MUNKA- ÉS ENERGIATÉTELEK

1. előadás:

Alapfogalmak; A virtuális elmozdulások tétele

2. előadás:

Alapfogalmak; A virtuális erők tétele

Elmozdulások számítása a virtuális erők tétele alapján

3. előadás:

Az erőmódszer (Statikailag határozatlan tartók számítása)

4. előadás:

Energiatételek (Potenciális energia; Kiegészítő potenciális energia)

5. előadás:

Energiatételek alkalmazása (Összevont gyakorlat)

1. előadás:

<u>Alapfogalmak</u>

→ A munka fogalmának általánosítása

→ Külső és belső munka

→ Saját és idegen munka

<u>A virtuális elmozdulások tétele</u>

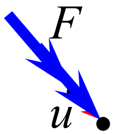
→ A virtuális elmozdulásrendszer fogalma

→ A virtuális munka fogalma

→ A virtuális elmozdulások tétele

1. A munka fogalmának általánosítása

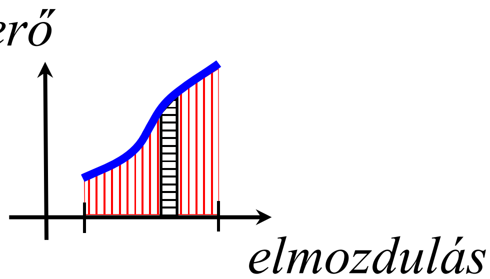
$$"W = F \cdot u"$$



elemi munka:

„növekmény”

$$dW = F \cdot du$$

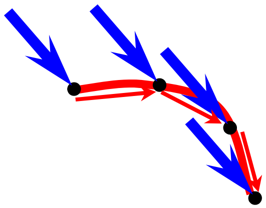


teljes munka:

„összegzett”

$$W = \int_{(\mathbf{u})} F \cdot du$$

$$W = \int_{(\mathbf{u})} \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{u}$$



1. A munka fogalmának általánosítása

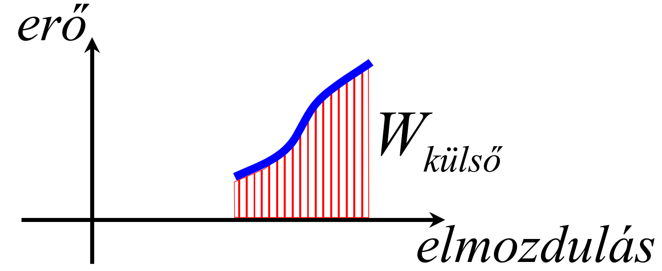
általánosított erők	munka – elemi	munka – teljes	általánosított elmozdulások
külső erők:			*elmozdulások:*
$\mathbf{F}$	$dW = \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{u}$	$W = \int\limits_{(\mathbf{u})} \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{u}$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{M}$	$dW = \mathbf{M}^T \cdot d\boldsymbol{\varphi}$	$W = \int\limits_{(\boldsymbol{\varphi})} \mathbf{M}^T \cdot d\boldsymbol{\varphi}$	$\boldsymbol{\varphi}$
$\mathbf{q}(x, y, z)$	$dW = \int\limits_{(S)} \left(\mathbf{q}^T \cdot d\mathbf{u}\right) dS$	$W = \int\limits_{(S)} \left(\int\limits_{(\mathbf{u})} \mathbf{q}^T \cdot d\mathbf{u} \right) dS$	$\mathbf{u}(x, y, z)$
$\mathbf{g}(x, y, z)$	$dW = \int\limits_{(V)} \left(\mathbf{g}^T \cdot d\mathbf{u}\right) dV$	$W = \int\limits_{(V)} \left(\int\limits_{(\mathbf{u})} \mathbf{g}^T \cdot d\mathbf{u} \right) dV$	$\mathbf{u}(x, y, z)$

