11. hét: A virtuális elmozdulások és erők tétele

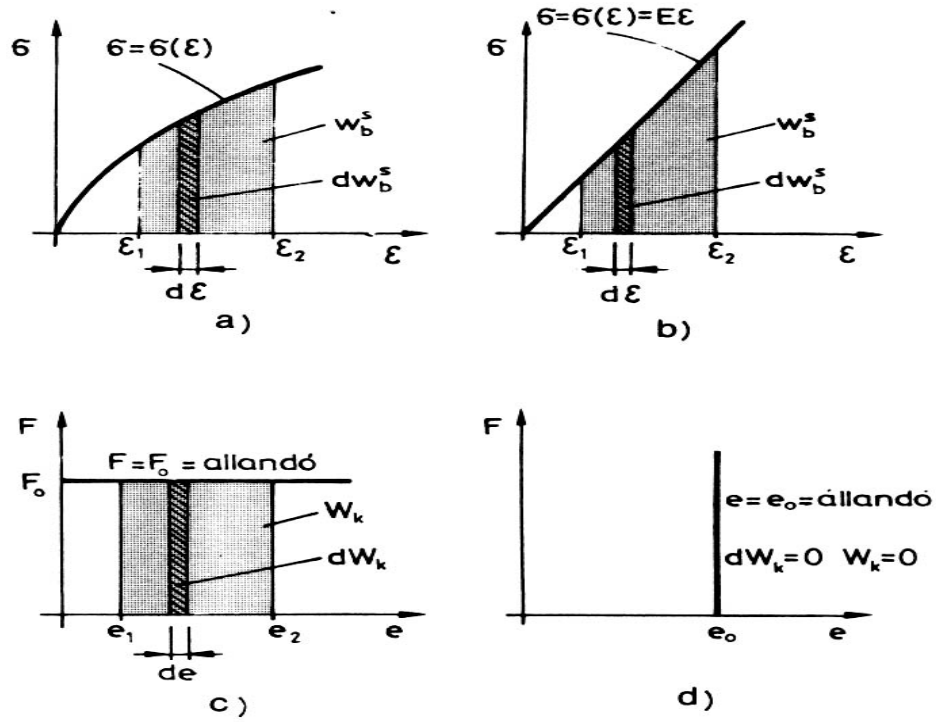
Általánosított erők és elmozdulások

Általánosított erők: Külső és belső, erő és feszültség jellegű mennyiségek összessége (erők és erőpárok, igénybevételek, normál- és nyírófeszültségek). *Egyensúlyi erőrendszer*: amely az egyensúlyi egyenleteket és peremfeltételeket kielégíti.

Általánosított elmozdulások: Külső és belső, elmozdulás és alakváltozás jellegű mennyiségek összessége (eltolódások és elfordulások, fajlagos nyúlások és szögváltozások). *Kompatibilis elmozdulásrendszer*: amely a geometriai egyenleteket és peremfeltételeket kielégíti.

feszültségek			ÁLTALÁNOSÍTOTT ERŐK	ÁLTALÁNOSÍTOTT ELMOZDULÁSOK		
	KÜLSŐ	erők	koncentrált erő: F	eltolódási érték: e	KÜLSŐ	elmozdulások
	KÜLSŐ	erők	koncentrált erőpár: M	elfordulási érték: φ	KÜLSŐ	elmozdulások
	KÜLSŐ	erők	megoszló erőrendszerek $q(x, y, z)$, $g(x, y, z)$	elmozdulásfüggvények $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$	KÜLSŐ	elmozdulások
	BELSŐ	feszült-ségek	feszültségfüggvények: $\sigma_x(x, y, z), \ldots$ $\tau_{xy}(x, y, z), \ldots$	alakváltozás-függvények: $\varepsilon_x(x, y, z), \ldots$ $\gamma_{xy}(x, y, z), \ldots$	BELSŐ	alakvál-tozások
	GERENDÁK	igénybevételei	normálerő: $N(z)$	fajlagos nyúlás: $\varepsilon(z)$	GERENDÁK	alakváltozá-sai
	GERENDÁK	igénybevételei	nyíróerő: $Q(z)$	szögváltozás: $\gamma(z)$	GERENDÁK	alakváltozá-sai
	GERENDÁK	igénybevételei	hajlítónyomaték: $M(z)$	fajlagos elfordulás: $\kappa_x(z)$	GERENDÁK	alakváltozá-sai
	GERENDÁK	igénybevételei	csavarónyomaték: $T(z)$	fajlagos elcsavarodás: $\kappa_z(z)$	GERENDÁK	alakváltozá-sai

A./ A munka fogalma



A/1. Elemi és teljes munka

Elemi munka: erőnek az irányába eső elemi elmozduláson végzett munkája:

$$dW = F \cdot de .$$

Teljes munka: az elemi munkák összege, *elmozdulás szerinti integrálja*:

$$W = \int_{e_1}^{e_2} F de .$$

Állandó nagyságú elmozdulás esetén a munka értéke zérus.

A/2. Fajlagos és eredő munka

Fajlagos munka: egy megoszló erőrendszernek a megfelelő megoszló elmozdulásrendszeren végzett munkája (a test egy pontjában végzett munka):

$$dw = g_x(x,y,z) \cdot du_x(x,y,z) \text{ (elemi fajlagos munka),}$$

$$w = \int_u g_x(x,y,z) \;\; du_x(x,y,z) \text{ (teljes fajlagos munka).}$$

Eredő munka: a fajlagos munkák összege, a *test térfogatára vonatkozó integrálja* (a teljes testben végzett munka):

$$dW = \int_V g_x(x,y,z) \;\; du_x(x,y,z) \;\; dV \text{ (elemi eredő munka),}$$

$$W = \int_V \int_u g_x(x,y,z) \;\; du_x(x,y,z) \;\; dV \text{ (teljes eredő munka).}$$

A/3. Saját és idegen munka

Saját munka: ha a munkát végző erők és elmozdulások egymással függvénykapcsolatban vannak (összetartozók: pl. az erő okozza az elmozdulást).

