Tartók statikája

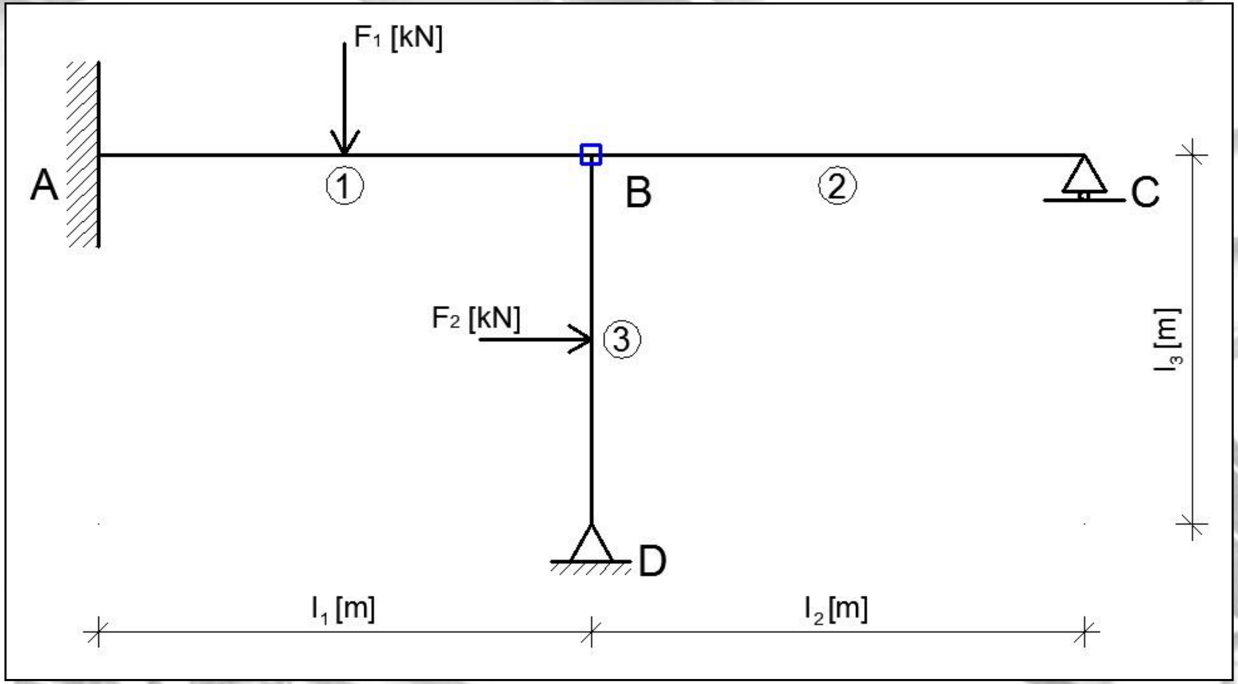
4. előadás

Elmozdulás módszer

Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

1. Statikailag határozatlan tartók megoldása elmozdulásmódszerrel

Az elmozdulásmódszer segítségével a statikailag többszörösen határozatlan tartók kézi számítással viszonylag egyszerű módon egyensúlyozhatók.

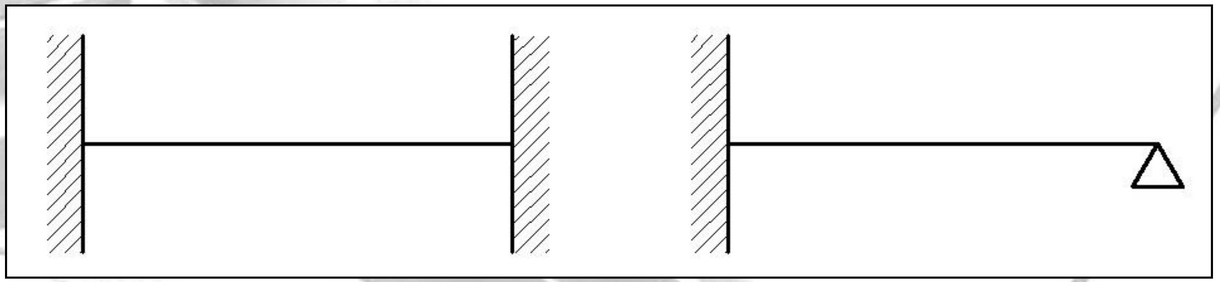


1. ábra. Rúdcsillag

Ismeretlen a „B” csomópont elfordulása.

1.1 A törzstartó felvétele

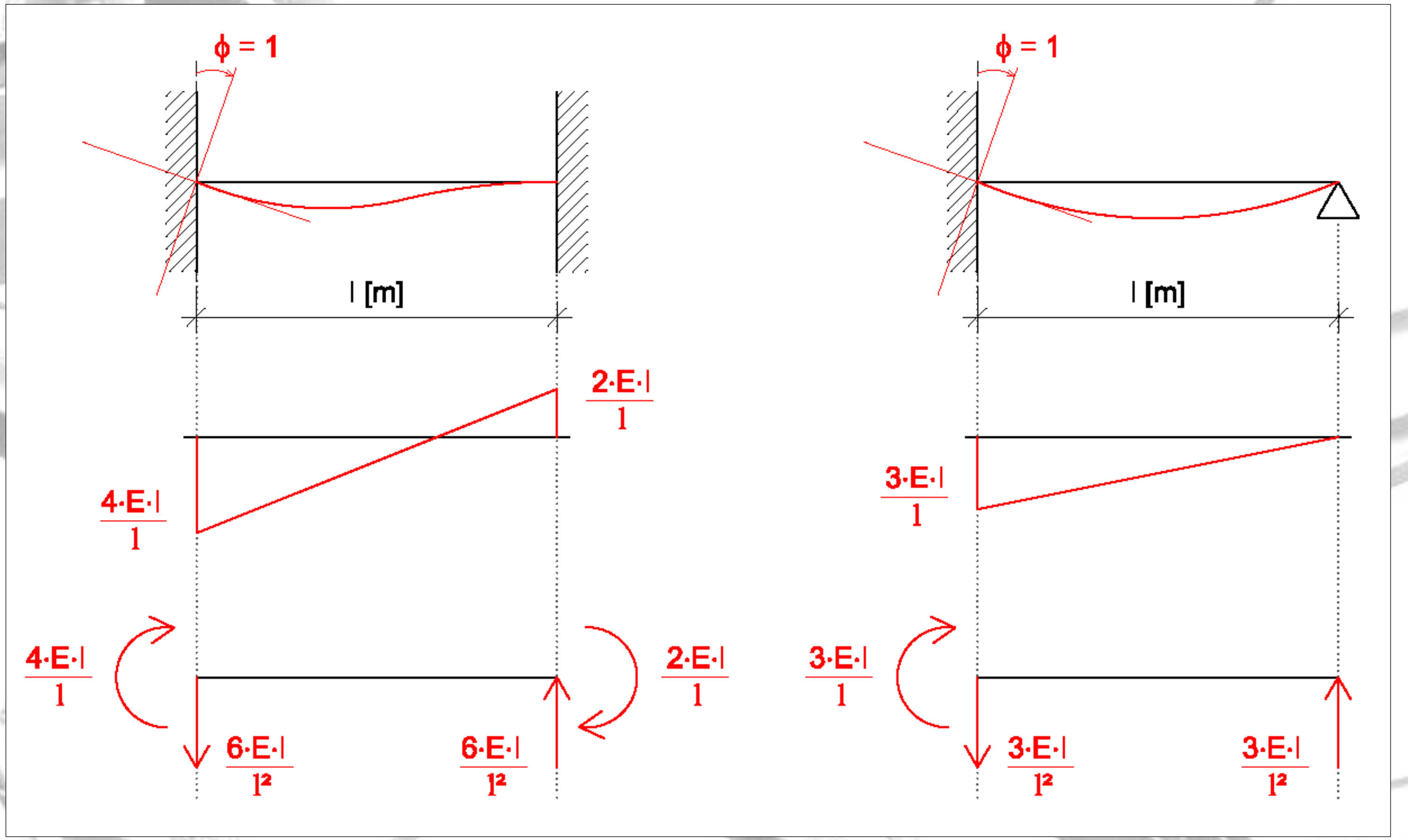
Két féle törzstartót különböztetünk meg:



