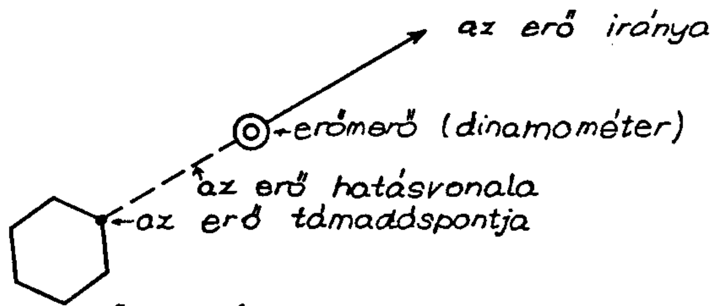
Az erő

Egy test mozgásállapotának megváltozásához minden esetben valami külső hatás szükséges. Ezt a külső hatást erőnek nevezzük.

Az erő jellemzői

Az erő jellemzésére három adatot kell ismernünk.



1, az erő nagysága
2, az erő működésének helye, illetve támadópontja
3, az erő működésének iránya

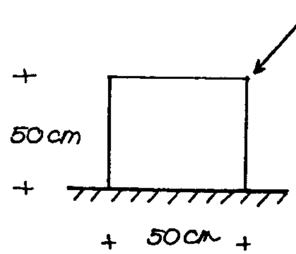
Az erő fajai

a, Koncentrált erő
b, megoszló erő
c, felületen megoszló erő / szélnyomás/
d, térben megoszló erő / súlyerő/

Az erő ábrázolása

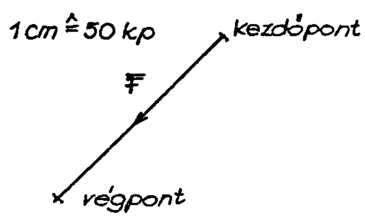
A feladatok megoldása során mindig felmerül annak szüksége, hogy az erőt ábrázoljuk.
Első teendő ilyenkor annak a testnek a felrajzolása amelyre az ábrázolandó erő vagy erők hatnak.

Nézetrajz.
M=1:100



A nézetrajz mérethelyes erő működésének támadáspontja ill. hatásvonala adott, és az erő iránya.

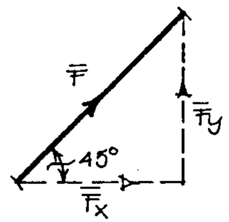
Ha a statikai feladatot szerkesztéssel kívánjuk megoldani, a nézetrajzon kívül vektor ábrát is kell készitenünk.
A vektor ábrába az erőnagyságát és irányát egy fogalommá vonjuk össze. Ezt a fogalmat az erő vektorának nevezzük.



1 cm ábrázol 50 kp
1 kp = 9,806 N pontos
1 kp = 9,81 N newton gyak. alk.
100 kp = 1 kN

Az erő hatásvonalával párhuzamosan húzott egyenesre az erőnagyságát egy előre megválasztott erőléptékbe felmérjük.

1./1. Erőfelbontás – vektoriálisan



$F = 5\ kN$ $\qquad F^2 = F_x^2 + F_y^2$

$F_x = F \cdot \cos\alpha$ $\qquad tg\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x}$

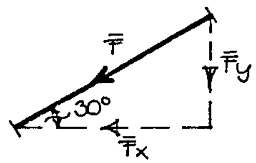
$F_y = F \cdot \sin\alpha$

$\alpha = 45°$ $\qquad F = 5\ kN$

$F_x = F \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 0{,}707 = 3{,}54\ kN$ (↑)

$F_y = F \cdot \sin\alpha = 5 \cdot 0{,}707 = 3{,}54\ kN$ (↑)

$tg\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{3{,}54}{3{,}54} = 1 \rightarrow 45°$

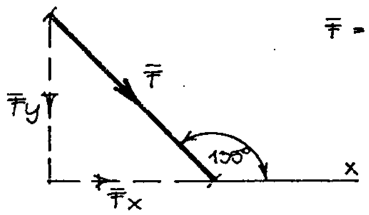


$F = 5\ kN$ $\qquad \alpha = 30°$

$F_x = F \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 0{,}866 = 4{,}33\ kN$ (←)

$F_y = F \cdot \sin\alpha = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\ kN$ (↓)