Idegen munka: ha a munkát végző erők és elmozdulások között nincs függvénykapcsolat.

A/4. Külső és belső munka

Külső munka: a külső erők megfelelő *elmozdulásokon* végzett munkája:

$$dW_k = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} d\mathbf{e} + \int_S \mathbf{q}^{\mathrm{T}} d\mathbf{u} \, dS + \int_V \mathbf{g}^{\mathrm{T}} d\mathbf{u} \, dV \text{ (elemi külső munka),}$$

$$W_k = \int_e \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \, d\mathbf{e} + \int_S \int_u \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \, d\mathbf{u} \, dS + \int_V \int_u \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \, d\mathbf{u} \, dV \text{ (teljes külső munka).}$$

A fenti kifejezésekben **f** koncentrált erőt, **g** térfogati erőt, **q** pedig az S peremen (rendszerint felületen) működő (fajlagos) erőt jelent. Külső munka csak erőteherből keletkezik.

Belső munka: a feszültségek megfelelő *alakváltozásokon* végzett munkája:

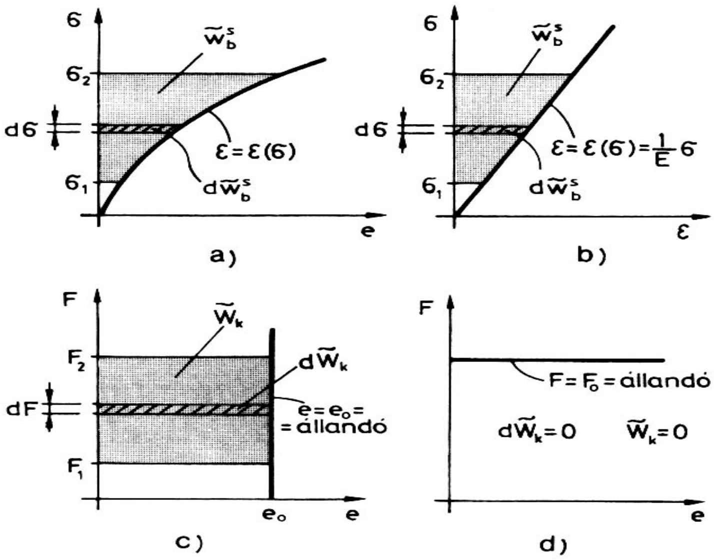
$$dw_b = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \text{ (elemi belső munka, fajlagos: egy pontban),}$$

$$w_b = -\int_\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \text{ (teljes belső munka, fajlagos: egy pontban),}$$

$$W_b = -\int_V \int_\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\varepsilon} \, dV \text{ (teljes belső munka, eredő: a teljes testben).}$$

A belső munka negatív a feszültségeknek az alakváltozások létrejöttét gátló hatása miatt.

B./ A kiegészítő munka fogalma



B/1. Elemi és teljes kiegészítő munka

Elemi kiegészítő munka: elmozdulásnak az irányába eső elemi erőn végzett munkája:

$$d\widetilde{W} = e\,dF.$$

Teljes kiegészítő munka: az elemi kiegészítő munkák összege, *erő szerinti integrálja:*

$$\widetilde{W} = \int_{F_1}^{F_2} e\ dF.$$

Állandó nagyságú erő esetén a kiegészítő munka értéke zérus.

B/2. Fajlagos és eredő kiegészítő munka

Fajlagos kiegészítő munka: egy megoszló elmozdulásrendszernek a megfelelő megoszló erőrendszeren végzett munkája (a test egy pontjában végzett kiegészítő munka):

$$d\widetilde{w} = u_x(x,y,z)\cdot dg_x(x,y,z) \text{ (elemi fajlagos kiegészítő munka)},$$

$$\widetilde{w} = \int_g u_x(x,y,z)\ \ dg_x(x,y,z) \text{ (teljes fajlagos kiegészítő munka)}.$$

Eredő kiegészítő munka: a fajlagos kiegészítő munkák összege, a *test térfogatára vonatkozó integrálja* (a teljes testben végzett kiegészítő munka):

$$d\widetilde{W} = \int_V u_x(x,y,z)\ \ dg_x(x,y,z)\ dV \text{ (elemi eredő kiegészítő munka)},$$

$$\widetilde{W} = \int_V \int_g u_x(x,y,z)\ dg_x(x,y,z)\ dV \text{ (teljes eredő kiegészítő munka)}.$$

B/3. Saját és idegen kiegészítő munka

Saját kiegészítő munka: ha a munkát végző elmozdulások és erők egymással függvénykapcsolatban vannak (összetartozók: pl. az elmozdulás okozza az erőt).

Idegen kiegészítő munka: ha a munkát végző elmozdulások és erők között nincs függvénykapcsolat.

B/4. Külső és belső kiegészítő munka

Külső kiegészítő munka: az elmozdulások megfelelő *erőkön* végzett munkája:

$$d\widetilde{W}_k = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} d\mathbf{f} + \int_S \mathbf{u}^{\mathrm{T}} d\mathbf{q}\, dS + \int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}} d\mathbf{g}\, dV \quad \text{(elemi külső kiegészítő munka),}$$

$$\widetilde{W}_k = \int_e \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\, d\mathbf{f} + \int_S \int_q \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\, d\mathbf{q}\, dS + \int_V \int_g \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\, d\mathbf{g}\, dV \quad \text{(teljes külső kiegészítő munka).}$$

Külső kiegészítő munka csak elmozdulás-teherből keletkezik.

