_{ip}) ,
(dinám = erők + nyomatékok)
2. lépés: működtessük a tartón a (Q) virtuális dinámrendszert, így jön létre a (P) erőrendszer munkája a (Q) dinámrendszer okozta elmozdulásrendszeren.

Ez fordítva is igaz, ha először működtetjük a (Q) virtuális dinámrendszert, majd utána a (P) tényleges dinámrendszert, akkor beszélhetünk a (Q) dinámrendszer munkájáról a (P) dinámrendszer okozta elmozdulásrendszeren.

Idegen munka: amennyiben más erőrendszer végzi a munkát és más erőrendszer hozta létre az elmozdulást.

Saját munka: ugyanaz az erőrendszer végzi a munkát, mint amelyik létrehozta az elmozdulást.

Külső munka:

Külső munkát valamely külső dinámrendszer végez valamely elmozdulásrendszeren.

Külső, idegen munka:

$$L_K^{QP} = Q \cdot e_{PQ}$$

$$L_K^{QP} = Q \cdot \varphi_{PQ}$$

Külső saját munka:

$$L_K^{PP} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot e_{PP}$$

$$L_K^{PP} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \varphi_{PP}$$

Belső alakváltozási munka:

Belső alakváltozási idegen munka:

$$N \neq 0, T \neq 0, M \neq 0$$

$$L_B^{QP} = N_Q \cdot \varepsilon_P \cdot dz + T_Q \cdot \gamma_P \cdot dz + M_Q \cdot k_P \cdot dz$$

$$\varepsilon_P = \frac{N_P}{E \cdot A} \quad \text{illetve} \quad \alpha \cdot \Delta t$$

$$\gamma_P = \rho \cdot \frac{T_P}{G \cdot A}$$

$$k_P = \frac{M_P}{E \cdot I} \quad \text{illetve} \quad \alpha \cdot \frac{t_f - t_a}{h}$$

Véges hosszúságú rúdon:

$$L_B^{QP} = \int_0^l \frac{N_Q \cdot N_P}{E \cdot A} \cdot dz + \int_0^l \frac{T_Q \cdot T_P}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot dz + \int_0^l \frac{M_Q \cdot M_P}{E \cdot I} \cdot dz$$

Az első két tag elhanyagolható, ezért:

$$L_B^{QP} = \int_0^l \frac{M_Q \cdot M_P}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_Q \cdot M_P \cdot dz$$

Rácsos tartónál, ahol csak normálerő keletkezik:

Egy rúdban:

$$L_B^{QP} = \int_i \frac{S_{Qi} \cdot S_{Pi}}{E \cdot A_i} \cdot dz = \frac{S_{Qi} \cdot S_{Pi}}{E \cdot A_i} \cdot \int_i dz = \frac{S_{Qi} \cdot S_{Pi}}{E \cdot A_i} \cdot s_i$$

Az egész rácsos tartóban:

$$L_B^{QP} = \sum_{i=1}^n \frac{S_{Qi} \cdot S_{Pi}}{E \cdot A_i} \cdot s_i$$

Belső alakváltozási saját munka:

$$N \neq 0, T \neq 0, M \neq 0$$

$$L_B^{PP} = N_P \cdot \varepsilon_P \cdot dz + T_P \cdot \gamma_P \cdot dz + M_P \cdot k_P \cdot dz$$

$$\varepsilon_P = \frac{N_P}{E \cdot A} \quad \text{illetve} \quad \alpha \cdot \Delta t$$

$$\gamma_P = \rho \cdot \frac{T_P}{G \cdot A}$$

$$k_P = \frac{M_P}{E \cdot I} \quad \text{illetve} \quad \alpha \cdot \frac{t_f - t_a}{h}$$

Véges hosszúságú rúdon:

$$L_B^{PP} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{N_P^2}{E \cdot A} \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{T_P^2}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{M_P^2}{E \cdot I} \cdot dz$$

Az első két tag elhanyagolható, ezért:

$$L_B^{PP} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{M_P^2}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^1 M_P^2 \cdot dz$$

Rácsos tartónál, ahol csak normálerő keletkezik:

Egy rúdban:

$$L_B^{PP} = \frac{1}{2} \cdot \int_i \frac{S_{Pi}^2}{E \cdot A_i} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{Pi}^2}{E \cdot A_i} \cdot \int_i dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{Pi}^2}{E \cdot A_i} \cdot S_i$$

Az egész rácsos tartóban:

$$L_B^{PP} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{S_{Pi}^2}{E \cdot A_i} \cdot S_i$$

Idegen munkák tétele:

külső idegen munka = belső idegen munka

$$L_K^{QP} = L_B^{QP}$$

$$Q \cdot e_{QP} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_Q \cdot M_P \cdot dz$$

amennyiben: $Q = 1$

Saját munkák tétele:

külső saját munka = belső saját munka

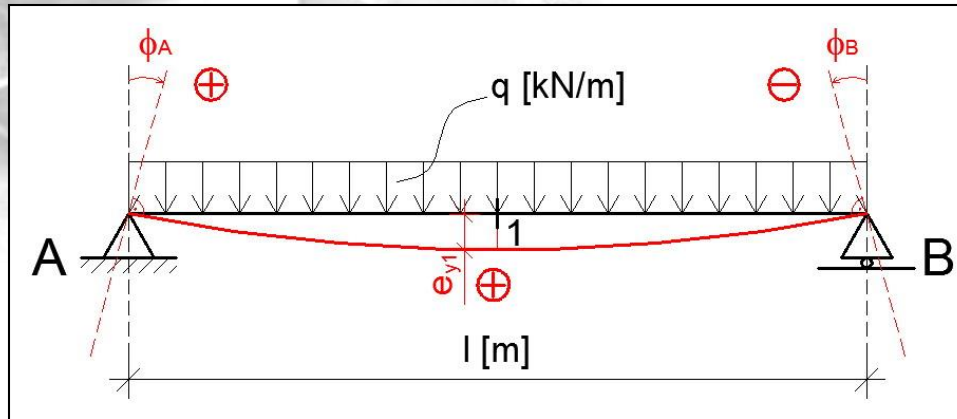
$$L_K^{PP} = L_B^{PP}$$

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot e_{PP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_P^2 \cdot dz$$

$$e_{PP} = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M_P^2 \cdot dz$$

1. mintapélda

Mekkora a kéttámaszú tartó φ_A és φ_B szögelfordulása, valamint mekkora a tartó közepén lévő 1-es keresztmetszet e_y lehajlása?



27. ábra. 1. mintapélda – kéttámaszú tartó alakváltozása

Előjelek:

- elmozdulás: a koordináta-rendszer szokásos előjelezése szerint,
- (abszolút)szögelfordulás: az óramutató járásával megegyező irány pozitív, az ellenkező irány negatív.

A szimmetrikus terhelés miatt: $|\varphi_A| = |\varphi_B|$

A megoldás menete:

1. lépés: támaszerők kiszámítása,
2. lépés: megrajzoljuk a tartó eredeti terheléséből kapott M_p nyomatéki ábrát, (több teher esetén a teheresetektől célszerű külön-külön nyomatéki ábrát rajzolni, majd a külön-külön végzett számítás után az eredményeket összegezni),

