

# Tartók statikája

## 6. előadás

Statikailag határozatlan síkbeli keretek  
igénybevételeinek meghatározása „Cross” módszerrel,  
fix csomópontú és elmozduló csomópontú (kilengő)  
keretek

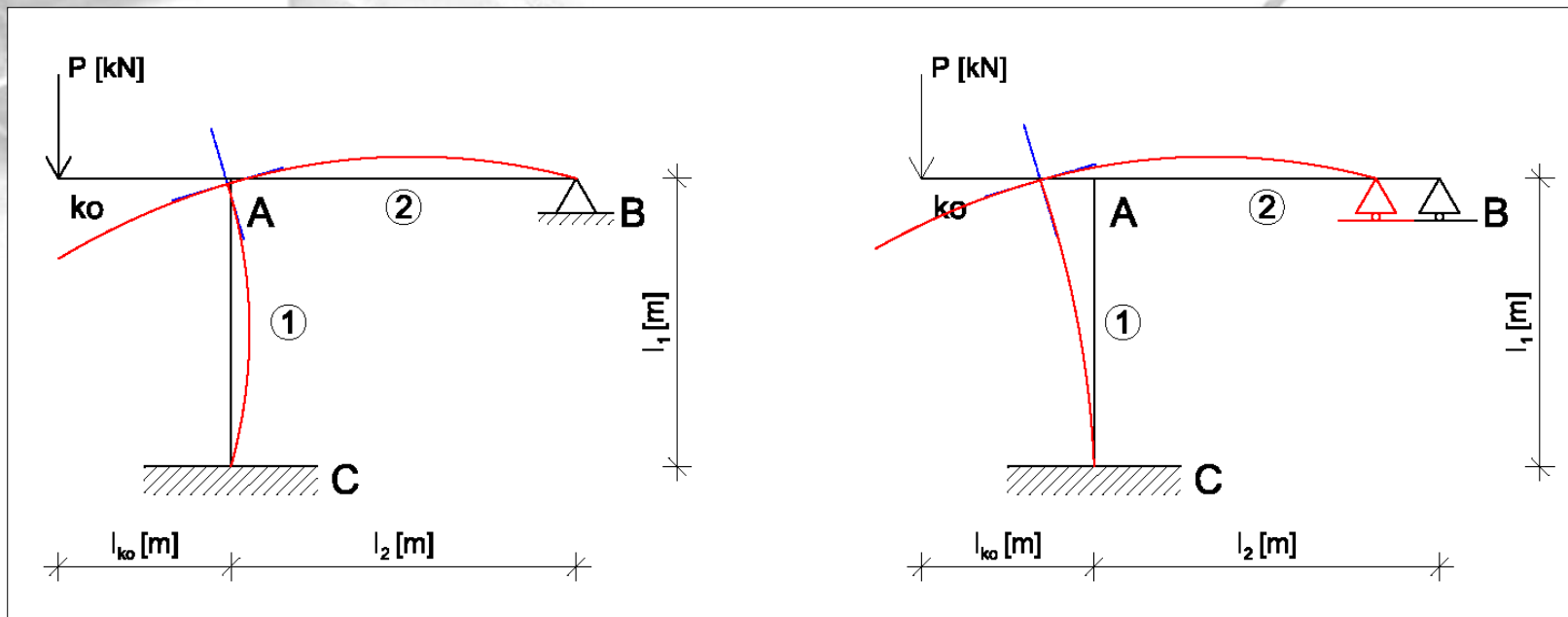
Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

# 1. Keretek típusai

Az 1. ábrán egy fix csomópontú (bal oldali) és egy elmozduló csomópontú (kilengő) (jobb oldali) keret látható.



1. ábra. Fix csomópontú és elmozduló csomópontú (kilengő) keret

A két tartó ugyanolyan anyagi és keresztmetszeti tulajdonságokkal rendelkezik ( $E$ ,  $I$ ), ugyanolyan jellegű és nagyságú terhet kap. Az egyetlen különbség a „B” támasz kialakítása. A bal oldali esetében a „B” támasz fix csukló, míg a jobb oldali esetében görgős kialakítású.



A kétféle megtámasztási viszony (mint ahogy az *1. ábrán* is látható) jelentős különbséget okoz a keret alakváltozásában, valamint emiatt a kétféle keret számítási eljárása is jelentősen eltér egymástól.

A fix csomópontú keretek igénybevételeinek „Cross” módszerrel való meghatározásakor ugyanúgy kell eljárni, mint a korábban már megismert típustartók esetén.

Az elmozduló csomópontú keretek igénybevételeinek „Cross” módszerrel való meghatározása hosszadalmasabb számítást igényel. A statikailag határozatlan tartókon az elmozdulásból is keletkezik igénybevétel. A számítás során külön kell kezelni a terhelésből és az elmozdulásból kapott igénybevételeket. A problémát leginkább az fogja okozni, hogy nem ismert, hogy a tartó mennyit mozdul el.

## 2. Elmozduló csomópontú (kilengő) keret igénybevételeinek meghatározása „Cross” módszerrel

A számítás tulajdonképpen három részre osztható:

1. A tartót elméletben megtámasztottnak tekintjük, ekkor a számítás lépéseinek sorrendje ugyanolyan, mint egy fix csomópontú keret esetében. A különbség annyi, hogy a Cross-táblázat után nem szükséges minden támaszerőt kiszámítani, majd a belső igénybevételi ábrákat elkészíteni, hanem egyetlen ún. *(T) megtámasztó erőt* kell csak kiszámolni. Ez az erő akadályozná meg a keret elmozdulását. Az iránya természetesen az elmozdulás irányával ellentétes.
2. A második részben a terheket „le kell venni” a keretről, majd a törzstartót kilendítjük egy *(E) ellendítő erővel* abba az irányba, amerre a keret a terhelés hatására is el akar mozdulni. Az ellendítő erő nagysága ismeretlen, de az ismert, hogy pontosan egységnyi kilendítést okoz a törzstartón. Amennyiben számszerűen megadjuk a rudak hajlító merevségeit, eldönthetjük, hogy mi legyen az egység (pl. 1 cm, 1 mm, stb.). Ha csak a hajlító merevségek arányát ismerjük, akkor nem konkretizáljuk az egységet.