Belső kiegészítő munka: az alakváltozások megfelelő *feszültségeken* végzett munkája:

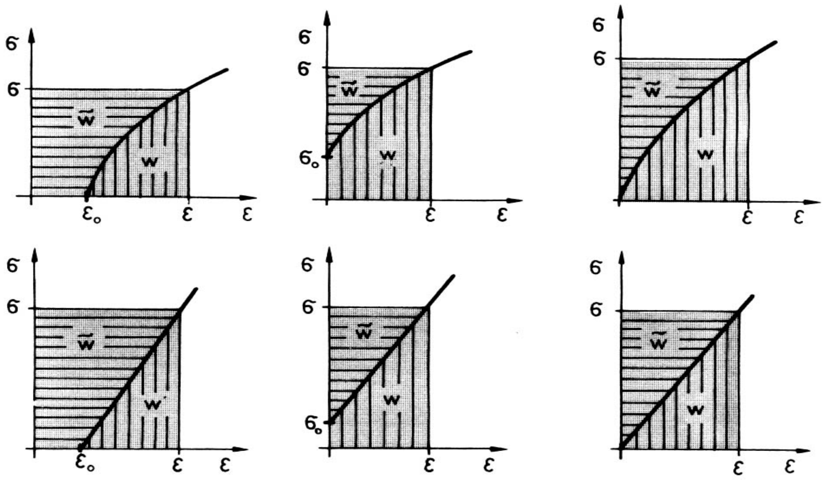
$$d\widetilde{w}_b = -\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\, d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{(elemi belső kiegészítő munka, fajlagos: egy pontban),}$$

$$\widetilde{w}_b = -\int_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\, d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{(teljes belső kiegészítő munka, fajlagos: egy pontban),}$$

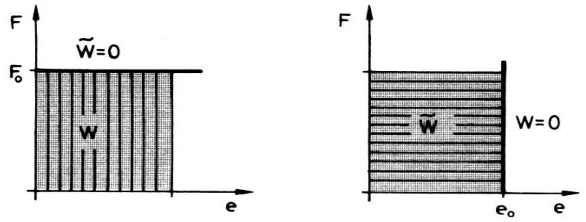
$$\widetilde{W}_b = -\int_V \int_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\sigma}\, dV \quad \text{(teljes belső kiegészítő munka, eredő: a teljes testben).}$$

B/5. A munka és a kiegészítő munka kapcsolata

A munka és a kiegészítő munka akkor egyenlő egymással, ha a feszültségek és alakváltozások között lineáris összefüggés áll fenn és nincsenek kezdeti feszültségek, illetve alakváltozások.



a) összetartozó erő-elmozdulásrendszerek

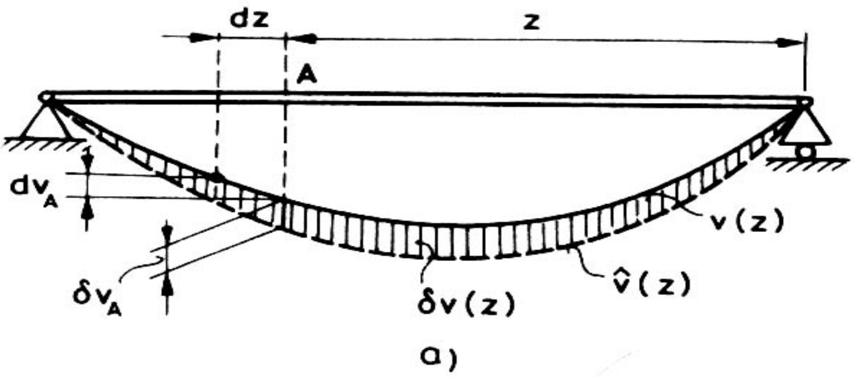


b) nem összetartozó erő-elmozdulásrendszerek

C./ A virtuális elmozdulás és a virtuális munka

C/1. Virtuális elmozdulásrendszer: egy tetszőleges, geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer változatlan geometriai feltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása, variációja.

Fontos különbséget tenni egy $v(z)$ függvény $\delta v(z)$ *variációja* (a függvény megváltozása) és dv *növekménye* (adott függvényérték megváltozása) között.



Ha egy vizsgált **elmozdulásrendszer véges** (pl. n-szabadságfokú), akkor a geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer a $c_1, c_2, ..., c_n$ véges n számú független elmozdulás paraméter függvényében fejezhető ki, és így ilyenkor a $\delta v(z)$ virtuális elmozdulásrendszer a $v(\mathbf{c})$ függvény variációja:

$$\delta v(z) = \frac{\partial v(\mathbf{c})}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial v(\mathbf{c})}{\partial c_2}\delta c_2 + ... + \frac{\partial v(\mathbf{c})}{\partial c_n}\delta c_n .$$

Geometriai **linearitás** esetén a tényleges elmozdulásrendszer virtuális elmozdulásrendszernek tekinthető, **geometriai nemlinearitás** esetén azonban a tényleges elmozdulásrendszer **nem** tekinthető virtuális elmozdulásrendszernek.

C/2. Virtuális munka: *tényleges erőrendszernek virtuális elmozdulásrendszeren* végzett munkája:

$$\delta W_k = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{e} + \int_S \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{u}\, dS + \int_V \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{u}\, dV \quad \text{(külső virtuális munka),}$$

$$\delta W_b = -\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV \quad \text{(belső virtuális munka).}$$

D./ A virtuális erő és a virtuális kiegészítő munka

D/1. Virtuális erőrendszer: egy tetszőleges statikailag lehetséges erőrendszer változatlan statikai feltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása, variációja.