A külső munka

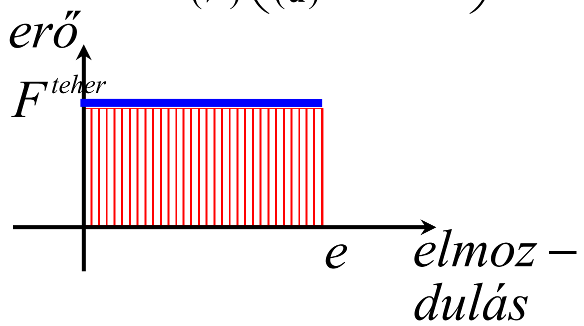
Jelölés: **f** : összes külső koncentrált erő és nyomaték komponensei

e : támadáspontjaiknak elmozdulásai

$$W_{k\ddot{u}ls\H{o}} = \int_{(\mathbf{e})} \mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{e} + \int_{(S)} \left(\int_{(\mathbf{u})} \mathbf{q}^T \cdot d\mathbf{u} \right) dS + \int_{(V)} \left(\int_{(\mathbf{u})} \mathbf{g}^T \cdot d\mathbf{u} \right) dV$$

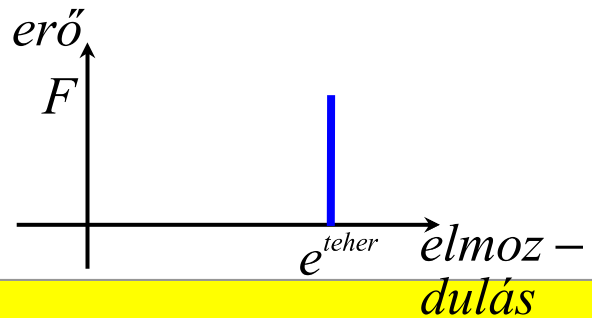


pl. statikai teher:



$$W_{k\ddot{u}ls\H{o}} = e \cdot F^{teher}$$

pl. előírt támasz-mozgás:

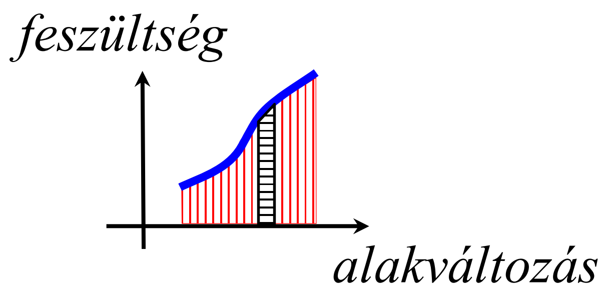


$$W_{k\ddot{u}ls\H{o}} = 0$$

A belső munka

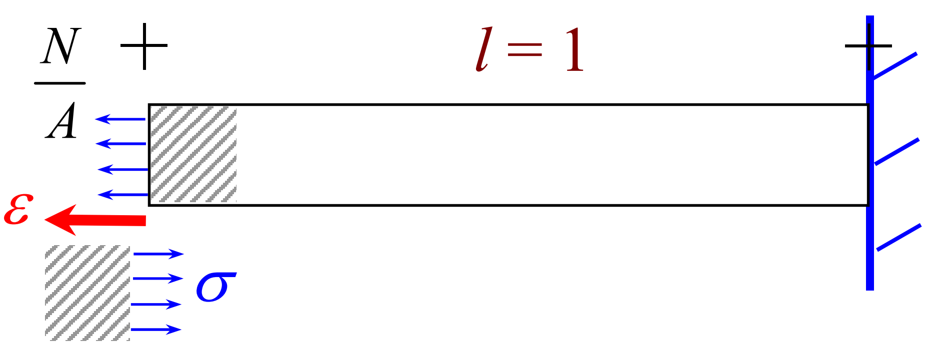
feszültségek	belső munka	alakváltozások
$\sigma_x(x,y,z),\sigma_y(\ldots),\sigma_z(\ldots)$		$\varepsilon_x(x,y,z),\varepsilon_y(\ldots),\varepsilon_z(\ldots)$
$\tau_{xy}(x,y,z),\tau_{xz}(\ldots),\tau_{yz}(\ldots)$		$\gamma_{xy}(x,y,z),\gamma_{xz}(\ldots),\gamma_{yz}(\ldots)$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix}$$



