

MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI- ÉS INFORMATIKAI KAR



Csúszva-gördülő felülepárok termo-elasztohidrodinamikusan kenélméleti vizsgálata p -verziós végelem módszerrel

Ph.D. ÉRTEKEZÉS

Készítette:
Szávai Szabolcs
okleveles gépészmérnök

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
GÉPEK ÉS SZERKEZETEK TERVEZÉSE TÉMATERÜLET
TERMÉKFEJLESZTÉS ÉS TERVEZÉS TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:
Dr. Tisza Miklós
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

TÉMAVEZETŐ
Dr. Szabó J. Ferenc
a műszaki tudományok kandidátus
TÁRS-TÉMAVEZETŐ:
Dr. Szota György
a műszaki tudományok kandidátusa

Miskolc, 2011

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	2
(1.) Témavezető ajánlása	4
(2.) Bevezetés	5
(3.) Irodalmi áttekintés	7
(4.) A dolgozat felépítése	26
(5.) A TEHD kenéseméleti jelenség leírásának alapegyenletei és peremfeltételei	27
(5.1) Alapegyenletek	28
(5.1.1) Mozgásegyenlet	28
(5.1.2) Energiaegyenlet:	30
(5.2) Általánosított Reynolds feladat pont vagy foltszerű érintkezés esetén	30
(5.2.1) Az érintkezési zóna határán a peremfeltételek, kavitáció	38
(5.2.1.1) Jelenleg használatos megoldások a kavitáció kezelésére	39
(5.2.1.2) Büntető kavitáció	45
(5.2.2) A résméret a felületen megoszló terhelés és a hőmérséklet hatására bekövetkező elmozdulások figyelembevételével	48
(5.2.3) Terhelési és kinematikai peremfeltétel	51
(5.2.4) A kenőanyag modell kiválasztása	52
(5.3) Termodinamikai feladat	53
(5.3.1) Peremfeltételek:	55
(5.3.2) A kavitáció figyelembevétele	59
(5.3.3) Az érintkező testek hőmérséklete a felületükön megoszló hőforrás hatására	62
(6.) Az alapegyenletek integrál alakja	64
(6.1) Variációs módszerek	64
(6.2) A variációs elv kiválasztása	67
(6.3) A mezők approximációja és a geometria leképzése	68
(6.3.1) A vizsgált tartomány leképzése	70
(6.3.1.1) Az elem geometriájának Legendre alapú approximációja	71
(6.3.1.2) Kontakttartomány és a résméret leképzése	76
(6.3.2) Az ismeretlen mezők approximációja	79
(6.4) Az alapegyenletek	80
(6.4.1) A Reynolds-egyenlet gyenge integrál alakja	81
(6.4.2) A termodinamikai-egyenlet gyenge integrál alakja	82
(6.4.3) A résméret deformációjának meghatározása approximációval	83
(6.4.3.1) A nyomáseloszlásból származó diszkretizált közelítő elmozdulásmező számítása a félvégtelen térként modellezett test esetén	84
(6.4.4) Az érintkező testekben és a kenőanyagban kialakuló hőmérsékletmező csatoltása	85
(7.) Az egyenletrendszer numerikus megoldása	90

(7.1) A megoldás során felhasznált diszkretizált egyenletek	90
(7.2) A diszkretizált Reynolds egyenlet linearizálása	92
(7.3) A Termodinamikai feladat kezelése	98
(7.4) Mintafeladatok	99
(7.4.1) Végtelen szélességű hidrodinamikusan sík siklófelületpár	100
(7.4.2) Végtelen szélességű hidrodinamikusan sík siklófelületpár adott terhelés mellett	101
(7.4.3) Kavitációs zóna meghatározása büntetőparaméteres elven	103
(7.4.4) Elasztohidrodinamikai feladat megoldása	106
(7.4.5) Termo-elasztohidrodinamikai probléma vizsgálata	109
(8.) Új tudományos eredmények összefoglalása; hasznosítási és továbbfejlesztési lehetőségek	114
(8.1) Tézisek	114
(8.2) Az eredmények hasznosítása, továbbfejlesztési lehetőségek	116
(8.3) Köszönetnyilvánítás	116
(9.) Summary	118
(10.) Az értekezés témájában megjelent tudományos publikációk	121
(11.) Felhasznált irodalom	123

(1.) Témavezető ajánlása

Szávai Szabolcs: „Csúszva gördülő felülepárok termo- elasztohidrodinamikusan kenéseméleti vizsgálata p-verziós végeelem módszerrel” című PhD értekezéséhez

A különböző gépelemek, szerkezeti egységek a működésük, érintkezésük során gyakran a terhelés elviselése közben a relatív elmozdulás, csúszás, érintkezés által képviselt hatásokat, igénybevételeket is kénytelenek elviselni. Megjelenik a súrlódás, mellyel együtt növekszik a károsodások, kopás, kipattogzás, a hőmérséklet hatásaival együtt, pedig a berágódás veszélye is. Ezért nagyon fontos a csúszva gördülő testek közötti érintkezések, valamint a köztük jelenlévő kenőanyagok viselkedésének minél részletesebb vizsgálata. Az ilyen vizsgálatok eredményei sokszor közvetlen gazdasági haszonnal is járnak (pl. gépjárművek esetén a súrlódás csökkentése nemcsak a károsodások veszélyének csökkenését, hanem jelentős üzemanyag- megtakarítást is eredményez).

A felületek közötti kenőanyag viselkedésének, hatásainak figyelembe vétele azt eredményezi, hogy már viszonylag egyszerűbb esetekben sem célszerű kézi, egyszerű módszerekkel közelíteni a vizsgálatokhoz, hanem jelentős számítástechnikai (hardver és szoftver) kapacitások szükségesek, amelyek megfelelő alkalmazása, a szükséges modellek megalkotása és megoldása magas szintű felkészültséget igényel.

Szávai Szabolcs mindezek birtokában, nagy lelkesedéssel, elszántsággal és kitartással végezte munkáját a csúszva gördülő testek termo- elasztohidrodinamikusan kenéseméleti vizsgálataiban. Munkája és elért eredményei jelentősek és egyedülállónak is mondhatók a tribológia területén, mivel az értekezésben bemutatott vizsgálat- típusokhoz az irodalomban fellelhető kutatások inkább a véges differencia- módszert vagy a véges sávok módszerét alkalmazzák, nem a végeelem- módszert. Külön érdekesség a p- verziós végeelemek alkalmazása ezekhez a vizsgálatokhoz.

Az értekezés a termo- elasztohidrodinamikusan problémák p- verziós végeelem- módszeren alapuló olyan lehetséges módját mutatja be, melynél a nyomás- és hőmérséklet- eloszlás közelítése tetszőleges fokszámú polinommal történhet és a kenőfilmnek a kavitáció miatti megszűnése modellezhető a kontakt- tartomány finom felosztása nélkül is.

Szávai Szabolcs tevékenységéről és eredményeiről beszámolt doktorandus- fórumokon, illetve hazai és külföldi konferenciákon, ahol eredményeit publikálta is. Ezzel eleget tett a Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola publikációs követelményeinek.

Az értekezés gondos munkát tükröz, megfogalmazása érthető, felépítése világos, ábrái a mondanivalót jól alátámasztják. Az értekezés tézisei a PhD cím elnyeréséhez szükséges kívánalmakat messzemenően kielégítik.

Miskolc, 2011. június 27.

Dr. Szabó Ferenc János
egyetemi docens, PhD,
a műszaki tudomány kandidátusa

(2.) Bevezetés

A mechanikus egységeket tartalmazó berendezések működése során minden esetben fellelhető különböző szerkezeti egységek között mechanikai kölcsönhatás/információátvitel. Ahhoz, hogy a kölcsönhatás/információátvitel megvalósulhasson, a szerkezeti egységeknek egymáshoz kell kapcsolódnuk, egymással érintkezniük kell. Ez az érintkezés/kapcsolódás mindig kényszereken keresztül valósul meg. A kényszerek olyan kapcsolatot jelentenek, melyek a szerkezeti egységek egymástól független, szabad mozgását bizonyos fokig gátolják, azaz csökkentik azok mozgásának szabadságfokát. Másrészt a kényszerek bizonyos független mozgásformákat megengednek, lehetővé tesznek, a szerkezeti egységek egymáshoz viszonyított mozgásában egyes szabadságfokokat meghagynak. Így a szerkezeti egységek érintkezése során, gyakorta előfordul relatív elmozdulás, elfordulás vagy másképp megfogalmazva csúszhatnak, gördülhetnek egymáson.

Ha két test érintkezik, és egymáson csúszik vagy gördül, az érintkező felületek és az érintkező testek kisebb vagy nagyobb térfogatai mechanikai és hőterhelésnek vannak kitéve, ha azokat erővel szorítjuk egymáshoz. Megjelenik a súrlódás, mely akadályozza a mozgást, és ezzel együtt növekszik a károsodás, a kopás és a kipattogzás lehetősége is. Azt, hogy a súrlódás és a kopás kulcsszerepet játszanak a berendezések megbízható működésében és élettartamában, nagyon hamar felismerték. Néhány eset kivételével (tűzcsiholás, fékezés) a berendezések működési paramétereinek javítása végett erőfeszítéseket kell tenni mind a súrlódás, mind a kopás csökkentésére. Ennek érdekében például súrlódás és kopáscsökkentő anyagot, kenőanyagot, kell az érintkező felületek közé juttatni. A kenőanyag, még napjainkban is, a legtöbb esetben folyadék (víz, egyes olajok) vagy bizonyos zsírok.

Az érintkezési problémákat először Hertz tárgyalta mechanikailag 1882-ben [4], [5]. Azon problémáknak az elméleti alapjait, amelyeknél az érintkező felületek között kenőanyagfilm található, N. P. Petrov [6], B. Tower [7] és O. Reynolds [8] a XIX. század végén végzett munkája adta meg. Munkájuk forradalmasította a kenéselmélet tudományát. A ma Reynolds egyenletként ismert parciális differenciálegyenlet felállítása, csapágyak, tömítések, fogaskerekek, bütökös mechanizmusok komplex vizsgálatára teremtett lehetőséget.

A későbbi kutatások során a kutatók rámutattak arra, hogy a gépelemek csúszva-gördülő kapcsolata során, a működési paraméterek nagymértékben függenek az érintkezés során kialakuló hőmérséklet-eloszlástól is, mivel a kenőanyag jellemzői jelentősen változnak a hőmérséklet függvényében. Gördülőcsapágyak, fogaskerekek, büttykös mechanizmusok működésének elemzése kimutatta, hogy ezeknél, sem az érintkező felületek kontaktnyomás okozta felületi deformációja, sem a kenőanyag jellemzőinek nyomástól való függése nem elhanyagolható. Mindezeket figyelembe véve, Dowson [41] megalkotta az általánosított Reynolds egyenletet, mely a termo-elasztohidrodinamikusan (TEHD vagy TEHL) kenéselmélet alapja.

