

Tartók statikája

5. előadás

Folytatólagos többtámaszú tartók és süllyedő alátámasztású folytatólagos többtámaszú tartók igénybevételeinek meghatározása „Cross” módszerrel

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

1. Folytatólagos többtámaszú tartók igénybevételeinek meghatározása „Cross” módszerrel

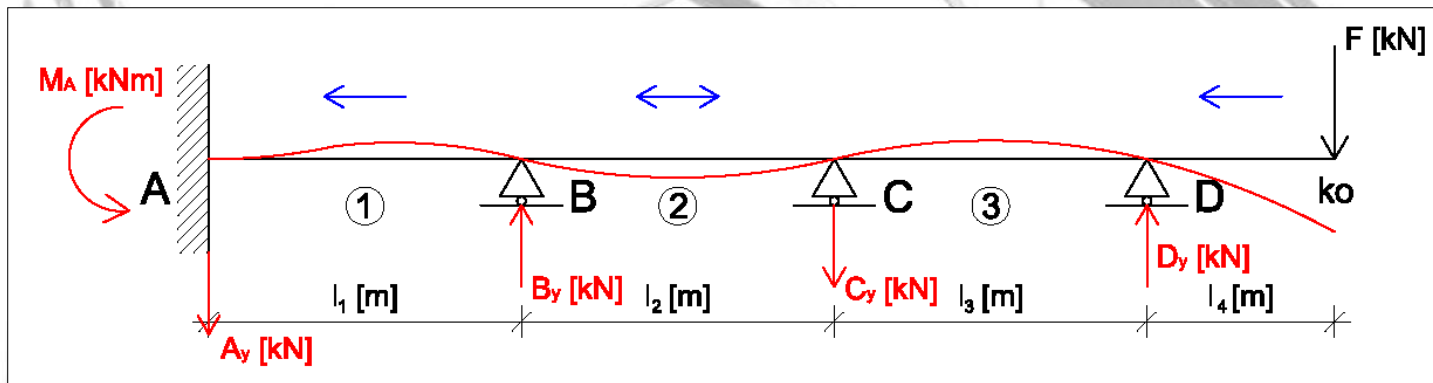
A nyomatékátvitelt a táblázat fejlécében lévő nyíl irányával kell jelezni.

Íránya három féle lehet:

- a belső csomóponttól a külső befogás irányába,
- a konzolról a belső csomópont irányába,
- két belső csomópont között oda-vissza.

A nyomatékátvitel mindig az egyensúlyozó nyomaték felének átvitelét jelenti, az előjel ugyanolyan marad, mint amilyen az egyensúlyozó nyomaték előjele volt.

Az 1. ábrán lévő egyszerű példa jól szemlélteti a nyomatékátvitel lehetséges irányait.



1. ábra. A nyomatékátvitel irányai



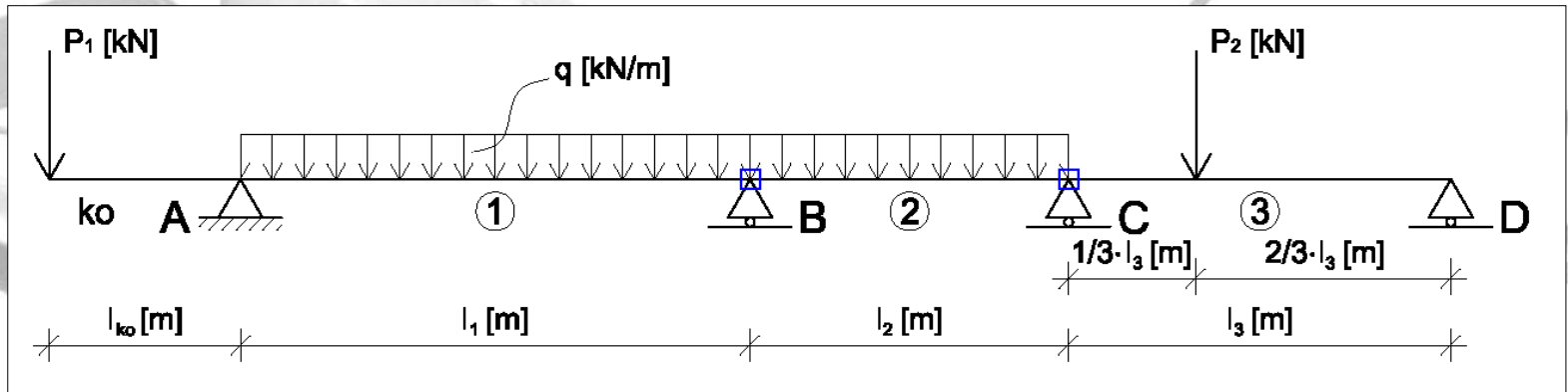
Abban az esetben, ha csak a konzolon van teher, akkor is keletkezik a tartó másik végén befogási nyomaték, valamint minden támasznál keletkezik függőleges támaszerő. Ez úgy lehetséges, hogy az „ F ” erőből keletkező konzolvégi alakváltozás a tartó anyagának tulajdonságai miatt továbbadódik a következő tartórészre, majd onnan újból tovább, egészen a tartó másik végéig. A számolásban ezt a nyomatékátvitellel vesszük figyelembe.

A két vagy több belső csomóponttal vagy támasszal rendelkező tartók esetében a nyomatékosztás bonyolultabb, mint az egy belső csomóponttal vagy támasszal rendelkező tartóknál. Ennek az az oka, hogy az egyensúlyozás után történő nyomatékátvitel miatt ismét felborul az egyensúly. A két belső csomópont vagy támasz között oda-vissza adódik a nyomaték. Ezt a nyomatékosztást addig kell folytatni, míg kellő pontosság mellett a kiegyensúlyozatlan nyomatékok elfogynak.