2. ábra. Törzstartók kialakítása

Az egyik esetben a törzstartó mindkét vége befogott, a másik esetben az egyik vége befogott, míg a másik végén valamilyen elfordulásra képes támasz van, amely lehet fix csukló, görgős vagy csúszós megtámasztás.

A kétféle törzstartón egységnyi elfordulások felvétele:

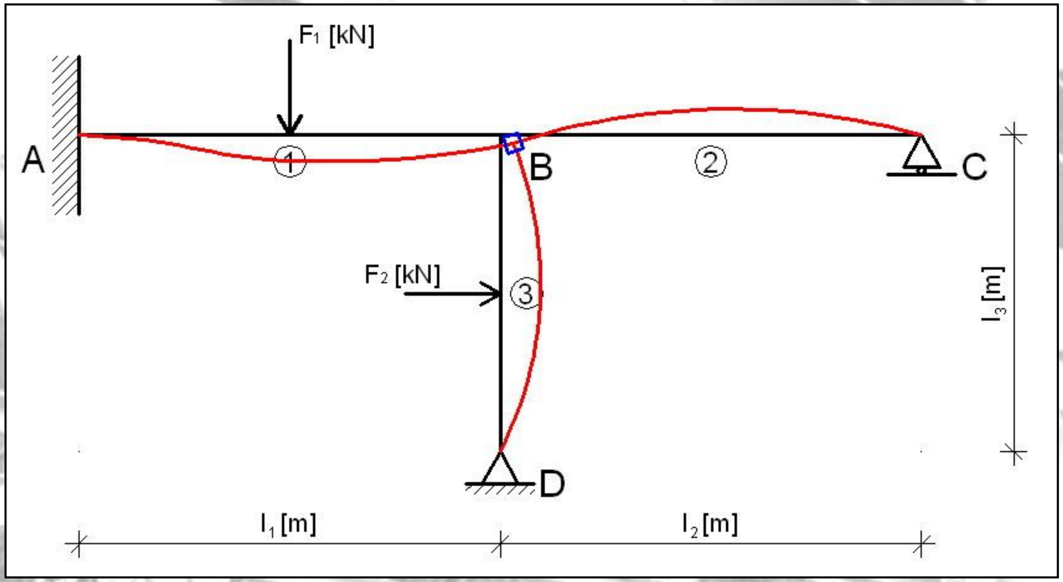


3. ábra. Egységnyi elfordulások felvétele

1.2 A tartó egyensúlyozása általános esetben

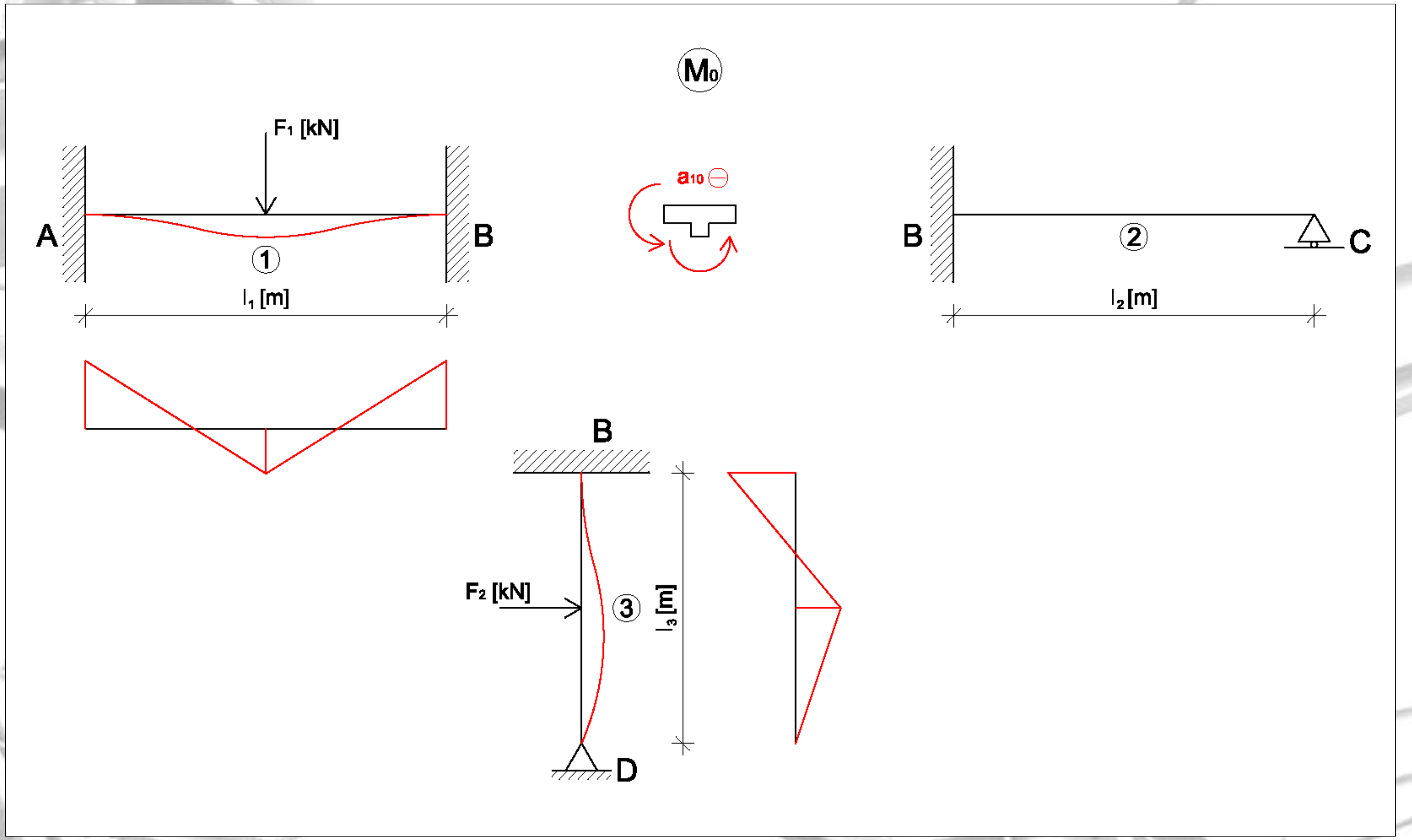
A rúdelemek végpontjait végtelen merevnek tekintjük, amelyek a közös csomópontokon azonos elmozdulást végeznek a teher hatására. Mivel ez a csomóponti elmozdulás a számítás kezdetén ismeretlen, ezért egységnyi elmozdulások feltételezésével határozzuk meg a keretállandókat, azaz az egységnyi elmozdulásokból keletkező igénybevételeket.