A Reynolds egyenletet azonban néhány egyszerű esettől eltekintve nem lehet zárt alakban megoldani, nem is szólva annak általánosított alakjáról. Így szükségessé váltak a numerikus módszerekre épülő megoldások. Ezek közül napjainkban a legelterjedtebb a Houpert és Hamrock [61] által kifejlesztett "Fast approach scheme" és a "Multigrid-multilevel" [111] eljárás, melyet Lubrecht, Napel és Bosma közölt. Mindkét eljárás az általános Reynolds egyenlet differencia módszeren alapuló megoldására támaszkodik. Ennek következtében a megoldáshoz igen sűrűn fel kell osztani az érintkezési tartományt.

Hatékony megoldási módszerek után kutatva több kutató is a variációs módszerekre épülő végeselem-módszer felé fordult. Ebben az irányban azonban nem következett be átütő siker. A variációs módszer előnyei nem mutatkoztak meg a differencia módszerrel szemben. Ennek egyik fő oka, hogy a feltételezett érintkezési tartományok általában egyszeresen összefüggő szabályos téglalap alakú területek. A másik fő ok az, hogy a variációs módszer megengedi ugyan a keresett mezők másodnál magasabb fokú polinomokkal való közelítését is, ezt mégsem használták termo-elasztohidrodinamikusan problémák megoldására, mivel az érintkezési tartomány végét a kenőfilm kavitáció hatására való megszűnése jelöli ki és ennek figyelembevételét mindeztáig csak finom felosztásnál tudták megtenni. A két fő ok mellett még számos nehézség hátráltatta a termo-elasztohidrodinamikusan problémák végeselem-módszerre épülő hatékony megoldását.

Értekezésemben a termo-elasztohidrodinamikusan problémák végeselem-módszeren alapuló megoldásának egy olyan lehetséges módját fogom bemutatni, amikor a nyomás- és hőmérséklet-eloszlás közelítése tetszőleges fokszámú polinomokkal történhet, és a kenőfilm kavitáció hatására való megszűnése a feltételezett kontakttartomány finom felosztása nélkül modellezhető.

(3.) Irodalmi áttekintés

A súrlódás és kopás jelenségét már a korai kőkorszakban is ismerték, sőt alkalmazták a tűzgyújtáshoz, illetve a lyukak fúrásához használatos eszközöknél. Ezeknél az eszközöknél a csapágyszerű részek többnyire fából, agancsból, csontból készültek. A kezdetleges csapág kialakításoknál később rézbevonatot használtak. A Jerichónál feltárt i.e. 2000 körüli időkből származó szekerek kerekeinél esetenként bitument alkalmaztak kezdetleges kenőanyagként.

A súrlódás törvényszerűségeinek vizsgálata azonban 1519-ig váratott magára, amikor Leonardo da Vinci [15] írásban összefoglalta a súrlódási fajtákat és a súrlódási ellenállást a test súlyának negyedében állapította meg. 1699-ben Amontons [1] végezte el az első tervszerű kísérletsorozatot a törvényszerűségek megállapítása érdekében. Euler 1748-ban $\mu=S/P$ alakban állapította meg a súrlódási tényező értékét [79], ahol P a terhelőerő vagy terhelőnyomás, míg S a súrlódóerő vagy felületi súrlódási csúsztatófeszültség. Senger András 1758-ban kimutatta, hogy a nyugvó és a mozgásbeli súrlódási tényező különbözik egymástól [79]. Coulomb 1779-ben [2] nagy fajlagos terhelési tartományokra is kiterjesztve megismételte Amontons kísérletét és kimutatta, hogy súrlódási ellenállás nagy szórása a súrlódó felületek fizikai állapotával van kapcsolatban. Hirn [3] 1854-ben közzétett munkájában különböző kenőanyagoknál (állati, növényi, ásványi olajok, víz, levegő) mérte a súrlódási nyomatékot a sebesség és a terhelés függvényében. Felismerte a különbséget a száraz súrlódás "frottement immédiat", amely követi a Coulomb törvényt [2], és a folyadéksúrlódás (frottement médiat) között, ami arányos a sebességgel. Felismerte továbbá, hogy bizonyos körülmények között, a levegő is kitűnő kenőanyag lehet. Mindemellett Hirn szerepe a kenéselmélet fejlődésére nézve vitatható, mivel Hirn csak termodinamikai szempontból végzett kísérleteket azért, hogy feltárja az összefüggést a mechanikai munkabefektetés és a hőfejlődés között [114].

Mint már korábban is említettem, a testek érintkezésekor, a felületek védelme és a jobb működési paraméterek elérése, illetve a testek egymáson könnyebben való elmozdításának érdekében, már igen régen alkalmaznak kenőanyagokat, melyek közül az első valószínűleg a víz volt. Azonban az érintkező felületek közt, a kenőanyagokban lejátszódó folyamatok megértése egészen az 1800-as évek végéig váratott magára. Ekkor néhány éven belül, egymástól függetlenül 3 tudós, az orosz

N. P. Petrov [1], a brit B. Tower [7] és a szintén brit O. Reynolds [8] szakított az addigi irányzattal, mely a testek kenőanyag jelenlétében történő érintkezését is a szilárd testek mechanikai kölcsönhatásaként próbálta leírni. Ehelyett felismerték, hogy a testeket folyadék film választja el, így a kenési jelenség leírásának a folyadékok dinamikáján kell alapulnia. 3 éven belül (1883-1886) kidolgozták mind az elméleti, mind a kísérleti alapokat. Petrov felismerte, hogy a folyadékkenésnél nem a folyadék sűrűsége, hanem annak viszkozitása a mérvadó, és hogy a súrlódás nem a szilárd felületek egymáshoz érésének a következménye, hanem a folyadékfilmben fellépő csúsztatófeszültségé. Petrov azonban csak a súrlódást vizsgálta, a csapágyak terhelhetőségével nem foglalkozott. Tower szintén a súrlódásra koncentrálni kezdte el kutatásait, de kísérletei során felismerte, hogy a csapágyakban folyadékszállítás van, a folyadék elválasztja a felületeket, és a folyadék nagy nyomásnak van kitéve. Petrov és Tower kísérletekre alapozták megállapításaikat. Az elméleti háttérrel tőlük teljesen függetlenül Reynolds állította fel 1884-ben, amelyet 1886. február 11-én tett közzé a Royal Society. Az ekkor közölt cikkben található a ma Reynolds egyenlet néven ismert parciális differenciálegyenlet és a levezetéshez használt közelítések, melyek ma is a tribológiai számítások alapját képezik.

A következő fontos lépés 1892-ben A. Kingsburynek [10] az a felismerése volt, hogy a felületek közti rést kitöltő anyag nemcsak folyadék, hanem gáz halmazállapotú is lehet. A. Kingsbury 1897-ben, miután megismerte Reynolds publikációját, közzétette saját eredményeit a hidrodinamikai kenéselmélet kiterjesztését összenyomható kenőanyagokra.

A kenőanyagban lejátszódó jelenségek elméleti háttérének feltárása ellenére továbbra is jelentős szerep jutott a csapágyjellemzők kísérleti úton való meghatározásának. Ezen a téren mindenképp meg kell említeni Stribeck 1902-ben publikált munkáját [79]. Ebben hengeres siklófelületű olajkenésű siklócsapágyak súrlódási tényezőjét határozta meg kísérleti úton a fajlagos csapágyterhelés és a fordulatszám függvényében.

Az elméleti eredmények gyakorlati használhatóságát egészen 1904-ig jelentősen hátráltatta az, hogy a parciális differenciálegyenletet, a legegyszerűbb geometriák kivételével nem tudták megoldani. Ekkor Sommerfeld [11] híres cikkében közölte a kenőfilm nyomásfüggvényének zárt alakú integrálását végtelen széles csapágyakra. Sommerfeld megoldását a $0-2\pi$ tartományra írta fel, azonban

felhívta a figyelmet arra, hogy az így elhanyagolt kavitáció jelentősen befolyásolhatja a megoldást. Mindazonáltal Raimondi és Boyd 1958-ban [33] Sommerfeld $0-2\pi$ tartományra vett megoldását továbbra is használhatónak ítélték meg az olyan esetekben, amikor nagy a külső nyomás, hiszen ilyenkor a folyadékfilmben ébredő nyomás nem esik a kenőanyag szaturációs/ telített gőz/ kavitációs nyomáshatár alá. Sommerfeld feltételezését a peremfeltételek fajtái közé sorolták és ma Sommerfeld féle peremfeltételként tarjuk nyilván. Sommerfeldet Michell követte 1905-ben [12] véges szélességű sík felületepár elméleti kidolgozásával és a nyomáseloszlás közelítő Bessel függvényekre épülő számítási módszerének kidolgozásával.

A sarus vagy támasztócsapágyak vizsgálatakor azonban nem alkalmazható végtelen széles modell. Rayleigh 1918-ban [13] publikált elsőként valós geometriájú véges szélességű sarus csapágyakra vonatkozó számítási eredményeket, többek között terhelhetőségi adatokat. Lord Rayleighnek a tribológia területén végzett munkája azért is említésre méltó, mert 1917-ben ő volt az, aki felhívta a figyelmet a hidrosztatikus elven működő csapágyak megvalósításának lehetőségére [114].

Az ezt követő években a kutatások két fő irányban haladtak tovább, melyeket a teljesség kedvéért meg kell említeni, annak ellenére, hogy nincsenek közvetlenül kapcsolatban jelen értekezés témájával. Az egyik irány jeles képviselője Stodola volt, aki 1925-ben publikált cikkében [16] szakított a korábbi elképzeléssel, mely a csapágyat merev megtámasztásként kezelte. Ehelyett, javaslata szerint, a megtámasztásokat rugókként kell modellezni, mely nagymértékben hozzájárulhat a forgórészek dinamikai viselkedésének megértéséhez és kritikus jellemzőinek meghatározásához. A forgórészek dinamikájának kutatása terén később Pestel 1954-ben [27], Lund 1965-ben [49] és Allaire 1980-ban [93] ért el jelentős eredményeket, de mivel ezen kutatáshoz nem kapcsolódik szorosan ez a terület, így részletesebben nem kerülnek ismertetésre.