Gyakorlatilag 0,01-ig kell osztani a nyomatékokat. A valóságban nulláig kellene, de természetesen a nullát sohasem éri el, viszont mivel két tizedesjegyre kell kiírni az eredményeket, ezért ennél kisebb adatok már nem mutatnak látható különbséget.

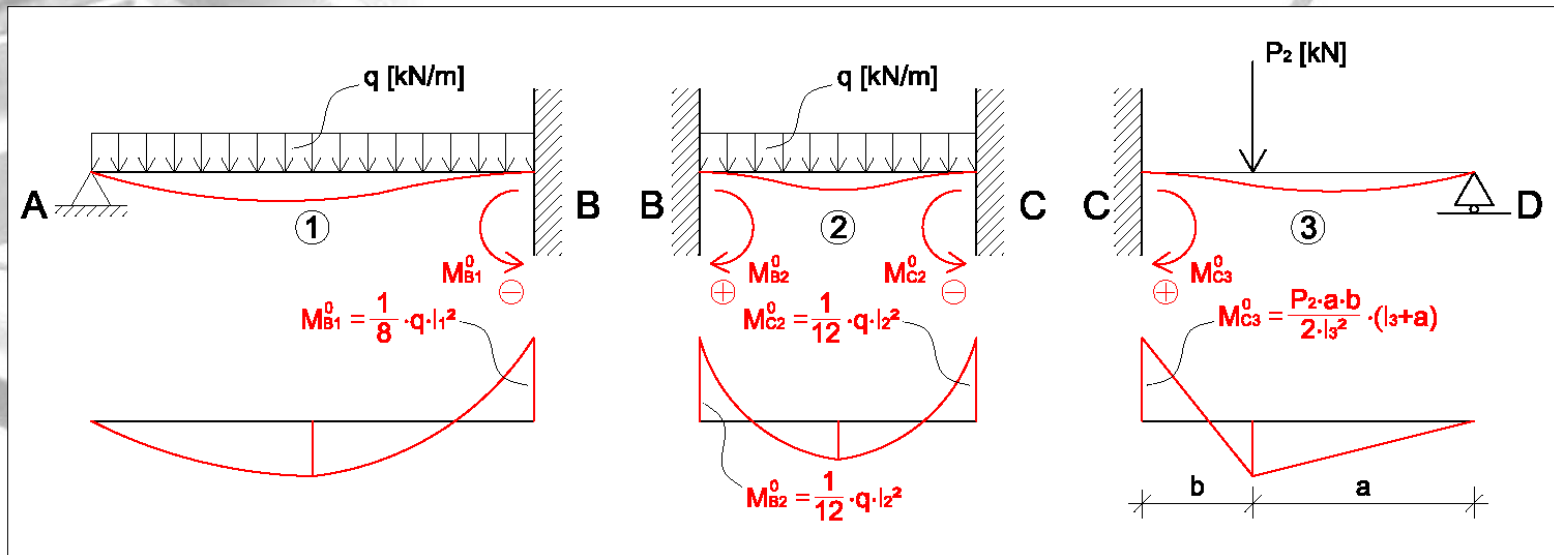
1. mintapélda

Adott egy statikailag határozatlan folytatólagos többtámaszú tartó. A tartót jellemzi a rugalmassági modulusa és az inerciája (E, I). A tartó változó keresztmetszetű.



2. ábra. 1. mintapélda – folytatólagos többtámaszú tartó

A tartó elemi törzstartókra való bontása és a kezdeti befogási nyomatékok jelölése:



3. ábra. 1. mintapélda – elemi tartókra való bontás

Elfordulási merevségek (k) számítása:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{l_1} \\ k_2 &= \frac{I_2}{l_2} \\ k_3 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{I_3}{l_3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Sigma k_B &= k_1 + k_2 \\ \Sigma k_C &= k_2 + k_3 \end{aligned}$$

Nyomatékosztók (α) számítása:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum k_B}$$

$$\alpha_{C2} = \frac{k_2}{\sum k_C}$$

$$\alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum k_B}$$

$$\alpha_{C3} = \frac{k_3}{\sum k_C}$$

$$\alpha_{Bi} = \alpha_{B1} + \alpha_{B2} = 1,00$$

$$\alpha_{Ci} = \alpha_{C2} + \alpha_{C3} = 1,00$$

Kezdeti befogási nyomatékok (M^0) számítása:

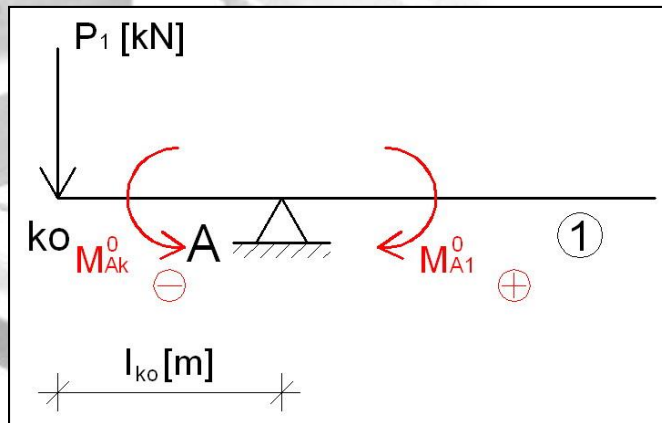
$$M_{B1}^0 = -\frac{1}{8} \cdot q \cdot l_1^2$$

$$M_{B2}^0 = +\frac{1}{12} \cdot q \cdot l_2^2$$

$$M_{C2}^0 = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot l_2^2$$

$$M_{C3}^0 = +\frac{P_2 \cdot a \cdot b}{2 \cdot l_3^2} \cdot (l_3 + a) = +\frac{P_2 \cdot (2/3 \cdot l_3) \cdot (1/3 \cdot l_3)}{2 \cdot l_3^2} \cdot (l_3 + 2/3 \cdot l_3)$$

A konzolon lévő teherből is kell számolni kezdeti nyomatékot, ez tulajdonképpen a konzolon lévő teher hatásának helyettesítése nyomatékkal:



4. ábra. 1. mintapélda – a konzolon lévő teher helyettesítése nyomatékkal

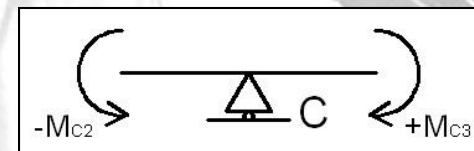
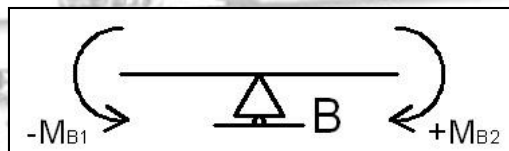
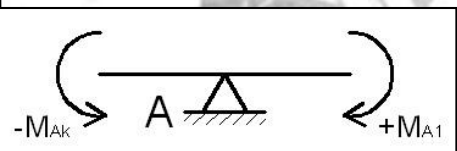
$$M_{Ak}^0 = -P_1 \cdot l_{ko}$$

$$M_{A1}^0 = +P_1 \cdot l_{ko}$$

Nyomatékosztás (Cross táblázat):



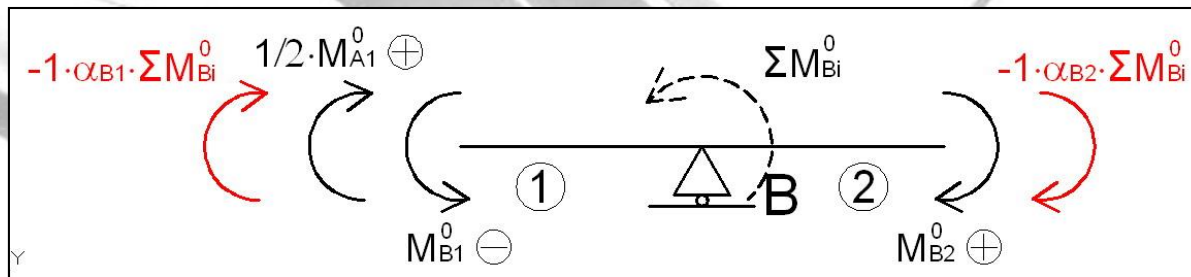
A		B		C	
k	1 →	1	2 ↔	2	3
		α_{B1}	α_{B2}	α_{C2}	α_{C3}
$-M_{Ak}^0$	$+M_{A1}^0$ →	$+1/2 \cdot M_{A1}^0$			
		$-M_{B1}^0$	$+M_{B2}^0$	$-M_{C2}^0$	$+M_{C3}^0$
		$-1 \cdot \alpha_{B1} \cdot \sum M_{Bi}^0$	$-1 \cdot \alpha_{B2} \cdot \sum M_{Bi}^0$	$\Rightarrow 1/2 \cdot \alpha_{B2} \cdot \sum M_{Bi}^0$	
			$-1/2 \cdot \alpha_{C2} \cdot \sum M_{Ci}^0$	$\leftarrow -1 \cdot \alpha_{C2} \cdot \sum M_{Ci}^0$	$-1 \cdot \alpha_{C3} \cdot \sum M_{Ci}^0$
		<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
			<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
		↓	↓	↓	↓
$-M_{Ak}$	$+M_{A1}$	$-M_{B1}$	$+M_{B2}$	$-M_{C2}$	$+M_{C3}$



5-7. ábra. 1. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai

A nyomatékosztás a következő módon történik:

A konzolon lévő teher egyensúlyozó nyomatékának fele átadódik a „B” csomópont „1”-es oszlopába. Ezt előjelhelyesen összegezzük a „B” csomópontban lévő két kezdeti befogási nyomatékokkal, majd a kapott értéket szorozzuk az „ α_{Bi} ” tényezőkkal, és még szorozzuk mínusz egygel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő számú oszlopba kell írni.

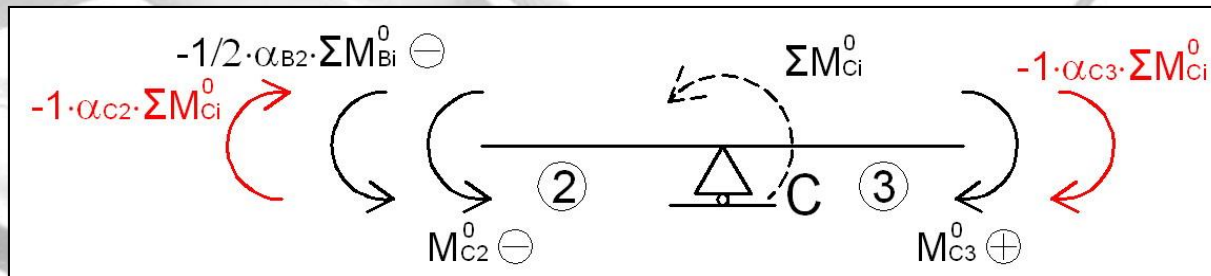


8. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása I.

$$\sum M_{Bi}^0 = +\frac{1}{2} \cdot M_{A1}^0 - M_{B1}^0 + M_{B2}^0$$

A következő lépésben a „B” „2”-es számú oszlopába kapott egyensúlyozó nyomaték felét át kell vinni a „C” „2”-es számú oszlopába.

Az átvitt egyensúlyozó nyomaték felét előjelhelyesen összegezzük a „C” csomópontban lévő két kezdeti befogási nyomatékokkal, majd a kapott értéket szorozzuk az „ α_{Ci} ” tényezőkkel, és még szorozzuk mínusz eggyel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő számú oszlopba kell írni.



9. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása II.

$$\Sigma M_{Ci}^0 = -\frac{1}{2} \cdot \alpha_{B2} \cdot \Sigma M_{Bi}^0 - M_{C2}^0 + M_{C3}^0$$

A következő lépésben a „C” „2”-es számú oszlopába kapott egyensúlyozó nyomaték felét vissza kell vinni a „B” „2”-es számú oszlopába, majd e nyomatékot kell szorozni az „ α_{Bi} ” tényezőkkel, és még szorozzuk mínusz eggyel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő számú oszlopba kell írni.

Ezt az iterációt 0,01-ig kell folytatni, végül oszloponként összegezni kell a kezdeti befogási, és az egyensúlyozó nyomatékokat.

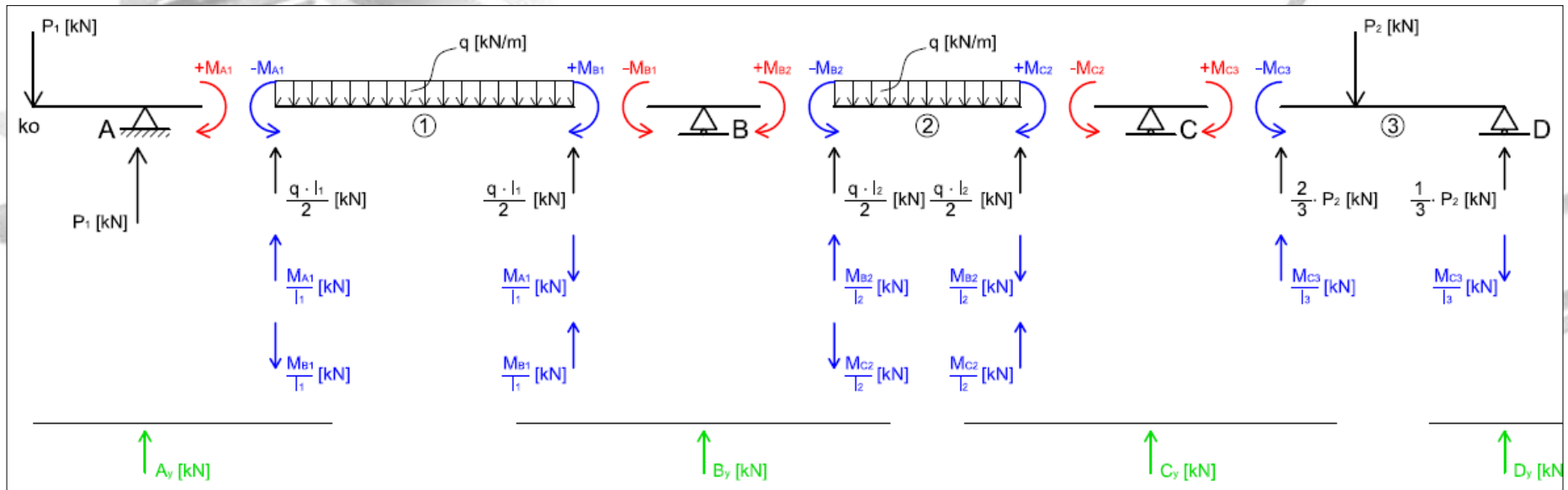


Ellenőrzés: a táblázat legalsó sorában egy-egy csomópontban ugyanannak a két eredménynek kell adódnia pozitív és negatív előjellel, így van egyensúlyban az adott csomópont. (Ezt az egyensúlyt és a végleges csomóponti nyomatékok irányait a táblázat alatt kisebb magyarázó ábrákkal kell szemléltetni.)

Ha a csomópontok egyensúlyban vannak, akkor a táblázat számolása helyes volt. Ez sajnos nem jelenti azt, hogy a teljes feladta helyes, hiszen, ha esetleg korábban hiba volt pl. valamelyik kezdeti nyomaték meghatározásában, akkor a táblázatba rossz kiindulási adat került be, így a táblázat számolása igen, de az eredmény nem lehet helyes.