Az *1. ábrán* látható rúdcsillag esetén a deformáció úgy jön létre, hogy a „B” csomópont elfordulásakor a rúdelemek meggörbülnek, hajlítónyomatékok ébrednek a szerkezetben.



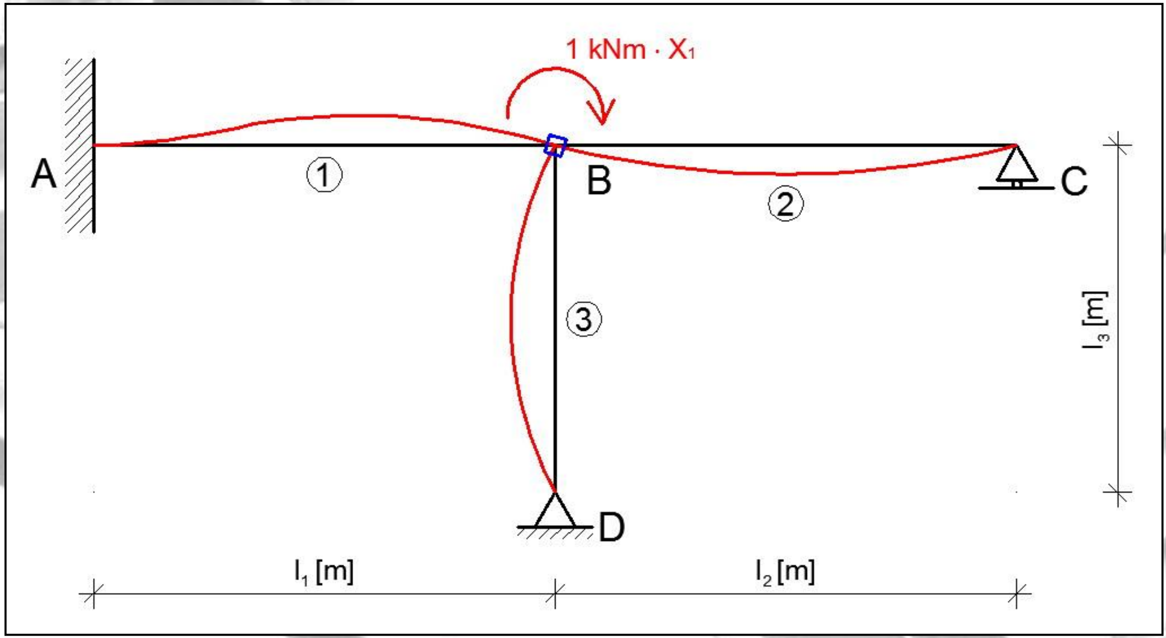
4. ábra. A rúdcsillag deformációi

A törzstartók kialakítása:



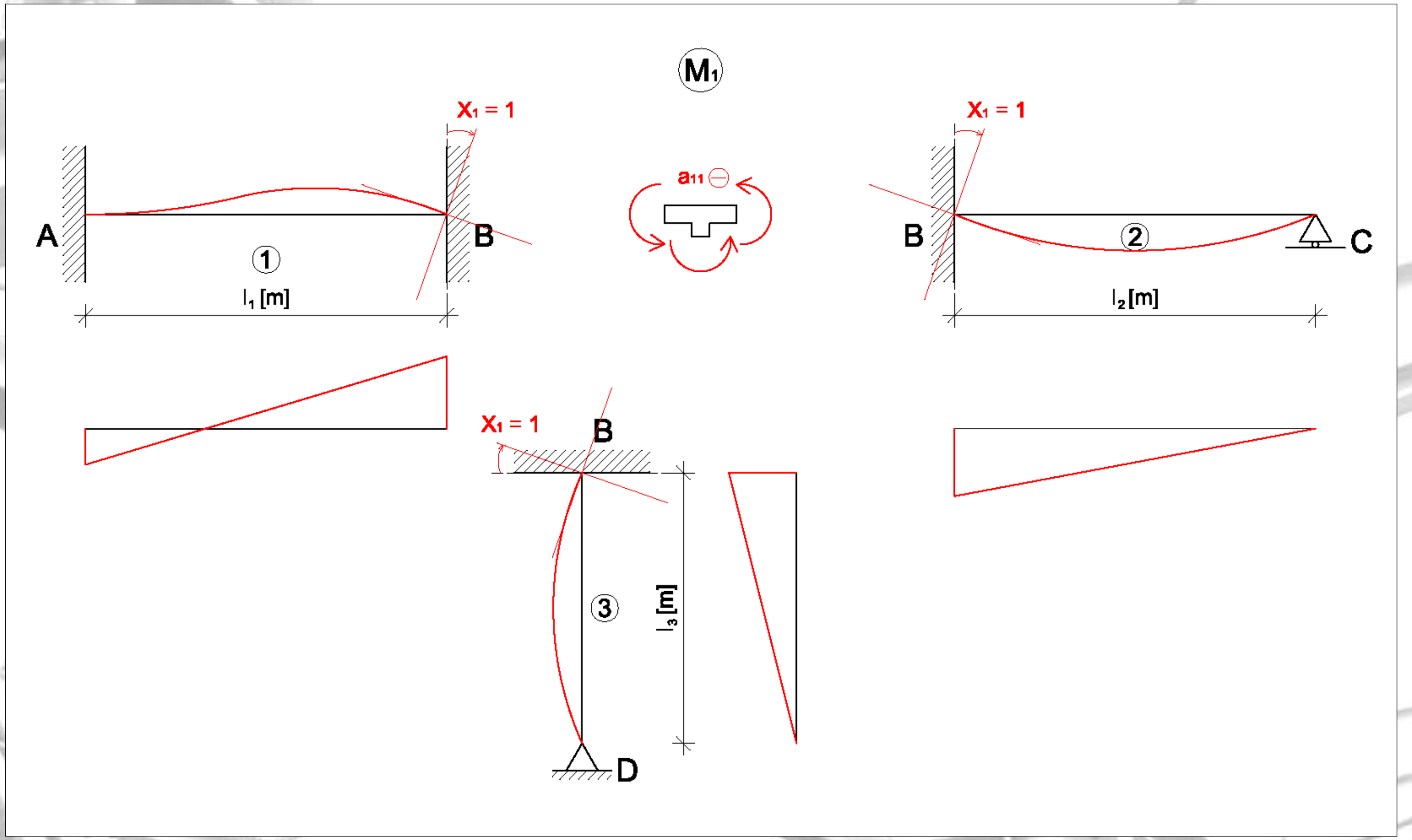
5. ábra. A törzstartók nyomatéka

Egységnyi elfordulás felvétele a tartón:



6. ábra. Egységnyi elfordulás felvétele

Egységnyi elfordulás hatására létrejövő nyomatékok:



7. ábra. Egységnyi elfordulás hatására létrejövő nyomatékok

A mozgásfeltételi egyenlet felírható, melyből ki kell fejezni X_1-et:

$$a_{10} + a_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 \rightarrow M_B$$

X_1 a „B” csomópont elfordulását adja, ennek segítségével, valamint egyensúlyi egyenletek felírásával meghatározhatók a tartó támaszerői és igénybevételi ábrái.

