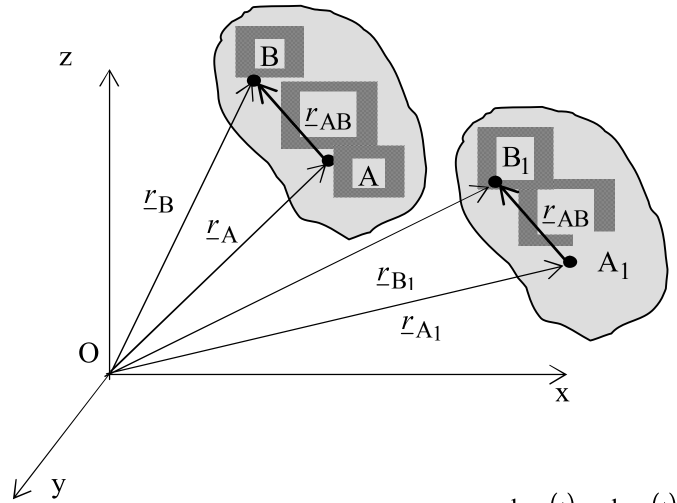
Merev testek kinematikája

Egy merev test mozgásállapotának ismerete azt jelenti, hogy a test minden egyes pontjának ismerjük a mozgásállapotát. A test egyes pontjainak helyzete azonban nem független egymástól és a továbbiakban kimutatjuk, hogy egy pont mozgásállapotának ismeretében a többi pont mozgásjellemzői számíthatók.A merev test mozgásának különböző formái vannak, amelyek közül az **eltolódó (haladó) mozgást**, a **helytálló (fix) tengely körüli forgó mozgást** és a **síkmozgást** tárgyaljuk.

Egy síkmozgást végző merev test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak. A test minden egyes pontjának pályája síkgörbe lesz.

Eltolódó mozgás



Az ábrán látható, hogy a B pont helyzete az A pont helyzetének ismeretében, az $\underline{r}_{BA}$ vektor segítségével megadható:

$$\underline{r}_B(t) = \underline{r}_A(t) + \underline{r}_{BA} \ .$$

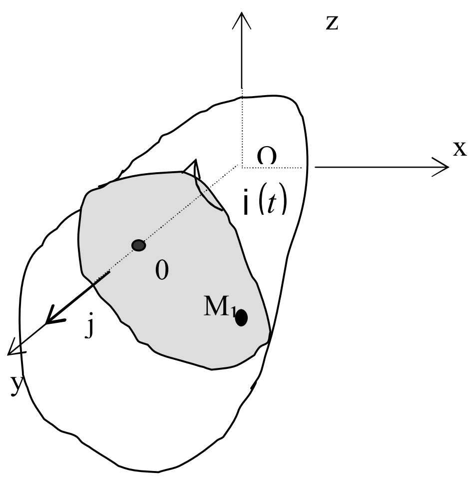
A fenti összefüggésben $\underline{r}_A$ és $\underline{r}_B$ vektorok függnek az időtől, de az $\underline{r}_{BA}$ vektor nem. Mindez azt jelenti, hogy a sebességnek és gyorsulásnak deriválással való számítása során a konstans vektor deriváltja zérus lesz.

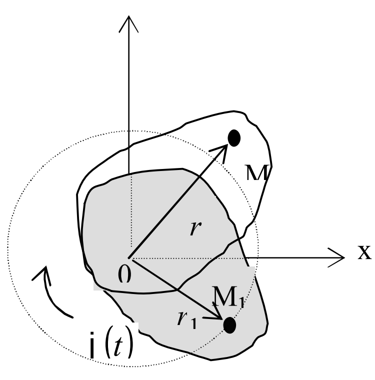
A B pont sebesség- és gyorsulásvektora: $\underline{v}_B(t) = \dfrac{d\underline{r}_B(t)}{dt} = \dfrac{d\underline{r}_A(t)}{dt} = \underline{v}_A(t), \quad \underline{a}_B(t) = \dfrac{d\underline{v}_A(t)}{dt} = \underline{a}_A(t)$.

A kapott összefüggések azt mutatják, hogy egy adott időpontban a test bármely pontjának sebessége és gyorsulása azonos. Igazoltuk tehát, hogy egy pont mozgásállapotának ismeretében a többi pont mozgásjellemzői is megadhatók. Fentiek szerint a test bármelyik pontjában ugyanolyan sebességvektort illetőleg gyorsulásvektort kaptunk, vagyis ezen vektorok ún. **szabad** vektorok.

Helytálló (fix) tengely körüli forgó mozgás

Az egyszerűbb tárgyalás érdekében az ábrán vegyük fel úgy a koordinátarendszert, hogy az y tengely essen egybe a forgástengellyel. Könnyen belátható, hogy a testnek a forgástengelyen kívül fekvő valamely M pontja olyan síkban végez körmozgást, amely átmegy az M ponton és merőleges a forgástengelyre; a kör középpontja - amelyet 0-val jelölünk - pedig a forgástengelyen van. Egy r sugarú pályán megtett út: $s(t) = r\,\mathrm{j}(t)$.