A kutatások másik fő csapása a csapágyak stabilitási/instabilitási problémáinak megértése érdekében tett lépések voltak. Ezen a területen az első jelentős eredményeket Newkirk [17] tette közzé ugyancsak 1925-ben. A két világháború közti időszakban Herbert W. Swift végzett jelentős kutatásokat [18], [19]. Ő volt az, aki felírta a Reynolds egyenlet dinamikus terhelésre is érvényes alakját, melynek a megoldásával Hang 1946-ban [22], Tond 1957-ben [32] és Sternlicht 1962 [42] végzett úttörőmunkát. Swift kutatásai során továbbá arra a következtetésre jutott, hogy ha a kenőfilm a kavitáció miatt szűnik meg, akkor a

kilépésnél mind $p=0$, mind $grad(p)=0$. W. Stieber a kontinuitási feltételből kiindulva ugyanerre a következtetésre jutott, így ezt a kilépési peremfeltételt Swift-Stieber peremfeltételnek nevezték el [165]. Később Cameron és Wood is kimutatta, hogy ez a peremfeltétel megfelel a minimális potenciális energiára törekvés és a maximális teherviselés elvének [55], továbbá Christopherson bemutatta, hogy a csapágysúrlódás is e peremfeltétel mellett a minimális [55]. Annak ellenére, hogy a Swift-Stieber feltétel nem képes kimutatni a szubkavitációs nyomást, „csak” besimul a kavitációs határra, mégis a jó kezelhetősége miatt a numerikus számítások során a mai napig a legszéleskörűbben használt kilépési feltétel és nagyon jó egyezést mutat a kísérletekkel. Mindazonáltal Cole és Hughes [29] 1956-ban kísérleti úton kimutatta, hogy az olajfilm csak sávokra esik szét, és nem szűnik meg teljesen. Később, Folberg 1961 és 1965 között publikált kutatásai ([39] [46] [48]) során arra a következtetésre jutott, hogy a kavitációs zónában a folyadék túlnyomórészt a Cole és Hughes által kimutatott keskeny sávokban található, míg a felületekhez tapadt kenőanyag elhanyagolhatóan kevés. A nyomás állandó és a kenőanyaggőz telítettségi nyomásával egyenlő a sávok közti teret kitöltő gőz alacsony viszkozitásának és a kenőanyag sávok geometriájának köszönhetően. Coyne-Elrod 1970-ben [64], [65], a Taylor 1964-es [47], a kenőanyagok kavitációját tárgyaló művében definiált felületi feszültségi paraméter segítségével, közzétette a szubkavitációs nyomás meghatározásához szükséges film-kavitációs határfelületre vonatkozó peremfeltételt, melyet Savage 1977-ben [89] pontosított. Azonban a szubkavitációs nyomás meghatározása az esetek túlnyomó többségénél szükségtelen. A jelenségek vizsgálatához általában elegendőnek bizonyul a Swift-Stieber kilépési peremfeltétel. A Swift-Stieber peremfeltétel alkalmazása sem bizonyult egyszerűnek. Noha a kilépésnél jó közelítést ad, de a kilépés helyére vonatkozólag nem nyújt támaszt. Ennek következtében nem lehet kijelölni a probléma vizsgálatának kezdetekor a vizsgálandó tartományt, tehát a feladat megoldása során két lehetőség közül lehet választani. Az egyik, hogy a kezdeti tartományt módosítjuk folyamatosan a kilépési peremfeltételnek megfelelően. A másik lehetőség a jelenséget leíró egyenletek kiterjesztése a kavitációs tartományra. Bár kétségtelen, hogy az első megoldás minden szempontból a legkívánatosabb, de a numerikus megoldási módszerek használói számára igen nagy nehézséget okoz, ha a vizsgált tartomány változhat az eljárás során, különösképp, kapcsolt rendszerek esetén. Így nem meglepő, hogy a kutatók inkább a megoldani kívánt

egyenletet kívánták módosítani, alkalmazhatóvá tenni a kavitációs tartományban is, azaz a Swift-Stieber peremfeltétel minden olyan pontban fennálljon, ahol kavitáció lép fel. Ez a cél a kenőanyag áramlásának kavitációs tartományon belüli Couette áramlásként (állandó nyomáseloszlás melletti, csak geometriafüggő áramlás) való modellezésével elérhető, azonban biztosítani kell a kontinuitást is. Amennyiben a kenőanyag mozgását Couette áramlásként modellezzük, de a résméret nem állandó, a rés kitöltöttségének kell megfelelően változni, hogy a kontinuitási tétel ne sérüljön, hiszen e modell esetében a felületek között lineáris a sebességeloszlás. A kontinuitás biztosítható a Jakobsson-Floberg-Olsson modellként ismert eljárással, melyet Floberg és Jakobsson mutatott be elsőként 1957-ben [31], majd Olsson fejlesztette tovább dinamikus terhelésű csapágyakra 1965-ben [53] publikált munkájában. Modelljünkben a felületi feszültség szerepét elhanyagolva egyszerűen két részre osztották a kontakttartományt, kenési és kavitációs zónára, majd feltételezték, hogy a kavitációs zóna egy adott részét kenőanyag, míg a másik részét gáznemű anyag / kenőanyag gőz tölti ki. A két fázis rés menti arányát a kitöltési paraméterrel jellemezték, tehát végső soron egy olyan homogén áramló közeget tételeztek fel, aminek sűrűsége megegyezett a folyadék és gáz fázisok rés menti átlagsűrűségével. Az előbbiekre alapozott kavitációs algoritmust Elrod és Adams 1975 [80], Elrod 1981 [94] publikálta elsőként, majd Vijayaraghavan és Keith módosította, illetve általánosította 1989 és 1991 között közzétett cikksorozatában [118], [119], [123], [124], [125], [133]. A ma már Elrod féle kavitációs algoritmusként ismert módszert Brewe 1986 [112] majd Woods és Brewe 1989 [122] alkalmazta sikeresen dinamikus terhelési esetekre. Az Elrod féle algoritmus nagy hátránya azonban az, hogy nem kezeli az iterációs lépések között a kavitációs index változását, ami esetenként jelentős oszcillációt okozhat. Payvar és Salant 1992-ben [140] közzétett munkájukban sikeresen kiküszöbölték a megoldás során jelentkező numerikus problémát. Az általuk javasolt megoldást ugyan a tömítések elemzéséhez kezdték kifejleszteni, de könnyen adaptálható más esetekben is. Az eljárás előnye, hogy szétválasztja a kontakttartomány feletti nyomás és a kavitációs zónán belüli sűrűség számítását. Sajnálatos módon ez az algoritmus még nem terjedt el napjainkban. Az előbbi két eljárásra elmondható, hogy nem foglalkozik a kavitációs határon zajló fázisátalakulás sajátosságaival, nem választja külön a két fázist, nem kezeli a szubkavitációs nyomást. A szubkavitációs jelenségek vizsgálatára Rapposelli és d'Agostino 2001-ben [173] mutatott be egy, a Coyne és Elrod [64],

[65] által bemutatottnál könnyebben alkalmazható isentalpikus modellt, mellyel sikeresen tudták szimulálni Folberg mérési eredményeit. A kavitáció kezelésére kialakult módszerek közül, az eddig megemlítettekre mind elmondható, hogy az eljárás kidolgozásánál a parciális differenciálegyenletek véges differencia elvre alapozott megoldási módszereinek filozófiájába igyekeztek beleilleszteni a javasolt algoritmust. Ezért, ha más megoldási elveket követünk, akkor újra kell gondolni a kavitációs algoritmusokat is, az alkalmazandó megoldási elv filozófiájába kell azokat behelyezni. A végeselem-módszerrel történő számításokhoz Goenka 1984-ben [101] publikált először olyan algoritmust, amely illeszkedik a módszer sajátosságaihoz. Hasonlóan Goenka eljárásához Labouff és Booker 1985-ben [103] szintén sikeresen kezelte a kavitációt a végeselemes megoldás során. Mindkét munka azonban a kavitációt kvázistatikus jelenségként vizsgálta. A kavitáció tranziens körülmények közti sajátosságait, Jones 1983-ban [98] megjelent munkájára alapozva, Kumar és Booker, 1991-ben [134], [135] elemezte sikeresen. Az eddigiekben ismertetett munkák során a kutatók arra törekedtek, hogy a kavitáció jelenségét minél pontosabban megjelenítsék a számításaikban. Kevesebbet törődtek viszont a számítások hatékonyságával, illetve azzal, hogy bizonyos hatékony numerikus megoldási módszerek adaptálhatóságának szabnak gátat. Ezen kutatások csak olyan megoldási módszereket támogatnak, amelyeknél a pontosság növelése és a konvergencia-vizsgálat a vizsgált tartomány egyre finomabb felosztásával érhető el (multilevel-multigrid [90], [111]). A napjainkban előretörő módszerek, melyek lehetővé teszik a pontosság növelését és a konvergencia számítást anélkül, hogy a tartomány felosztását lényegesen finomítanánk, az ismeretlen mezők magasabb fokú approximációját alkalmazzák, mely lényegesen kevésbé növeli az ismeretlenek számát, mint a háló finomítása [137]. E módszerek alkalmazásának a feltétele azonban az, hogy vagy kezelni tudjuk a kavitációt az osztás elemein belül, vagy a felosztást kell úgy módosítani, hogy a kavitációs határ az osztás elemeinek határára essék. Kétségtelen, hogy egzaktabb megoldáshoz jutunk, ha a felosztást módosítjuk [164], [166], azonban ez jelentős nehézségeket okoz, növeli az ismeretlenek számát, és szükségessé teszi az adatok felosztások közti transzformációját, ami információvesztéssel eredményezhet. A feladatok többségében azonban megelégedhetünk a kavitáció kevésbé igényes kezelésével, ugyanis az átlagos nyomásértékek mellett nemcsak a szubkavitációs nyomás hanyagolható el, hanem a kavitációs peremfeltételek

teljesülését is elég csak a feladat szempontjából célszerűen megválasztott hibahatáron belül megkövetelni. Ezekben az esetekben, a kavitációs modellezésre kiválóan alkalmas, a kontaktmechanikában széles körben alkalmazott büntető paraméteres megoldás, melyet Wu 1986-ban [113] javasolt először kenéselméleti problémákhoz, majd 1996-ban Pahud [159] és Schlijper, Scales és Rycroft 1996 [161] alkalmazott sikeresen hidrodinamikai kenésállapotok modellezése során. Jelentős hátránya a büntető paraméteres technikának, hogy ugyan a nyomást jól kézben tartja, de a kontinuitás sérül a kavitációs határon, ami termodinamikai modellezés során problémát jelent, így e módszer, termo-hidrodinamikai problémák modellezésére ebben a formájában nem alkalmas.