Ha a statikailag lehetséges erőrendszer véges (pl. n-szabadságfokú), azaz n darab $d_1, d_2, ..., d_n$ független erőparaméter függvénye, akkor a $\delta q(z)$ virtuális erőrendszer a $q(\mathbf{d})$ függvény variációjaként írható fel:

$$\delta q(z) = \frac{\partial q(\mathbf{d})}{\partial d_1} + \frac{\partial q(\mathbf{d})}{\partial d_2} + ... + \frac{\partial q(\mathbf{d})}{\partial d_n} .$$

D/2. Virtuális kiegészítő munka: *tényleges elmozdulásrendszernek virtuális erőrendszeren* végzett munkája:

$$\delta \widetilde{W}_k = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{f} + \int_S \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{q}\, dS + \int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{g}\, dV \quad \text{(külső virtuális kiegészítő munka),}$$

$$\delta \widetilde{W}_b = -\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\sigma}\, dV \quad \text{(belső virtuális kiegészítő munka).}$$

E./ A virtuális elmozdulások tétele

E/1. A virtuális elmozdulások tétele: Egy statikailag lehetséges erőrendszer *bármely* virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája zérus. Más megfogalmazásban: egyensúlyban levő mechanikai rendszeren végzett virtuális munkák összege zérus:

$$\delta W = \delta W_k + \delta W_b = 0.$$

A virtuális elmozdulások tétele az erőrendszerek **egyensúlyának** szükséges feltétele. A tétel bármilyen anyagú szilárd testre érvényes.

E/2. A virtuális elmozdulások tételének alkalmazása

Mivel a virtuális elmozdulások tételében az erők a *ténylegesek* és az elmozdulások a *virtuálisak*, és mindig a tartók *tényleges* állapotváltozóit keressük, logikusan adódik, hogy a virtuális elmozdulások tételét statikai, vagyis erő-jellegű mennyiségek (reakcióerők, igénybevételek) számítására használjuk.

- **Merev testek** elmozdulási szabadságfoka véges, azaz véges számú elmozdulás-*paraméterrel* jellemezhető, így a tétel alkalmazása ezek számával megegyező számú egyensúlyi *egyenletre* vezet.
- **Szilárd testek** elmozdulási szabadságfoka végtelen, azaz véges számú elmozdulás-*függvénnyel* jellemezhető, így a tétel alkalmazása ezek számával azonos számú egyensúlyi *differenciálegyenletre* vezet.

Keressünk például egy szerkezeten valamely reakcióerőt vagy igénybevételt adott teher hatására. A keresett erőnek szerepelnie kell a munkatételben, ezért a tartón be kell iktatnunk az erővel munkát végezni képes (vele „munka-kompatibilis") virtuális elmozdulást. Ezt csak úgy tudjuk beiktatni, ha a tartón először megszüntetjük az elmozdulás létrejöttét gátló kényszert, majd ezek után helyezzük el a szükséges virtuális elmozdulást.

- **Statikailag határozott tartók** esetén a kényszer eltávolítása következtében a tartó egyszabadságfokú láncolattá alakul, amelyen teljesülnek a virtuális elmozdulásrendszerre vonatkozó geometriai feltételek. Erre a – merev testekből álló – láncolatra teljesítjük a virtuális elmozdulásrendszer kompatibilitási feltételeit, majd felírjuk a virtuális elmozdulások tételét.
- **Statikailag határozatlan tartók** esetén a kényszer eltávolítása után a tartó statikai határozatlanságának a fokszáma eggyel csökken, és az így kialakuló tartón kell teljesíteni a virtuális elmozdulásrendszer kompatibilitási feltételeit, amely bonyolult számításokra vezet. Ezért most csak a statikailag határozott tartókkal foglalkozunk.

E/3. A virtuális elmozdulások tételének alkalmazása statikailag határozott gerendatartók reakcióerőinek és igénybevételeinek számítására

Ha a keresett erőhatás külső (reakcióerő), akkor abszolút virtuális elmozdulást, ha pedig belső (igénybevétel), akkor relatív virtuális elmozdulást iktatunk be. A gerendatartókon ugyanis – amint azt a húzás-nyomás, nyírás, csavarás és hajlítás témakörénél láttuk – az alakváltozásokat a tartó hossza mentén megoszló relatív elmozdulások jelentik (ezek rendre az $\varepsilon_z(z) = \dfrac{du_z}{dz}$ fajlagos nyúlás, a $\gamma_z(z)=\dfrac{du_y}{dz}$ szögváltozás, a $\kappa_z(z)=\dfrac{d\vartheta_z}{dz}$ fajlagos elcsavarodás és a $\kappa_x(z)=\dfrac{d\vartheta_x}{dz}$ fajlagos elfordulás). Mivel a keresett támaszerők vagy keresztmetszeti igénybevételek koncentrált erők, a vonatkozó virtuális elmozdulásokat is koncentráltan kell beiktatnunk. A fenti alakváltozások koncentrált megfelelőit figyelembe véve, keresztmetszeti M_K hajlítónyomaték meghatározásakor $\delta\vartheta_{x,K}$ relatív elfordulást, T_K nyíróerő meghatározásakor $\delta u_{y,K}$ relatív eltolódást és N_K normálerő meghatározásakor $\delta u_{z,K}$ relatív eltolódást kell beiktatnunk.