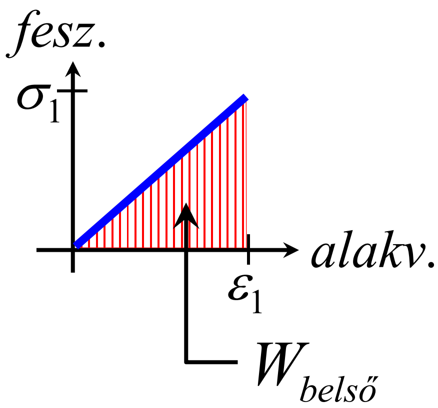
$$W_{belső}=-\int_{(V)}\left(\int_{(\boldsymbol{\varepsilon})}\boldsymbol{\sigma}^T\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}\right)dV$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}$$

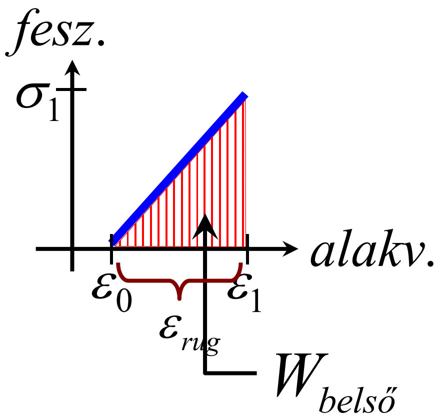


A belső munka lineárisan rugalmas anyag esetén

$$W_{belső} = -\int\limits_{(V)} \left(\int\limits_{(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \right) dV$$



$$W_{belső} = -\int\limits_{(V)} \frac{1}{2} E \boldsymbol{\varepsilon}_1{}^2 dV$$



$$W_{belső} = -\int\limits_{(V)} \frac{1}{2} E \big(\overbrace{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}^{\varepsilon_{rug}}\big)^2 dV$$

A belső munka gerendák esetén

igénybevételek	belső munka	alakváltozások
$N(z)$	pl. $W_{belső} = -\int\limits_{(l)} \left(\int\limits_{(\varepsilon)} N(z) \cdot d\varepsilon_z(z) \right) dz$	$\varepsilon_z(z)$
$T_x(z),\ T_y(z)$		$\gamma_{zx}(z),\ \gamma_{zy}(z)$
$M_x(z),\ M_y(z)$		$\kappa_x(z),\ \kappa_y(z)$
$M_{cs}(z)$	pl. $W_{belső} = -\int\limits_{(l)} \left(\int\limits_{(\kappa_z)} M_{cs}(z) \cdot d\kappa_z(z) \right) dz$	$\kappa_z(z)$

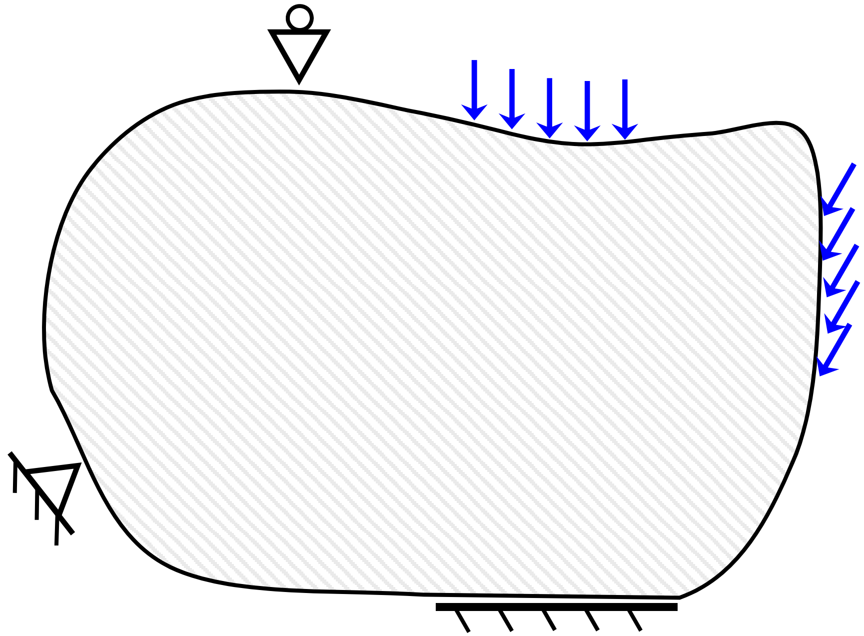
[a többi igénybevételre is analóg módon]