Az eddigiekben ismertett kutatások főként a hidrodinamikai kenéselmélet problémakörére koncentráltak. A megoldásokat főként kis és közepes statikus vagy dinamikus terhelésű hidrodinamikus, illetve hidrosztatikus siklócsapágyak tribológiai elemzéséhez készítették. Így a megoldások némelyike ugyan figyelembe vette a sikló felületek deformációját, de nem számoltak a felületek hőmérséklet hatására bekövetkező alakváltozásával és az anyagállandókat is konstansnak vették, ezért csak a problémák szűk körére alkalmazhatóak. Azonban már 1916-ban Martin [14] számításaiból kiderült, hogy a felületek deformációjának, illetve a viszkozitás nyomás- és hőmérsékletfüggésének figyelmen kívül hagyásával irreálisan kis kenőfilmvastagság adódna nagy kontaktnyomások esetén. Martin nem ismerte még fel akkor a termo-elasztohidrodinamikus kenési állapotot, hanem úgy vélte, hogy test-test érintkezés lép fel. Pedig a viszkozitás nyomás- és hőmérsékletfüggésére vonatkozó első összefüggés 1893-ból Barustól [9] származik, melyet 1963-ban Roelands [45] öntött új alakba, de a kísérleti eredményekkel a legjobb egyezést a módosított WLF formula adja, melyet 1991-ben Wolff [138] alkalmazott először termo-elasztohidrodinamikus probléma megoldásához. Ezek mindegyikére igaz, hogy a viszkozitás a nyomás és a hőmérséklet nemlineáris függvénye. A fordulat 1949-ben következett be, amikor Grubin és Vinogaroda [24] felismerték, hogy a csúszva gördülő gépelemek, mint például a fogaskerekek, csapágyak, büttykös mechanizmusok olyan nagy terhelésnek, sebességnek és csúszásnak vannak kitéve, hogy ilyen körülmények között a nagy kontaktnyomás mellett, ami akár több száz MPa is lehet, jelentős hőfejlődés is fellép, így nem lehet figyelmen kívül hagyni az anyagjellemzők nyomástól és hőmérséklettől való függését és a felületek deformációját. Számításaikban figyelembe vették a felületek

deformációját és a viszkozitás növekedését a nyomás függvényében, és az így kapott eredmények jó egyezést mutattak a kísérletekkel. Grubin közölt elsőként olyan összefüggést a minimális kenőfilm vastagságra nézve, melyben Martin megoldásával [14] ellentétben, nemcsak a felületek sebessége és a terhelés szerepel, hanem az érintkező felületekre vonatkozó anyagjellemző (G) is. Grubin kimutatta, hogy a „EHD” filmvastagság nagyságrenddel kevésbé érzékeny a terhelés változására, mintha a felületeket merevnek tételeznénk fel. Cameron [55] kimutatta, hogy a Grubin által leírt sajátosság jól egyezik Ertel 1939-es [20] eredményeivel. A Grubin-Ertel összefüggésként ismert egyenlet, még napjainkban is jól használható a filmvastagság meghatározására vonalérintkezés esetén. Az összefüggést a későbbiekben Dowson és Higginson [38], majd Dowson [58] finomította. Szintén Dowson és Higginson [88] voltak azok, akik pontszerű érintkezés esetére is megadták a minimális filmvastagságot közelítő képletet, melyet később többekkel együtt, Chittenden [106] pontosított.

Grubint hamarosan követte Petrusевич 1951-ben [25]. Ő volt az, aki először tette közzé az elasztohidrodinamikusan jellegzetes alakját és a nyomáeloszlást. A felületek deformációjának számításához a félvégtelen téren lévő megoszló terhelés hatására kialakuló deformáció- és feszültségmegoszlás számítására Boussinesq, Cerruti, Love, Timoshenko és Goodier által kifejlesztett analitikus megoldást használták és használják gyakorta ma is, melynek részletes összefoglalását Johnson 1985-ben [107] kiadott könyvében közli.

A felületi deformációkat és a viszkozitás nyomásfüggését figyelembe vevő elasztohidrodinamikai kutatások mellett, egyelőre még független kutatási irányként, főként a siklócsapágyazásokra koncentráltan Cope (1949) [23] és Charnes, Osterle és Saibel (1952) [26] munkáiban megjelentek az első hidrodinamikai-termodinamikai kapcsolt vizsgálatok. Ugyan a Cope féle adiabatikus modellben a hőmérséklet állandó a rés mentén, és a modell elhanyagolja a felületeken keresztüli hővezetést, mégis meg kell különböztetni a hagyományos izotermikus modellektől. Ezen az elven többekkel együtt Sternlicht 1961-ben [40] publikálta az egyik első olyan elasztohidrodinamikusan számított, melyben figyelembe vették a hőfejlődést. Egészen addig, míg Dowson és Hudson (1963) [44] az elsők között felismerte a hővezetést, a film vastagság mentén a Cope modell volt a meghatározója a kutatásoknak. Dowson és March (1967) [56], McCallion (1970) [68], és Ezzat és Rohde (1972) [72] munkája során alakult ki az az egységes nézet, miszerint a filmvastagság menti

hővezetés és a relatív mozgás irányába eső hőszállítás az, ami meghatározza a kenőfilm hőmérséklet-eloszlását. Ezáltal az elliptikus differenciálegyenlet könnyen megoldható parabolikussá válik, ami egészen addig használható, míg jelentős visszaáramlás nem lép fel a résben, mely problémára Suganami és Szeri 1979-ben [91], illetve később Boncompain, Fillon és Frêne 1986-ban [109] hívta fel a figyelmet. A korai kutatásokban a felületeket vagy állandó hőmérsékletűnek vagy tökéletesen hőszigetelőnek modellezték az adott problémától (Reynolds szám) függően. Azonban az elasztohidrodinamikai problémák esetében az érintkezési tartomány mérete oly kicsiny, hogy mellette a testek „végtelen” nagynak tekinthetőek. Ezekben az esetekben a felületek hőmérséklete jól számítható Carslav és Jager [36] által már 1959-ban megjelentetett félvégtelen téren mozgó hőforrás hatására kialakuló hőmérséklet-eloszlásra vonatkozó összefüggés alapján. Azonban a kontaktzóna hőmérsékletének ez úton való számítása nem veszi figyelembe az érintkező testek hőleadását a hőbevitel tartományán kívül, továbbá vonal menti érintkezés esetén nem alkalmazható az álló felület hőmérsékletének számítására. A környezettel való hőcsere hatását a félvégtelen téren mozgó hőforrás miatt kialakuló hőmérséklet-eloszlására Terauchi, Nadano és Kohno 1985-ben [105] publikálta, kimutatva a környezet és a test közti hőátadási tényező hatását. Obota, Fujita és Fujii [108] szakítva a testek félvégtelen térként való modellezésével 1986-ban fogaskerék fogak ismételt mozgó hőforrás okozta hőmérsékletváltozását számította ki analitikus úton, melynek során a fogat téglatestként modellezték. Azonban analitikus úton továbbra sem vált számíthatóvá az álló felület hőmérséklet-eloszlása vonal menti érintkezés esetén. Ezek számítására továbbra is csak numerikus módszer alkalmazható, vagy tökéletesen hőszigetelőnek feltételezhető a felület.

Mivel Reynolds a viszkozitást állandónak vette egyenletének levezetésekor a folyadékfilm vastagságának mentén, szükségessé vált egy általánosabb alakú egyenlet felírása a termo-elasztohidrodinamikai problémákhoz (TEHD). 1961-ben Dowson [41] és Higginson megalkotta az általánosított Reynolds egyenletet. 1965-ben Cheng és Sternlicht [51] közzétett egy numerikus megoldást, figyelembe véve a hőmérséklet változását és a felületek deformációit, de a viszkozitás értékét a filmvastagság mentén állandónak vették. Később Cheng finomította a megoldást [52], [67] azzal, hogy figyelembe vette a viszkozitás változását a filmvastagság mentén. Cheng és Sternlicht arra a következtetésre jutott, hogy a résméret menti

hőmérsékletváltozás figyelembevétele sem a nyomáseloszlásra, sem a filmvastagságra nincs jelentős hatással, jelentős kihatása van azonban a súrlódási ellenállásra. A Kim és Sadeghi illetve Wolff másokkal együtt 1992-ben [139], [143] publikált kutatásai bebizonyították, hogy a hőmérséklet változása jelentős hatással lehet a filmvastagságra és ezen keresztül a teherviselő képességre is. A termo-elasztohidrodinamikusan kenési állapot eddigiekben bemutatott vizsgálatai kifejezetten a vékony kenőfilmre és a nagy kontaktnyomásra vonatkoztak.

Azonban számos olyan eset létezik, amikor az előbb említett körülmények nem állnak fenn, mégis figyelembe kell venni a felületi deformációt és/vagy a hőfejlődést, továbbá a testek modellezésére pont vagy vonalszerű érintkezéseknél használt félvégtelen téren alapuló közelítés a kontaktzóna mérete miatt nem használható. Ebbe a körbe tartoznak például az ízületek, melyeket Tanner 1966-ban [54] és Dowson 1967-ben [57] vizsgált elsőként figyelembe véve a siklófelületek deformációját; vagy a gépkocsi gumiabroncsok vízen futásának a jelensége, mely elemzésében Browne, Whicker és Rohde 1975-ben [81] használta fel elsőként az elasztohidrodinamikai elveket. A hagyományos siklócsapágyazásoknál is a felületek deformációja növeli a kenőfilmvastagságot és csökkenti a maximális nyomást, melyre Carl 1964-ben [50] publikált kísérletei hívták fel a figyelmet, majd ezt később 1971-ben közölt cikkükben Benjamin és Castelli vették először figyelembe a számítások során. Rohde és Oh 1975-ben [78] végezte el először a véges szélességű csúszkák komplett termo-elasztohidrodinamikusan vizsgálatát, melyet az 1990-es években többek között Mittwollen és Glienicke [127], Bouchoule, Bouard, Fillon, Frêne [157], [158] és Monmousseau [163] kutatott intenzíven.

A TEHD kenéseméleti kutatások egy másik jelentős iránya a nem-newtoni kenőanyagok tribológiájának megértésre törekszik. Mivel a kapcsolódás igen rövid, alig egy milliszekundum, a kenőanyag gyakorlatilag nem tudja a newtoni folyadék sajátosságai alapján követni a változásokat. A Deborah szám – mely a relaxációs idő és a jelenség lezajlási idejének hányadosa – segítségével Huilgol (1975, [82]) és Bourgin (1979, [92]) kutatásainak eredményeiként kijelölhetővé vált az, hogy adott esetben milyen modellt kell alkalmazni. Az is világossá vált, hogy az esetek többségében jól használhatóak a lineáris vagy nemlineáris viszkozitási modellek, így az általánosított Reynolds modell alkalmas a TEHD jelenségek többségének a leírására. Az általánosított nem-newtoni Reynolds egyenletet Najji, Bou-Said és Berthe [120] munkáját követve Wolff és Kubo [156] alkotta meg, azonban,

Dowsontól [41] eltérően, figyelmen kívül hagyták a sűrűség résmenti változását. A termodinamikai és nem-newtoni problémakörök együttes vizsgálatában Conry [95], Wang és Zhang [116], [132], Sui és Sadeghi [130], Hsiao és Hamrock [142] érték el az első eredményeket. Mivel az értekezéshez szorosan nem kapcsolódnak, nem ismertetem őket, de a téma részletesen megtalálható Szeri 1998-ban kiadott könyvében [165], mely a fentebb említett munkákkal együtt kiváló áttekintést ad a témában.