A beiktatandó abszolút vagy relatív elmozdulás létrejöttének lehetővé tételéhez a tartót minden esetben át kell alakítani. Abszolút elmozdulás beiktatásához az elmozdulásnak megfelelő eredeti kényszer-komponenst el kell távolítani, relatív elmozdulás beiktatásához pedig az elmozdulási komponens jellegének megfelelően a tartón egy egyszabadságfokú belső „átvágást” kell végrehajtani. Ez a beavatkozás a tartó elmozdulási (kinematikai) szabadságfokát minden esetben eggyel növeli, statikai szabadságfokát pedig eggyel csökkenti, azaz a tartót egy fokkal fellazítja. Mivel a szerkezet statikailag határozott volt, a virtuális elmozdulás beillesztésekor egyszabadságfokú, kényszermozgású láncolattá alakul. Ennek a láncolatnak a teljes elmozdulásképét a beiktatott elmozdulás egyértelműen meghatározza.

Az egyensúlyban lévő tartón a *külső és belső virtuális munkaösszeg zérust* ad:

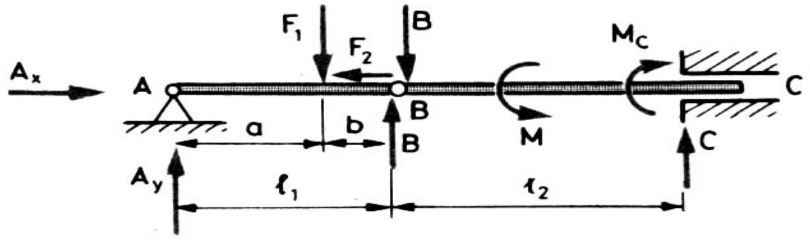
- A *külső virtuális munka* két részből állhat: a keresett külső erőhatásnak (reakcióerőnek) a beiktatott virtuális elmozduláson végzett munkájából, valamint a tartón lévő terheknek a virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkájából.

- A *belső virtuális munka* statikailag határozott tartónál csak egy részből állhat: a keresett belső erőhatásnak (igénybevételnek) a beiktatott virtuális alakváltozáson (relatív elmozduláson) végzett munkájából, mivel a beavatkozás eredményeként kialakult – merev tárcsákból álló – láncolaton nem keletkeznek virtuális alakváltozások.

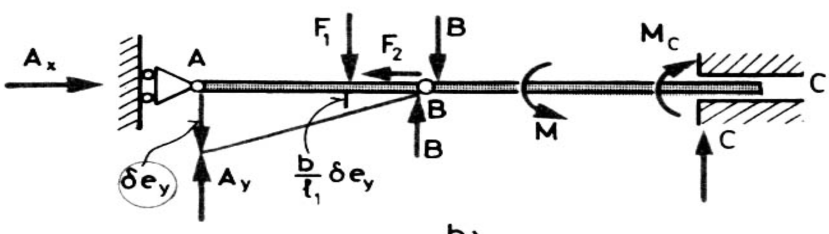
Mintapéldák

1. **példa:** Keressük az alábbi Gerber-tartón az A_y külső reakcióerőt.

   Vegyük el az A támasznál a függőleges megtámasztást, és iktassuk be a δe_y abszolút virtuális elmozdulást. Ennek hatására a láncolaton kompatibilis virtuális elmozdulásrendszer jön létre.



a)



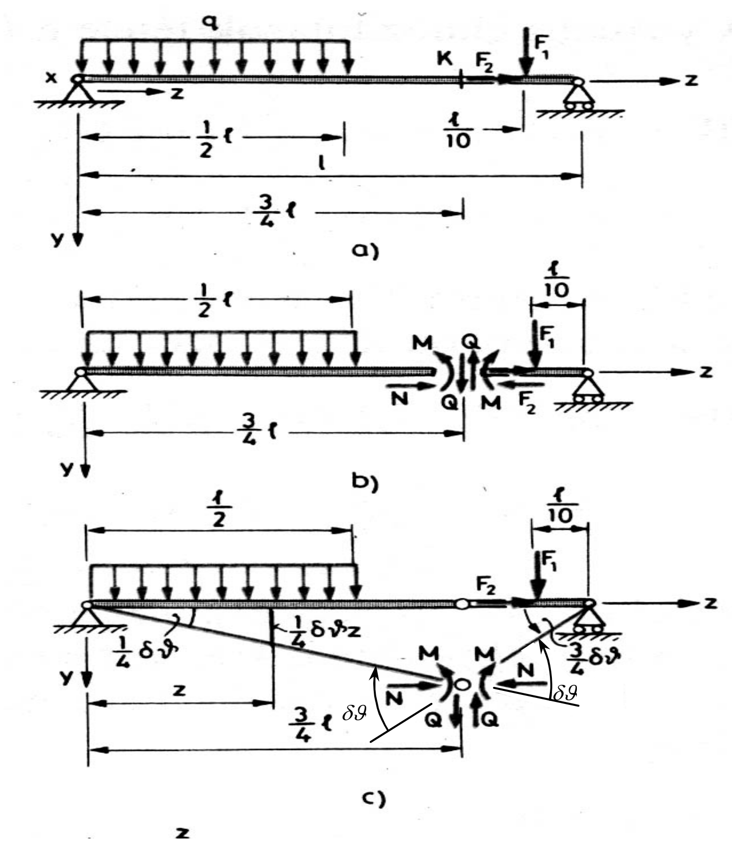
b)

Mivel az így kialakult láncolat merev testekből áll, a belső virtuális munka zérus (azaz $\delta W_b = 0$), így a virtuális munka csak külső részből áll:

$$\delta W = \delta W_k = -A_y \delta e_y + F_1 \frac{b}{l_1} \delta e_y = (-A_y + F_1 \frac{b}{l_1})\, \delta e_y = 0 .$$

Mivel δe_y tetszőleges, így a zárójelen belüli kifejezésnek kell zérusnak lennie. Ez a feltétel az $-A_y + F_1 \dfrac{b}{l_1} = 0$ egyensúlyi egyenletet szolgáltatja, amelyből természetesen $A_y = \dfrac{F_1 b}{l_1}$.