A csomóponti egyensúly általános esetben csak iterációs eljárással biztosítható.

2. „Cross” módszer, a mozgásmódszer iterációs számítási eljárása

A módszer lényege, hogy a csomópontokra ható igénybevételeket (nyomatékokat), a rudak merevségének arányában osztja szét.

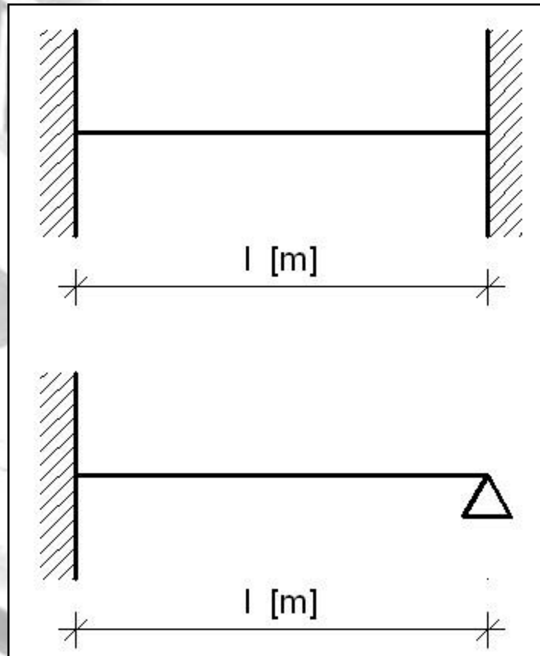
A számítás menete:

1. lépés: a törzstartók kialakítása (a törzstartó lehet mindkét végén befogott, vagy egyik végén befogott, másik végén csuklós kialakítású).

2. lépés: az elfordulási merevségek (rúdmerevségek) kiszámítása **minden törzstartóra**. (Abban az esetben is szükséges számolni elfordulási merevséget a törzstartóra, ha azon nincs teher, hiszen a rúd attól még része a teljes tartónak).

   Az elfordulási merevség jele: *k*

   A csomóponti egyensúlyozás szempontjából nincs jelentősége, hogy mekkora csomóponti elfordulás mellett teljesülnek a statikai feltételek, így az elfordulási merevségek tényleges értéke helyett csak azok arányaira van szükség.



8. ábra. A törzstartó típusai

Mindkét végén befogott törzstartó esetén:

$$k = \frac{I}{l}$$

Egyik végén befogott, másik végén csuklós törzstartó esetén:

$$k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{l}$$

3. lépés: csomóponti összemerevség számítása, az elfordulási merevségek összegzése. Az adott csomópontba kapcsolódó összes elfordulási merevséget összegezni kell.

$$\sum_{i=1}^{n} k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

4. lépés: a nyomatékosztók számítása.

A rúdelemeknek az összmerevségből való részesedését *nyomatékosztónak* nevezzük.

A nyomatékosztó jele: α

$$\alpha_{i1} = \frac{k_1}{\sum k}$$

$$\alpha_{i2} = \frac{k_2}{\sum k}$$

.

$$\alpha_{in} = \frac{k_n}{\sum k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha = 1{,}00$$

Fontos, hogy az adott csomópontban a nyomatékosztók összege kereken (századra pontosan) egy legyen! Ha ez nem teljesül, akkor a további számítás pontatlan lesz. A nyomatékosztókat célszerű legalább századra pontosan kiírni. (Több belső csomópontú tartó esetén ezredre pontosan!)

5. lépés: kezdeti befogási nyomatékok számítása

A kezdeti befogási nyomaték jele: M^0

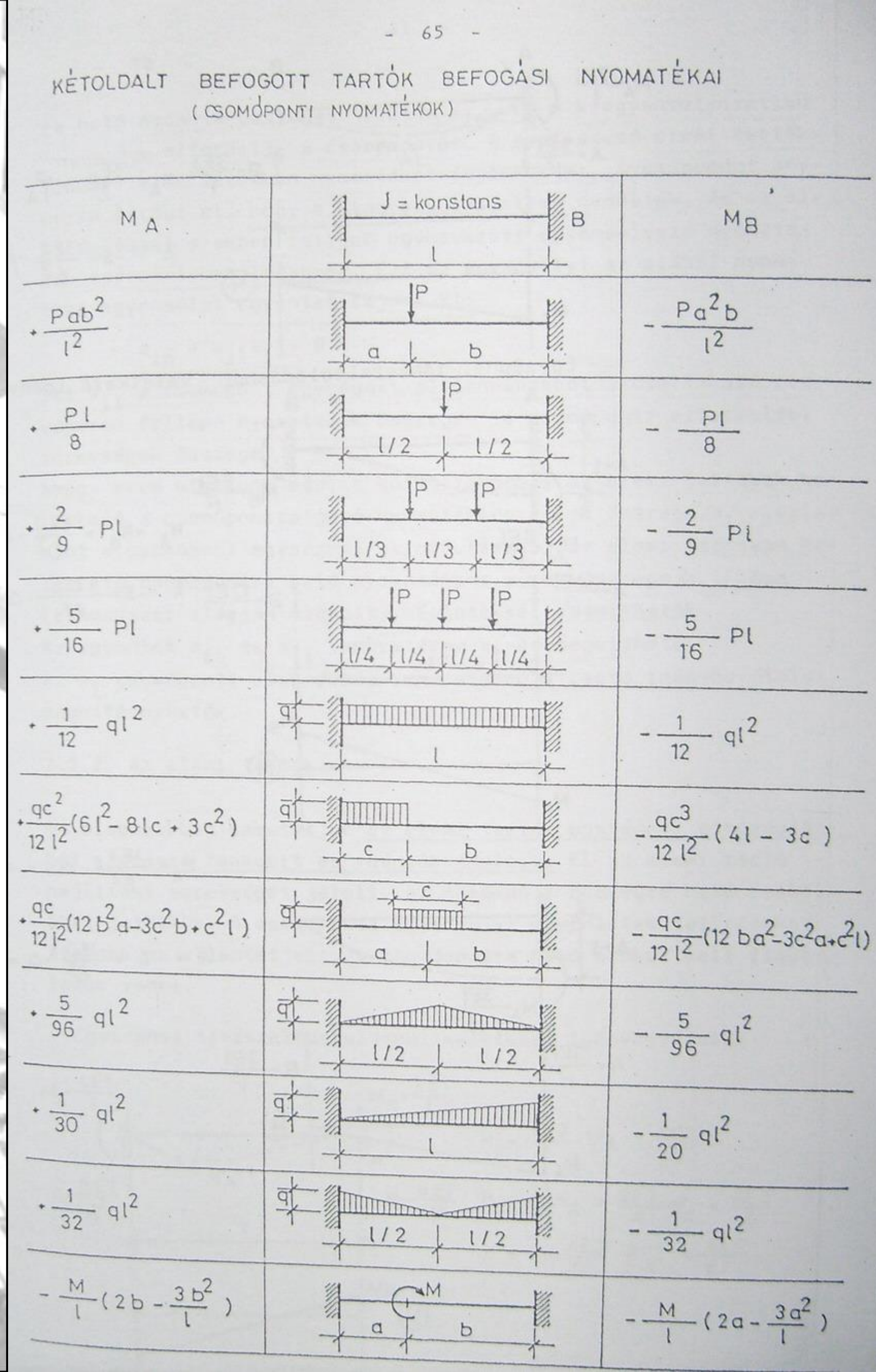
Az elemi tartók (törzstartók) kinematikailag határozottak, de statikailag határozatlanok, ezért a kezdeti befogási nyomatékok kiszámításához segédlet áll rendelkezésre (*9-10. ábra.*).