$tg\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{2{,}5}{4{,}33} = 0{,}577 \rightarrow 30°$

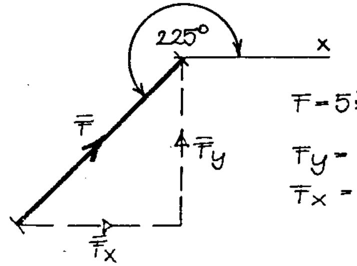


$F = 5\ kN$ $\qquad \alpha = 135°$ $\qquad 180° - 135° = 45°$

$F_y = 3{,}54\ kN$ (↓)

$F_x = 3{,}54\ kN$ (→)

$tg\,\alpha = 1$

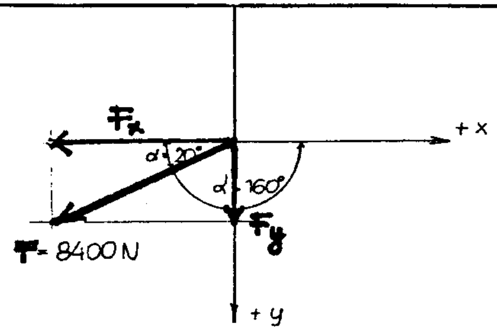


$F = 5\ kN$ $\qquad \alpha = 225°$ $\qquad 270° - 225° = 45°$

$F_y = 3{,}54\ kN$ (↑)

$F_x = 3{,}54\ kN$ (→)

1./2. Erőfelbontás az erő hatásvonalán



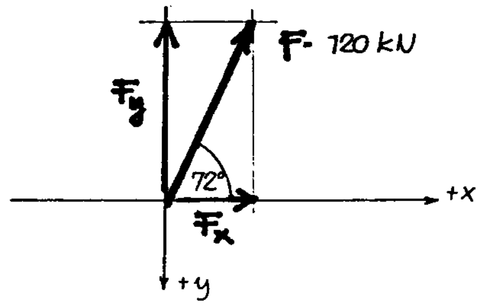
$\cos 160° = -0{,}9397$

$\sin 160° = +0{,}3420$

$F_x = 8400 \cdot (-0{,}9397) = -7893{,}48\ N$ (←)

$F_y = 8400 \cdot 0{,}3420 = +2872{,}80\ N$ (↓)

De az előjelek szemléletből is meghatározhatók. és akkor elég csak a vízszintessel bezárt szöggel számolni.

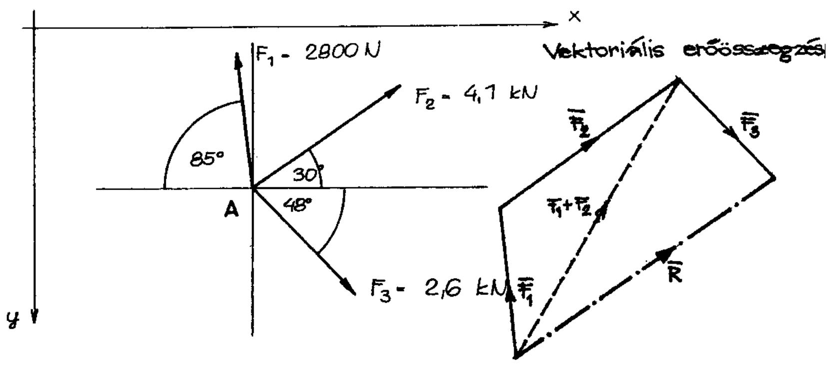


$F_x = +120 \cdot \cos 72° = +37{,}08\ kN$ (→)

$F_y = -120 \cdot \sin 72° = -114{,}13\ kN$ (↑)

1./3. Közös metszéspontú erők eredője

Mekkora lesz az alábbi erők vetületeinek összege?



$\sin 30° = 0,5$	$\cos 30° = 0,866$
$\sin 48° = 0,743$	$\cos 48° = 0,670$
$\sin 85° = 0,995$	$\cos 85° = 0,087$

$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} =$

$= -2,8 \cdot 0,087 + 4,1 \cdot 0,866 + 2,6 \cdot 0,670 = +5,049$ kN $(\rightarrow)$

$F_y = -2,8 \cdot 0,995 - 4,1 \cdot 0,5 + 2,6 \cdot 0,730 = -2,904$ kN $(\uparrow)$

Mekkora lesz az az F erő, aminek a fenti F_x és F_y érték a vetülete?