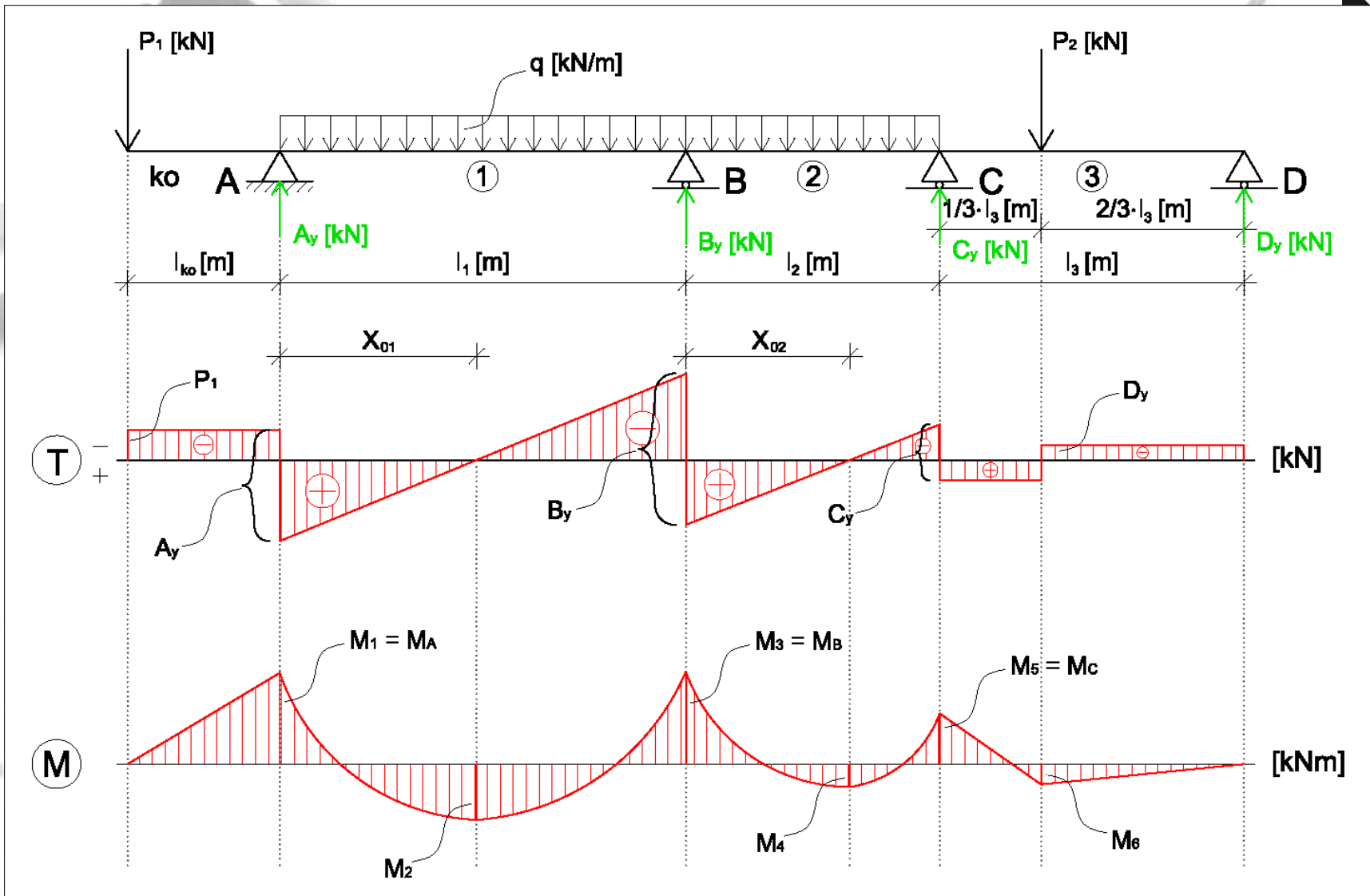


A tartó egyensúlyozása (minden csomópontot és minden rudat is ki kell egyensúlyozni):



10. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozás



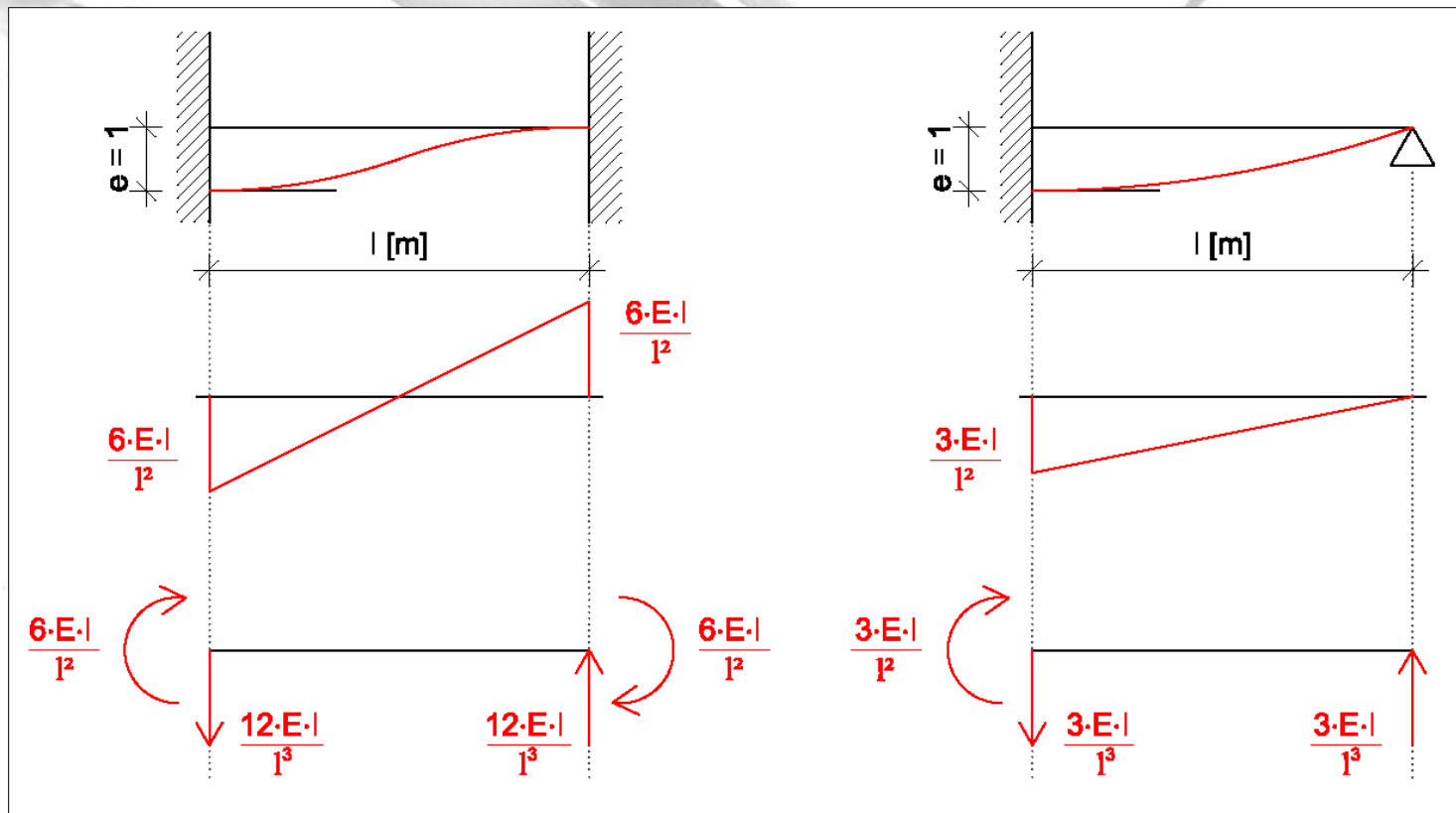


11. ábra. 1. mintapélda – belső igénybevételi ábrák

2. Süllyedő alátámasztású folytatólagos többtámaszú tartók igénybevételeinek meghatározása „Cross” módszerrel

Eltolási merevség: egységnyi eltolódásból keletkező nyomaték. Jele: μ

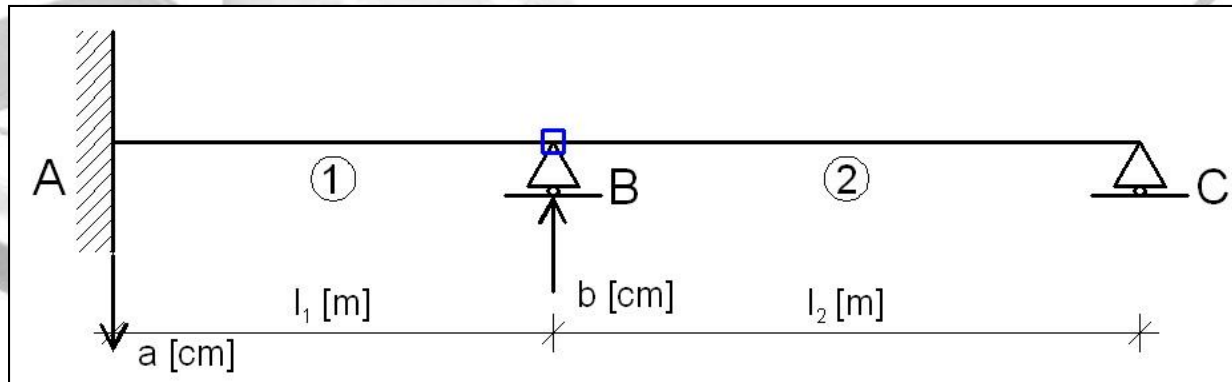
A kétféle törzstartón egységnyi eltolások felvétele:



12. ábra. Egységnyi eltolódások felvétele

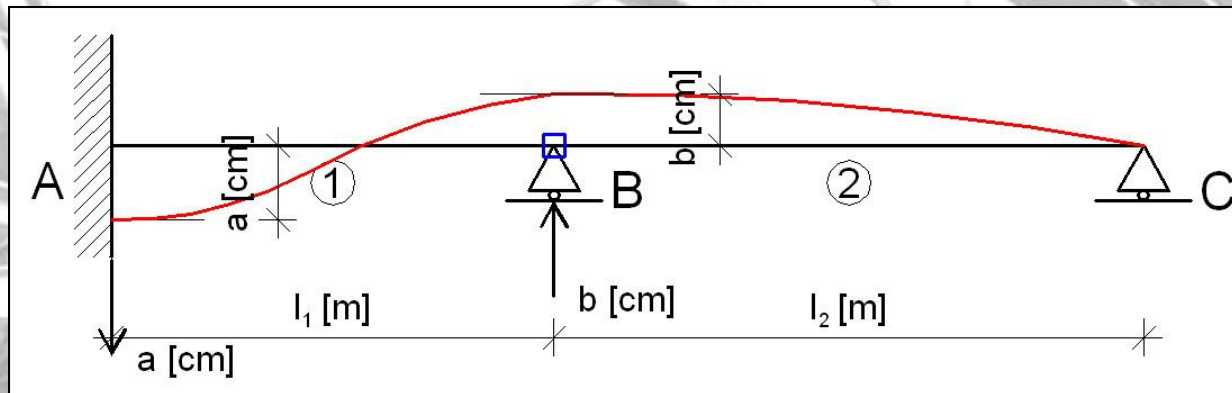
2. mintapélda

Adott egy statikailag határozatlan süllyedő alátámasztású folyttatólagos többtámaszú tartó. A tartót jellemzi a rugalmassági modulusa és az inerciája (E, I). A tartó változó keresztmetszetű.



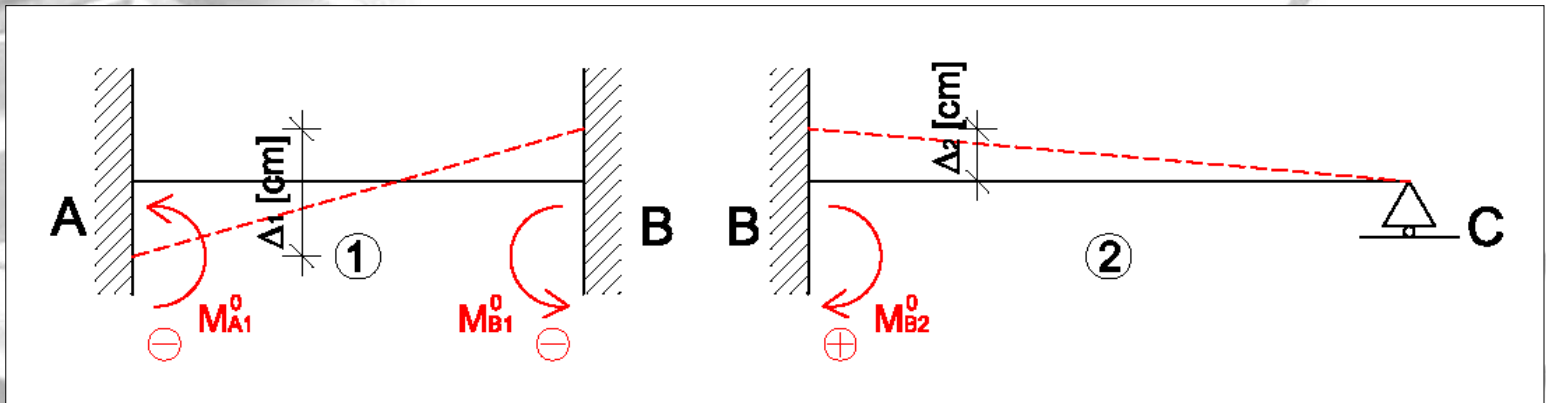
13. ábra. 2. mintapélda – süllyedő alátámasztású folyttatólagos többtámaszú tartó

