

6. Előadás

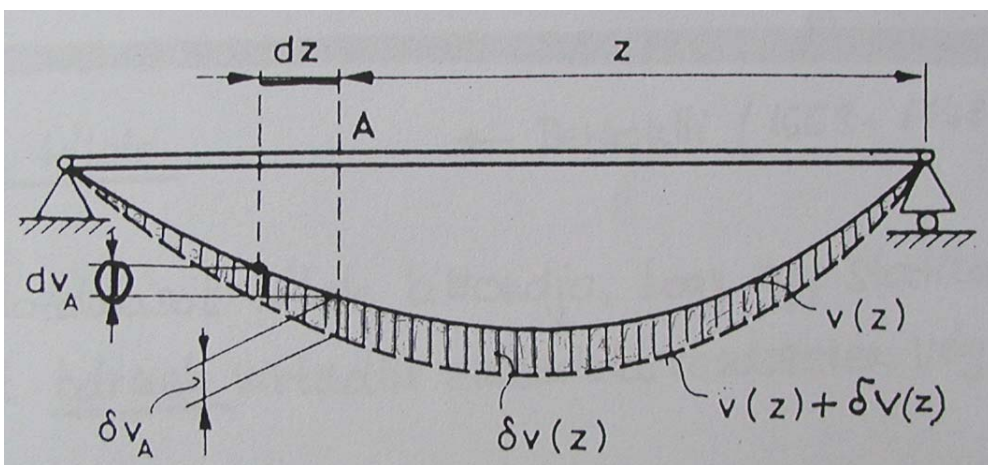
Virtuális elmozdulások tétele

- A virtuális elmozdulás-rendszer fogalma
- A virtuális munka fogalma
- A virtuális elmozdulások tétele
- Alkalmazás statikailag határozott tartók vizsgálatára

Virtuális elmozdulások tétele

1./ A virtuális elmozdulásrendszer fogalma

Egy tetszőleges, geometriailag lehetséges elmozdulás-rendszernek változatlan geometriai feltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása ('variációja')



Virtuális elmozdulások tétele

$dv(z)$, 'növekmény':

dz -vel megváltoztatva a vizsgált helyet,
a függvényérték dv -vel megváltozik

$$z \rightarrow z+dz \quad \rightarrow \quad v \rightarrow v+dv$$

$\delta v(z)$, 'variáció':

az egész $v(z)$ függvény megváltozása !!



Virtuális elmozdulások tétele

A virtuális elmozdulás-rendszer

- teljesíti a geometriai egyenleteket
- teljesíti a geometriai peremfeltételeket
- differenciálisan kicsiny

[a tényleges elmozdulás-rendszer: csak akkor tekinthető virtuálisnak, ha kicsiny !!]

Virtuális elmozdulások tétele

2./ A virtuális munka fogalma

- virtuális munka: δW

a tényleges erőrendszernek valamely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája

- virtuális *külső* munka:

$$\delta W_k = \underline{f}^T \cdot \delta \underline{e} + \int_{(S)} \underline{q}^T \cdot \delta \underline{u} \cdot dS + \int_{(V)} \underline{g}^T \cdot \delta \underline{u} \cdot dV$$

- virtuális *belső* munka:

$$\delta W_b = - \int_{(V)} \underline{\sigma}^T \cdot \delta \underline{\varepsilon} \cdot dV$$

$$\delta W = \delta W_k + \delta W_b$$

Virtuális elmozdulások tétele

3./ A virtuális elmozdulások tétele ← Bernoulli (1669-1748)

A virtuális elmozdulások tétele kimondja, hogy egy statikailag lehetséges erőrendszernek bármely virtuális elmozdulás-rendszeren végzett munkája zérus.

≈ Egy $(\underline{f}, \underline{g}, \underline{g}, \underline{\sigma})$ rendszer akkor és csakis akkor nevezhető statikailag lehetséges erő- és feszültségrendszernek, ha bármely $(\underline{\delta e}, \underline{\delta u}, \underline{\delta \varepsilon})$ virtuális elmozdulás-rendszerre $\delta W_k + \delta W_b = 0$

- megfelel az egyensúlyi egyenleteknek
- egy virtuális elmozdulás-rendszer vizsgálata csak szükséges feltételt ad
- az egyensúly elégséges feltétele: bármely virtuális elmozdulás-rendszerre teljesüljön $\delta W = 0$

Virtuális elmozdulások tétele

4./ Alkalmazás statikailag határozott szerkezetek vizsgálatára

← SPEC. alkalmazás !