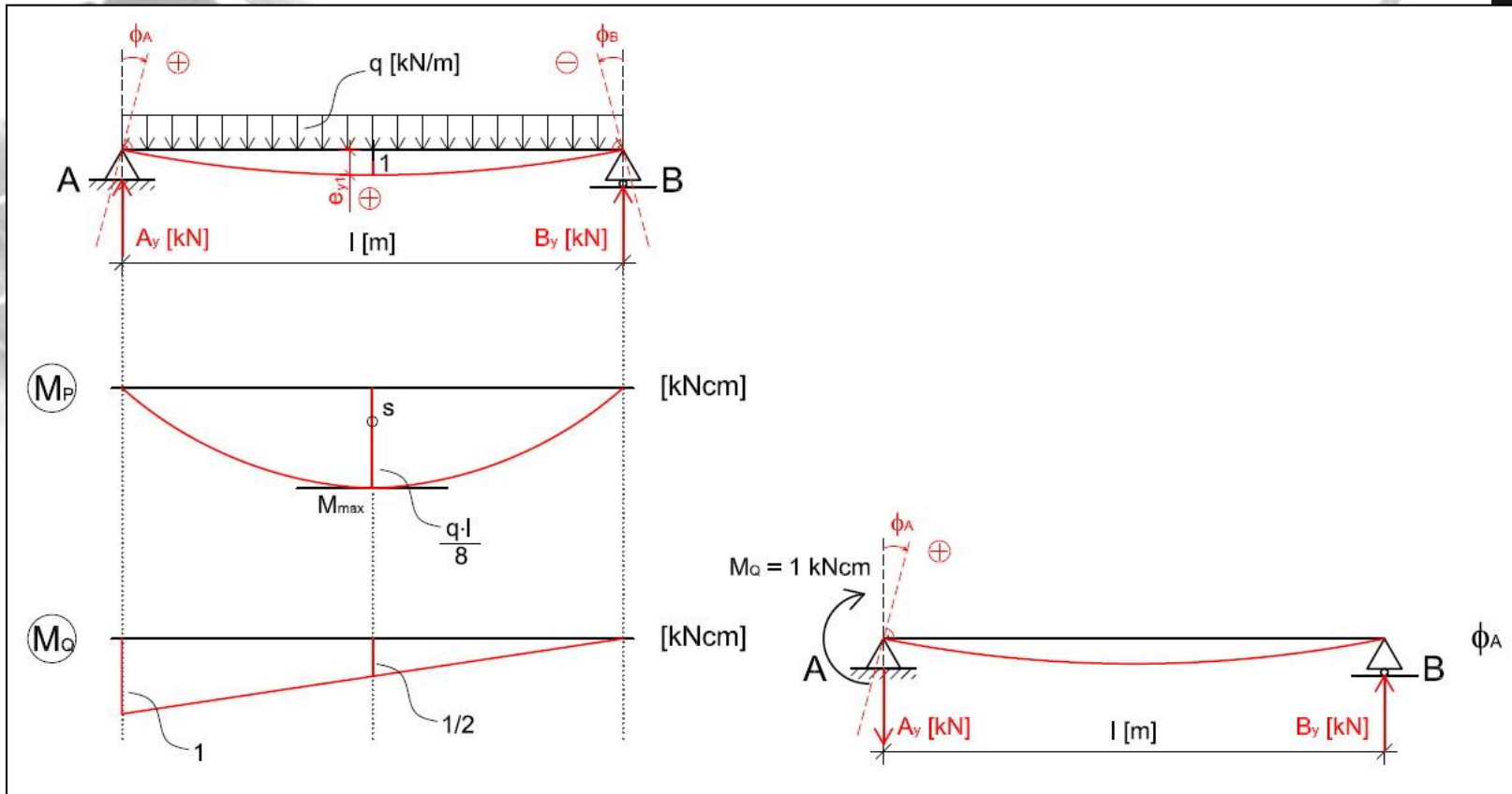
3. lépés: virtuális teher felvétele attól függően, hogy mely alakváltozást akarjuk meghatározni,

- szögelfordulás meghatározásához virtuális nyomatékokat kell beiktatni, melynek nagysága a számítás egyszerűsítése miatt egy egységnyi [1 kNcm],
- elmozdulás meghatározásához virtuális erőt kell beiktatni, melynek nagysága a számítás egyszerűsítése miatt egy egységnyi [1 kN].

A virtuális terhet mindig olyan irányban kell felvenni, hogy ugyanazt az alakváltozást okozza a törzstartón, mint amit az eredeti teher is okozott. Abba a keresztmetszetbe kell felvenni, ahol az alakváltozás nagyságát ki akarjuk számolni.