2. Saját és idegen munka fogalma

Elmozdulás-alakváltozás-rendszer: $(\mathbf{e}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$ *röviden „elmozdulásrendszer”*

Erő-feszültség-rendszer: $(\mathbf{f}, \mathbf{q}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma})$ *röviden „erőrendszer”*

mezők!!!



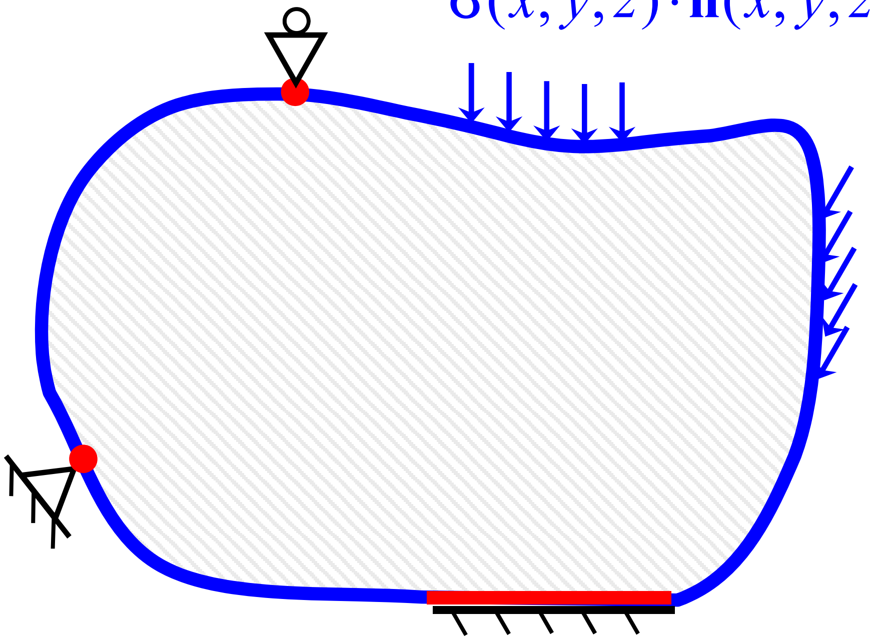
2. Saját és idegen munka fogalma

Geometriai peremfeltételek: S_u tartományon

$$\mathbf{u}(x,y,z)=\mathbf{u}_0(x,y,z) \text{ (adott)}$$

Statikai peremfeltételek: S_q tartományon

$$\boldsymbol{\sigma}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)=\mathbf{q}_0(x,y,z) \text{ (adott)}$$



$$S_q \cap S_u = 0$$

$$S_q \cup S_u = S$$

2. Saját és idegen munka fogalma

Geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer: *„kompatibilis”*

→ teljesülnek a geometriai peremfeltételek

→ teljesülnek a geometriai egyenletek pl. $\dfrac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial x} = \varepsilon_x(x,y,z)$ stb.

Statikailag lehetséges erőrendszer: *„egyensúlyi”*

→ teljesülnek a statikai peremfeltételek

[a peremeken lévő hasábok egyensúlyban]

→ teljesülnek az egyensúlyi egyenletek

[minden belső elemi hasáb egyensúlyban]

Összetartozó erő-és elmozdulásrendszer:

→ teljesülnek az ANYAGEGYENLETEK σ és ε között

2. Saját és idegen munka fogalma

A tényleges erő-és elmozdulásrendszer:

→ az erőrendszer ***statikailag lehetséges***;

→ az elmozdulásrendszer ***geometriailag lehetséges***;

→ a két rendszer ***összetartozó***

[bizonyítható:

rugalmas anyagú test esetén, tetszőleges adott terhekre:

legfeljebb **egy** ilyen erő-elmozdulás-rendszer van]