Ha valamely reakciót vagy igénybevételt kívánunk meghatározni:

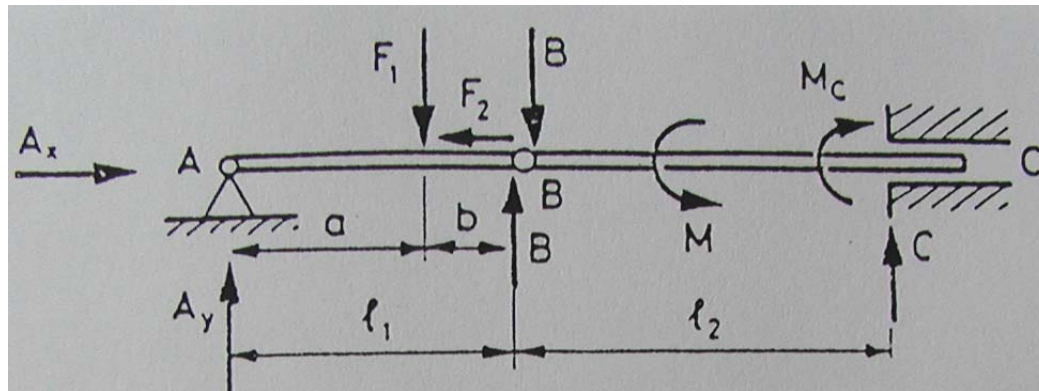
- szerkezet átalakítása (geometriai (perem) feltétel módosul):
a keresett erőnek megfelelő kényszert feloldjuk
- virtuális elmozdulás-rendszer választása:
merevtestszerű elmozdulásnak megfelelően ($\rightarrow \delta W_b = 0$)
- végül számítás $\delta W = 0$ alapján

Virtuális elmozdulások tétele

Példa...

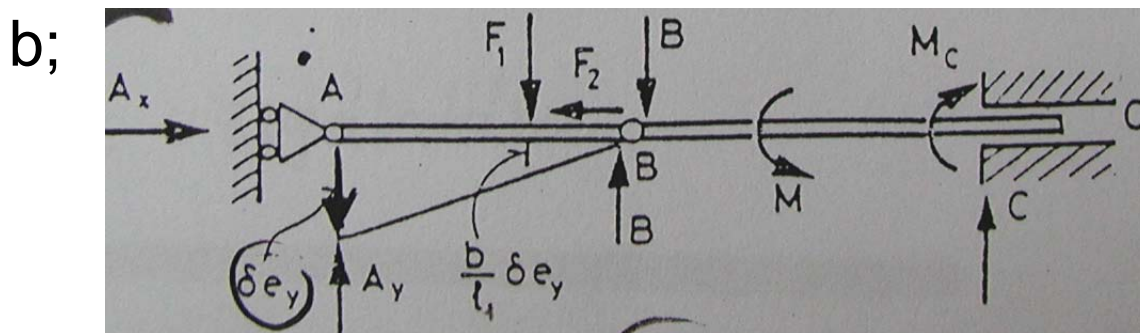
Reakciók meghatározása:

a;