4. lépés: megrajzoljuk a tartó virtuális terheléséből kapott M_Q nyomatéki ábrát,

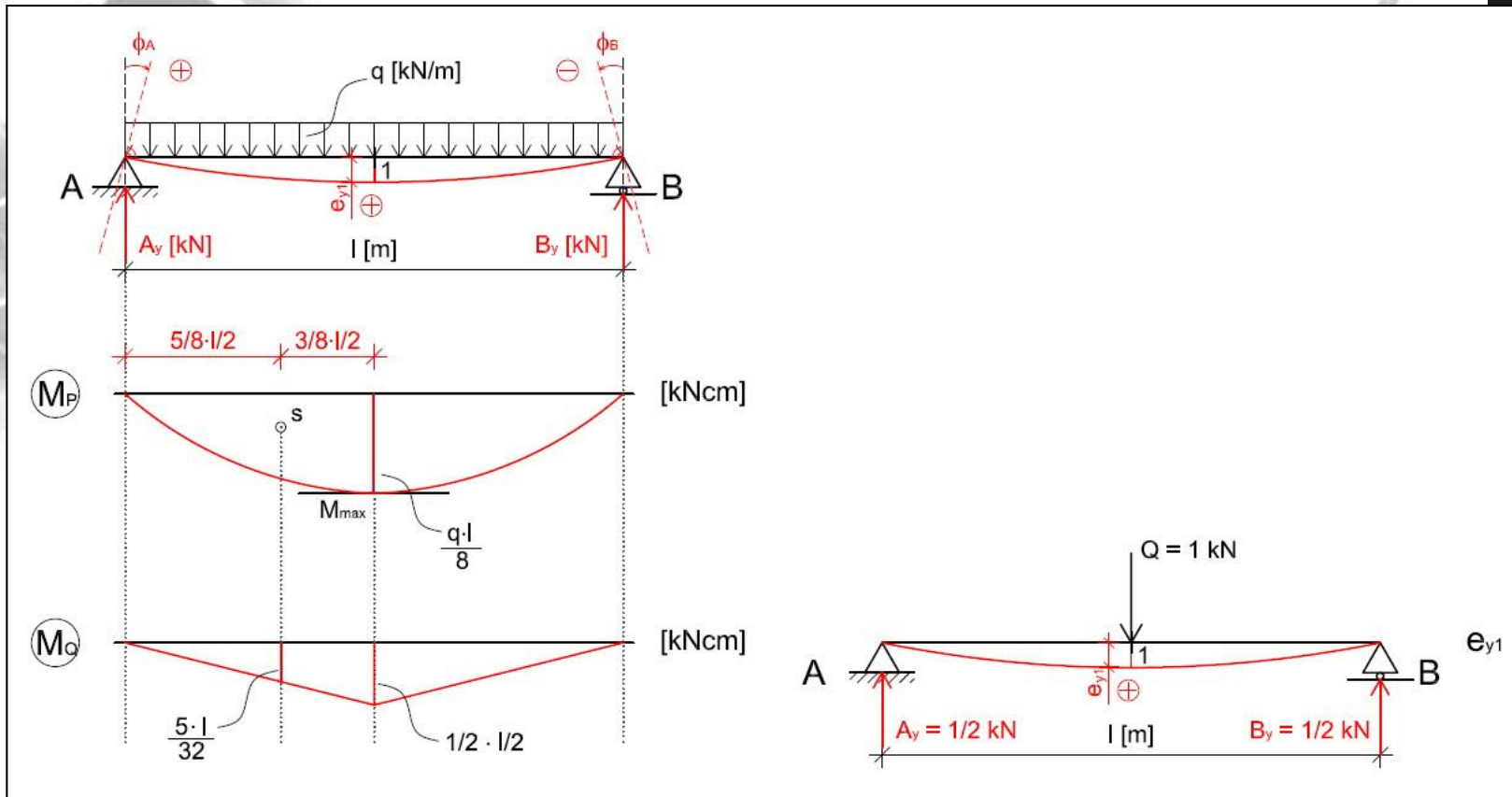
5. lépés: a számítás egyszerűsítése miatt bevezetjük a *grafikus integrálást*. Két nyomatéki ábra összeintegrálása úgy történik, hogy egyik ábráról leolvassuk a nyomatéki ábra területét, majd ugyanennek az ábrának a súlypontját, a másik nyomatéki ábrára vetítjük. A kiszámolt területet a kimetszett nyomatéki értékkel összeszorozzuk, majd mindezt még beszorozzuk $1/E \cdot I$ értékkel.