Saját munka:

az erőrendszer a vele összetartozó elmozdulásrendszeren végzi

Idegen munka:

a két rendszer nem tartozik össze

3. Virtuális elmozdulásrendszer és virtuális munka

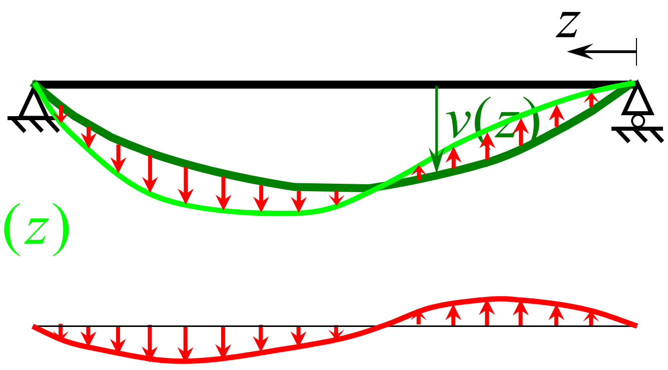
A virtuális elmozdulás-alakváltozás-rendszer: $(\delta \mathbf{e}, \delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon})$

Def.: egy tetszőleges geometriailag lehetséges elmozdulásrendszernek változatlan geometriai peremfeltételek mellett képezett differenciálisan kicsiny megváltoztatása, „variációja”

pl. $v(z)$

$v(z) + \delta v(z)$

$\delta v(z)$



A virtuális elmozdulás-alakváltozásrendszer jellemzői:

- geometriailag lehetséges
- kicsiny

$\Rightarrow$ pl. a tényleges elmozdulásrendszer is, feltéve, hogy kicsi

3. Virtuális elmozdulásrendszer és virtuális munka

A virtuális munka: δW

a ***tényleges*** erőrendszernek $(\mathbf{f}, \mathbf{q}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma})$

egy ***virtuális*** elmozdulásrendszeren $(\delta\mathbf{e}, \delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\varepsilon})$

végzett munkája

$$\delta W_{k\ddot{u}ls\H{o}} = \mathbf{f}^T \cdot \delta\mathbf{e} + \int_{(S)} \mathbf{q}^T \cdot \delta\mathbf{u}\, dS + \int_{(V)} \mathbf{g}^T \cdot \delta\mathbf{u}\, dV$$

$$\delta W_{bels\H{o}} = -\int_{(V)} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$\delta W = \delta W_{k\ddot{u}ls\H{o}} + \delta W_{bels\H{o}}$$

IDEGEN MUNKA!

4. A virtuális elmozdulások tétele

Tétel:

Egy erőrendszer ***akkor*** *és* ***csak akkor*** *statikailag lehetséges, ha* ***bármely*** *virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája* ***zérus.***

→ a vizsgált erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele

→ ha csak egy virtuális elmozdulásrendszerre mutattuk ki, hogy $\delta W = 0$:

még csak egy szükséges feltételt vizsgáltunk;

elégséges feltétel: minden virtuális elmozdulásrendszerre $\delta W = 0$

→ a szerkezet anyaga: mindegy! [idegen munka]

4. A virtuális elmozdulások tétele

Alkalmazása:

pl. elméleti alap más tételekhez

pl. statikailag határozott tartók reakcióerőinek számítása:

→ adott: a szerkezet és a terhek; keressük: az egyik reakciót

→ választunk egy virtuális elmozdulásrendszert:

a keresett reakció helyén: legyen 1 (vagy más választott érték)

a többi támasznál: legyen 0

a tartó mentén: legyen merevtestszerű

→ felírjuk a virtuális elmozdulások tételét:

$$\delta W_{\text{külső}} + \underbrace{\delta W_{\text{belső}}}_{0} = 0 \qquad \Rightarrow \text{a keresett reakció ✓}$$

Minimumkérdések

37. Mi a virtuális elmozdulásrendszer és a virtuális munka? Mit mond ki a virtuális elmozdulások tétele? Mire használjuk?