$|F| = (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} = (5,049^2 + 2,904^2)^{\frac{1}{2}} = 5,82$ kN $(\nearrow)$

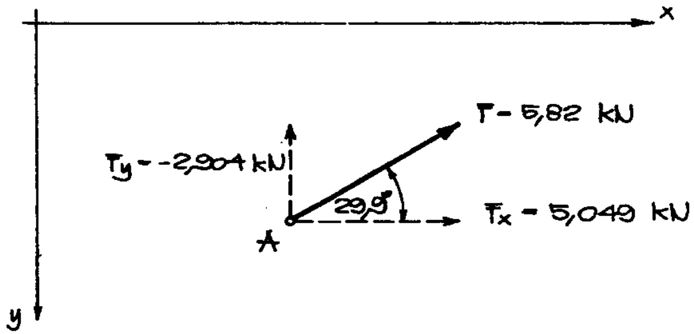
$\alpha = \text{arc tg} \frac{F_y}{F_x} = \text{arc tg} \frac{2,904}{5,049} = 29,9°$

irány a vetületek előjeléből szemlélettel meghatározható.

1./3. folyt.

Azt az erőt, amely ugyanabban a pontban hat és vetületei megegyeznek az F_1, F_2, F_3 erők vetületösszegével, azok eredőjének nevezzük.

Eredményvázlat:

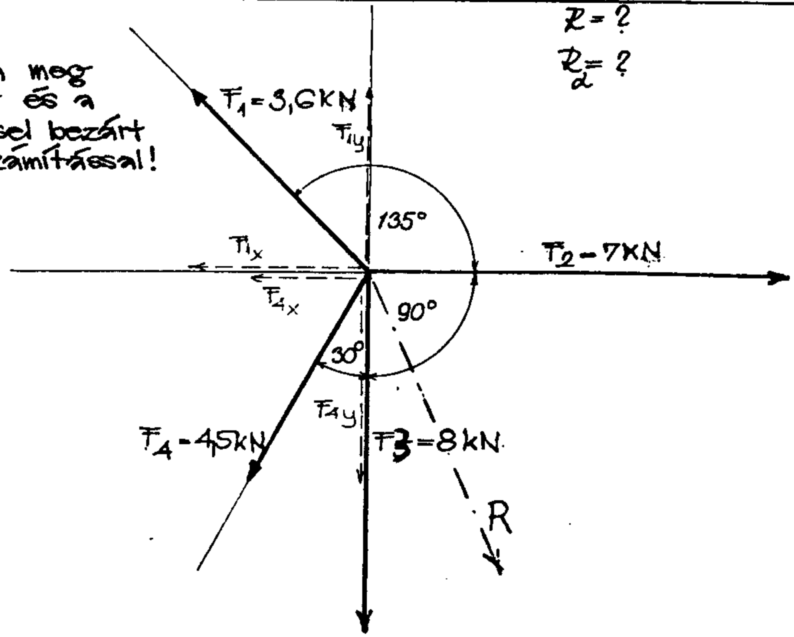


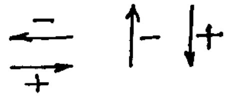
1./4. Közös metszéspontú erők eredője

$R = ?$

$R_\alpha = ?$

Határozza meg az eredőt és a vízszintessel bezárt szögét számítással!





$-F_{1x} = 3{,}6 \cdot 0{,}707 = 2{,}54\ kN\ (\leftarrow)$

$-F_{1y} = 3{,}6\ 0{,}707 = 2{,}54\ kN\ (\leftarrow)$

$-F_{4x} = 4{,}5 \cdot 0{,}500 = 2{,}25\ kN\ (\leftarrow)$

$+F_{4y} = 4{,}5 \cdot 0{,}866 = 3{,}90\ kN\ (\downarrow)$

$R_x = -2{,}54 + 7 - 2{,}25 = +2{,}21\ kN\ (\rightarrow)$

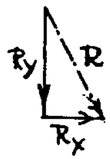
$R_y = -2{,}54 + 3{,}90 + 8 = +9{,}36\ kN\ (\downarrow)$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2{,}21^2 + 9{,}36^2} = \sqrt{4{,}88 + 87{,}60} = \sqrt{92{,}48}$