2. példa: Határozzuk meg az alábbi kéttámaszú tartó *K* keresztmetszetében keletkező M_K hajlítónyomatékot.



Átvágjuk a tartót, majd csuklót téve a *K* keresztmetszetbe, az így kialakult láncolaton beiktatjuk a $\delta\vartheta_K$ relatív elfordulást, amelynek hatására a láncolaton kompatibilis virtuális elmozdulásrendszer jön létre. Ekkor a virtuális belső munka (amely negatív): $\delta W_b = -M_K \cdot \delta\vartheta_K$, a külső pedig: $\delta W_k = q \dfrac{l}{2} \cdot \delta\vartheta_K \dfrac{l}{16} + F_1 \cdot \delta\vartheta_K \dfrac{3l}{40}$.

Így a teljes virtuális munka:

$$\delta W = \delta W_k + \delta W_b = q \frac{l}{2} \cdot \delta\vartheta_K \frac{l}{16} + F_1 \cdot \delta\vartheta_K \frac{3l}{40} - M_K \cdot \delta\vartheta_K = \left(q \frac{l^2}{32} + F_1 \frac{3l}{40} - M_K \right) \delta\vartheta_K = 0.$$

Mivel $\delta\vartheta_K$ tetszőleges, így a zárójelen belüli kifejezésnek kell zérusnak lennie. Ez a feltétel a $q \dfrac{l^2}{32} + F_1 \dfrac{3l}{40} - M_K = 0$ egyensúlyi egyenletet szolgáltatja, amelyből $M_K = q \dfrac{l^2}{32} + F_1 \dfrac{3l}{40}$.

Megjegyezzük, hogy mivel a virtuális elmozdulás tetszőleges lehet, nagyságát célszerűen 1-nek szokták felvenni. A fenti esetekben az abszolút virtuális eltolódást a $\delta e_y = 1$, a relatív virtuális elfordulást a $\delta\vartheta_K = \pm 1$ értékben felvéve a számítások tovább egyszerűsödnek.

F./ A virtuális erők tétele

F/1. A virtuális erők tétele: Egy geometriailag lehetséges elmozdulásrendszernek *bármely* virtuális erőrendszeren végzett **kiegészítő munkája zérus**. Más megfogalmazásban: geometriailag lehetséges (kompatibilis) mechanikai rendszeren végzett virtuális kiegészítő munkák összege zérus:

$$\delta \widetilde{W} = \delta \widetilde{W}_k + \delta \widetilde{W}_b = 0.$$

A virtuális erők tétele az elmozdulások és alakváltozások **kompatibilitásának** szükséges feltétele. Bármilyen anyagú szilárd testre érvényes, amely kis elmozdulást végez.

F/2. A virtuális erők tételének alkalmazása

Mivel a virtuális erők tételében az elmozdulások a *ténylegesek* és az erők a *virtuálisak*, és mindig a tartók *tényleges* állapotváltozóit keressük, magától értetődik, hogy a virtuális erők tételét kinematikai, vagyis elmozdulás-jellegű mennyiségek (eltolódások, elfordulások) számítására használjuk.

- **Merev testek** statikai szabadságfoka véges, azaz véges számú erő-*paraméterrel* jellemezhető, így a tétel alkalmazása ezek számával megegyező számú geometriai *egyenletre* vezet.
- **Szilárd testek** statikai szabadságfoka végtelen, azaz véges számú feszültség-*függvénnyel* jellemezhető, így a tétel alkalmazása ezek számával azonos számú geometriai *differenciálegyenletre* vezet.

Keressünk például egy szerkezeten valamely abszolút vagy relatív elmozdulást adott teher hatására A keresett elmozdulásnak szerepelnie kell a munkatételben, ezért a tartón be kell iktatnunk a keresett elmozdulással munkát végezni képes (vele „munka-kompatibilis”) virtuális erőt. Mivel a virtuális erőrendszernek egyensúlyban kell lennie, meghatározzuk a felvett virtuális erővel egyensúlyt tartó belső virtuális erőket is. Ezután felírjuk a tartón keletkező valódi elmozdulás/alakváltozás-rendszer virtuális erőrendszeren végzett külső és belső virtuális kiegészítő munkáját. Ezt zérussá téve a keresett elmozdulás kiszámítható.

- **Statikailag határozott tartókon** a felvett virtuális erővel egyensúlyban lévő virtuális erőrendszer egyértelműen meghatározható.
- **Statikailag határozatlan tartókon** a felvett virtuális erővel egyensúlyban lévő virtuális erőrendszer elvileg végtelen sokféleképpen felvehető. Ezek közül a számítás szempontjából legcélszerűbbet érdemes választani.

F/3. A virtuális erők tételének alkalmazása gerendatartók elmozdulásainak számítására

Abszolút eltolódás, illetve elfordulás meghatározásához a *beiktatott virtuális erő az elmozdulással munka-kompatibilis erő, illetve erőpár.* Relatív eltolódás, illetve elfordulás számításához a beiktatott virtuális erő az elmozdulással munka-kompatibilis *kettős erő, illetve kettős erőpár*. A relatív elmozdulás értelmezése szerint a viszonyítási pontok lehetnek távol is egymástól, de egybe is eshetnek. A beiktatott kettős erőknek, erőpároknak a munka-kompatibilitás miatt a viszonyítási pontokat követniük kell.