A Reynolds egyenlet felállítása, ahogy az előbbiekből kitűnik, számos komplex probléma megoldása előtt nyitott utat, de az is bebizonyosodott, hogy a parciális differenciálegyenlet csak a legegyszerűbb esetekben oldható meg analitikusan, az esetek többségében valamilyen numerikus eljárásra van szükség. Ezen a téren a modern számítógépek megjelenése indította meg a fejlődést, mely alkalmazásával, elsőként Pinkus végzett számításokat 1956-ban [28]. Ezen a területen Pinkust követve Raimondi és Boyd 1958-ban [34], Hays szintén 1958-ban [35], Gross 1962-ben [43] és Castelli és Pirvic 1968-ban [59] ért el jelentős eredményeket, melyeknek köszönhetően mind a folyadék, mind a levegőkenesű siklócsapágyak szinte minden típusára született numerikus számítás. A számítógépes szimulációk és a komplexebb problémák vizsgálatai azonban arra is rámutattak, hogy jelentős nehézségeket okoz az immár erősen nemlineáris egyenlet megoldása. A numerikus problémák, melyek már a felületi deformációk figyelembevételével bekövetkeztek, jelentősen nőttek a viszkozitás nyomástól és hőmérséklettől való függése miatt. Szükség volt tehát olyan numerikus módszerek felé fordulni, amelyek képesek kezelni az ilyen jellegű problémákat.

Eleinte a kutatások a véges differencia módszer használatára koncentráltak. Az első olyan numerikus számításokat, melyek során a Reynolds egyenletet és a felületek deformációját egy folyamatos direkt-iterációs eljárással határozták meg, Petrusevich vezetésével 1951-ben végezték el. A megoldás során azt az egyszerű utat követték, hogy a Reynolds egyenlet megoldásával meghatározták egy adott résgeometria mellett a nyomást, majd a nyomásból kiszámították a deformációt. A megoldás azonban igen lassan konvergált, jelentős oszcillációk jelentkeztek, így Dowson és Higginson 1959-ben [37] megkísérelte az inverz módszer alkalmazását. Eljárásuk alap gondolata az volt, hogy egy adott kiinduló nyomáseloszláshoz meghatározták a szükséges résalakot a Reynolds egyenlet felhasználásával, majd a kapott résalakhoz keresték meg a kívánt deformációt létrehozó nyomást. Ugyan az

eljárás konvergens és igen jól alkalmazható nagy terhelések esetén, mégsem váltotta be teljes egészében a hozzá fűzött reményeket, mivel a felületi deformációból visszszámolt nyomáseloszlás pontos meghatározása nehézkes a deformáció nyomásváltozásra vonatkozó viszonylag alacsony érzékenysége, illetve nehézkes automatizálhatósága miatt. A számítógépek megjelenésével az érdeklődés újra a direkt-iterációs módszer felé fordult, mely alkalmazásával Hamrock és Dowson 1976-ban [86] sikeres számítási eredményeket közölt. Ugyanakkor ebben az esetben a problémát a viszkozitás nyomásra való igen nagy érzékenysége jelentette, ami jelentősen megnövelte a számítási időt. Houpert és Hamrock 1986-ban [110] "fast approach scheme" néven tette közzé az általános Reynolds egyenlet Newton-Raphson módszerre épülő megoldási módszerét, mely hatékonyan birkózott meg az erősen nemlineáris egyenletrendszer megoldásával. Ezt a módszert használta Lee és Hamrock 1990-ben [128] termo-elasztohidrodinamikai számításokhoz, bár ők nem állították elő az összes szükséges deriváltat. Az első teljes Newton-Raphson módszerre épülő megoldást Hsiao és Hamrock 1992-ben [142] publikálta. A Newton-Raphson módszer hátránya, hogy az előállítandó Jacobi mátrix teli mátrix, mely előállításához és az egyenletrendszer megoldásához nagyszámú numerikus műveletet kell végezni, illetve nagy háttérkapacitást igényel. Ez a hátrány ugyan a számítógépek fejlődésével kevésbé érzékelhető, azonban továbbra is gátja annak, hogy a kenésméleti számításokat komplex szerkezeti analízisek részeként végezzük el. A háttérkapacitások és az iterációs szám csökkentésére a Newton-Raphson módszer mellett, a peremérték feladatok megoldására a 70-es években Brandt [90] által bemutatott „multigrid-multilevel” módszer is alkalmas, melyet Lubrecht, Napel és Bosma 1986-87-ben [115] alkalmazott sikeresen elasztohidrodinamikai probléma megoldására. Mivel a módszer a Gauss-Seidel relaxációs algoritmust használja a megoldás keresésére, csakúgy, mint a korábban elterjedt direkt-iterációs módszerek, igen gyorsan népszerű lett. Venner-Napel [144], [145] valamint Hsu-Lee [151], [153] a 1990-es évek első felében kimutatták, hogy a „multigrid-multilevel” módszerrel a probléma számításigényessége lényegesen csökkenthető a hagyományos Gauss-Seidel relaxációs algoritmust használó direkt megoldási módszerekhez képest. A „multigrid-multilevel” megoldás hatékonysága növelhető a direkt- és a Newton-Raphson iteráció kombinálásával. Chang, Conry, és Cusano 1989-ben [121] közzétett munkájában egy igen hatékony módszert mutatott be, melynek során a Reynolds

egyenlet megoldására használták csak Newton-Raphson módszert, ahol azonban a Jacobi mátrixnak csak a tridiagonális részét vették figyelembe, a résméret számítására pedig, a hagyományos direkt módszert használták. Ez utóbbi módszer továbbfejlesztésével Dowson és Wang 1994-ben [150] mutatta be az „Effective Influence Newton” módszert (EIN), mely alkalmazásával azok az elemek szerepelnek a Jacobi mátrixban, amelyek érdemi hatással vannak az eredményre. Termo-elasztohidrodinamikusan Lubrecht és társainak [111] „multigrid-multilevel” módszerre épülő megoldását 1990-ben Sadeghi és Sui [126] publikálta az elsők között, majd 1992-93-ben Kim és Sadeghi [139], [146] fejlesztette tovább kontrol térfogateljárást alkalmazva a hőmérséklet számítására. Lee és Hsu [148], [152] 1993-94-ben a lokális Newton-Raphson linearizációt használta sikeresen a nyomás és a hőmérséklet együttes megoldásához. Sajnálatosan ezeknél a módszereknél is megtalálhatók a véges differencia módszer használatából adódó hátrányok, mint például a nagyszámú pontok szükségessége, a nehéz automatizálhatóság mind a kontaktzóna felosztása, mind a probléma numerikus megoldása tekintetében. A számítás automatizálhatóságára lehetséges megoldásnak látszik a véges térfogatok módszerének alkalmazása, amire azonban csak elvétve akad próbálkozás a kenélelmélet tárgykörében, de a teljesség kedvéért meg kell említeni Arghir és Frene 2000-ben [170] és Wu és Bogy 2001-ben [172] publikált megoldását. Ennek magyarázata az, hogy a véges térfogatok módszere ugyan megteremti a megoldás automatizálhatóságának és szoftverbe implementálásának lehetőségét, amire találunk is példát [175], azonban a kenélelméleti problémát lehetőség szerint a valós szerkezet kapcsolt rendszereként kellene megoldani. Erre a véges térfogat módszer a termodinamikai oldalról lehetőséget teremt, ugyanakkor a szerkezeti analízis terén jellemzően a végelelem-módszer illetve a peremelem-módszer az elterjedt. Peremelem-módszer alkalmazására sem találunk azonban számottevő publikációt. Az utóbbi években ugyan Xue, Gethin és Lim [162], illetve Onsa, Basri, Sapuan, Megat Ahmed és Sadique [169] sikeresen használta a peremelem-módszert vonal menti érintkezés kenélelméleti problémájának megoldására, de a módszer kiterjesztésére pont vagy foltszerű érintkezés esetében, illetve a termodinamikai feladat kezelésének megoldására még nem született kísérlet, aminek valószínűleg a peremelem-módszer matematikai hátterének összetettsége az oka. Erre a feltevésre az enged következtetni, hogy a peremelem-módszer egyéb, olyan területeken való

elterjedése, ahol erős nem linearitásokkal kell megbirkózni, hasonló okok miatt várat magára. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy a későbbiekben sem állhat be fordulat ezen a téren.

Napjainkban vitathatatlan a végeelem-módszer térnyerése a szerkezeti és kapcsolt rendszerek analízise terén. Népszerűségét annak köszönheti, hogy a 20. század elején kidolgozott variációs elveket (Rayleigh, Ritz, Timonshenko, Bubnov-Galjorkin stb. [168]), melyekkel, a differencia módszerrel ellentétben, a széleken gond nélkül figyelembe lehet venni a peremfeltételeket, főleg Courant [21] és Turner [30] munkájának köszönhetően sikeresen alkalmazhatjuk elméletileg tetszőlegesen bonyolult geometriájú tartomány esetén is. Ez teremtette meg a lehetőségét az 1960-as évektől kezdődően a legkülönbözőbb feladatok megoldására képes általános és speciális végeelem programrendszerek kifejlődésének, amivel a módszer a mérnöki analízisek általánosan elfogadott numerikus módszerévé vált.

A tribológusok a 60-as években fordultak a végeelem-módszer felé. Az elsők közül a hivatkozások számossága miatt elsősorban Reddi kell megemlíteni, aki 1969-ben [61] oldott meg végeelem-módszerrel egy egyszerű tribológiai problémát, amikor egy egyenletesen szűkülő, végtelen széles résben határozta meg a nyomáseloszlást. Reddi nem a Reynolds egyenletet, hanem a Navier-Stokes egyenletet oldotta meg, így a résvastagság mentén is több elemet kellett felvennie. Reddi Chu-val közösen 1970-ben [66] sikeresen alkalmazta a végeelem-módszert összenyomható kenőanyagokra is. Reddivel egy időben Fujino [62], Argyris és Scharpf [63], Wada, Hayashi és Migita [69], [70] valamint Allan [71] is bemutatott végeelem módszerre épülő megoldást, de a Reynolds egyenlet variációs módszerre épülő megoldását elsőként Booker és Huebner [73] 1972-ben közölte részletesen. Wada, Hayashi és Migita összehasonlítást végzett a végeelem és a véges differencia módszer pontossága között és úgy találta, hogy ugyanolyan hálósűrűségnél a végeelem-módszer pontosabb megoldást ad. Azonban mindenképp meg kell azt is jegyeznünk, hogy csak ezen az alapon nem dönthető el, hogy melyik használható jobban. A 70-es években számos cikkben, mint például Hays [66] (discussion), Rhode és McAllister [75], [77] vagy Allaire, Nicholas és Gunter [87] publikációi, foglalkoztak a végeelem módszer pontosságával, hatékonyságával és úgy találták, hogy a végeelem-módszer esetén nagy jelentőséggel bír a háló orientáltsága, illetve a csomópontok indexelése. Míg az előbbi a megoldás pontosságára, addig az utóbbi a megoldandó algebrai

egyenletrendszer sáv szélességére hat, így a megoldás idejét befolyásolja. E felismerések mára már triviálisak és a számítógépek fejlődésével vesztek fontosságukból, de akkoriban jelentőséggel bírtak. Mindazonáltal rámutattak a véges elem-módszer néhány olyan alkalmazásbeli nehézségére, ami a későbbiekben hátráltatta a módszer elterjedését e területen egészen a mai napig.