A fentiekből következik, hogy amennyiben ismeretes a test forgástengelye és egy M_1 pontjának mozgástörvénye, abból a $\mathrm{j}(t)$ számítható éa a test bármely M pontjának pontjának mozgásjellemzőjét meg tudjuk határozni.

Az anyagi pont körmozgásánál tanultak szerint $j(t)$ ismeretében lehet számítani az w szögsebességet és a k szöggyorsulást. Ezek segítségével az egyes pontok sebessége és gyorsulása meghatározható.

A sebességvektor merőleges lesz az M pontot a 0 ponttal összekötő egyenesre és a forgástengelytől tetszőleges r távolságra lévő pont esetén a sebesség nagysága: $v = |\underline{v}| = rw$.

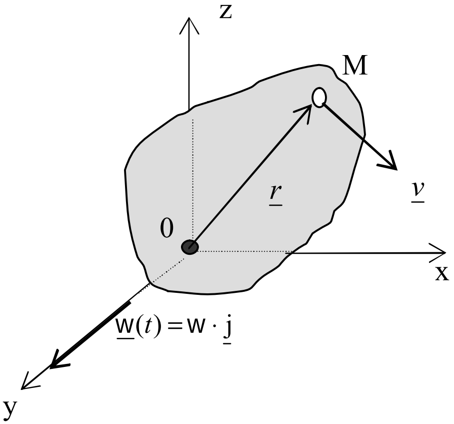
A gyorsulásvektornak két komponense lesz. Az egyik komponens merőleges lesz az M pontot a 0 ponttal összekötő egyenesre - vagyis az adott ponthoz tartozó körpálya érintőjébe esik - , míg a normális irányú összetevő a 0 pontba mutat.

A forgástengelytől tetszőleges r távolságra lévő pont esetén a gyorsulás összetevők nagysága:

$$a_t = |\underline{a}_t| = rk,\ a_n = |\underline{a}_n| = r\,w^2 \ ,$$

míg a gyorsulásvektor nagysága: $a = |\underline{a}| = \sqrt{(rk)^2 + (rw^2)^2} = r\sqrt{k^2 + w^4}$.

Látható, hogy mind a sebesség, mind a gyorsulás nagysága arányos a forgástengelytől való távolsággal.

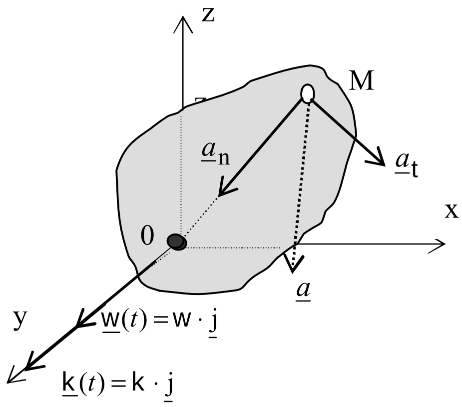


A sebességvektor felírható vektorokkal végzett számítások eredményeként is.

$$\underline{v} = w \cdot \underline{j} \times \underline{r} \ .$$

A kifejezést kifejtve:

$$\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & w & 0 \\ r_x & 0 & r_z \end{vmatrix} = wr_z \cdot \underline{i} - wr_x \cdot \underline{k} \ .$$



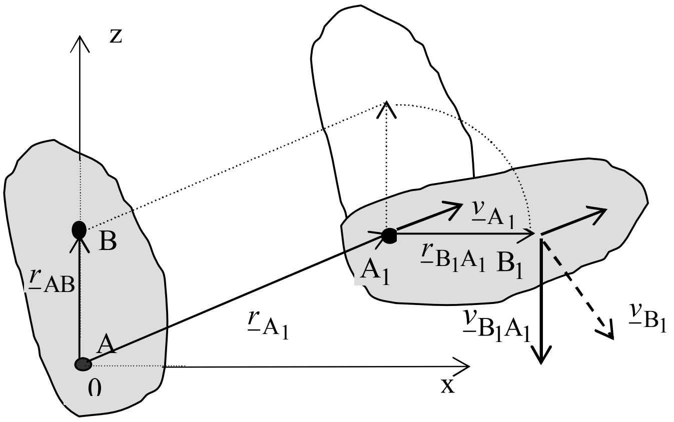
A gyorsulásvektor szintén számítható vektoriális alakban. Ennek eredményeként a derékszögű koordinátarendszerbeni gyorsuláskomponensek viszonylag egyszerűen adódnak.

$$\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_n = -w^2\underline{r} + k \cdot \underline{j} \times \underline{r} \ ,$$

A kifejezést kifejtve:

$$\underline{a} = \left(-w^2 r_x + kr_z\right) \cdot \underline{i} + \left(-w^2 r_z\, kr_x\right) \cdot \underline{k} \ .$$