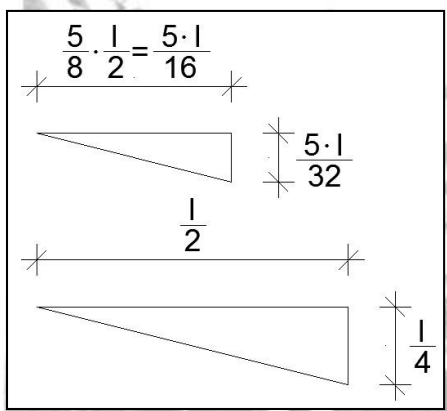
28. ábra. 1. mintapélda – szögelfordulás számítása

$$Q_1 \cdot \varphi_A = \int_0^l \frac{M_P \cdot M_Q}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_P \cdot M_Q \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (T_i \cdot M_i)$$

$$1 \cdot \varphi_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\underbrace{\frac{2}{3} \cdot l}_{T} \cdot \underbrace{\frac{q \cdot l^2}{8}}_{M} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{q \cdot l^3}{24}$$



29. ábra. 1. mintapélda – lehajlás számítása



30. ábra. Háromszögarány

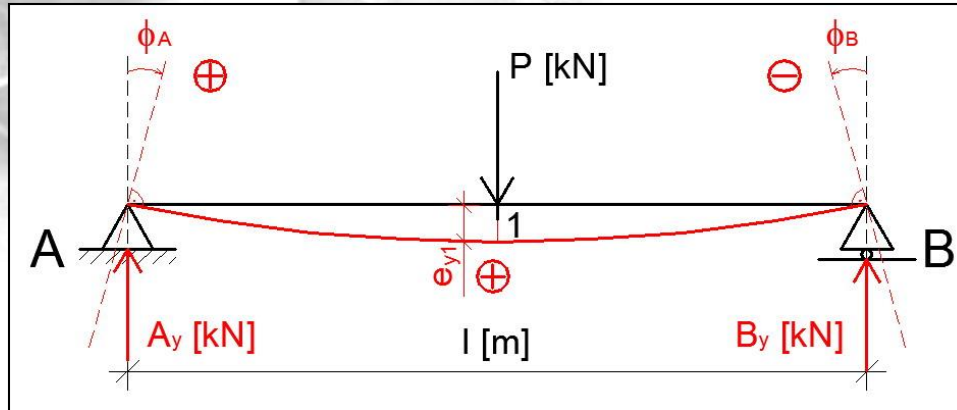


$$Q_1 \cdot e_{y1} = \int_0^l \frac{M_P \cdot M_Q}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_P \cdot M_Q \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (T_i \cdot M_i)$$

$$1 \cdot e_{y1} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8}}_T \cdot \underbrace{\frac{5 \cdot l}{32}}_M \right) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384}$$