Virtuális elmozdulások tétele

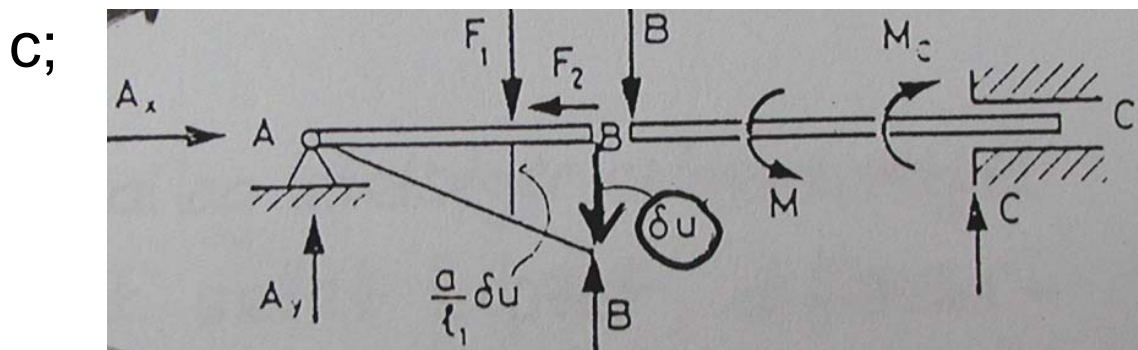
Példa...



$$-A_y \cdot \delta e_y + F_1 \cdot \frac{b}{l_1} \cdot \delta e_y = 0 \rightarrow \underline{\underline{A_y = \frac{F_1 \cdot b}{l_1}}}$$

Virtuális elmozdulások tétele

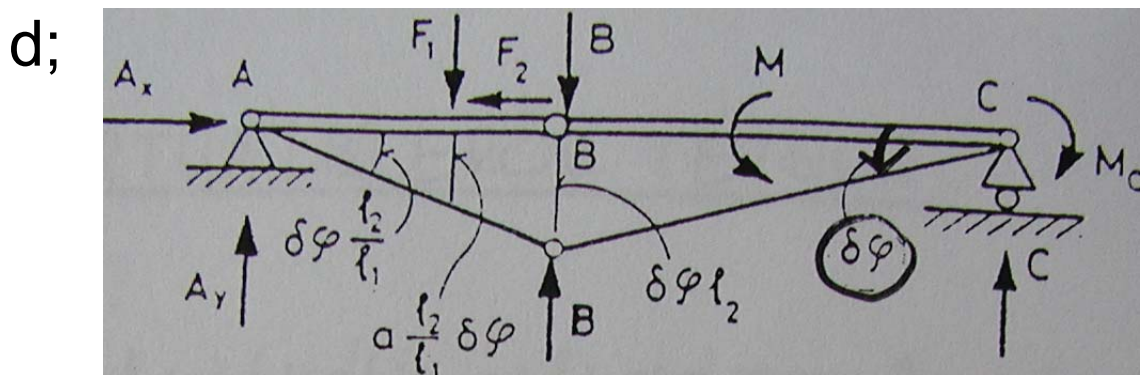
Példa...



$$F_1 \cdot \frac{a}{l_1} \cdot \delta u - B \cdot \delta u = 0 \rightarrow \underline{\underline{B = F_1 \cdot \frac{a}{l_1}}}$$

Virtuális elmozdulások tétele

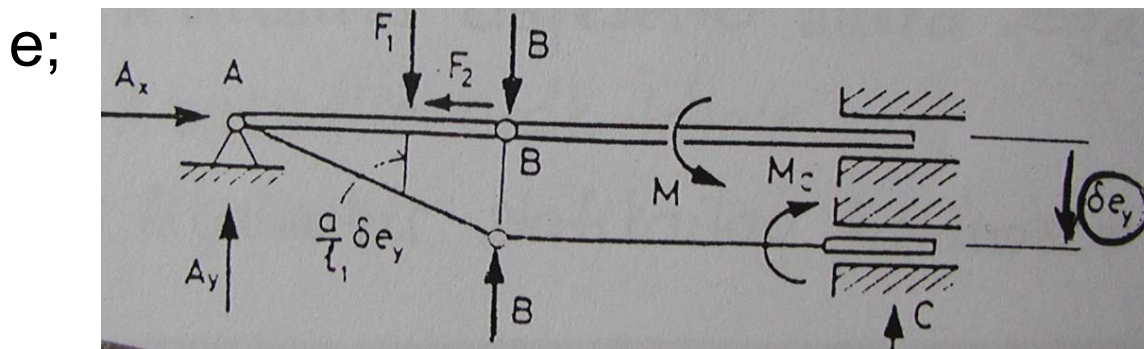
Példa...



$$F_1 \cdot a \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi - M_c \cdot \delta\varphi = 0 \rightarrow \underline{\underline{M_c = F_1 \cdot a \cdot \frac{l_2}{l_1} + M}}$$

Virtuális elmozdulások tétele

Példa...