Az ellendítő erőből és az általa okozott elmozdulásból számolni kell eltolási merevséget, majd ennek segítségével újabb kezdeti befogási nyomatékokat. Újra meg kell oldani a Cross-táblázatot ezen adatok felhasználásával, majd mint az első részben, itt sem kell minden támaszerőt kiszámolni, hanem csak az ellendítő erő nagyságát.

3. A harmadik részben először kiszámítjuk a valós elmozdulás nagyságát, ezt a megtámasztó erő ( $T$ ) és az ellendítő erő ( $E$ ) hányadosa adja meg.

Ezután összegezni kell a terhelésből kapott végleges csomóponti nyomatékokat és az ellendítésből kapott végleges csomóponti nyomatékok valós elmozdulással szorzott nagyságát.

Végül ki kell számolni a támaszerőket és meg kell rajzolni a belső igénybevételi ábrákat.

## A számítás menete:

1. lépés: a törzstartók kialakítása,
2. lépés: az elfordulási merevségek ( $k$ ) kiszámítása minden törzstartóra,
3. lépés: csomóponti összemerevség számítása, az elfordulási merevségek összegzése (az adott csomópontba kapcsolódó összes elfordulási merevséget összegezni kell),
4. lépés: ( $\alpha$ )a nyomatékosztók számítása,
5. lépés: ( $M^0$ ) kezdeti befogási nyomatékok számítása a teherből,
6. lépés: nyomatékosztás, Cross-táblázat,
7. lépés: egyensúlyozás, a ( $T$ ) megtámasztó erő számítása,
8. lépés: az ellendítő erő alkalmazása a kereten, ebből ( $\mu$ ) eltolási merevségek számítása,
9. lépés: ( $M^{0E}$ ) kezdeti befogási nyomatékok számítása az elmozdulásból,
10. lépés: nyomatékosztás, Cross-táblázat,
11. lépés: egyensúlyozás, az ( $E$ ) ellendítő erő számítása,
12. lépés: a elmozdulás valós nagyságának kiszámítása,

$$c = \frac{T}{E}$$



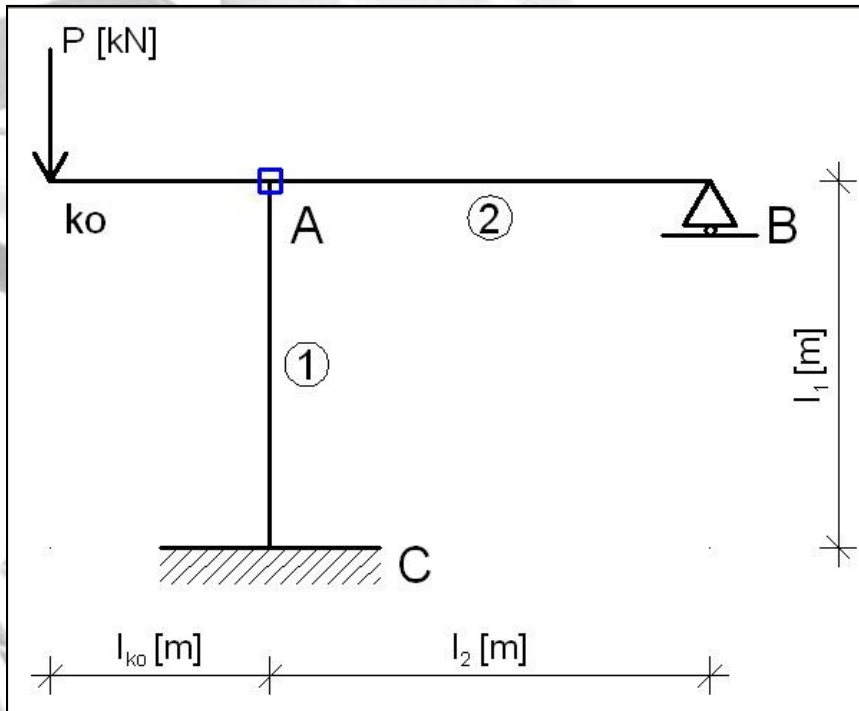
13. lépés: a végleges csomóponti nyomatékok összegzése a teherből (első táblázat utolsó sora) és az elmozdulásból (második táblázat utolsó sora) (de még előbb az elmozdulásból kapott végleges csomóponti nyomatékokat meg kell szorozni a  $(c)$  valós elmozdulás nagyságával is),

14. lépés: támaszerők számítása,

15. lépés: belső igénybevételi ábrák rajzolása.