Síkmozgás



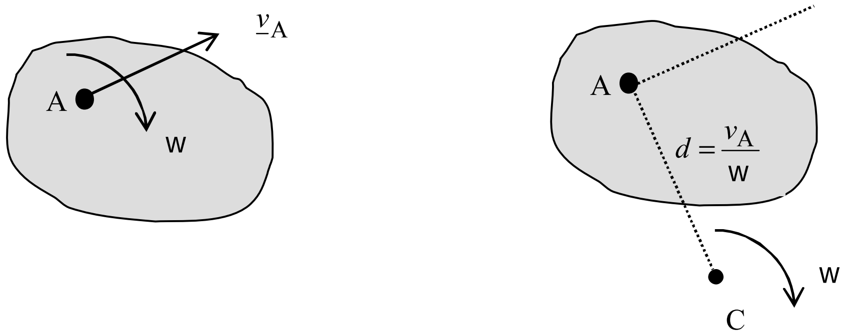
Az ábrán látható, hogy az általános síkmozgás összetehető egy haladó mozgásból és egy az A_1 ponton átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengely körüli elfordulásból. Ennek megfelelően egy adott időpontban a test minden pontjának azonos lesz a szögsebessége: $w_B(t) = w_A(t) = w(t)$.

Egy adott A pont sebességvektorának és szögsebességének ismeretében az egyes pontok **sebesség**vektora pedig a két összetevő mozgásból számított sebességvektorok összegzéseként kapható.

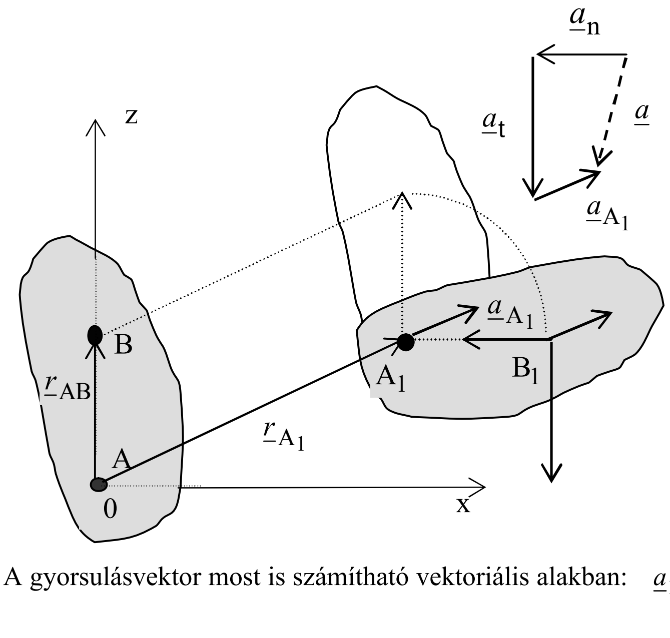
$$\underline{v}_B(t) = \underline{v}_A(t) + \underline{v}_{BA}(t).$$

Célszerű először a sebességvektornak az x és z tengely irányú komponenseit számolni, és ezt követően meghatározni a sebességvektor nagyságát és irányát. Az elfordulásból származó összetevő vektoriális szorzat segítségével is előállítható, így: $\underline{v}_B(t) = \underline{v}_A(t) + w(t) \cdot \underline{j} \times \underline{r}_{BA}(t)$.

Amint látjuk, a síkmozgásnál a sebesség a síkra merőleges szögsebességvektor és a síkba eső sebességvektor segítségével számítható. Lesz olyan pont, amelynek nem lesz sebessége csak szögsebessége. Nincs akadálya annak, hogy a többi pont sebességét ebből a pontból - az ún. **pillanatnyi forgásközéppont**ból (momentán sebességcentrumból) - kiindulva, csupán a szögsebességből számítsuk. Ebben az esetben nincs szükség vektorok összegzésére.



Mivel test síkmozgásáról van szó az elfordulás ténylegesen a C ponton átmenő síkra merőleges tengely körül történik.



A **gyorsulás** számításánál szintén abból indulunk ki, hogy az általános síkmozgás összetehető egy haladó mozgásból és egy, az A_1 ponton átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengely körüli elfordulásból. Ennek megfelelően egy adott időpontban a test minden pontjának azonos lesz a szöggyorsulása: $k_B(t) = k_A(t) = k(t)$.

Egy adott pont gyorsulásvektorának, szögsebességének és szöggyorsulásának ismeretében az egyes pontok gyorsulásvektora most három komponens összegzéseként kapható.

$$\underline{a}_B(t) = \underline{a}_A(t) + \underline{a}_{t_{BA}}(t) + \underline{a}_{n_{BA}}(t).$$

A gyorsulásvektor most is számítható vektoriális alakban: $\underline{a}_B(t) = \underline{a}_A(t) + k(t) \cdot \underline{j} \times \underline{r}_{BA}(t) - w^2(t) \underline{r}_{BA}(t)$.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 27-31. oldalakon. Példák: 1.9, 1.10, 1.11, 1.13