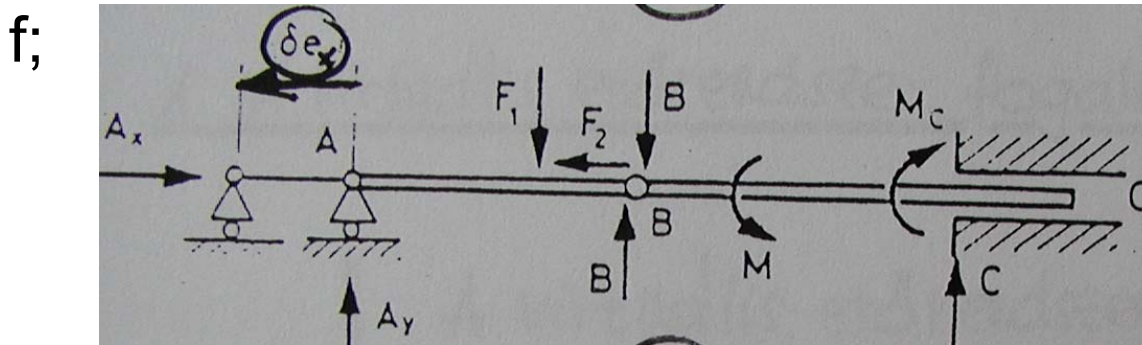


$$F_1 \cdot \frac{a}{l_1} \cdot \delta e_y - C \cdot \delta e_y = 0 \rightarrow C = F_1 \cdot \frac{a}{l_1}$$

=====

Virtuális elmozdulások tétele

Példa...



$$F_2 \cdot \delta e_x - A_x \cdot \delta e_x = 0 \rightarrow A_x = F_2$$

Virtuális erők tétele

- A virtuális erőrendszer fogalma
- A virtuális kiegészítő munka fogalma
- A virtuális erők tétele
- Alkalmazás statikailag határozott tartók vizsgálatára

Virtuális erők tétele

1./ A virtuális erőrendszer fogalma:

Egy statikailag lehetséges erőrendszernek változatlan statikai peremfeltételek mellett képzett, differenciálisan kicsiny megváltozása ('variációja')

a virtuális erőrendszer \leftarrow egyensúlyi erőrendszer

[külső és belső erők együttese]

[a tényleges erőrendszer: virtuális !!]

Virtuális erők tétele

2./ A virtuális kiegészítő munka fogalma

- virtuális kiegészítő munka: $\delta\tilde{W}$

a tényleges elmozdulás-rendszernek valamely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája

- virtuális *külső* kiegészítő munka:

$$\delta\tilde{W}_k = \underline{e}^T \cdot \delta\underline{f} + \int_{(S)} \underline{u}^T \cdot \delta\underline{q} \cdot dS + \int_{(V)} \underline{u}^T \cdot \delta\underline{g} \cdot dV$$

- virtuális *belső* kiegészítő munka:

$$\delta\tilde{W}_b = - \int_{(V)} \underline{\varepsilon}^T \cdot \delta\underline{\sigma} \cdot dV$$

$$\delta\tilde{W} = \delta\tilde{W}_k + \delta\tilde{W}_b$$

rúdszerkezeteknél:
$$\delta\tilde{W}_b = - \int_{(l)} \kappa \cdot \delta M \cdot dl - \int_{(l)} \varepsilon \cdot \delta N \cdot dl - \int_{(l)} \gamma \cdot \delta T \cdot dl$$

Virtuális erők tétele

3. A virtuális erők tétele

← Clapeyron (1799-1864)

A virtuális erők tétele kimondja, hogy egy geometriailag lehetséges elmozdulás-rendszernek bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája zérus.