$R = 9{,}6\ kN$

$tg\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{9{,}36}{2{,}21} = 4{,}235 \rightarrow \alpha = 76{,}7°$

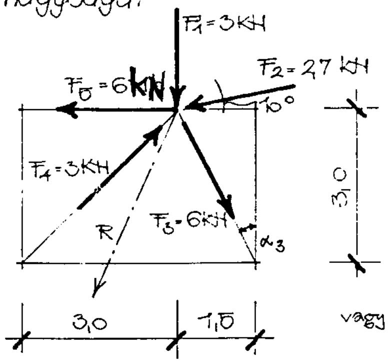
$R_\alpha = 76{,}7°$ az x tengelytől



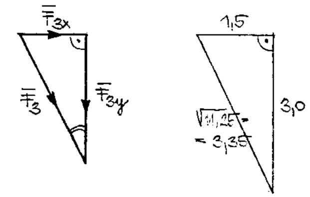
1./5. Közös metszéspontú erők eredője

a) Határozzuk meg az erőrendszer eredőjének nagyságát számítással

b) Határozzuk meg szerkesztéssel az eredő nagyságát



F_3 komponensei hasonlósággal:



$\frac{F_{3x}}{F_3} = \frac{1{,}5}{3{,}35} \rightarrow F_{3x} = \frac{6 \cdot 1{,}5}{3{,}35} = 2{,}68$

vagy: $tg\,\alpha_3 = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5 \rightarrow \alpha_3 = 26{,}6°$

$F_{1x} = 0$

$F_{2x} = 2{,}7 \cdot \cos 10° = 2{,}7 \cdot 0{,}9848 = -2{,}66\ kN\ (\leftarrow)$

$F_{3x} = 6 \cdot \sin 26{,}6° = 6 \cdot 0{,}4478 = +2{,}68\ kN\ (\rightarrow)$

$F_{4x} = 3 \cdot 0{,}707 = +2{,}12\ kN\ (\rightarrow)$

$F_5 = -6\ kN\ (\leftarrow)$

$R_x = -3{,}86\ kN\ (\leftarrow)$

$F_{1y} = +3\ kN\ (\downarrow)$

$F_{2y} = 2{,}7 \cdot \sin 10° = 2{,}7 \cdot 0{,}1736 = +0{,}46\ kN\ (\downarrow)$

$F_{3y} = 6 \cdot \cos 26{,}6° = 6 \cdot 0{,}8942 = +5{,}36\ kN\ (\downarrow)$

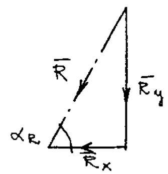
$F_{4y} = 3 \cdot 0{,}707 = -2{,}12\ kN\ (\uparrow)$

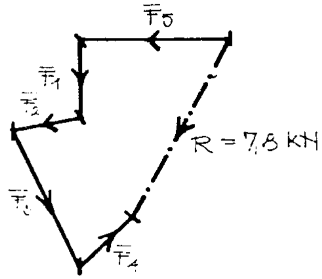
$F_{5y} = 0$

$R_y = 6{,}7\ kN\ (\downarrow)$

$R = \sqrt{3{,}86^2 + 6{,}7^2} = \sqrt{14{,}9 + 44{,}89} = \sqrt{59{,}79} = 7{,}73$

$R = 7{,}73\ kN$

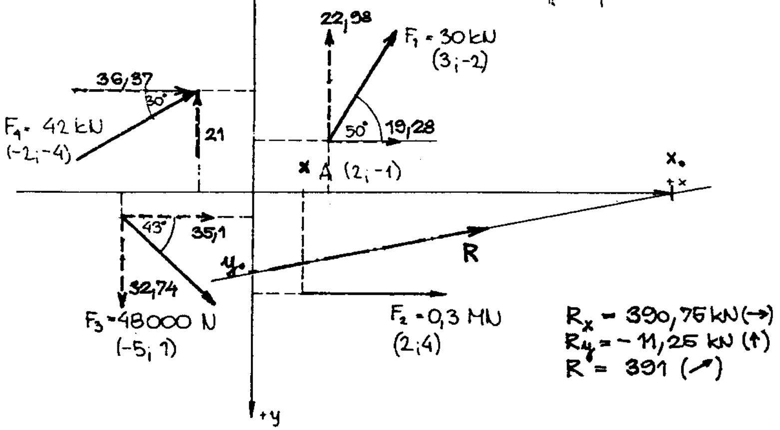




$tg\,\alpha_R = \frac{6{,}70}{3{,}86} = 1{,}735 \rightarrow \alpha_R = 60{,}05°$

1./6. Síkbeli, általános erőrendszer eredője

Számítsa ki az erők nyomatékát az „A" pontra!