Az eddigiekben ismertetett megoldások során a Reynolds egyenlet gyengeintegrál alakját úgy foghatták fel, mint egy kvadratikus funkcionál első variációját. Azonban nemlineáris esetekben gyakorta nem található ilyen funkcionál. Elasztohidrodinamikai, termo-elasztohidrodinamikai vizsgálatoknál tehát más variációs elvre volt szükség az algebrai egyenletrendszer előállításához. A 70-es években Taylor és O'Callahan [74], valamint Rohde és Oh [83] közölte a Reynolds egyenlet Rayleigh-Ritz módszerre épülő megoldását. Mindkét megoldás jól bizonyította a véges elem-módszer használhatóságát elasztohidrodinamikai problémák esetén, noha csak egyszerű direkt iterációs eljárást használtak a megoldás keresésére ciklusba foglalva a nyomás és a résméret változás számítását, illetve a kor számítástechnikai megkötöttségei miatt csak kevés elemre osztották fel a kontakttartományt és nem kezelték a kavitációs peremfeltételt. A megoldás keresésére Rohde és Oh [83] a Reynolds egyenlet növekményes alakját használta, kiegészítve azt a lineáris iterációs módszerrel LIM (terhelés lépcsőnkénti növelése), mely hatékonynak bizonyult. A hőmérsékleti hatásokat figyelembe vevő első véges elemes kenéselméleti számítások Huebnertől származnak [85]. Az általánosított Reynolds és az energia egyenlet kapcsolt megoldását azonban Curnier és Taylor 1982-ben [97] mutatta be vonal érintkezés esetére. Az ezt követő években a véges elem-módszer használatára főként a siklócsapágyak EHD-TEHD vizsgálata terén láthatunk példákat, mivel a félvégtelen térként nem modellezhető szerkezeti egységek deformációjának figyelembevételére ez a módszer unikális lehetőséget teremtett. Shu és Booker 1983-ban [99], majd LaBouff és Booker 1985-ben [103] bemutatott munkájában sikeresen alkalmazta a véges elem módszert tranziens elasztohidrodinamikai vizsgálatokhoz figyelembe véve a kavitációs peremfeltételt. Gethin 1985-ben közzétett cikkében [104] véges elem módszerre épülő TEHD számításai során mind hőmérsékletváltozásból, mind a hidrodinamikai nyomásból együttesen származó deformációkat számításba vette, majd 1988-ban [117] megjelent munkájában megjelenítette a hőmérséklet résmenti változását is. Ezen a területen később Freund és Tieu 1993-ban [147] főként a csaplehajlás

figyelembevételével ért el újabb eredményeket. Azonban ezek a vizsgálatok olyan esetekre vonatkoznak, amikor a nyomásértékek nem olyan nagyok, hogy érdemi hatással legyenek a viszkozitás értékére, tehát főként olyan siklócsapágyak elemzésére alkalmasak, ahol nem hanyagolható el a felületek deformációja és ebből következően sokszor a Reynolds egyenlet bilineáris formáját alkalmazzák. Nagy kontaktnyomás esetén az elasztohidrodinamikai problémát csak napjainkban, a számítástechnikai kötöttségek csökkenésével kezdték újra végeselem módszerrel elemezni. Hsiao, Bordon, Hamrock és Tripp, 1998-ban [164], [166] oldott meg elliptikus érintkezési EHD problémát nem-newtoni kenőanyag esetén végeselem-módszerrel. Míg Durany, García és Vázquez 2002-ben [176] tett közzé hasonló végeselem módszerre épülő megoldást. A két megoldás közti különbség főként a megoldó algoritmusban és a kavitáció kezelésében mutatkozik meg. Hsiao és társai Newton-Raphson, Durany és társai direkt iterációs módszert használtak az egyenletrendszer megoldásához. Hsiao és társai a végeselem hálót igazították a kavitációs peremfeltételhez, míg Durany és társai az Elrod-Adams kavitációs modellt használták. Azonban egyik megoldásban sem vették figyelembe a hőmérséklet változását. A nagy kontaktnyomás során a termo-elasztohidrodinamikai probléma végeselem-modelljét csak vonal érintkezés esetére találjuk meg Piccigallo [160], illetve Pahud [159] által 1996-ban közzétett cikkekben, viszont az itt használt büntetőparaméteres kavitációs algoritmus módosítás nélkül nem felel meg a tömegmegmaradás törvényének. Pahud munkájának a különlegessége az, hogy felhívja a figyelmet az általánosan használt Rayleigh-Ritz variációs módszertől eltérő Petrov-Galerkin módszer alkalmazásának előnyeire az energia egyenlet oszcillációjának elkerülése érdekében. Piccigallo [160] a nemlineáris egyenlet megoldásához az „Effective Influence Newton” módszert (EIN) használta, mivel a nagyszámú ismeretlenek miatt a Newton-Raphson módszer során előállítandó Jacobi mátrix telítettsége jelentősen megnövelte volna a megoldás időigényét. Ezzel annak ellenére jelentős időmegtakarítást ért el, hogy lényegesen több iterációs lépést kellett végrehajtania. A számítási idő csökkentésére Arenaz, Doallo, Touriño és Vázquez 2001-ben [174] egy másik lehetséges módszert, paralel algoritmust alkalmazott sikeresen a megoldás keresése során.

Azonban az eddig említett végeselemes megoldások szinte kivétel nélkül lineáris vagy kvadratikus approximációra épülnek, így finom hálót kell alkalmazni. A végeselem módszer ugyanakkor megengedi a nemlineáris approximációs

függvények használatát is, követelményként csak azt szabja meg, hogy az elemen belül folytonosan deriválhatónak kell lennie, a határon a C^0 folytonosság álljon fenn, teljesüljön a teljesség elve, és lehetőleg jó ortonormáltsággal rendelkezzen [168]. Ezt a lehetőséget kihasználva Ergatoudis, Irons és Zienkiewicz 1968-ban [60] a Lagrange polinomokat alkalmazta kvadratikus izoparametrikus elemeinek felépítéséhez. Lagrange polinomok segítségével, elméletileg lehetséges másodfokúnál magasabb fokszámú közelítő függvényeket is használni. Azonban az izoparametrikus elemeknél nem célszerű másod vagy harmadfokúnál magasabb fokszámú elemet alkalmazni, mivel a geometriai approximációhoz elegendő általában a másodfokú közelítés, hierarchikus elemek pedig nem építhetők fel Lagrange polinomok segítségével, továbbá az alacsonyabb fokszámú közelítéshez tartozó eredmények nem használhatóak fel transzformáció nélkül a magasabb fokszámúhoz. Ugyanakkor, ha olyan elemet kívánunk felépíteni, amelyekkel a kapott eredmények közvetlenül felhasználhatóak a magasabb fokú közelítésekhez mint kiinduló állapot, akkor Szabó, Babuska és Katz javaslata [96] alapján Legendre polinomokat célszerű felhasználni az elemek felépítéséhez. Az így kapott hierarchikus elemcsalád túllép az izoparametrikus elemfelfogáson, és teljesen függetlenné teszi a koordináta rendszer transzformációját az ismeretlen mezők közelítésétől. Mivel a számítás során a magasabb fokszámú megoldáshoz használt közelítő függvények tartalmazzák az alacsonyabb fokúhoz tartozókat, a fokszám emelésével kapott eredmény sorozat kiválóan alkalmas mind hiba-, mind konvergencia-határ becslésre [137].

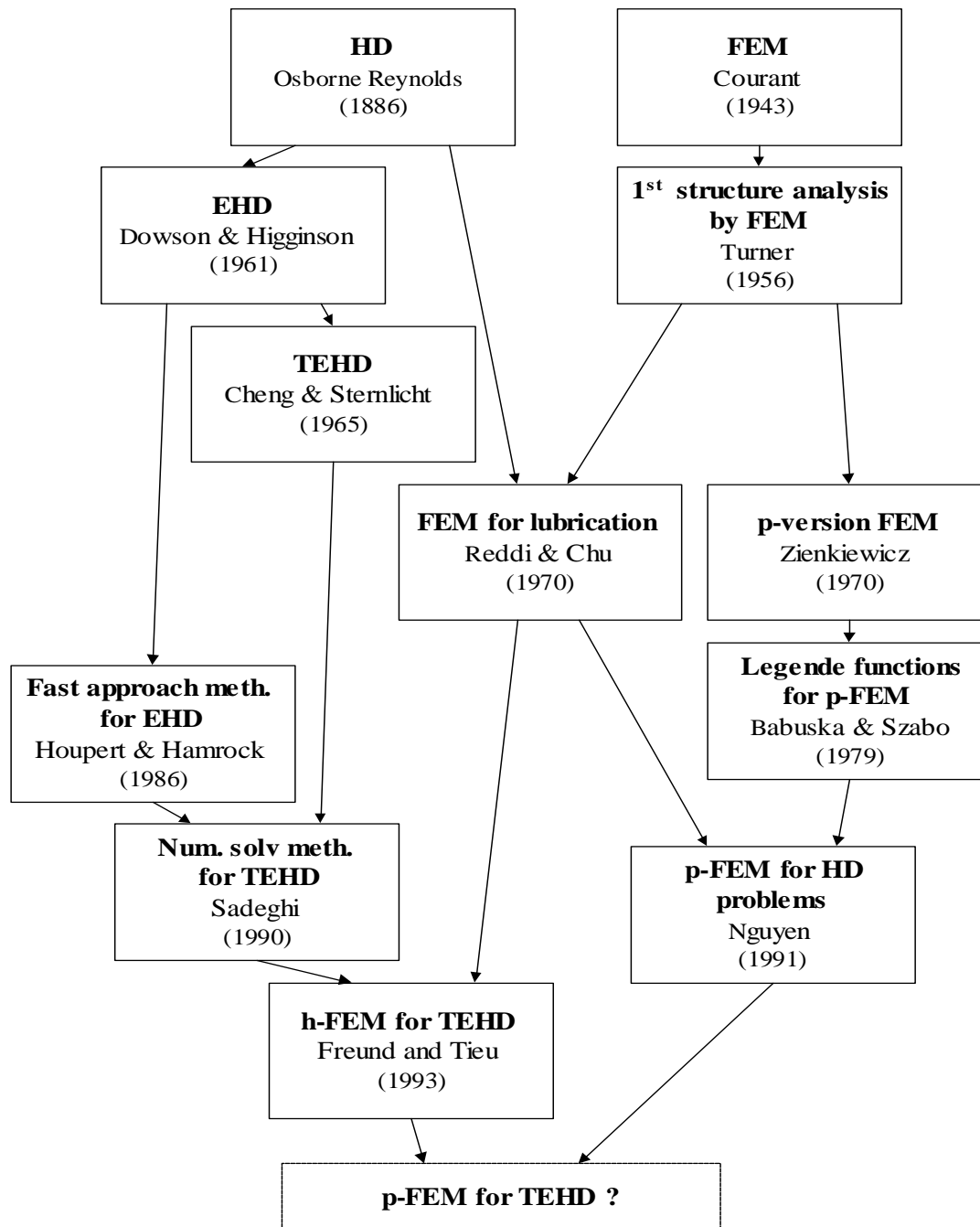
Kenéselméleti vonatkozásban eddig egyedül Nguyen tett közé Lagrange és hierarchikus, de nem Legendre típusú polinómikus approximációra vegyesen épülő megoldást 1991-ben [129]. Nguyen csak egyszerű szűkülő rés és lépcsős saru esetén határozta meg a nyomáseloszlást, és a felületeket tökéletesen merevnek tekintette. Eredményeiből azonban látható, hogy a hálósűrűség nagyságrendekkel kisebb lehet. Például ha a nyomás közelítésére 5-öd, 6-od fokú polinómikus közelítést használunk egyenletesen szűkülő résnél, egyetlen elem felvétele elégséges. Nguyen később összenyomható kenőanyagokra is alkalmazta a p-verziós végeelem módszert [149], [167]. Noha a Lagrange típusú elemek megfelelőek a tartomány geometriájának leírására, Legendre típusú hierarchikus elemek itt is alkalmazhatóak. Különösen kívánatos ez akkor, ha az

elasztohidrodinamikai problémáknál a résméret deformációjának számítását is hierarchikus elemekre épülő p-verziós végelem módszerrel kívánjuk elvégezni.