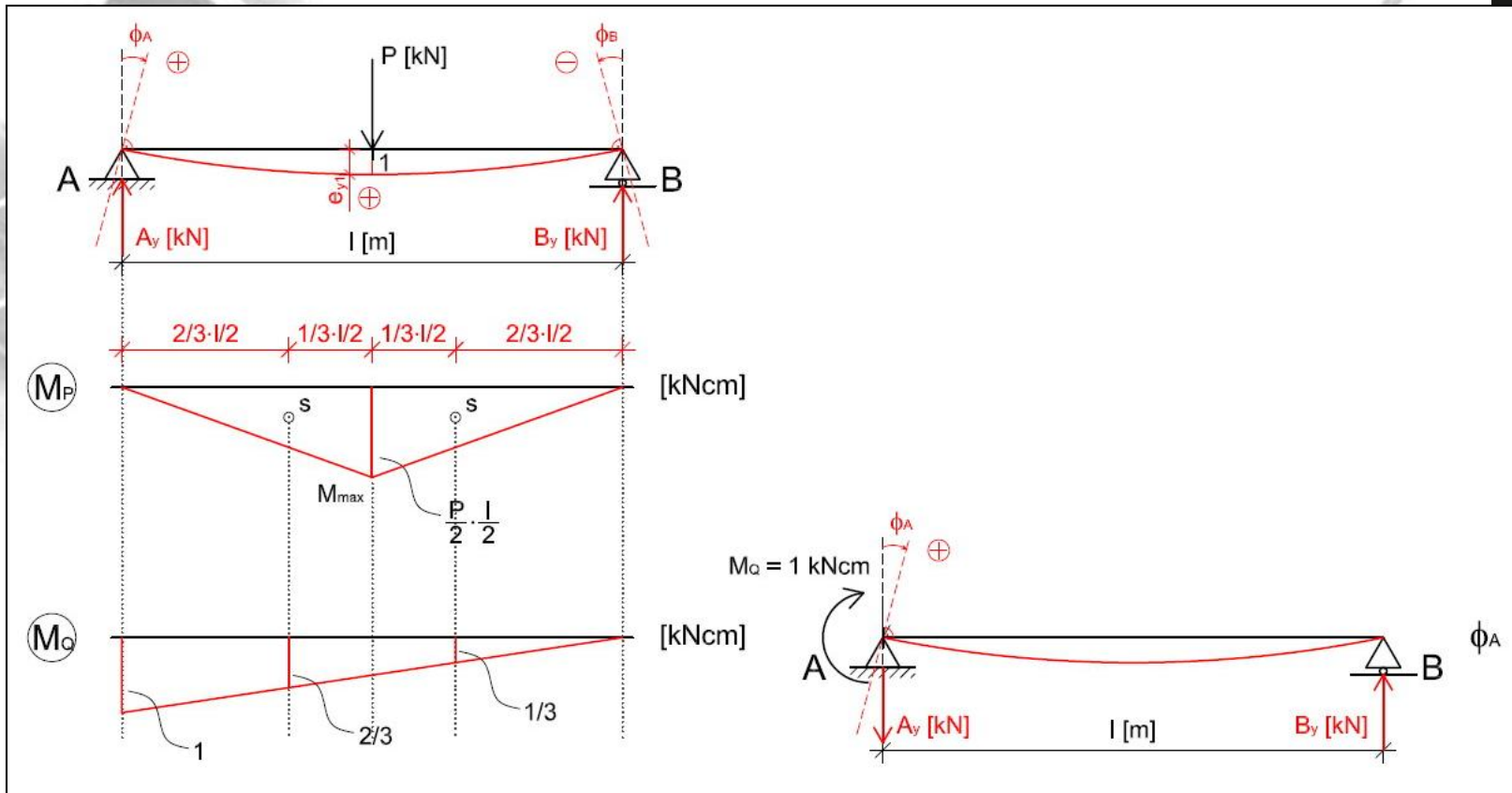
2. mintapélda

Mekkora a kéttámaszú tartó φ_A és φ_B szögelfordulása, valamint mekkora a tartó közepén lévő 1-es keresztmetszet e_y lehajlása?