## 1. mintapélda

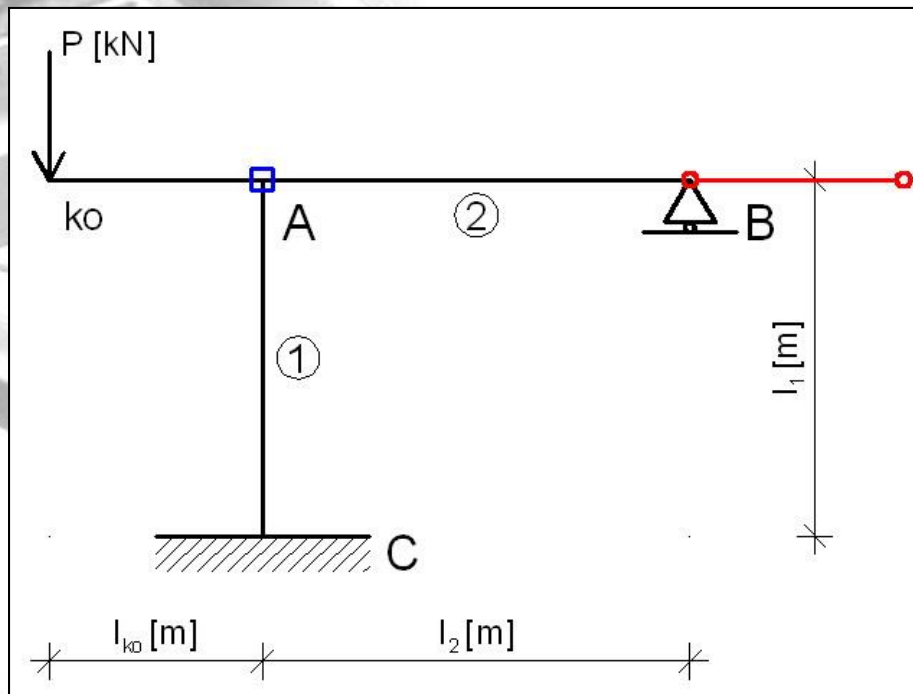
Adott egy statikailag határozatlan elmozduló csomópontú (kilengő) keret. A tartót jellemzi a rugalmassági modulusa és az inerciája ( $E, I$ ). A tartó változó keresztmetszetű.



2. ábra. 1. mintapélda – elmozduló csomópontú keret

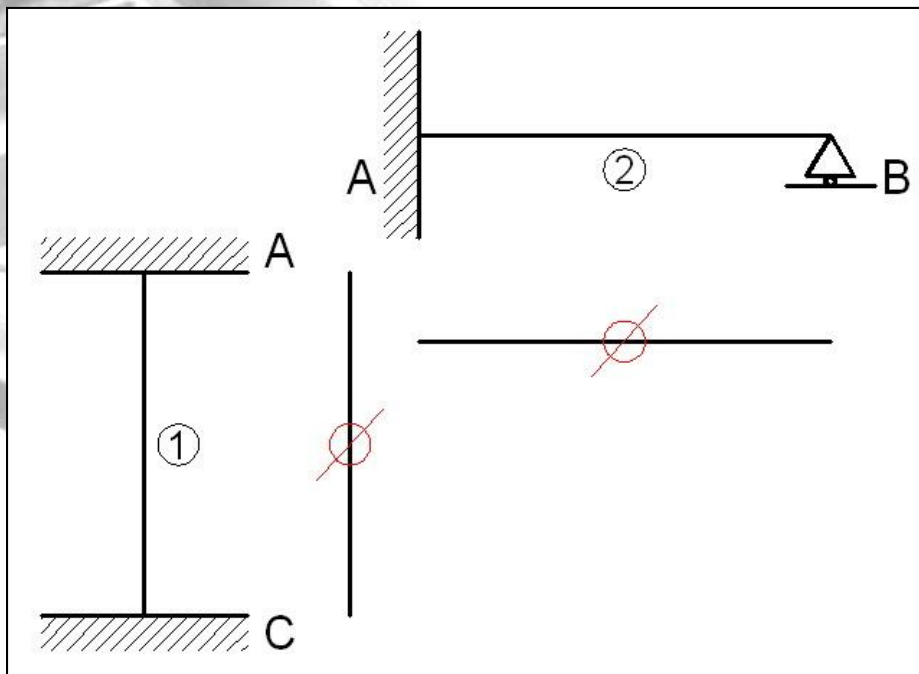


Egy képzeletbeli megtámasztó rúddal megtámasztjuk a keretet, hogy ne tudjon elmozdulni:



3. ábra. 1. mintapélda – képzeletbeli megtámasztott rúddal megtámasztott keret

A tartó elemi törzstartókra való bontása és a külső teherből keletkező kezdeti befogási nyomatékok jelölése:



4. ábra. 1. mintapélda – elemi tartókra való bontás



Elfordulási merevségek ( $k$ ) számítása:

$$k_1 = \frac{I_1}{l_1}$$

$$k_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{l_2}$$

$$\sum_{i=1}^3 k_A = k_1 + k_2$$

A nyomatékosztók ( $\alpha$ ) számítása:

$$\alpha_{A1} = \frac{k_1}{\sum k_A}$$

$$\alpha_{A2} = \frac{k_2}{\sum k_A}$$

$$\alpha_A = \alpha_{A1} + \alpha_{A2} = 1,00$$

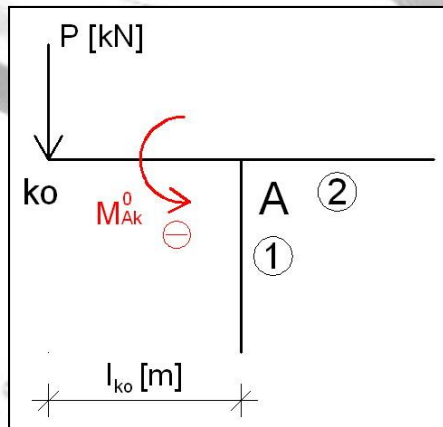
Kezdeti befogási nyomatékok ( $M^0$ ) számítása a külső teherből:

$$M_{A1}^0 = 0$$

$$M_{C1}^0 = 0$$

$$M_{A2}^0 = 0$$

A konzolon lévő teherből:



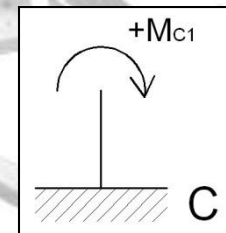
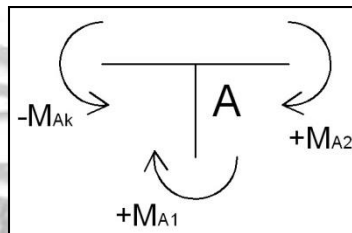
5. ábra. 1. mintapélda – a konzolon lévő teher helyettesítése nyomatékkal

$$M_{Ak}^0 = -P \cdot l_{ko}$$

# Nyomatékosztás a külső teherből (Cross táblázat):

|             |  |  |   |  |
|-------------|--|--|---|--|
|             | A  |  |   | C  |
| ko          | 2  | 1  | → | 1  |
|             | $\alpha_{A2}$                              | $\alpha_{A1}$                              |   |  |
| $-M_{Ak}^0$ |  |  |   |  |
|             | $-1 \cdot \alpha_{A2} \cdot \sum M_{Ai}^0$ | $-1 \cdot \alpha_{A1} \cdot \sum M_{Ai}^0$ | → | $-1/2 \cdot \alpha_{A1} \cdot \sum M_{Ai}^0$ |
| $-M_{Ak}$   | $+M_{A2}$                                  | $+M_{A1}$                                  |   | $+M_{C1}$                                    |

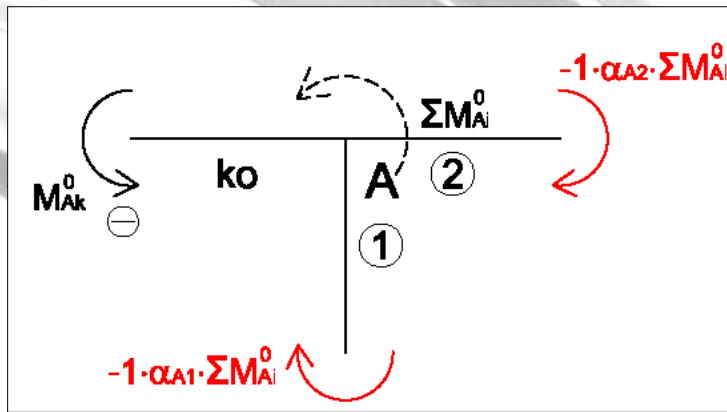
$M^T$



6-7. ábra. 1. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai a terhelésből

A nyomatékosztás a következő módon történik:

Az „A” csomópontban lévő, a külső teherből kapott kezdeti befogási nyomatékokat előjelhelyesen összegezni kell, majd a kapott értéket szorozzuk az  $\alpha$  tényezővel, és még szorozzuk mínusz egygel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő betűjelű és számú oszlopba kell írni.



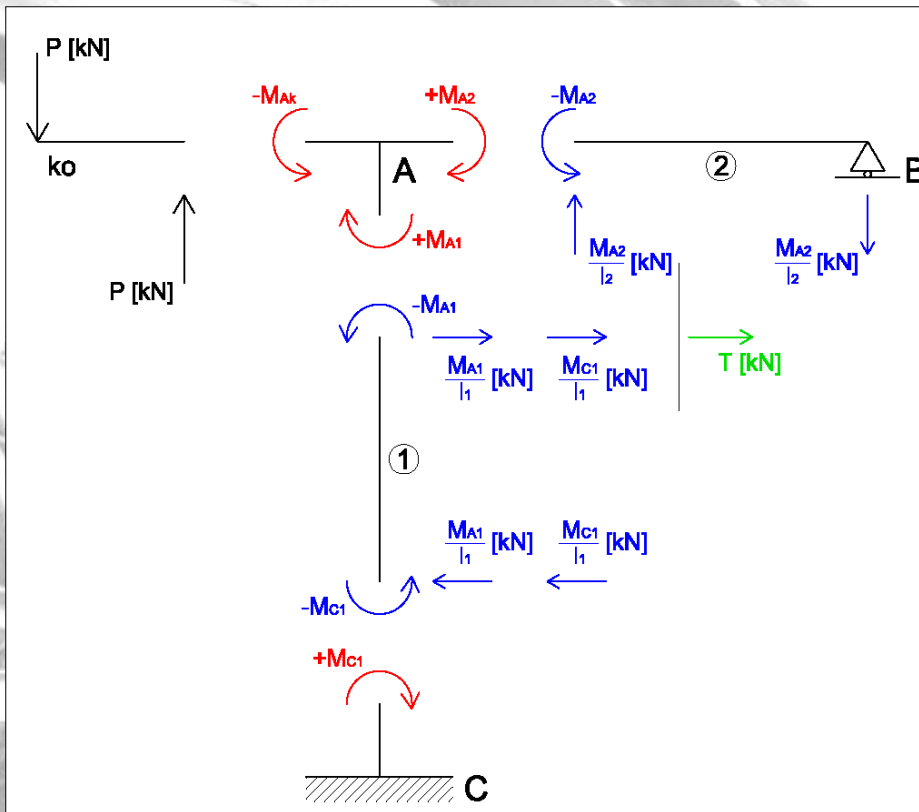
8. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása

$$\sum M_{Ai}^0 = -M_{Ak}^0$$

Az egyensúlyozó csomóponti nyomatékok kiszámítása után a következő lépés a *nyomaték átvitel*. Ezt a táblázat fejlécében lévő nyíl irányával kell jelezni. Végül oszloponként összegezni kell a kezdeti befogási, és az egyensúlyozó nyomatékokat.

Így a táblázat utolsó sorában megkapjuk a végleges csomóponti nyomatékokat a terhelésből ( $M^T$ ). Ezeket a nyomatékokat a feladat megoldása során még fel kell használni.