6. lépés: nyomatékosztás, Cross-táblázat

A nyomatékosztást táblázat segítségével, iterációs eljárással kell elvégezni. A táblázat utolsó sora megadja a végleges csomóponti nyomatékokat. Az egy csomópontban lévő végleges csomóponti nyomatékok összegének nullának kell lennie. Ha ez teljesül, akkor mondható, hogy a csomópont egyensúlyban van, nem fordul el sem pozitív, sem negatív irányba.

7. lépés: egyensúlyozás, támaszerők és végleges befogási nyomatékok számítása.

8. lépés: belső igénybevételi ábrák készítése



- 65 -

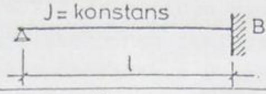
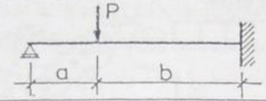
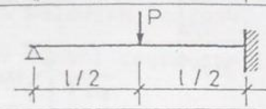
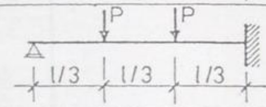
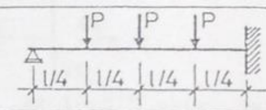
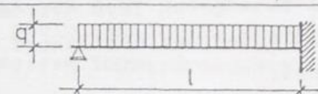
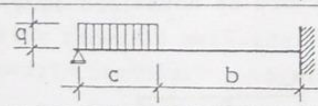
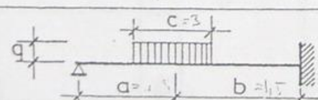
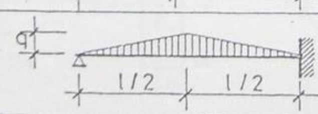
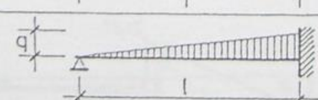
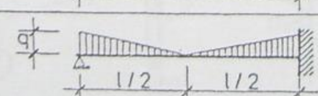
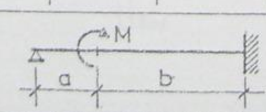
KÉTOLDALT BEFOGOTT TARTÓK BEFOGÁSI NYOMATÉKAI

(CSOMÓPONTI NYOMATÉKOK)

M_A	J = konstans; B; l	M_B
$+\frac{Pab^2}{l^2}$	P; a, b	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$
$+\frac{Pl}{8}$	P; l/2, l/2	$-\frac{Pl}{8}$
$+\frac{2}{9}Pl$	P, P; l/3, l/3, l/3	$-\frac{2}{9}Pl$
$+\frac{5}{16}Pl$	P, P, P; l/4, l/4, l/4, l/4	$-\frac{5}{16}Pl$
$+\frac{1}{12}ql^2$	q; l	$-\frac{1}{12}ql^2$
$+\frac{qc^2}{12l^2}(6l^2-8lc+3c^2)$	q; c, b	$-\frac{qc^3}{12l^2}(4l-3c)$
$+\frac{qc}{12l^2}(12b^2a-3c^2b+c^2l)$	c; q; a, b	$-\frac{qc}{12l^2}(12ba^2-3c^2a+c^2l)$
$+\frac{5}{96}ql^2$	q; l/2, l/2	$-\frac{5}{96}ql^2$
$+\frac{1}{30}ql^2$	q; l	$-\frac{1}{20}ql^2$
$+\frac{1}{32}ql^2$	q; l/2, l/2	$-\frac{1}{32}ql^2$
$-\frac{M}{l}\left(2b-\frac{3b^2}{l}\right)$	M; a, b	$-\frac{M}{l}\left(2a-\frac{3a^2}{l}\right)$

9. ábra. Kétoldalt befogott tartók befogási nyomatékai

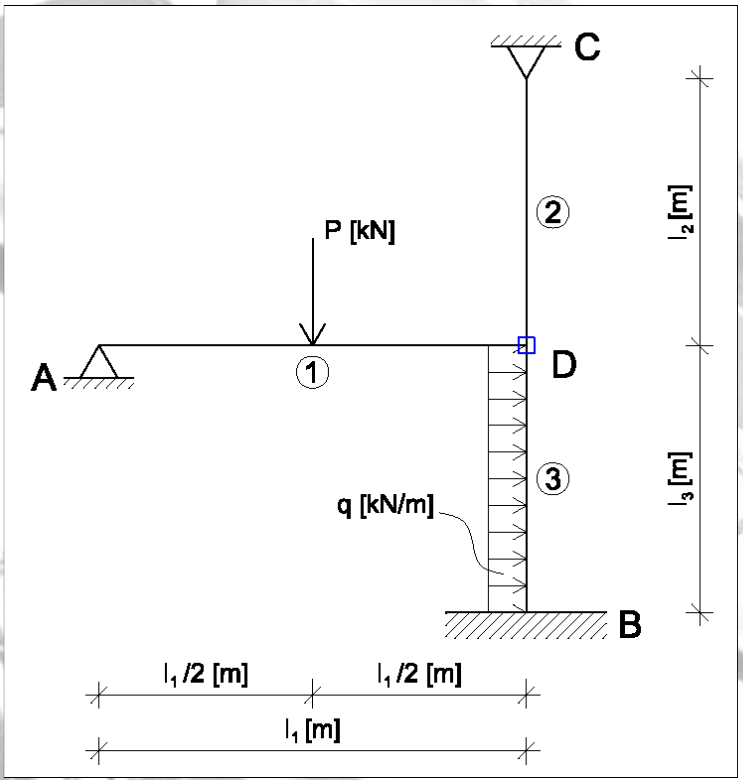
EGYOLDALT BEFOGOTT TARTÓK BEFOGÁSI NYOMATÉKA

M_A	J= konstans 	M_B
0		$-\frac{Pab}{2l^2}(l+a)$
0		$-\frac{3}{16}Pl$
0		$-\frac{1}{3}Pl$
0		$-\frac{15}{32}Pl$
0		$-\frac{1}{8}ql^2$
0		$-\frac{1}{8}\frac{qc^2}{l^2}(2l^2-c^2)$
0		$-\frac{1}{8}\frac{qac}{l^2}\left[4b(l+a)-c^2\right]$
0		$-\frac{5}{64}ql^2$
0		$-\frac{1}{15}ql^2$
0		$-\frac{3}{64}ql^2$
0		$-\frac{M}{2l^2}(l^2-3a^2)$