A tartó alakváltozása:



14. ábra. 2. mintapélda – a tartó alakváltozása

A tartó elemi törzstartókra való bontása és a kezdeti befogási nyomatékok jelölése:



15. ábra. 1. mintapélda – elemi tartókra való bontás

Elfordulási merevségek (k) számítása:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1}$$

$$k_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{l_2}$$

$$\sum_{i=1}^3 k_B = k_1 + k_2$$

Nyomatékosztók (α) számítása:

$$\alpha_{B1} = \frac{k_1}{\sum k_B}$$

$$\alpha_{B2} = \frac{k_2}{\sum k_B}$$

$$\alpha_{Bi} = \alpha_{B1} + \alpha_{B2} = 1,00$$

Eltolási merevségek (μ) számítása:

$$\mu_1 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l_1^2} \left[\frac{\text{kNcm}}{\text{cm}} \right]$$

$$\mu_2 = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_2^2} \left[\frac{\text{kNcm}}{\text{cm}} \right]$$

Kezdeti befogási nyomatékok (M^0) számítása:

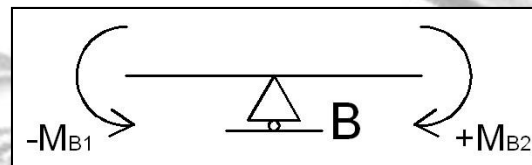
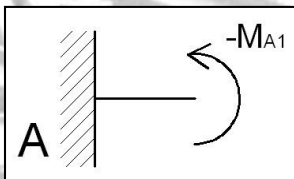
$$M_{A1}^0 = \mu_1 \cdot \Delta_1 (-)$$

$$M_{B1}^0 = \mu_1 \cdot \Delta_1 (-)$$

$$M_{B2}^0 = \mu_2 \cdot \Delta_2 (+)$$

Nyomatékosztás (Cross táblázat):

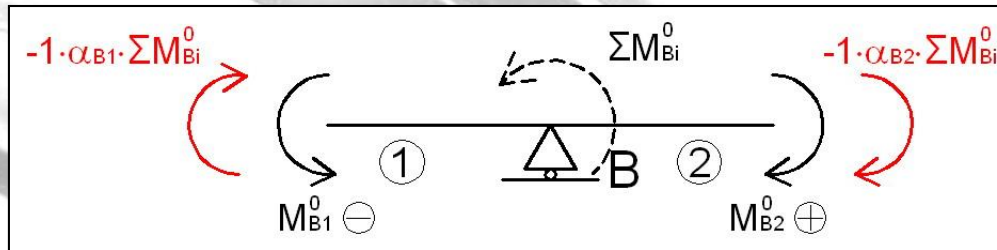
A	B	
1 ←	1	2
	α_{B1}	α_{B2}
$-M_{A1}^0$	$-M_{B1}^0$	$+M_{B2}^0$
← $-1/2 \cdot \alpha_{B1} \cdot \sum M_{Bi}^0$	$-1 \cdot \alpha_{B1} \cdot \sum M_{Bi}^0$	$-1 \cdot \alpha_{B2} \cdot \sum M_{Bi}^0$
$-M_{A1}$	$-M_{B1}$	$+M_{B2}$



16-17. ábra. 2. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai

A nyomatékosztás a következő módon történik:

A „B” csomópontban lévő kezdeti befogási nyomatékokat előjelhelyesen összegezni kell, majd a kapott értéket szorozzuk az α tényezővel, és még szorozzuk mínusz egygel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő betűjelű és számú oszlopba kell írni.



18. ábra. 2. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása

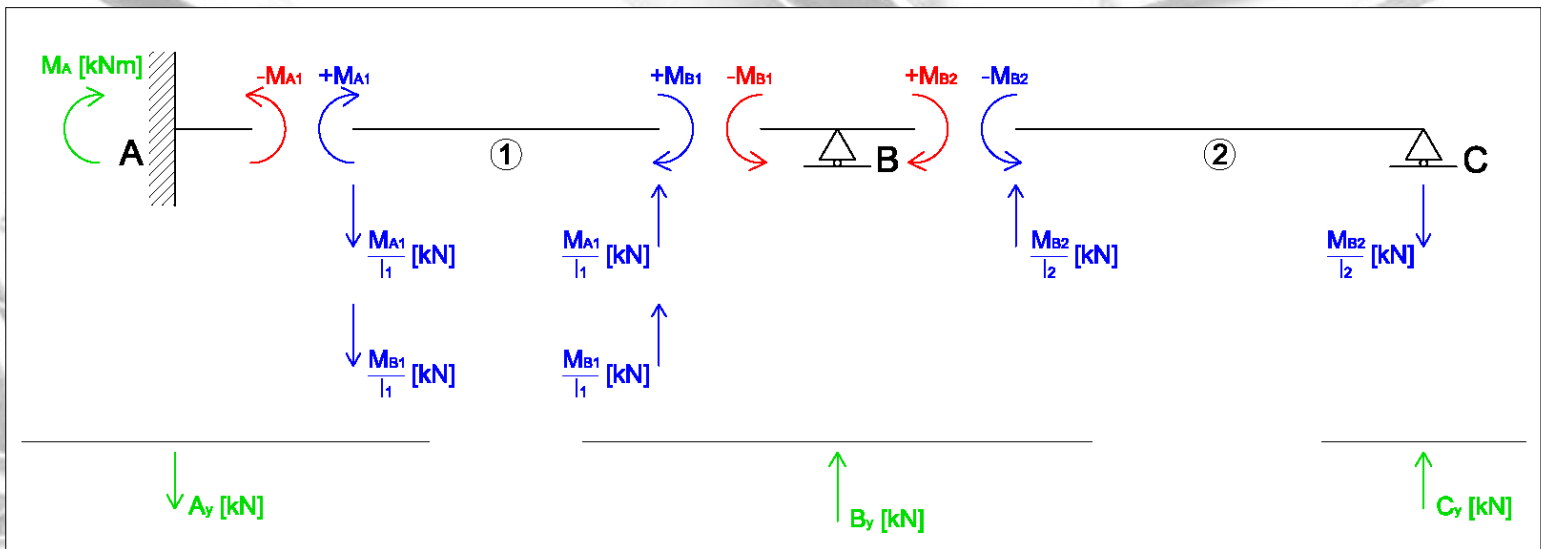
$$\sum M_{Bi}^0 = -M_{B1}^0 + M_{B2}^0$$

Az egyensúlyozó csomóponti nyomatékok kiszámítása után a következő lépés a *nyomaték átvitel*. Ezt a táblázat fejlécében lévő nyíl irányával kell jelezni.