Ennek ellenére, tisztán a Legendre féle hierarchikus elemcsalád alkalmazására a kenéselméleti problémák megoldása során, csak ezen értekezés alapját képező kutatás előrehaladását bemutató publikációsorozatban találhatunk példát {1}-{15}.

Pont, vagy vonalszerű érintkezési problémák esetén a termo-elasztohidrodinamikai számítások során a felületi deformációt a megoszló terhelés félvégtelen téren okozott deformációja alapján számítják. Végelem módszerre épülő megoldásnál lehetővé válik a felületi deformáció és hőmérséklet numerikus meghatározása olyan esetekben is, amikor a szilárd test félvégtelen térként való modellezése nem megengedhető. A p-verziós elmélet lehetővé teszi, hogy ekkor se kelljen finom hálót alkalmazni a felületi deformáció számításához. Az előbbi fokozottan igaz a kenőanyag hőmérséklet-eloszlásának meghatározásánál. Az analitikus képletek ugyan gyakran jó közelítést adnak a felületeken keresztül történő hőszállításra abban az esetben, ha a felületek jelenős sebességgel mozognak. Azonban olyan esetekben, amikor valamelyik felület kis sebességgel mozog vagy áll, vagy csak dinamikus terhelés van és a felületek nem mozognak, az analitikus összefüggések nem használhatóak. A p-verziós végelem-módszer ezekben az esetekben is képes megbízható eredményt adni. Mivel p-verziós végelem-módszernél nem izoparametrikus elemeket alkalmazunk, a geometriai leképzés függvényei nem szükségszerűen egyeznek meg az ismeretlen mező meghatározásához használt alakfüggvényekkel. Az asszociatív geometriai leképzéshez felhasználhatjuk a kontakttestek elméleti felületeinek parametrikus egyenleteit, így a geometriai leképzés nem közelítő, hanem az elméleti geometriának megfelelő.

A fent leírtakból látható, hogy a p-verziós végelem-módszer kiváló lehetőségeket nyújt azok számára, akik numerikus módszert kívánnak felhasználni a mérnöki kutatások során meghatározandó ismeretlen mezők kiszámítására. A módszer előnyeit már számos CAA programrendszer igyekszik kihasználni (StressCheck, ProMechanika, I-Deas, Ansys), azonban az elasztohidrodinamikai, termo-elasztohidrodinamikai problémát azok közé a feladatok közé sorolhatjuk, ahol még az adaptáció nem történt meg, noha a lehetőségek adottak.



3.1. ábra Termo-elasztohidrodinamikai feladatok megoldásának fejlődése

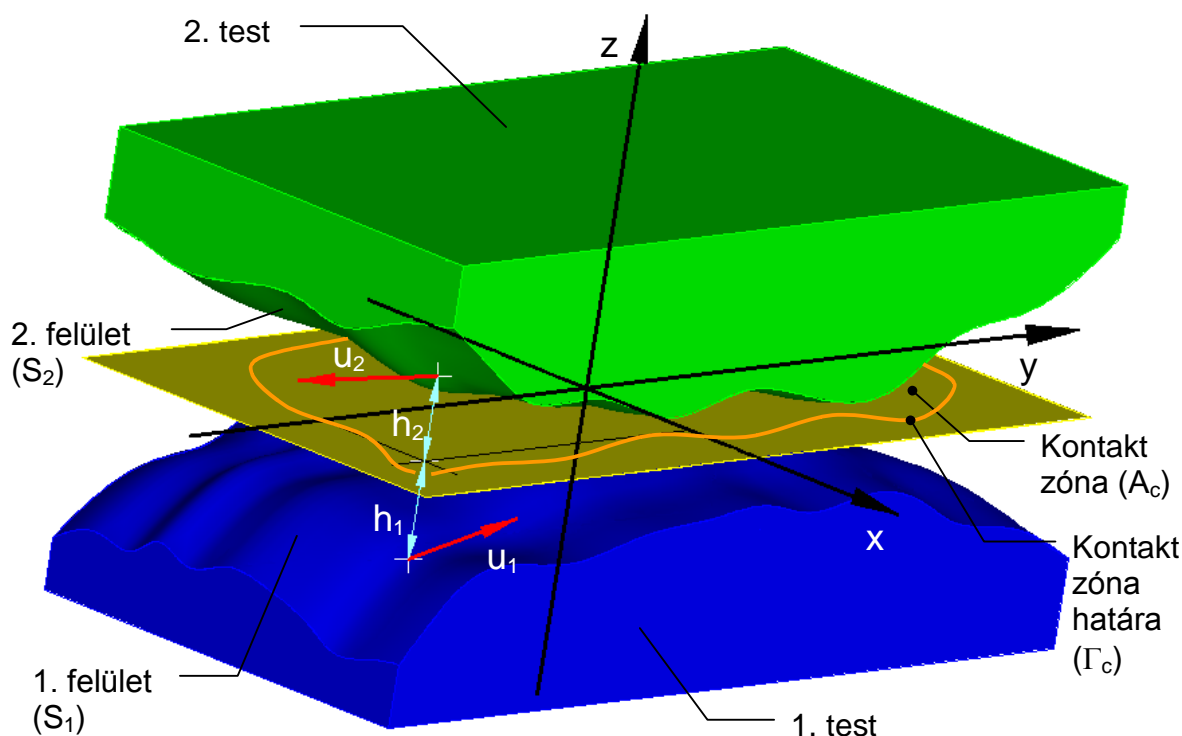
A fenti történeti áttekintésből így adódik (3.1. ábra) a termo-elasztohidrodinamikai problémák végelem-módszeren alapuló megoldásának egy olyan lehetséges módja, mely azonos az értekezés célkitűzésével. A 3.1. ábrán a HD-hidrodinamika, EHD- elasztohidrodinamika, TEHD- termo-elasztohidrodinamika, FEM- végelem módszer (finite element method), h-FEM, p-FEM a h ill. p verziójú végelem módszer rövidítései.

(4.) A dolgozat felépítése

Ahogy már a bevezetőben is említettem, a dolgozat alapvető célja, a termo-elasztohidrodinamikai problémák végeelem-módszeren alapuló megoldásának egy olyan lehetséges módjának bemutatása, ahol a nyomás- és hőmérséklet-eloszlás közelítése tetszőleges fokszámú polinomokkal történhet, és a kenőfilm kavitáció hatására való megszűnése a feltételezett kontakt-tartomány finom felosztása nélkül modellezhető. Annak érdekében, hogy a cél megvalósítható legyen a következő lépéseken kell végighaladni:

- A feladat általános megfogalmazása
 - Az elasztohidrodinamikai alapegyenletek és peremfeltételek bemutatása
 - Általánosított Reynolds egyenlet
 - Félvégtelen és véges testek nyomás hatására bekövetkező deformációja
 - A termodinamikai alapegyenletek és peremfeltételek bemutatása
 - Kenőanyag energiamérlege
 - Mozgó félvégtelen és véges testeken, megoszló hőforrás hatására kialakuló hőmérséklet-eloszlás és deformációja
 - Kenőanyag modell kiválasztása
- Végeelem modell bemutatása
 - Variációs elv kiválasztása
 - A kiválasztott variációs elvnek megfelelő gyenge integrál alakú megoldásokra vonatkozó egyenletek levezetése
 - Az approximációs függvénycsoport és a geometriai leképezés ismertetése
 - Peremfeltételek bemutatása
 - A kenéseméleti, a szilárdságtani és a hőtani modellek kapcsolása
- Kavitációs peremfeltétel ismertetése
 - A kavitáció megjelenítésének módja
 - A módszer végeelem modellen belüli megjelenítése, szükséges változtatások megtétele
 - Az ellenőrző számítások bemutatása egyszerű hidrodinamikai esetre
- Az ismertetett módszerre vonatkozó ellenőrző számítások bemutatása
 - Numerikus megoldási algoritmus ismertetése
 - Ellenőrző számítások bemutatása
- Az eredmények és a tézisek összefoglalása

(5.) A TEHD kenélméleti jelenség leírásának alapegyenletei és peremfeltételei



5.1. ábra Érintkező testek

Az 5.1. ábra mutatja a folyadéksúrlódás állapotában lévő folszerűen érintkező felületpárok általánosított esetét. A testek egymáshoz viszonyított relatív elmozdulásának következtében a testek közti rést kenőanyag tölti ki, mely mozgásának hatására hidrodinamikai nyomás alakul ki. A kenőanyag mozgását a felületek egymáshoz viszonyított relatív mozgásának hatására a kenőanyagban fellépő csúsztatófeszültség váltja ki. Az érintkező testek kinematikai állapota és egy adott résgeometria mellett, az érintkező felületeken fellépő nyomásmegoszlás képes egyensúlyt tartani a felületeket összeszorító erővel, megakadályozva a test-test kapcsolatot. Adott esetben a felületeket terhelő nyomáseloszlás, illetve a kenőanyagban fellépő csúsztatófeszültségek hatására képződő hődisszipáció okozta, lokális vagy globális hőmérsékletnövekedés akkorává válhat, hogy a felületek figyelmen kívül nem hagyható deformációját okozhatja, továbbá kihathat a kenőanyag anyagjellemzőire. Látható tehát, hogy amennyiben termoelasztohidrodinamikai kenési viszonyok közt kívánjuk modellezni az érintkezés során

kialakuló körülményeket egyszerre, kapcsoltan kell megoldanunk hidrodinamikai, termodinamikai és szilárdságtani problémát, melyek már önmagukban is, de a különböző kontinuumok anyagjellemzőinek állapotfüggése miatt is erősen nemlineáris rendszert alkotnak. Azonban a három fő terület alapegyenleteit tekintve jól elkülöníthetők egymástól.