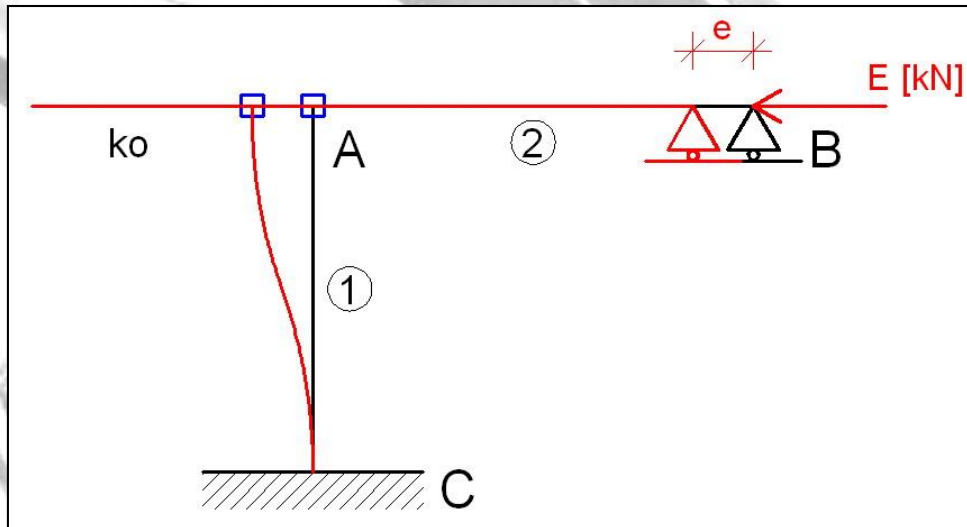
A megtámasztó erő ( $T$ ) kiszámítása (nem szükséges minden csomópont és rúd egyensúlyozása, csak az elmozduló keret megtámasztó erejét kell kiszámolni):



9 ábra. 1. mintapélda – a megtámasztó erő kiszámítása

A kapott megtámasztó erő tulajdonképpen „ $A_x$ ” lenne, ezt kellene áthelyezni a hatásvonalán, ebből keletkezne a „ $B_x$ ” támaszerő, de mivel a „ $B$ ” támasz nem tud felvenni „ $x$ ” irányú támaszerőt, ezért lett ez az erő az un. „ $T$ ” megtámasztó erő.

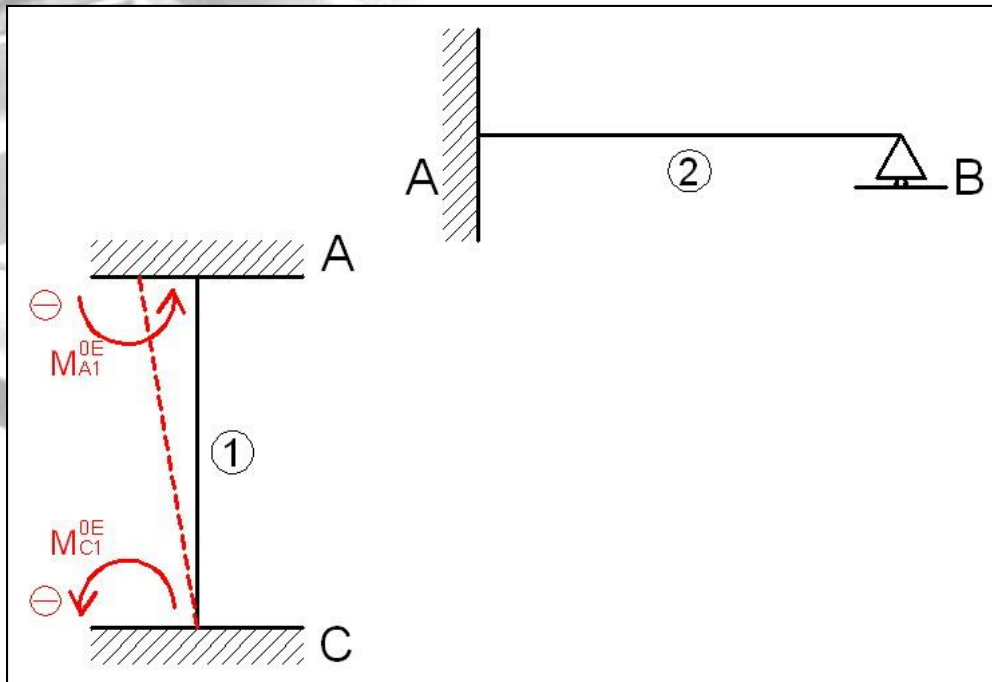
A következő lépésben levesszük a terhet a tartóról, és a törzstartót kilendítjük egy ( $E$ ) ellendítő erővel:



10ábra. 1. mintapélda – az ellendítő erő felvétele



A tartó elemi törzstartókra való bontása és az ellendítésből keletkező kezdeti befogási nyomatékok jelölése:



11. ábra. 1. mintapélda – elemi tartókra való bontás

Eltolási merevségek ( $\mu$ ) számítása:

$$\mu_1 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l_1^2} \left[ \frac{\text{kNcm}}{\text{cm}} \right]$$

Kezdeti befogási nyomatékok ( $M^{0E}$ ) számítása az ellendítésből:

$$M_{A1}^{0E} = \mu_1 \cdot \Delta_1 (-)$$

$$M_{C1}^0 = \mu_1 \cdot \Delta_1 (-)$$

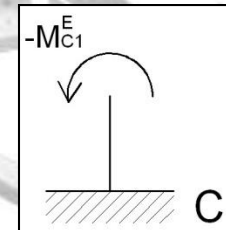
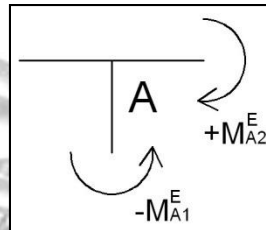
ahol:  $\Delta_1 = 1 \text{ cm}$

Megjegyzés: Az újabb Cross-táblázathoz nem szükséges újra kiszámolni az elfordulási merevségeket és a nyomatékosztókat, hiszen azok már a feladat elején kiszámításra kerültek. Abban az esetben, ha csak az ellendítő erő meghatározása a feladat, akkor természetesen előbb ki kell számolni az elfordulási merevségeket és a nyomatékosztókat.