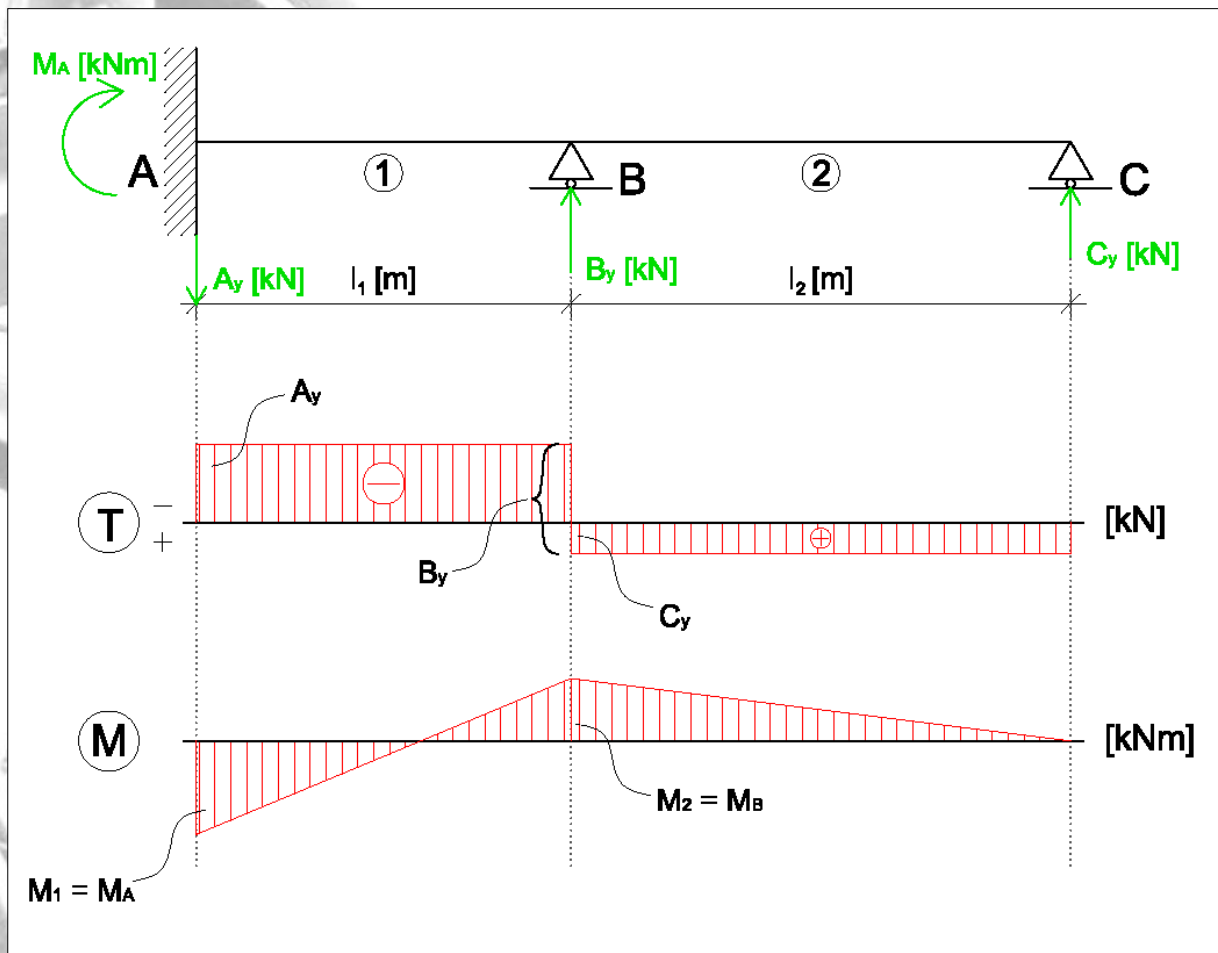
A nyomatékosztás utolsó lépése az adott oszlopban lévő kezdeti befogási nyomatékok és az egyensúlyozó nyomatékok előjelhelyes összegzése. Az így kapott összeg kerül a táblázat legalsó sorába, ezek lesznek a *végleges csomóponti nyomatékok*. Ellenőrzés: az egy csomópontban lévő végleges csomóponti nyomatékok összegének nullának kell lennie.

A tartó egyensúlyozása (minden csomópontot és minden rudat is ki kell egyensúlyozni):



19. ábra. 2. mintapélda – egyensúlyozás

Belső igénybevételi ábrák:



20. ábra. 2. mintapélda – belső igénybevételi ábrák

Felhasznált irodalom

CSÉBFALVI ANIKÓ: *Tartók statikája.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2007

HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER : *Tartók statikája. „Cross módszer” Folytatólagos többtámaszú tartók.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012

HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER : *Tartók statikája. „Cross módszer” Süllyedő alátámasztású folytatólagos többtámaszú tartók.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012

OROSZ ÁRPÁD, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER: *Mechanika. Határozatlan szerkezetek. Jegyzet + példatár,* Pécs, 1990