A beiktatott virtuális erő a virtuális igénybevételekkel tart egyensúlyt. A beiktatott virtuális erők a keresett valódi elmozdulásokkal végzik a külső virtuális kiegészítő munkát, míg a virtuális igénybevételek a teherből származó valódi alakváltozásokkal (relatív elmozdulásokkal) végzik a belső virtuális kiegészítő munkát. A *kétféle munka összegének* – mivel az elmozdulások és alakváltozások kompatibilisek – *zérust* kell adnia.

- A külső virtuális kiegészítő munka képlete a K keresztmetszet abszolút eltolódása, illetve elfordulása keresése esetén

$$\delta\widetilde{W}_k = e_{K\,y}\cdot\delta Q_y \ , \ \text{illetve} \ \ \delta\widetilde{W}_k = \varphi_K\cdot\delta M_K \ ,$$

  míg ugyanez relatív elmozdulások meghatározásánál

$$\delta\widetilde{W}_k = u_{AB\,x}\cdot\delta Q_{AB\,x} \ , \ \text{illetve} \ \ \delta\widetilde{W}_k = \vartheta_C\cdot\delta M_C \ .$$

- A belső virtuális kiegészítő munka felírásához – amint azt a húzás-nyomás, nyírás, csavarás és hajlítás témakörénél láttuk – az alakváltozásokat az $\varepsilon_z(z)$ fajlagos nyúlás, a $\gamma_z(z)$ szögváltozás, a $\kappa_z(z)$ fajlagos elcsavarodás és a $\kappa_x(z)$ fajlagos elfordulás formájában kell figyelembe vennünk. A nyíróerőkből származó alakváltozásokat elhanyagolva a belső virtuális munka így alakul:

$$\delta\widetilde{W}_b = -\int_l \varepsilon_z(z)\,\delta N(z)\,dz - \int_l \kappa_z(z)\,\delta M_z(z)\,dz - \int_l \kappa_x(z)\,\delta M_x(z)\,dz \,,$$

  ahol a $\delta N(z)$, $\delta M_x(z)$, $\delta M_z(z)$ virtuális igénybevételek (normálerő, hajlító- és csavarónyomaték) a felvett virtuális erő függvényei. Például δQ beiktatása esetén $\delta N(z) = \delta N(z,\delta Q)$, $\delta M_x(z) = \delta M_x(z,\delta Q)$, $\delta M_z(z) = \delta M_z(z,\delta Q)$. Mivel állandó keresztmetszetű gerendánál a valódi alakváltozások:

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}, \qquad \kappa_z(z) = \frac{M_z(z)}{GI_z}, \qquad \kappa_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x},$$

  a belső virtuális kiegészítő munka számítási képlete:

$$\delta\widetilde{W}_b = -\int_l \frac{N(z)\,\delta N(z)}{EA}dz - \int_l \frac{M_z(z)\,\delta M_z(z)}{GI_z}dz - \int_l \frac{M_x(z)\,\delta M_x(z)}{EI_x}dz \ .$$

- - A teljes virtuális kiegészítő munka például egy abszolút eltolódás meghatározása esetén:

$$\delta\widetilde{W} = \delta\widetilde{W}_k + \delta\widetilde{W}_b = e_y\cdot\delta Q_y - \int_l \frac{N(z)\ \delta N(z,\delta Q_y)}{EA}dz - \int_l \frac{M_x(z)\ \delta M_x(z,\delta Q_y)}{EI_x}dz \ .$$

  A tetszőleges δQ_y kiküszöbölése után a kompatibilitási egyenlethez jutunk, amely a keresett elmozdulást adja. Mivel a virtuális erők tetszőlegesek, itt is egységnyinek vehetjük fel őket. Ekkor például a $\delta Q_y = 1$ felvételével az előző képlet így alakul:

$$e_y = \int_l \frac{N(z)\ \delta N(z)}{EA}dz + \int_l \frac{M_x(z)\ \delta M_x(z)}{EI_x}dz \,,$$

  ahol $\delta N(z)$ és $\delta M_z(z)$ az egységnyi virtuális erőből származó normálerő- és hajlítónyomatéki ábra.

F/4. A virtuális erők tételének alkalmazásakor felmerülő integrál-kifejezések kiszámítása

Láttuk, hogy a belső virtuális kiegészítő munka olyan határozott integrál-kifejezés, amelyben két függvény szorzata szerepel. Amennyiben legalább az egyik függvény lineáris, az $\int_a^b f(z)\cdot g(z)\,dz$ alakú szorzatintegrálok kiszámításánál felhasználható az alábbi tétel:

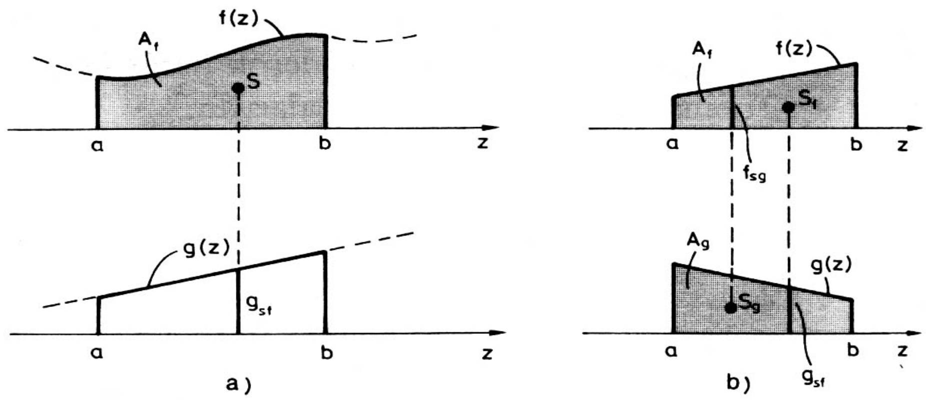
Legyen például a $g(z)$ függvény lineáris, az $f(z)$ pedig tetszőleges lineáris vagy nemlineáris függvény. Az integrál értékét úgy kapjuk, hogy a tetszőleges $f(z)$ függvény alatti A_f területet megszorozzuk a lineáris $g(z)$ függvénynek az A_f terület súlypontja alatt leolvasott g_{sf} ordinátájával. Ekkor tehát