31. ábra. 2. mintapélda – kéttámaszú tartó alakváltozása

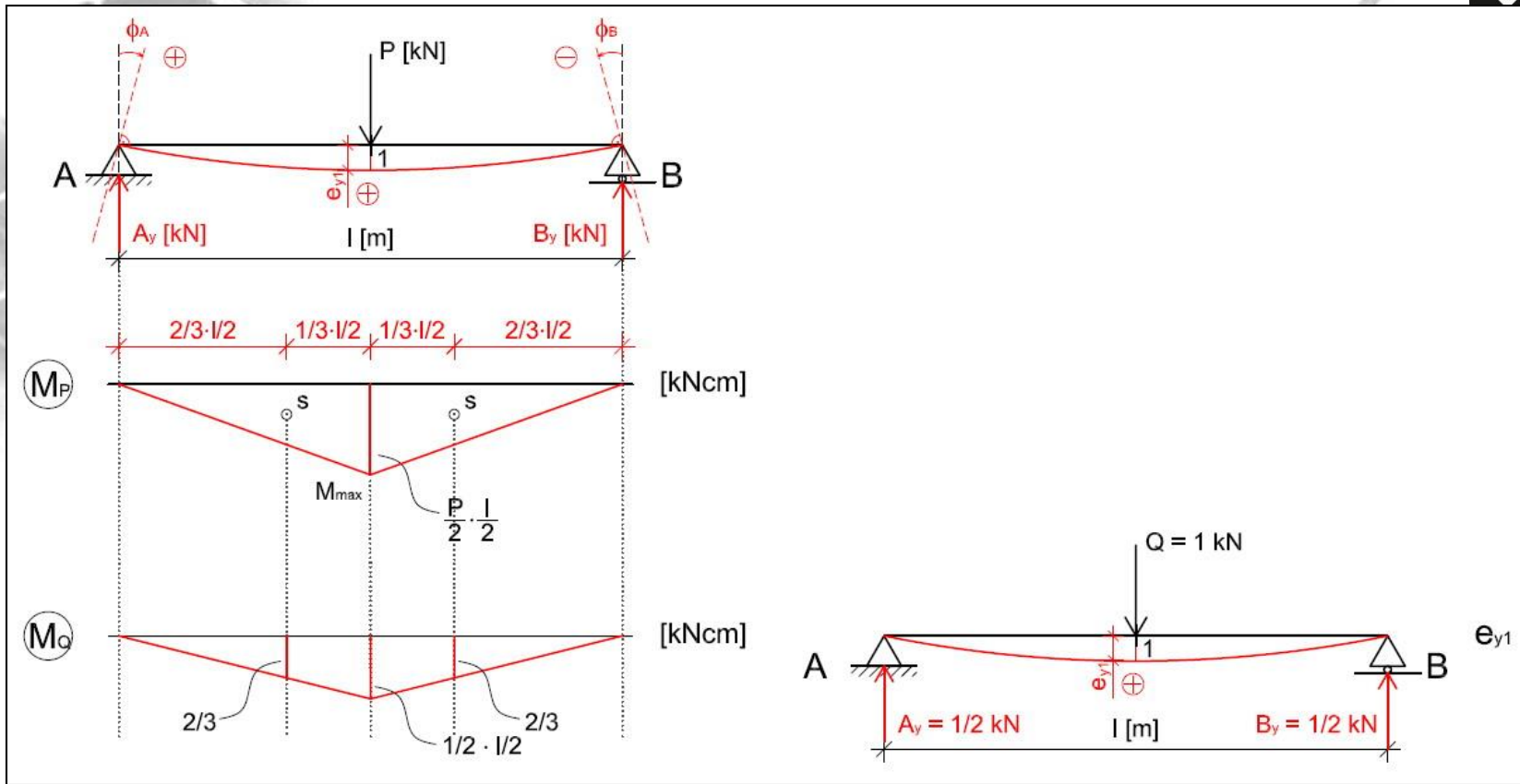
A szimmetrikus terhelés miatt: $|\varphi_A| = |\varphi_B|$



32. ábra. 2. mintapélda – szögelfordulás számítása

$$Q_1 \cdot \varphi_A = \int_0^l \frac{M_P \cdot M_Q}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_P \cdot M_Q \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (T_i \cdot M_i)$$

$$1 \cdot \varphi_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\underbrace{\frac{l}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{T_1} + \underbrace{\frac{l}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}_{M_2} \right) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l^2}{16}$$



33. ábra. 2. mintapélda – szögelfordulás számítása

$$Q_1 \cdot \varphi_A = \int_0^l \frac{M_P \cdot M_Q}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_P \cdot M_Q \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (T_i \cdot M_i)$$

$$1 \cdot \varphi_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{l}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}}_{T_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}}_{M_1} \right) = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$$



Lehajlás a saját munkák tételével számolva:

$$L_K^{PP} = L_B^{PP}$$

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot e_{PP} = \int_0^l \frac{M_P^2}{E \cdot I} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M_P^2 \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (T_i \cdot M_i)$$

$$1 \cdot e_{y1} = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{l}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}}_{T_1} \right) = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{48} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$$



Felhasznált irodalom

OROSZ ÁRPÁD, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER: *Mechanika. Határozatlan szerkezetek. Jegyzet + példatár*, Pécs, 1990

HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER : *Tartók statikája. Hajlított gerendatartók rugalmas alakváltozása.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012