# Nyomatékosztás az ellendítésből (Cross táblázat):

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
|    | A   |   | C   |
| ko | 2   | 1   | 1   |
|    | $\alpha_{A2}$                                 | $\alpha_{A1}$                                 |   |
|    |   | $-M_{A1}^{0E}$                                | $-M_{C1}^{0E}$                                  |
|    | $-1 \cdot \alpha_{A2} \cdot \sum M_{Ai}^{0E}$ | $-1 \cdot \alpha_{A1} \cdot \sum M_{Ai}^{0E}$ | $-1/2 \cdot \alpha_{A1} \cdot \sum M_{Ai}^{0E}$ |
|    | $+M_{A2}^E$                                   | $-M_{A1}^E$                                   | $-M_{C1}^E$                                     |

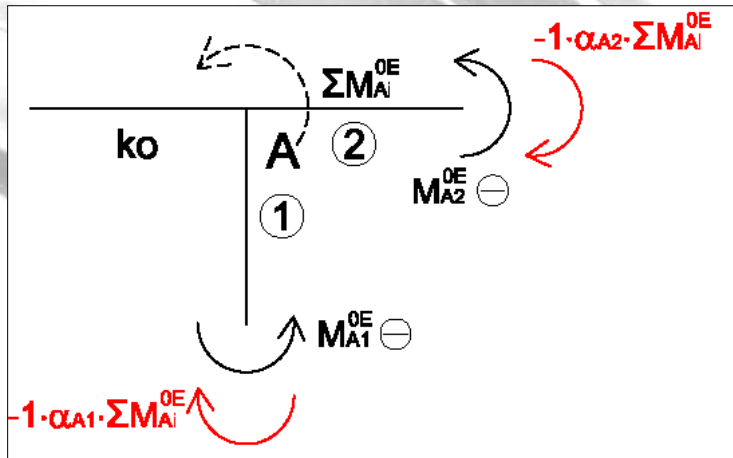
$M^E$



12-13. ábra. 1. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai az ellendítésből

A nyomatékosztás a következő módon történik:

Az „A” csomópontban lévő, az ellendítésből kapott kezdeti befogási nyomatékokat előjelhelyesen összegezni kell, majd a kapott értéket szorozzuk az  $\alpha$  tényezőkkal, és még szorozzuk mínusz egygel, majd a kapott eredményeket a táblázat egyel lejjebbi sorába a megfelelő betűjelű és számú oszlopba kell írni.



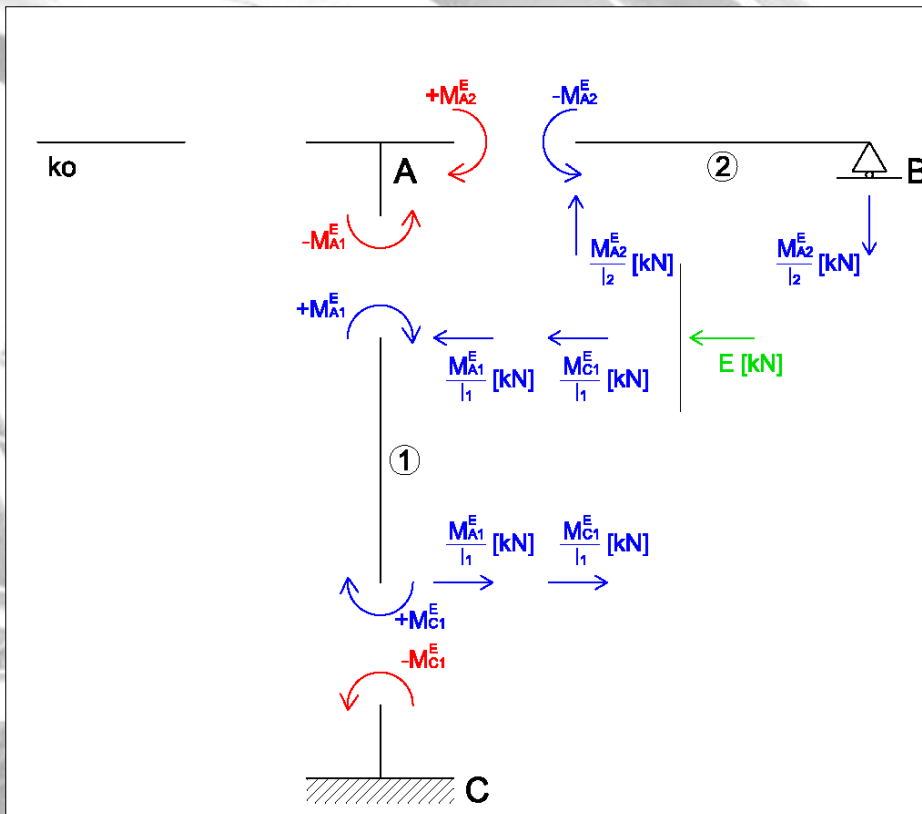
14. ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozó nyomatékok számítása

$$\sum M_{Ai}^{OE} = -M_{A1}^{OE} - M_{A2}^{OE}$$

Az egyensúlyozó csomóponti nyomatékok kiszámítása után a következő lépés a *nyomaték átvitel*. Ezt a táblázat fejlécében lévő nyíl irányával kell jelezni. Végül oszloponként összegezni kell a kezdeti befogási, és az egyensúlyozó nyomatékokat.

Így a táblázat utolsó sorában megkapjuk a végleges csomóponti nyomatékokat az ellendítésből ( $M^E$ ). Ezeket a nyomatékokat a feladat megoldása során még fel kell használni.