10. ábra. Egyoldalt befogott tartók befogási nyomatékai

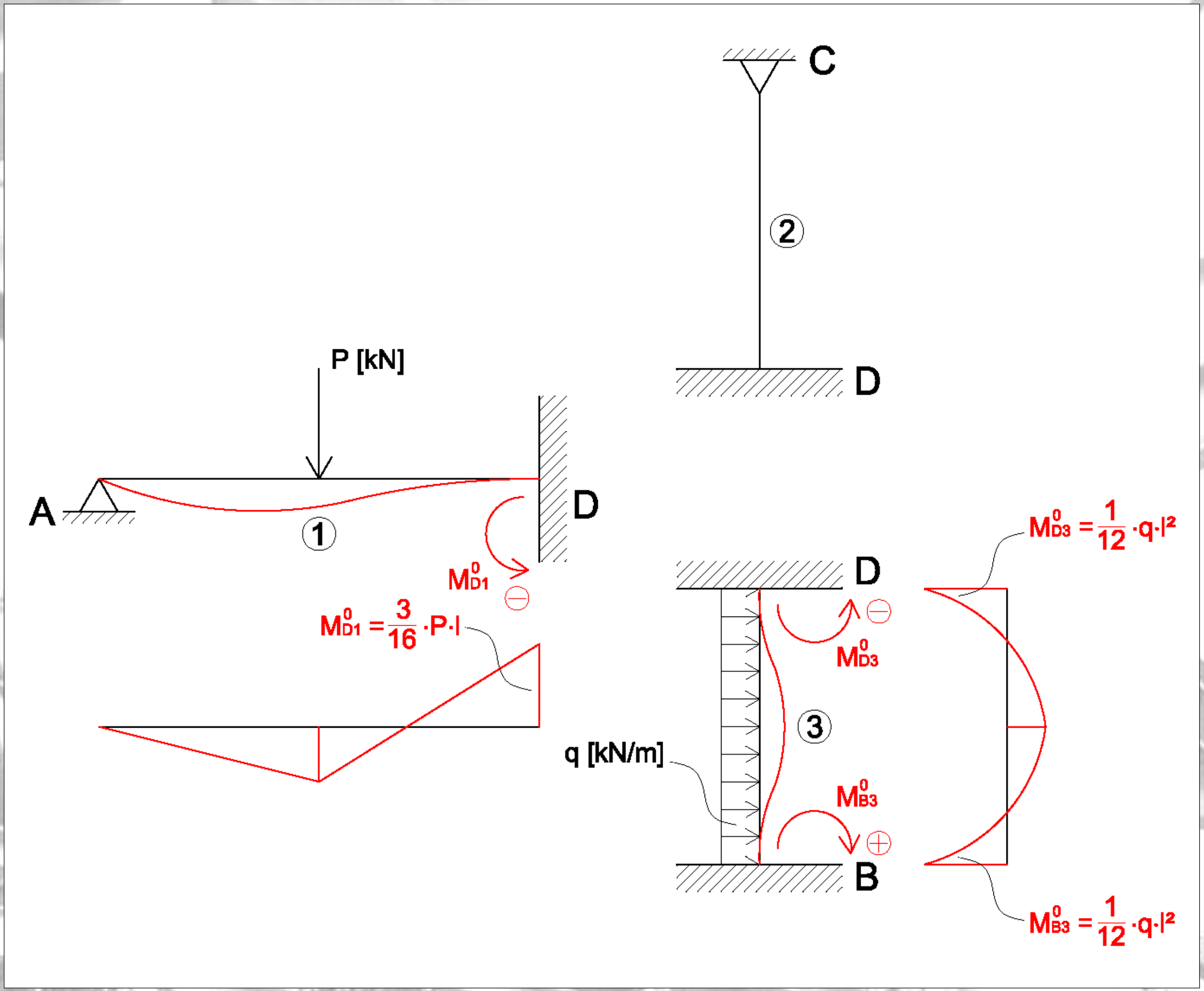
1. mintapélda

Adott egy statikailag határozatlan rúdcsillag. A tartót jellemzi a rugalmassági modulusa és az inerciája (E, I). A tartó változó keresztmetszetű.



11. ábra. 1. mintapélda – rúdcsillag

A tartó törzstartóra bontása és az elfordulási merevségek (k) meghatározása (ezen az ábrán lehet jelölni a kezdeti befogási nyomatékokat is, melyeknek számítása lejjebb megtalálható):



12. ábra. 1. mintapélda – elemi tartókra való bontás

Az elfordulási merevségek (k) számítása:

$$k_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{l_1}$$

$$k_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{l_2}$$

$$k_3 = \frac{I_3}{l_3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} k_D = k_1 + k_2 + k_3$$

A nyomatékosztók (α) számítása:

$$\alpha_{D1} = \frac{k_1}{\sum k_D}$$

$$\alpha_{D2} = \frac{k_2}{\sum k_D}$$

$$\alpha_{D3} = \frac{k_3}{\sum k_D}$$

$$\alpha_D = \alpha_{D1} + \alpha_{D2} + \alpha_{D3} = 1{,}00$$

A kezdeti befogási nyomatékok (M^0) számítása a segédlet segítségével:

Az előjelek az adott csomópontra vonatkozó nyomatékból adódnak, melynek irányát az alakváltozás mutatja úgy, hogy ugyanazt az alakváltozást milyen irányú helyettesítő csomóponti nyomaték hozná létre. Az előjel a nyomatékoknál szokásos előjelezés szerinti (az óramutató járásával megegyező irány a pozitív, míg az ellenkező irány a negatív).

Célszerű az előjeleket elvonatkoztatni a segédlettől, hiszen abban csak egy-egy eset szerepel, helyette az alakváltozás alakjából kikövetkeztetni.

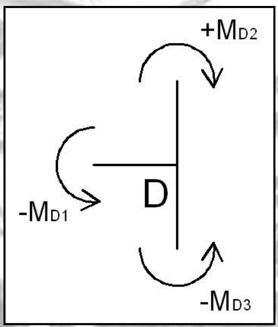
$$M^0_{D1} = -\frac{3}{16} \cdot P \cdot l$$

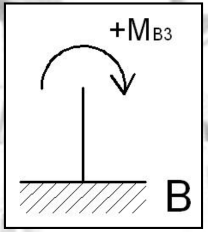
$$M^0_{D3} = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$$

$$M^0_{B3} = +\frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$$

Nyomatékosztás táblázat segítségével:

D			B	csomópontok betűjele
1	2	3	3	rudak száma
α_{D1}	α_{D2}	α_{D3}		nyomatékosztók
$-M^{0}_{D1}$		$-M^{0}_{D3}$	$+M^{0}_{B3}$	kezdeti befogási nyomatékok
$-1\cdot\alpha_{D1}\cdot\sum M^{0}_{Di}$	$-1\cdot\alpha_{D2}\cdot\sum M^{0}_{Di}$	$-1\cdot\alpha_{D3}\cdot\sum M^{0}_{Di}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(-1\cdot\alpha_{D3}\cdot\sum M^{0}_{Di}\right)$	nyomatékosztás
$-M_{D1}$	$+M_{D2}$	$-M_{D3}$	$+M_{B3}$	végleges csp-i nyomatékok



