Egyszabadságfokú rendszer szabad rezgései

Csillapítatlan szabad rezgés

A csillapítatlan szabad rezgés differenciálegyenlete: $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$. A másodrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet általános megoldását $x(t)=\delta e^{\lambda t}$ alakban keresve, behelyettesítés és $\delta e^{\lambda t}$-vel való egyszerűsítés után az $m\lambda^2+k=0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk. Az egyenletből $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$, ahol $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

A differenciálegyenlet általános megoldása a két gyökhöz tartozó megoldás lineáris kombinációja lesz. Átalakítások után

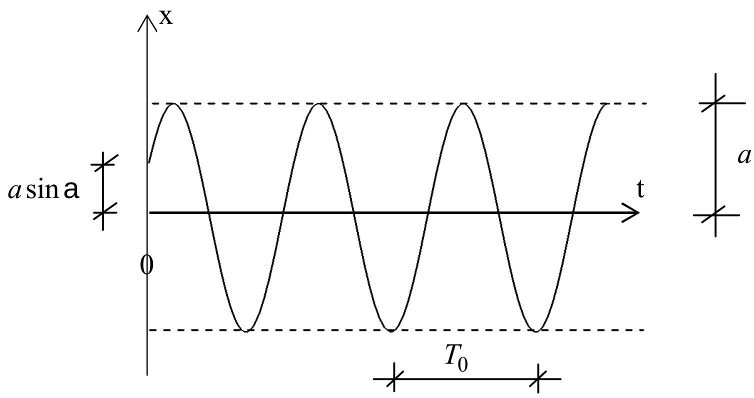
$$x(t)=\mathrm{A}\cos\omega_0 t+\mathrm{B}\sin\omega_0 t\,.$$

A megoldásban szereplő állandókat a kezdeti feltételekből tudjuk meghatározni. A rezgés kezdetéhez tartozó időpontot célszerű $t_0=0$-ra felvenni. A $t_0=0$ időponthoz tartozó $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$ ismeretében a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \quad ,$$

amely átírható $x(t)=a\cdot\sin\left(\omega_0 t+\alpha\right)$ alakra, ahol $a=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$ és $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

Vagyis az anyagi pont csillapítatlan rezgése harmonikus rezgőmozgás. Az anyagi pont maximális kitérése, amit a rezgés **amplitúdó**jának nevezünk a-val egyenlő. Az $\omega_0 t+\alpha$ értéket a rezgés adott időponthoz tartozó **fázis**ának nevezzük, míg α az ún. **kezdeti fázis**. Az ω_0 értéket a rendszer **sajátkörfrekvenciá**jának nevezzük. Asajátkörfrekvencia dimenziója $[\mathrm{rad/s}]$.



A $\omega_0 T_0=2\pi$ egyenlőségből számítható a T_0 **sajátrezgésidő:** $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$. A rezgésidő dimenziója [s].

Az egységnyi idő alatt történő rezgések száma : $n_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$, amelyet **sajátrezgésszám**nak (**önrezgésszám**nak, **frekvenciá**nak) nevezzük. Az 1/s-ban adódó rezgésszám dimenziója [Hz] (Hertz). A műszaki gyakorlatban használjuk a percenkénti önrezgésszám fogalmát is, amely $N_0=60n_0$. Az N_0 dimenziója: [1/perc].

A mérnöki gyakorlatban szívesen alkalmazott összefüggés szerint az önrezgésszámot (frekvenciát) jó közelítéssel megkapjuk, ha 5-öt osztjuk a tömegnek megfelelő súlyerőből cm-ben kiszámított, a rezgésnek megfelelő irányú elmozdulás négyzetgyökével.

$$n_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{4{,}984}{\sqrt{e_0}}\approx\frac{5}{\sqrt{e_0}}$$

Csillapított szabad rezgés

Sebességgel arányos külső csillapítás

A sebességgel arányos külső csillapításnak megfelelő differenciálegyenlet: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

Az egyenletben szereplő c tényező megadja az egységnyi sebességhez tartozó ellenállási erő számértékét, egysége: [Ns/m]. A másodrendű homogén, lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenlet megoldásánál feltételezzük, hogy a megoldás $x(t)=\delta e^{\lambda t}$ alakban kapható. Behelyettesítés és $\delta e^{\lambda t}$-vel való egyszerűsítés után az $m\lambda^2+c\lambda+k=0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, amiből:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\ .$$

A képletben szereplő négyzetgyök alatti kifejezésben lévő két tag nagyságától függően három eset különböztethető meg.

a.) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2>\frac{k}{m}$ vagy $c>2\sqrt{km}$.