$R_x = 390,75$ kN (→)
$R_y = -11,25$ kN (↑)
$R = 391$ (↗)

$$\Sigma M^{(A)} = \underbrace{30\cos 50^\circ}_{19,28}\cdot 1 - \underbrace{30\sin 50^\circ}_{22,98}\cdot 1 - 300\cdot 5 - \underbrace{48\cos 43^\circ}_{35,1}\cdot 2$$
$$-\underbrace{48\cdot\sin 43^\circ}_{32,74}\cdot 7 + \underbrace{42\cdot\cos 30^\circ}_{36,37}\cdot 3 + \underbrace{42\cdot\sin 30^\circ}_{21}\cdot 4 =$$
$$= \underline{-1609,94 \text{ kNm}}$$

$x_o = \frac{1609,94}{11,25} = 143,1$ (+)

$y_o = \frac{1609,94}{390,75} = 4,12$ (+)

1./7. Síkbeli, általános erőrendszer eredője

5. Határozzuk meg az erő nagyságát, irányát és helyét, ha

$F_x = -102,4$ kN

$F_y = -38,6$ kN

és nyomatéka az origóra

$M^{(o)} = +480$ kNm

$|F| = (102,4^2 + 38,6^2)^{\frac{1}{2}} = 109,43$ kN

$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{38,6}{102,4} = 20,65^\circ$

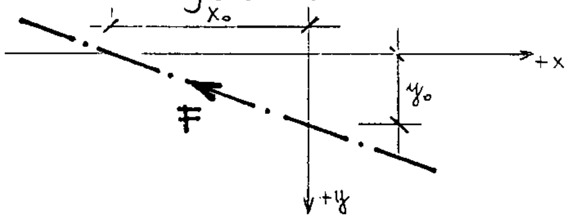
$x_o = \frac{M}{F_y} = \frac{480}{-38,6} = 12,43$ m (−)

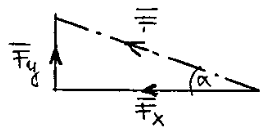
$y_o = \frac{M}{F_x} = \frac{480}{-102,6} = 4,69$ m (+)

$|F| = (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} = (98,7^2 + 42,4^2)^{\frac{1}{2}} = 107,42$ kN

$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{F_y}{F_x} = \text{arc tg}\,\frac{42,4}{98,7} = 23,25^\circ$

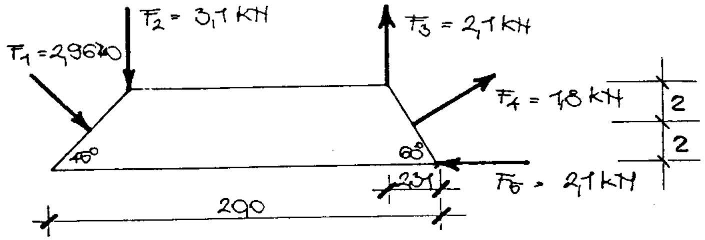
Eredményvázlat:





1./8. Síkbeli, általános erőrendszerek eredője

Határozza meg az ábrán látható erőrendszer eredőjének jellemzőit számítással



$F_{1x} = +2{,}96 \cdot \cos 45° = +2{,}093$

$F_{4x} \quad +1{,}8 \cdot \cos 30° = +1{,}56$

$F_{5x} \quad -2{,}1 \qquad = -2{,}10$

$R_x = +1{,}55 \, (\rightarrow)$

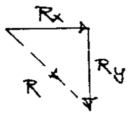
$F_{1y} = +2{,}96 \cdot \cos 45° = +2{,}093$