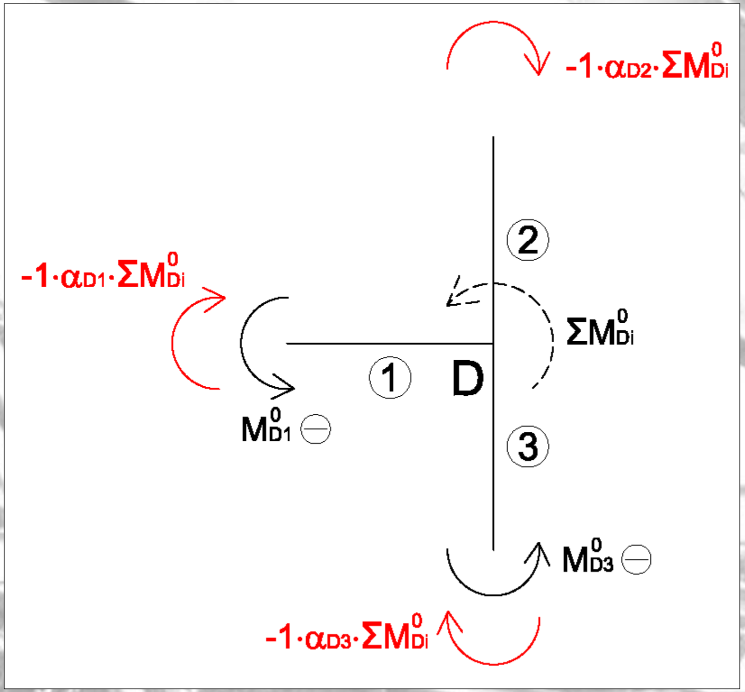


13-14. ábra. 1. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai

A nyomatékosztás a következő módon történik:

Az adott csomópontban (jelenleg *„D”*) lévő összes kezdeti befogási nyomatékot előjelhelyesen összegezni kell, majd a kapott értéket szorozzuk az *α* tényezőkkel, és még szorozzuk mínusz eggyel (azért kell mínusz eggyel is szorozni, mert egyensúlyozó nyomatékokat számolunk), majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő betűjelű és számú oszlopba kell írni.

Egyensúlyozó nyomatékot az a rúd is kap, amelyiken eredetileg nem volt teher, hiszen az adott rúd is része a teljes tartónak.



$$\sum M^0_{Di} = -M^0_{D1} - M^0_{D3}$$

15. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása

Az egyensúlyozó csomóponti nyomatékok kiszámítása után a következő lépés a *nyomaték átvitel*. Ezt a táblázat fejlécében lévő nyíl irányával kell jelezni.

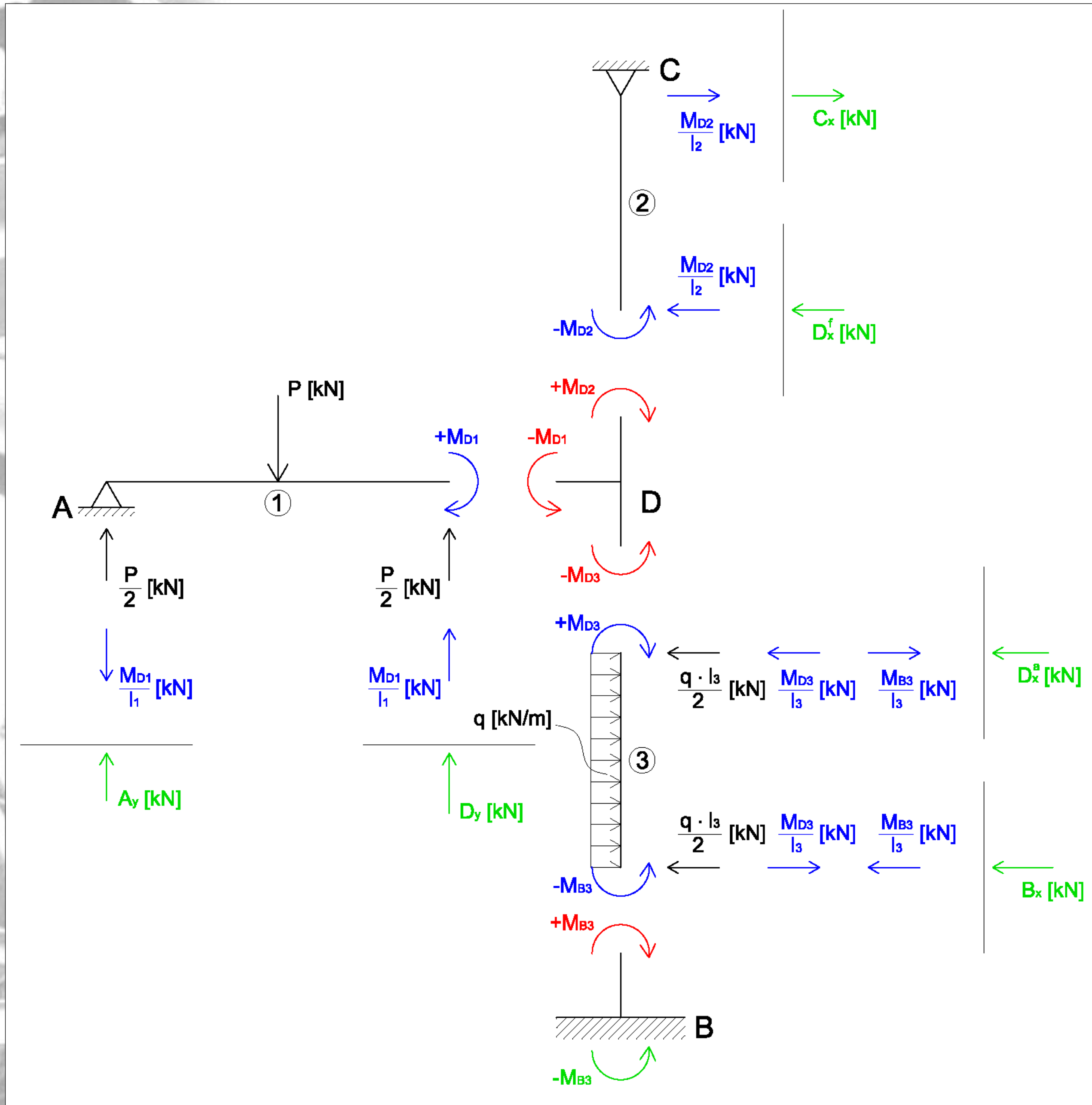
A nyomatékátvitel három féle lehet:

- a belső csomópontról a külső befogás irányába,
- a konzolról a belső csomópont irányába,
- két belső csomópont között oda-vissza.

A nyomatékátvitel mindig az egyensúlyozó nyomaték felének átvitelét jelenti, az előjel ugyanolyan marad, mint amilyen az egyensúlyozó nyomaték előjele volt.