Az ellendítő erő ( $E$ ) kiszámítása (nem szükséges minden csomópont és rúd egyensúlyozása, csak az elmozduló keret ellendülését okozó erőt kell kiszámolni):



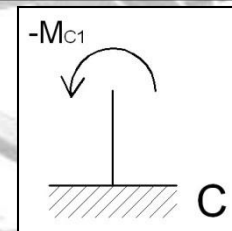
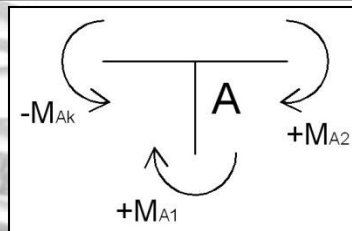
15 ábra. 1. mintapélda – az ellendítő erő kiszámítása

A terhelés hatására történő ellendülés nagyságának kiszámítása:

$$c = \frac{T}{E}$$

Nyomatékösszegzés a terhelésből és az adott mértékű kilendülésből:

|           | A                   |                     | C                   |               |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------|
| ko        | 2                   | 1                   | 1                   |               |
| $-M_{Ak}$ | $+M_{A2}$           | $+M_{A1}$           | $+M_{C1}$           | $M^T$         |
|           | $c \cdot +M_{A2}^E$ | $c \cdot -M_{A1}^E$ | $c \cdot -M_{C1}^E$ | $c \cdot M^E$ |
| $-M_{Ak}$ | $+M_{A2}$           | $+M_{A1}$           | $-M_{C1}$           | $M$           |



16-17. ábra. 1. mintapélda – a végleges csomóponti nyomatékok irányai



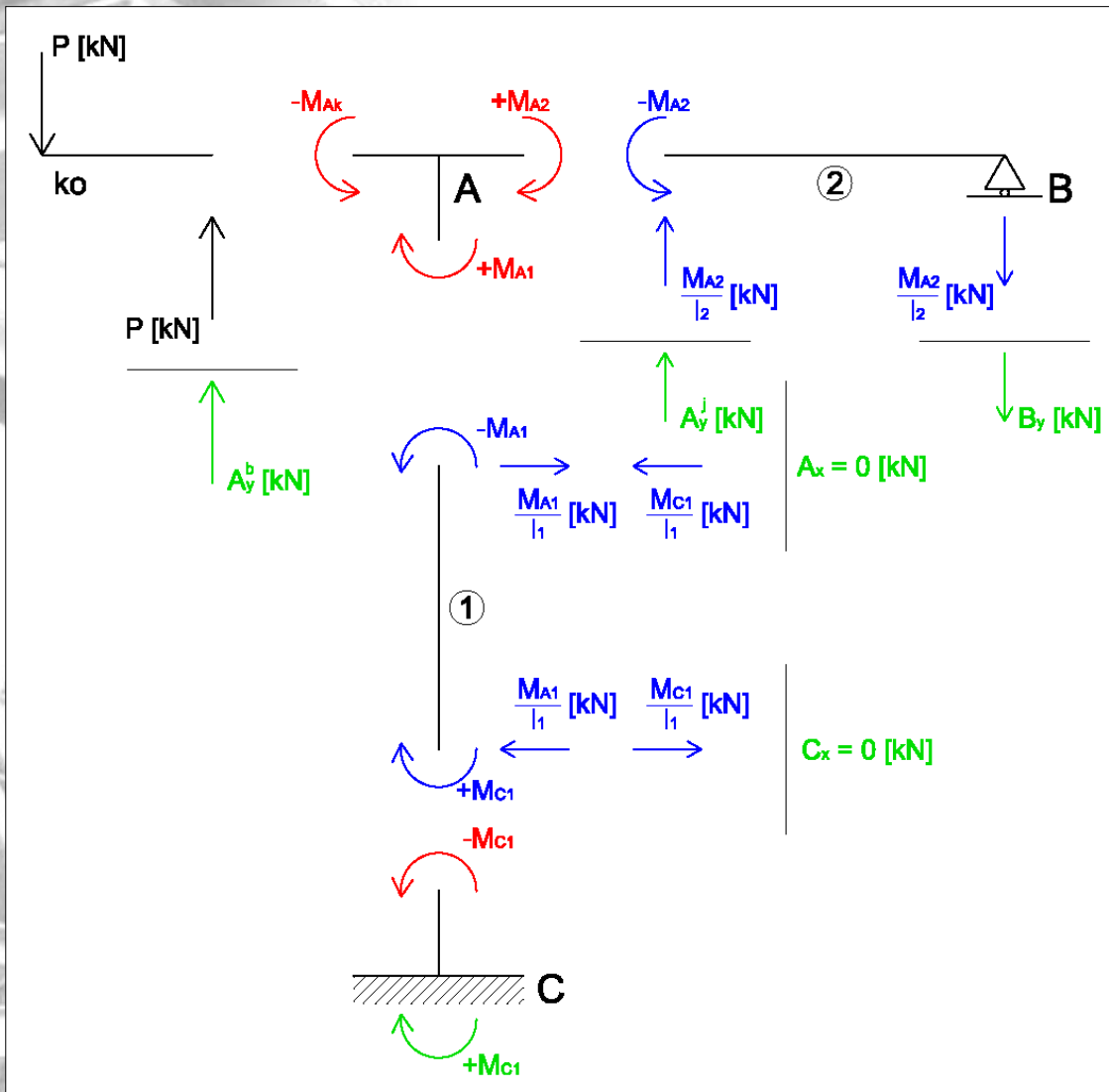
A nyomatékösszegezésnél összegezni kell a terhelésből kapott csomóponti nyomatékokat ( $M^T$ ) (ez az első táblázat utolsó sora), és az ellendítésből kapott csomóponti nyomatékokat ( $M^E$ ) (ez a második táblázat utolsó sora) a terhelés hatására keletkező ellendülés mértékével ( $c$ ) megszorzott nagyságával.

$$M = M^T + c \cdot M^E$$

A nyomatékösszegező táblázat utolsó sorában kapott nyomatékok lesznek a végleges csomóponti nyomatékok.