$F_{2y} = +3{,}1 \cdot 1{,}0 = +3{,}1$

$F_{5y} = -2{,}1 \cdot 1{,}0 = -2{,}1$

$F_{4y} = -1{,}8 \cdot \sin 30° = -0{,}9$

$R_y = +2{,}195 \, (\downarrow)$



$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2{,}195}{1{,}55} = 1{,}41$

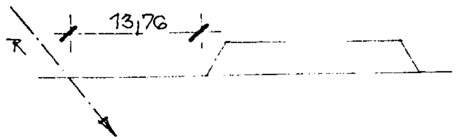
$\alpha = 54{,}6°$

$R = \sqrt{1{,}55^2 + 2{,}195^2} = \sqrt{2{,}4 + 4{,}82} = 2{,}68 \text{ kN}$

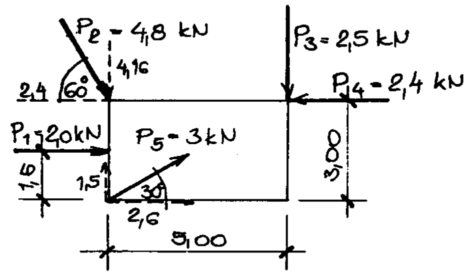
$R_y \cdot x_R = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2{,}96 + 4 \cdot 3{,}1 - 2{,}1 \cdot 17{,}69 - \overset{(20-1{,}15)}{18{,}85} \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 1{,}56$

$x_R = \dfrac{+8{,}360 + 12{,}400 - 37{,}10 - 16{,}98 + 3{,}12}{2{,}195} = -\dfrac{30{,}220}{2{,}195}$

$x_R = -13{,}76 \qquad y_R = -19{,}49$



1./9. Síkbeli, általános erőrendszerek eredője számítással és szerkesztéssel



$\cos 30° = 0{,}866$

$\sin 30° = 0{,}5$

$P_1 = 2{,}00 \times 1{,}3 = 2{,}6$

$P_2 = 4{,}80 \times 1{,}3 = 6{,}24$

$P_3 = 2{,}50 \times 1{,}3 = 3{,}25$

$P_4 = 2{,}40 \times 1{,}3 = 3{,}12$

$P_{1x} = +2{,}0 \qquad P_{1y} = 0$

$P_{2x} = +2{,}4 \qquad P_{2y} = +4{,}16$

$P_{3x} = 0 \qquad P_{3y} = +2{,}50$

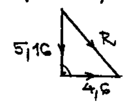
$P_{4x} = -2{,}4 \qquad P_{4y} = 0$

$P_{5x} = +2{,}6 \qquad P_{5y} = -1{,}5$

$R_x = 4{,}6 \text{ kN} \qquad R_y = 5{,}16 \downarrow \text{kN}$

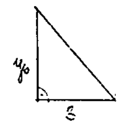
$R = \sqrt{4{,}6^2 + 5{,}16^2} = 6{,}9 \text{ kN}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{5{,}16}{4{,}60} = 1{,}121 \ldots 48{,}3°$



$x_R \cdot 5{,}16 = 1{,}5 \times 2{,}00 + 5 \times 2{,}5$

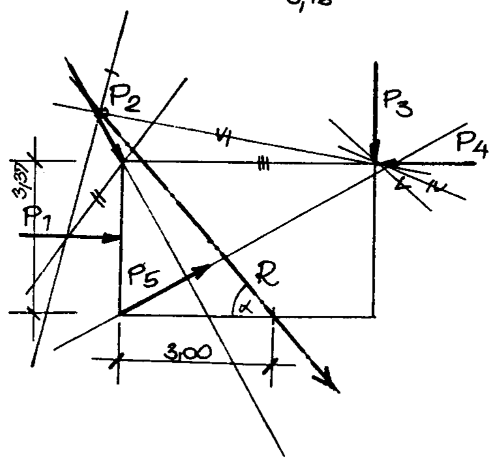
$x_R = \dfrac{15{,}5}{5{,}16} = 3{,}00 \text{ m} \qquad r = 2{,}25$