A nyomatékosztás utolsó lépése az adott oszlopban lévő kezdeti befogási nyomatékok és az egyensúlyozó nyomatékok előjelhelyes összegzése. Az így kapott összeg kerül a táblázat legalsó sorába, ezek lesznek a *végleges csomóponti nyomatékok*. Ellenőrzés: az egy csomópontban lévő végleges csomóponti nyomatékok összegének nullának kell lennie.

A tartó egyensúlyozása (minden csomópontot és minden rudat is ki kell egyensúlyozni) (*16. ábra*):



16. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozás

Az egyensúlyozáskor kapott eredmények közül a D_y, a D_x^a és a D_x^f nem végeredmény, hiszen a „*D*” csomópont nem támasz, hanem egy belső csomópont, melyben támaszerők nem keletkezhetnek.

Szükséges ezen „csomóponti erőket” áthelyezni azon támaszokhoz, amelyek képesek felvenni őket támaszerőként. Ezt az áthelyezést úgy kell végrehajtani, hogy a hatásuk ne változzon meg, azaz ha a tartó bármelyik pontjára felírunk egy nyomatéki egyenletet, annak az eredménye továbbra is zérus legyen. Ebből következően az áthelyezést úgy kell végrehajtani, hogy az erőket a hatásvonalukon mozgatjuk, tehát:

$$\mathrm{D_x} = \mathrm{D_x^a} + \mathrm{D_x^f} \rightarrow \mathrm{A_x}$$

$$\mathrm{D_y} \rightarrow \mathrm{B_y} \text{ és } \mathrm{C_y}$$

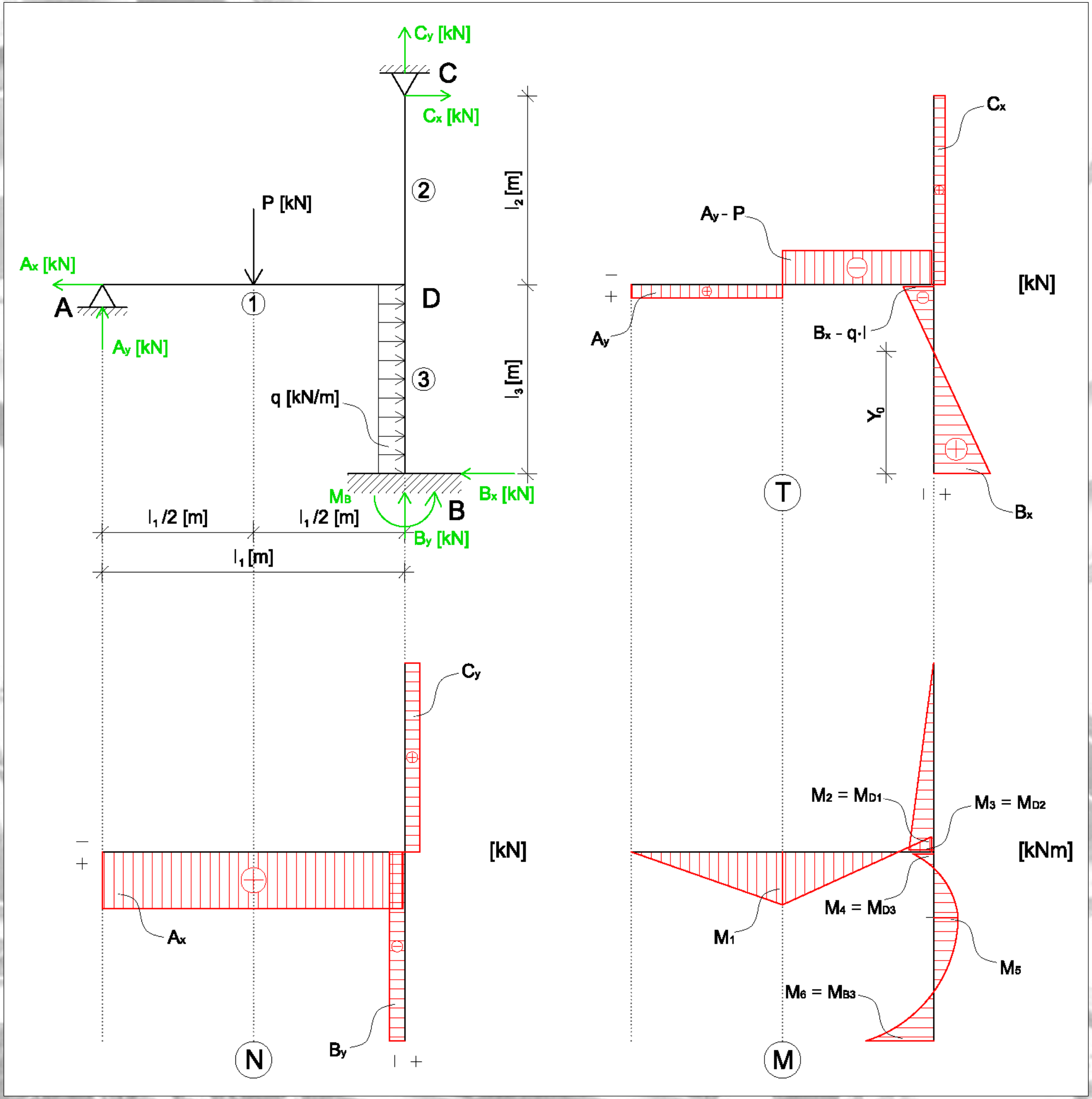
A D_x^a és a D_x^f összegzéséből D_x-et kapunk, mely áthelyezhető az „*A*” támaszhoz, hiszen az „*A*” támaszban keletkezhet „*X*” irányú támaszerő.

A D_y két helyre is áthelyezhető, belőle keletkezik a B_y és a C_y támaszerő. Ezek nagysága a *B*-*D* és a *C*-*D* csomópontok közötti távolságokkal (l_2, l_3) fordítottan arányos.

Abban az esetben, ha a „*C*” támasz elfordítva görgős lett volna (el tudna mozdulni függőlegesen), akkor a D_y-t teljes egészében a „*B*” befogás vette volna fel, mint B_y támaszerő.

<u>Megjegyzés:</u> abban az esetben, ha az „*A*” támasz ugyanilyen állásban görgős lett volna, akkor a D_x-et nem tudta volna felvenni, hiszen a görgős támasz elmozdulna balra vízszintesen. Ebben az esetben ez a tartó egy un. *kilengő keret* lenne, mert a vízszintes gerenda esetén a vízszintes irányú kimozdulásának semmilyen megtámasztás sem állna ellen. A *kilengő kerettel* későbbi előadás alkalmával fogunk foglalkozni.

Belső igénybevételi ábrák:



17. ábra. 1. mintapélda – belső igénybevételi ábrák

Rúdcsillag:

Felhasznált irodalom

CSÉBFALVI ANIKÓ: *Tartók statiája*. Elektronikus jegyzet, Pécs, 2007

HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER : *Tartók statikája. Statikailag határozatlan síkbeli tartók számítása „Elmozdulás módszerrel”*. Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012

OROSZ ÁRPÁD, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER: *Mechanika. Határozatlan szerkezetek. Jegyzet + példatár*, Pécs, 1990