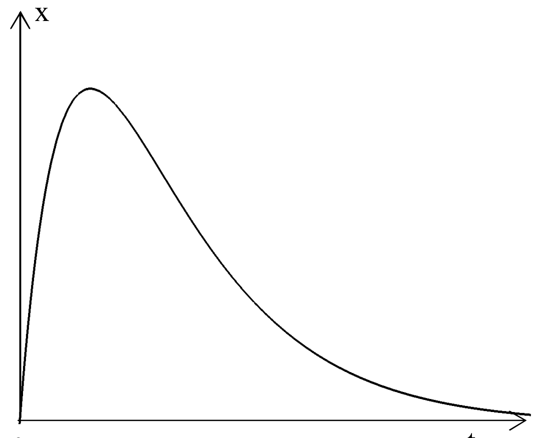
Ez esetben - amikor a **csillapítás nagy** - a gyökjel alatti érték előjele pozitív, tehát a gyökök valósak. Ezen kívül, mivel a gyök értéke $\frac{c}{2m}$-nél kisebb, mindkét λ negatív előjelű lesz.

Bevezetve a és $r=\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$ jelöléseket:

$$\lambda_1=-\rho+r=-\rho_1,\qquad \lambda_2=-\rho-r=-\rho_2.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t)=\delta_1 e^{-\rho_1 t}+\delta_2 e^{-\rho_2 t}$$



A megoldás két monoton csökkenő exponenciális görbe összegét tartalmazza. A nyugalmi helyzetből kimozdított test aszimptotikusan közeledik eredeti helyzetéhez, amint azt az ábra mutatja. A **nagy csillapítás** esetében tehát nem lesz rezgés.

b.) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2=\frac{k}{m}$ vagy $c=2\sqrt{km}$.

Ebben az esetben $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{c}{2m}=-\rho$ és az általános megoldás: $x(t)=e^{-\rho t}(\delta_1+\delta_2 t)$ alakban írható fel. Rezgés most sincs, és mivel $e^{-\rho t}$ jobban csökken, mint ahogy t növekszik, a mozgás az időben most is nyugalmi helyzethez közelít. Ezt az esetet, amikor $c=2\sqrt{km}$, **kritikus csillapítás**nak nevezzük.

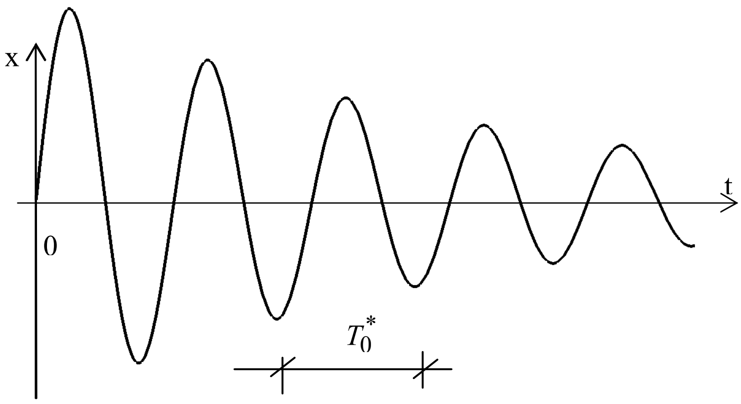
c.) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2<\frac{k}{m}$ vagy $c<2\sqrt{km}$.

Most, amikor a **csillapítás kicsi,** a négyzetgyök alatti kifejezés negatív lesz, így két komplex gyököt kapunk. Bevezetve az $\omega_0^*=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ a karakterisztikus egyenlet megoldásai: $\lambda_1=-\rho+i\omega_0^*$, $\lambda_2=-\rho-i\omega_0^*$.

A differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi lesz: $x(t)=e^{-\rho t}\left(A\cos\omega_0^* t + B\sin\omega_0^* t\right)$. Ha t=0-nál a kezdeti feltételek $x = x_0$ és $\dot{x} = v_0$, akkor a megoldás: $x(t)=e^{-\rho t}\left(x_0\cos\omega_0^* t + \dfrac{v_0+\rho x_0}{\omega_0^*}\sin\omega_0^* t\right)$

A fentiek értelmében az egytömegű, egyszabadságfokú rendszer csillapított szabad rezgése egy olyan ω_0^* frekvenciájú periodikus rezgőmozgás, amelynek amplitúdói az $e^{-\rho t}$ szorzó miatt t növekedésével csökkennek. Amint láttuk, az előző két esettől eltérően most rezgőmozgás van. Ez annak köszönhető, hogy a csillapítás **kis csillapítás**.

A csillapított rezgés ω_0^* sajátkörfrekvenciájánál a *-gal azt kívántuk kifejezni, hogy ω_0^* a csillapítási jellemző ismeretében a csillapítatlan esethez tartozó ω_0-ból származtatható: $\omega_0^* = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{c^2}{4km}}$ .A mozgás lefutását zérus kezdeti elmozdulás esetén:



A csillapított rezgés sajátrezgésideje: $T_0^* = \dfrac{2\pi}{\omega_0^*}$, önrezgésszáma pedig: $n_0^* = \dfrac{\omega_0^*}{2\pi}$. A rezgés csillapodását az egymást T_0^* időközzel követő kitérések arányával jellemezhetjük. A két kitérés hányadosát a csillapított rezgés **dekrementum**ának, természetes alapú logaritmusát pedig **logaritmikus dekrementum**nak nevezzük: $\vartheta = \rho T_0^*$. A logaritmikus dekrementum segítségével, bevezetve a $\gamma = \dfrac{\vartheta}{\pi}$ jelölést, $\rho = \dfrac{\gamma}{2}\omega_0^*$, és a mozgás egyenlete:

$$x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_0^* t}\left(x_0\cos\omega_0^* t + \left(\frac{v_0}{\omega_0^*}+\frac{\gamma}{2}x_0\right)\sin\omega_0^* t\right).$$

Szerkezeti csillapítás

Ha egy adott szerkezetet rezgésbe hozunk, majd hagyjuk, hogy szabad rezgést végezzen, a rezgés akkor is csillapodni fog, ha nincs külső rezgéscsillapítás. Ennek oka az ún. **szerkezeti csillapítás**, a szerkezet kapcsolatainál fellépő súrlódás és **az anyag nem tökéletesen rugalmas** volta, az ún. **belső súrlódás**.. Ezek szerint egy mérésekkel igazolt logaritmikus dekrementumhoz számítunk egy ekvivalens külső csillapítási jellemzőt. Így az eddigi összefüggéseink a szerkezeti csillapítás esetére is alkalmazhatók lesznek.

A $c_{ekv} = \gamma\sqrt{km}$ a csillapított rezgés sajátkörfrekvenciája a szerkezeti csillapítás esetén: $\omega_0^* = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{\gamma^2}{4}}$, azaz a szerkezeti csillapítás frekvenciát módosító hatása csak a logaritmikus dekrementumtól függ, vagyis valóban **frekvencia-független**. Valós szerkezeteknél az ω_0^*-ra kapott összefüggésben a négyzetgyök alatti kifejezés második tagja az első taghoz képest igen kicsi, ami azt jelenti, hogy a szerkezeti csillapítás az önrezgésszámra, sajátkörfrekvenciára nincs jelentős hatással.

Szokásos eljárás, hogy a szerkezeti csillapítással ekvivalens c külső csillapítási állandót a kritikus csillapítás %-ban adják meg: $\alpha[\%] = 50\gamma \rightarrow \gamma = \dfrac{\alpha[\%]}{50}$. Például vasbetonszerkezeteknél - jelentős dinamikus igénybevételeknél - 5%-os szerkezeti csillapításnál $\gamma = 0{,}1$.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 117-126 oldalakon. Példák: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4