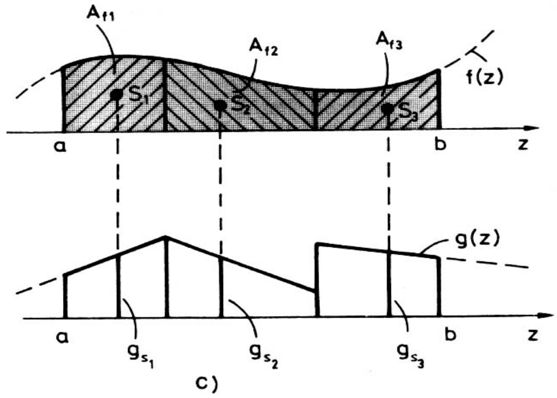
$$\int_a^b f(z)\cdot g(z)\,dz = A_f \cdot g_{sf}$$

Ha mindkét függvény lineáris, akkor a műveletek felcserélhetők, és így

$$\int_a^b f(z)\cdot g(z)\,dz = A_f \cdot g_{sf} = A_g \cdot f_{sg}$$

Ha mindkét függvény nemlineáris, akkor ez a módszer nem alkalmazható, más módon kell kiszámítani az integrált. Fontos megjegyezni, hogy a fenti szorzatban szereplő tényezők mindig előjeles mennyiségek.



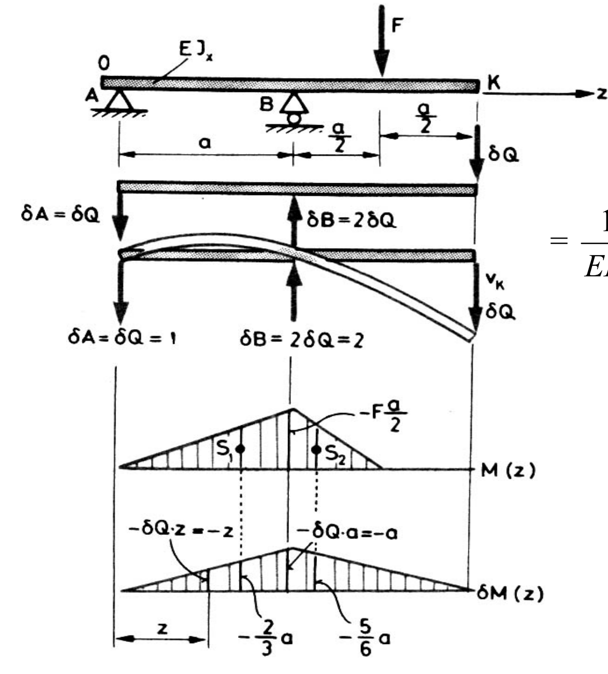


Az $\int_a^b f(z)g(z)\,dz$ határozott integrál meghatározása

Mintapélda

Határozzuk meg a konzolvég függőleges eltolódását!

A tartó hajlítómerevsége állandó. A konzol végén levő K keresztmetszetnél függőleges δQ virtuális erőt helyezünk el, nagyságát az egyszerűség kedvéért egynek választjuk. Az első nyomatéki ábra ($M(z)$) a tényleges terhelésből keletkezik, míg a másikat ($\delta M(z)$) a virtuális erőből számítottuk. A külső virtuális munka értéke $\delta \widetilde{W}_k = \delta Q\, v_K = 1 \cdot v_K$. A belső virtuális kiegészítő munkát a virtuális erőkön, azaz a $\delta M(z)$ virtuális hajlítónyomatékokon a tényleges $\kappa(z)$ fajlagos relatív elfordulások végzik: $\delta \widetilde{W}_b = -\int_0^{2a} \delta M(z)\, \kappa(z)\, dz$, ahol lineárisan rugalmas anyag esetén a fajlagos elfordulások és a nyomatékok között fennáll a $\kappa(z) = \dfrac{M(z)}{EI_x}$ összefüggés. Mivel a teljes virtuális kiegészítő munka értéke zérus, a keresett eltolódás értéke meghatározható a $\delta \widetilde{W} = \delta Q\, v_K - \dfrac{1}{EI_x} \int_0^{2a} \delta M(z)\, M(z)\, dz = 0$ kifejezésből.



$$v_k = \frac{1}{EI_x} \int_0^{2a} \delta M(z)\, M(z) dz =$$

$$= \frac{1}{EI_x}\left[\left(-F\frac{a}{2}\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{2a}{3}\right) + \left(-F\frac{a}{2}\frac{a}{4}\right)\left(-\frac{5a}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{13}{48}\frac{Fa^3}{EI_x}.$$

Kötelező tananyag:

1./ Kaliszky Sándor – Kurutzné Kovács Márta – Szilágyi György: **Szilárdságtan** (2. kiadás, 2000), **311 – 336.** oldal.

Ajánlott tananyag:

1./ Budynas, R .G.: **Advanced Strength and Applied Stress Analysis** (McGraw-Hill Kiadó, 1999), **404 – 497**. oldal.
2./ Wittenburg, J. – Peste, E.: **Festigkeitslehre: Ein Lehr- und Arbeitsbuch** (Springer Kiadó, 3. kiadás, 2001), **237 – 306**. oldal.