A tartó egyensúlyozása (minden csomópontot és minden rudat is ki kell egyensúlyozni):



18 ábra. 1. mintapélda – egyensúlyozás





Az egyensúlyozáskor kapott eredmények közül az  $A_y^b$  és az  $A_y^j$  nem végeredmény, hiszen a „A” csomópont nem támasz, hanem egy belső csomópont, melyben támaszerők nem keletkezhetnek.

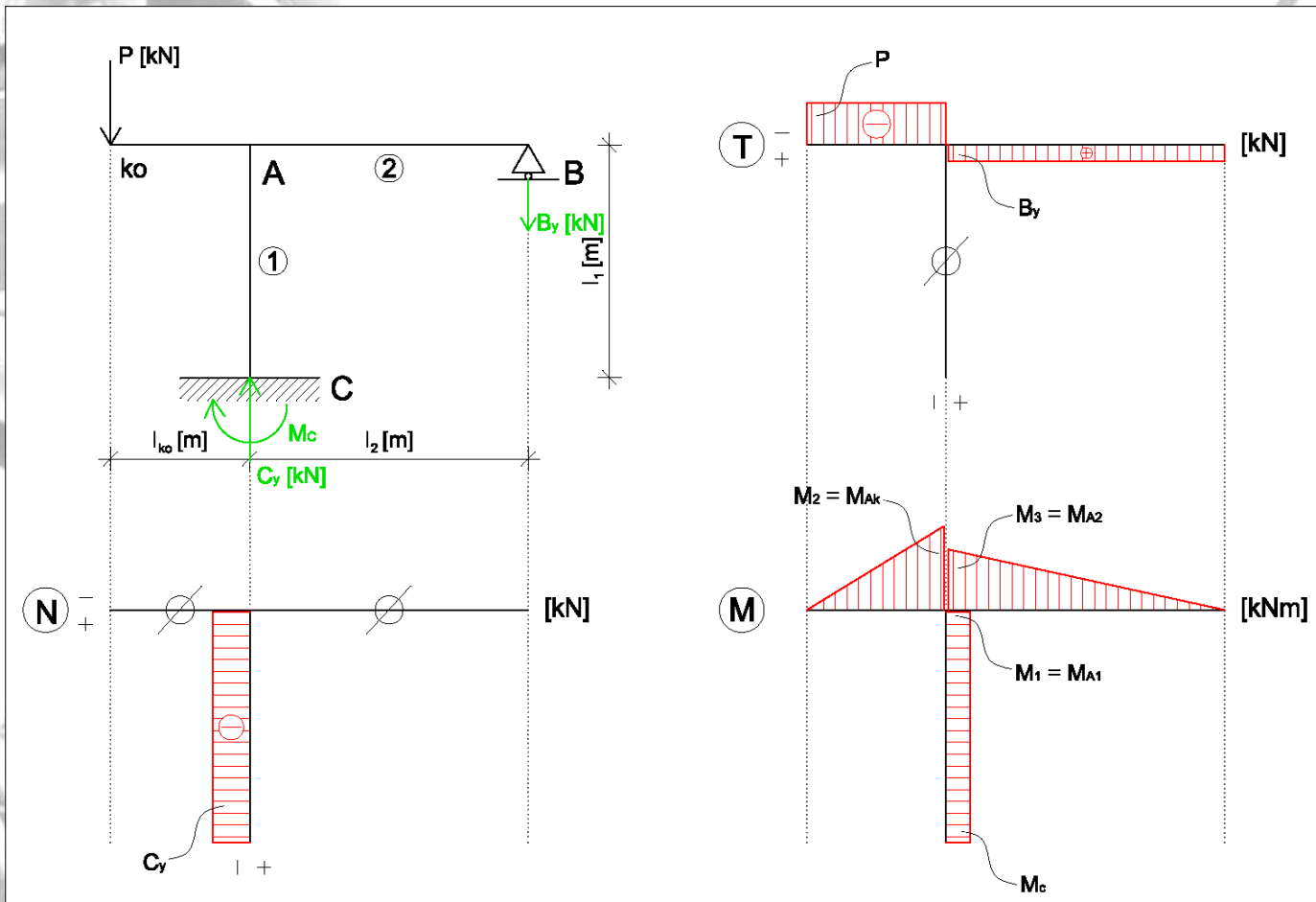
Szükséges ezen „csomóponti erőket” hatásvonalukon mozgatva áthelyezni azon támaszokhoz, amelyek képesek felvenni őket támaszerőként.

$$A_y = A_y^b + A_y^j \rightarrow C_y$$

Az  $A_y^b$  és az  $A_y^j$  összegzéséből  $A_y$ -t kapunk, mely áthelyezhető a „C” támaszhoz, hiszen az „C” támaszban keletkezhet „Y” irányú támaszerő.

Amennyiben a számolás helyes volt, akkor a külső teherből és az ellendítésből kapott nyomatékok összegzése után, az egyensúlyozáskor a megtámasztó és ellendítő erő helyén olyan reakcióerőket kapunk, melyek kioltják egymást, így nincs erő, melyet át kellene helyezni a „B” támaszhoz  $B_x$ -ként. Amennyiben ez teljesül, akkor az elmozduló csomópontú (kilengő) keret kiegyensúlyozottnak tekinthető.

# Belső igénybevételi ábrák:



19. ábra. 1. mintapélda – belső igénybevételi ábrák



## Felhasznált irodalom

**CSÉBFALVI ANIKÓ:** *Tartók statikája.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2007

**HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER :** *Tartók statikája. Statikailag határozatlan síkbeli keretek számítása „Cross” módszerrel. Fix csomópontú és elmozduló csomópontú keretek.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2012

**OROSZ ÁRPÁD, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER:** *Mechanika. Határozatlan szerkezetek. Jegyzet + példatár,* Pécs, 1990