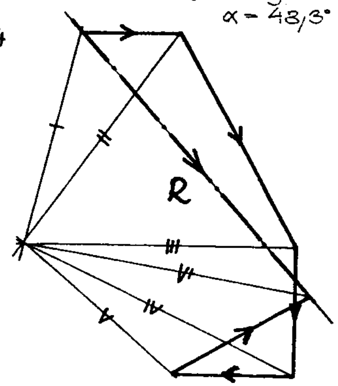


$y_0 = 3 \cdot \dfrac{5{,}16}{4{,}6} = 3{,}37$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3{,}37}{3}$

$\alpha = 48{,}3°$



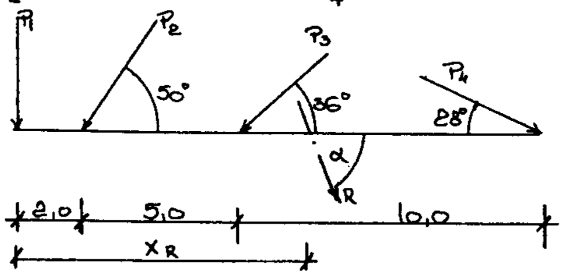


1./10. Síkbeli, ált. erőrendsz. eredője számítással

1./ **Határozzuk meg az eredő erőt!**

P_1=7o kN P_3=416kN

P_2=lookN P_4=526kN



P_{1x}= 7oxo = o P_{1y}= 7okN

P_{2x}=-looxcos5o=-64,4 P_{2y}=looxsin5o = 76,6

P_{3x}=-416xcos36=-338,o P_{3y}=416xsin36 = 244,6

P_{4x}=526xcos28 = 465,o P_{4y}=526xsin28 = 246,7

R_x= +62,6 kN R_y= +637,9 kN

$R = |62,6^2 + 637,9^2|^{\frac{1}{2}}$ = 641 kN

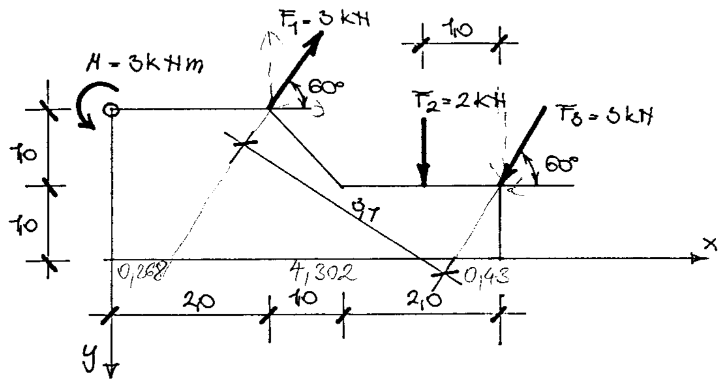
$\alpha = \text{arctg}\,\frac{637,9}{62,6}$ =84,4°

x_Rx637,9=2,ox76,6+7,ox244,6+17,ox246,7

x_R = 9,5m

1./11. Síkbeli, ált. erőrendszerek eredője számítással

Határozzuk meg az eredő erő jellemzőit



1.) Szögfüggvények

sin 60° = 0,866

cos 60° = 0,5

2.) Eredő vízszintes összetevője

F_{1x} = +3 · 0,5 = + 1,5 kN (→)

F_{3x} = −3 · 0,5 = − 1,5 kN (←)

3.) Eredő függőleges összetevője

$F_{1y} - F_{3y} = 0$ $R_y = F_2 = 2$ kN (↓)

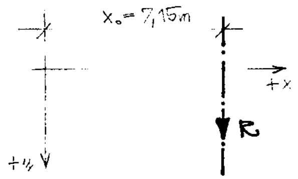
4.) Eredő helye és nagysága

$M_A = -3,0 + 3,10 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = R_y \cdot x_R$