≈ Egy (\underline{e} , \underline{u} , $\underline{\varepsilon}$) rendszer akkor és csakis akkor nevezhető geometriailag lehetséges elmozdulás- és alakváltozás-rendszernek, ha bármely ($\delta \underline{f}$, $\delta \underline{q}$, $\delta \underline{g}$, $\delta \underline{\sigma}$) virtuális erőrendszerre

$$\delta \widetilde{W}_k + \delta \widetilde{W}_b = 0$$

- megfelel a geometriai egyenleteknek
- egy virtuális erőrendszer vizsgálata csak szükséges feltételt ad
- a kompatibilitás elégséges feltétele: bármely virtuális erőrendszerre teljesül, hogy $\delta \widetilde{W} = 0$

Virtuális erők tétele

4./ Alkalmazás statikailag határozott szerkezetek vizsgálatára

← SPEC. alkalmazás !

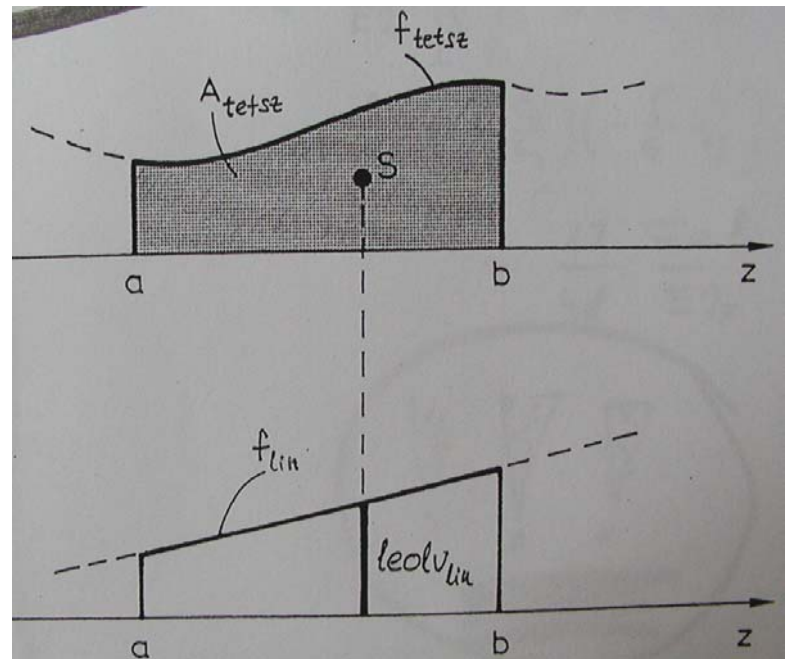
- a tartón valamely (abszolút vagy relatív) elmozdulást keresünk adott teherre
- virtuális erőrendszer választása speciális módon:
 - a keresett elmozdulásnak megfelelő 'virtuális teher' beiktatása
 - 'virtuális reakciók', majd 'virtuális belső erők' meghatározása
- a tényleges elmozdulás-rendszerben a deformációk (a tényleges igénybevételekből) meghatározhatók
- végül számítás $\delta\tilde{W}_k + \delta\tilde{W}_b = 0$ alapján

Virtuális erők tétele

Számítási trükk: szorzatintegrál meghatározása:

$$I = \int_a^b f_{\text{tetsz}}(z) \cdot f_{\text{lin}}(z) \cdot dz = ?$$

$$I = A_{\text{tetsz}} \cdot \text{leolv}_{\text{lin}}$$



Virtuális erők tétele

Példa...

$$\delta \widetilde{W}_k = \delta Q \cdot v_K$$

$$\delta \widetilde{W}_b = - \int_0^{2a} \delta M(z) \cdot \kappa(z) dz$$

$$\kappa(z) = - \frac{M(z)}{EI_x}$$

$$\delta \widetilde{W}_k + \delta \widetilde{W}_b = \delta \widetilde{W}$$



$$\Rightarrow v_K = \frac{1}{EI_x} \int_0^{2a} \delta M(z) \cdot M(z) dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_K = \frac{1}{EI_x} \left[\left(-F \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot a \right) + \left(-F \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \right) \cdot \left(-\frac{5}{6} \cdot a \right) \right] = \underline{\underline{\frac{13}{48} \cdot \frac{Fa^3}{EI_x}}}$$