$M_A = -3,0 + 9,3 + 8 = 2 \cdot x_R$

$14,3 = 2 \cdot x_R$

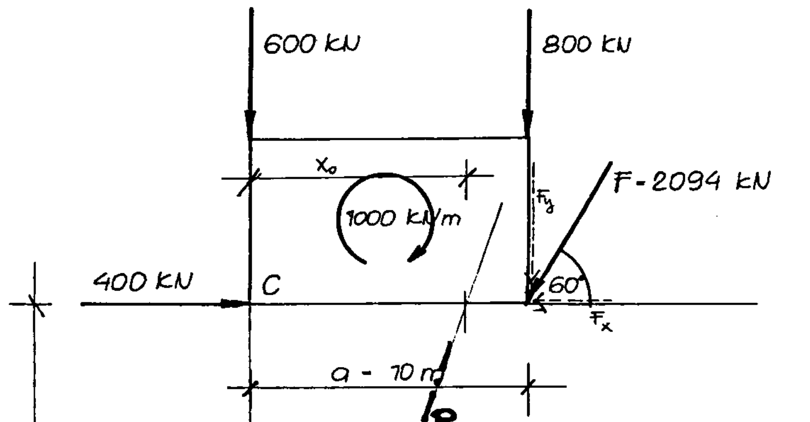
$\underline{7,15 = x_R}$



$\underline{R = R_y = 2 \text{ kN} (\downarrow)}$

1./16. Síkbeli, ált. erőrendszerek eredője számítással

Milyen „x" távolságra metszi az eredő a „C"-től, a „C" ponton átmenő vízszintes tengelyt?



$F_y = 2094 \cdot \sin 60° = 1813$ kN

$F_x = 2094 \cdot \cos 60° = 1047$ kN

$\Sigma M_c \Rightarrow \quad 1000 + 800a + 1813a = R_y \cdot x$

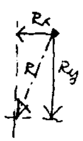
$$x_o = \frac{1000 + 2613a}{600 + 800 + 1813} = 8{,}443 \text{ m}$$

$y_o = 41{,}93$ m

$R_y = 3213$ kN (↓)

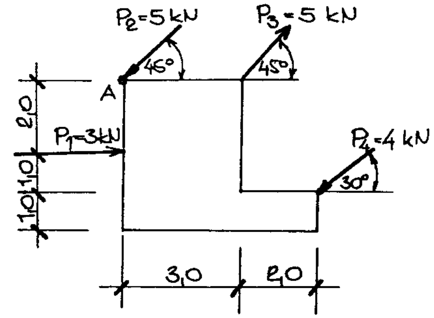
$R_x = 647$ kN (←)

$R = 3278$ kN (↙)



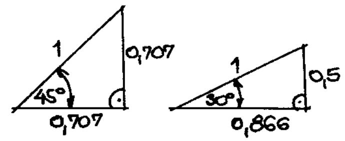
1./17. Síkbeli erőrendszerek eredője számítással

ERŐ ÉS ERŐPÁR ÖSSZETÉTELE
ERŐ ÉS NYOMATÉK →—



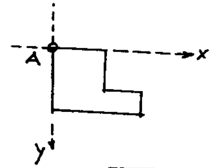
1. SZÖGFÜGGVÉNYEK

$\sin 45° = 0{,}707$
$\cos 45° = 0{,}707$
$\sin 30° = 0{,}5$
$\cos 30° = 0{,}866$



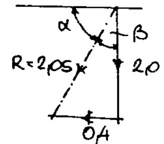
2. VÍZSZINTES EREDŐ ÖSSZETEVŐ:

$P_{1x} = \quad = +3{,}0$
$P_{4x} = -4 \cdot 0{,}866 = -3{,}465$
$R_x = -0{,}465$ kN



3. FÜGGŐLEGES EREDŐ ÖSSZETEVŐ:

$P_{4y} = +2$
$R_y = +2$ kN



4. EREDŐ NAGYSÁGA ÉS HELYE

$R = \sqrt{0{,}465^2 + 2{,}0^2} = \sqrt{0{,}216 + 4{,}0} = \sqrt{4{,}216} = \underline{2{,}05 \text{ kN}}$

$\mathrm{tg}\beta = \dfrac{0{,}465}{2{,}0} = 0{,}233 \qquad \beta = 13{,}1°$
$\underline{\alpha = 76{,}9°}$

$\Sigma M_A = -\overset{P_2}{3{,}0 \cdot 3{,}535} + \overset{P_{4x}}{3{,}0 \cdot 3{,}465} + \overset{P_3}{5{,}0 \cdot 2{,}0} - \overset{P_4}{2{,}0 \cdot 3{,}0} = R_y \cdot x_R$

$$x_R = \frac{-10{,}6 + 10{,}4 + 10 - 6{,}0}{2} = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9 \text{ m}$$

$\underline{x_R = 1{,}9 \text{ m}}$

$y_R = 8{,}2$ m