A kenésméleti kontaktfeladathoz, a jellegéből adódóan, általánosságban olyan görbevonalú koordináta rendszert célszerű használni, mely „z” tengelye az érintkezés középfelületének normálisa. Azonban pont vagy foltszerű érintkezés esetén, az érintkezés középfelülete olyan síknak tekinthető, melynek normálisa párhuzamos az összeszorító erő hatásvonalával. Ennek következtében, a vizsgálathoz és a jelenség leírásához, olyan derékszögű koordináta rendszer használata a legkézenfekvőbb, melynek „z” tengelye egybeesik az erő hatásvonalával.

(5.1) Alapegyenletek

Az alábbiakban levezetések nélkül összefoglaljuk a további vizsgálathoz szükséges fogalmakat, egyenleteket. A vektorok és tenzorok közötti skaláris szorzást \cdot , a kétszeres skaláris szorzást $\cdot\cdot$, a diadikus szorzást \circ jelöli.

(5.1.1) Kontinuitási és Mozgásegyenlet

A ρ sűrűségű, $\vec{u} = [u, v, w]$ sebességvektorú kontinuumra a kontinuitási egyenlet [155]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \quad (5.1.1.1)$$

vagy mivel a materiális derivált

$$\frac{d()}{dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla()), \quad (5.1.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q}_m = 0, \quad (5.1.1.3)$$

ahol \vec{q}_m a tömegáram:

$$\vec{q}_m = \rho \vec{u}. \quad (5.1.1.4)$$

A folyadék általános mozgásegyenlete \vec{f} térfogati erőrendszer intenzitása esetén:

$$\frac{d(\rho\vec{u})}{dt} + \rho\vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) - \sigma \cdot \nabla - \rho\vec{f} = 0, \quad (5.1.1.5)$$

mely a tömegmegmaradás törvénye (5.1.1.3)-(5.1.1.1) miatt a következő alakot ölti:

$$\rho \frac{d(\vec{u})}{dt} - \sigma \cdot \nabla - \rho\vec{f} = 0 \text{ illetve } \rho \frac{\partial(\vec{u})}{\partial t} + \rho(\vec{u} \circ \nabla) \cdot \vec{u} - \sigma \cdot \nabla - \rho\vec{f} = 0, \quad (5.1.1.6)$$

ahol a σ feszültségi tenzor felbontható a következőképpen:

$$\sigma = \sigma' - p\mathbf{I}, \quad (5.1.1.7)$$

ahol σ' a feszültségi deviátor tenzor míg p a nyomás, \mathbf{I} egységtenzor.

A nyomás, értelmezése szerint, a feszültségi tenzor első skaláris

invariánsából $\sigma'_i = \sum_{i=1}^3 \sigma'_{ii}$ származtatható:

$$p = -\frac{1}{3} \sigma'_i. \quad (5.1.1.8)$$

A kenőanyagok esetében az alakváltozási sebesség \mathbf{D} és a deviátor tenzor σ' közti szoros kapcsolat áll fenn, mely általában a következő alakban írható le [165]:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[A\sigma' + \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_{eq}} \sigma' \right], \quad (5.1.1.9)$$

ahol $F(\tau_{eq})$ egy adott kenőanyagmodellre jellemző függvény, $A=1/G$ vagy 0 ha a kenőanyag összenyomhatósága elhanyagolható, míg τ_{eq} az egyenértékű csúsztatófeszültség, mely értelmezés szerint:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma' \cdot \sigma'}. \quad (5.1.1.10)$$

Az alakváltozási sebesség tenzor értelmezés szerint:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}]. \quad (5.1.1.11)$$

Az (5.1.1.9) egyletben szereplő $F(\tau_{eq})$ függvények különböző kenőanyagmodell típusokra például [165] alapján a következők lehetnek:

$$F(\tau_{eq})_{Newton} = \frac{\tau_{eq}}{\eta}, \quad F(\tau_{eq})_{Eyring} = \frac{\tau_E}{\eta} \sinh\left(\frac{\tau_{eq}}{\tau_E}\right), \quad F(\tau_{eq})_{viszkoplasztikus} = -\frac{\tau_L}{\eta} \ln\left(1 - \frac{\tau_{eq}}{\tau_L}\right),$$

$$F(\tau_{eq})_{egyszen\ viszkoplasztikus} = -\frac{\tau_{eq}}{\eta} \left(1 - \left|\frac{\tau_{eq}}{\tau_L}\right|\right)^{-1}, \quad F(\tau_{eq})_{circular} = \frac{\tau_{eq}}{\eta} \left[1 - \left(\frac{\tau_{eq}}{\tau_L}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.1.1.12)$$

melyben τ_E a Eyring-csúsztatófeszültség, míg τ_L a határ-csúsztatófeszültség. A τ_L a nyomás lineáris függvényének tekinthető és τ_{l0} határ-csúsztatófeszültség nullponti értékével és χ anyagi paraméterekkel felírható, mint

$$\tau_L = \tau_{l_0} + \chi p. \quad (5.1.1.13)$$

(5.1.2) *Energiaegyenlet:*

A következő egyenlet, az energia megmaradását fejezi ki, vagyis a teljes energia időegység alatti megváltozása egyenlő az időegységre vonatkoztatott külső terhelés munkájával és környezeti hőcserével:

$$\frac{d(c_v \vartheta)}{dt} + p(\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + \frac{\Xi}{\rho} \quad (5.1.2.1)$$

ahol Ξ a kenőanyag belső súrlódásából származó disszipáció:

$$\Xi = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{D}, \quad (5.1.2.2)$$

ϑ - a hőmérséklet,

c_v – az állandó térfogatra vonatkoztatott fajhő.

Amennyiben a kontinuum c_v állandó térfogatra vonatkoztatott fajhőt a hőmérséklettől függetlenül, állandónak tekintjük:

$$c_v \frac{d\vartheta}{dt} + p(\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + \frac{\Xi}{\rho}, \quad (5.1.2.3)$$

összenyomhatatlan folyadéokra ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$)

$$c_v \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \vartheta) \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + \frac{\Xi}{\rho}. \quad (5.1.2.4)$$

(5.2) Általánosított Reynolds feladat pont vagy folszerű érintkezés esetén

A brit O. Reynolds [8] 1886-ban közzétett megoldásával elérte, hogy adott résgeometriánál (adott $h(x,y)$), a térbeli sebességmező és nyomáseloszlás helyett kenélméleti feladatok megoldásához, elegendő egy résvastagság mentén vett átlagnyomást meghatározni ($\bar{p}(x,y)$), mely alkalmas a résben lezajló áramlástan jelenség leírására. 1961-ben Dowson [41] és Higginson megalkotta newtoni kenőanyagokra az általánosított Reynolds egyenletet, melyben figyelembe vették a résmenti hőmérsékletkülönbség okozta viszkozitás- és sűrűségváltozást. Az általánosított nem-newtoni Reynolds egyenletet Najji, Bou-Said és Berthe [120]

munkáját követve Wolff és Kubo [156] alkotta meg, azonban, Dowsontól [41] eltérően, figyelmen kívül hagyták a sűrűség esetleges résmenti változását. Ahhoz viszont, hogy a kidolgozásra kerülő módszer a lehető legszélesebb körben legyen alkalmazható a termo-elasztohidrodinamikai feladatok megoldása során, elengedhetetlen az általánosított Reynolds egyenlet olyan alakban történő felírása, mely a szokványos kenőanyagmodellek mindegyikére érvényes és a lehető legkevesebb elhanyagolást tartalmazza.

Egyes esetekben, a résben lezajló áramlás turbulenssé válhat. Amennyiben ez megtörténik, az időben kvázi állandó jellemzőkre (pl. \bar{A}) a turbulencia miatt egy gyors, periodikus ingadozás (pl. $'A$) szuperponálódik

$$\bar{q}_m = \bar{\bar{q}}_m + \bar{q}'_m, \quad (5.2.1)$$

ahol

$$\bar{q}'_m = \bar{\rho} \cdot \bar{u}' + \bar{\rho}' \cdot \bar{u} + \bar{\rho} \cdot \bar{u}', \quad (5.2.2)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (5.2.3)$$

$$\bar{u} = \bar{\bar{u}} + \bar{u}', \quad (5.2.4)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma'. \quad (5.2.5)$$

Általában a turbulenciából származó ingadozás meghatározása nem, csak az időbeli átlagolt értékek a fontosak, így a folyadék általános Reynolds féle mozgásegyenletét alkalmazhatjuk az áramlás leírására:

$$\frac{d(\bar{\bar{q}}_m)}{dt} + \bar{\bar{q}}_m \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{u}}) - \bar{\sigma} \cdot \nabla - \bar{\rho} \bar{f} + \frac{d(\bar{q}'_m)}{dt} + \bar{q}'_m \cdot (\nabla \cdot \bar{u}') = 0, \quad (5.2.6)$$

vagy másképp

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial t} + \bar{\rho}(\bar{\bar{u}} \circ \nabla) \cdot \bar{\bar{u}} - \bar{\sigma} \cdot \nabla - \bar{\rho} \bar{f} + \\ & + \bar{\rho}' \frac{\partial(\bar{u}')}{\partial t} + \bar{\rho}'(\bar{u}' \circ \nabla) \cdot \bar{u}' + \bar{\rho}(\bar{u}' \circ \nabla) \cdot \bar{\bar{u}} + (\bar{\bar{u}} \circ \nabla) \bar{\rho}' \cdot \bar{u}' + \bar{\rho}'(\bar{u}' \circ \nabla) \cdot \bar{u}' = 0 \end{aligned}, \quad (5.2.7)$$

ahol $\rho = \text{állandó}$ esetén értelmezés szerint

$$\sigma_T = -\bar{\rho}'(\bar{u}' \circ \nabla) \cdot \bar{u}' \quad (5.2.8)$$

a Reynolds féle látszólagos turbulens feszültségtenzor, mely újabb 6 ismeretlent tartalmaz, melyek meghatározásához nem áll rendelkezésre újabb egyenlet és a lamináris áramlással ellentétben a járulékos feszültségtenzor és az alakváltozási sebességtenzor kapcsolata nem ismert, csak empirikus-félempirikus hipotézisek léteznek. Ezek közül elsőik között említhető, Boussinesq által bevezetett és a

kenéseméletben gyakorta használt örvény viszkozitás meghatározására szolgáló Prandtl illetve Kármán Tódor keveredési úthosszra alapuló hipotézise. A Kármán-féle kétdimenziós hasonlósági hipotézist háromdimenziós esetre Czibere Tibor terjesztette ki [171]. Míg Prandtl hipotézise az áramlást határoló falaktól távol nem alkalmazható, addig Kármán modellje a kísérletekkel jó egyezést mutat ebben a tartományban is. A kenéseméletben azonban Kármán hipotézise nem terjedt el a kis résvastagság miatt. A kenéseméleti számításokhoz Prandtl hipotézise mellett számos egyéb modellt is kifejlesztettek, melyek részletes ismertetése megtalálható Szeri 1998-ban kiadott könyvében [165]. A turbulenciát figyelembe vevő számítások kimutatták, hogy bizonyos kenési állapotokban jelentős eltérések mutatkoznak az eredményekben azoktól, ahol a számításokat lamináris áramlás feltételezésével végezték el.

Az elasztohidrodinamikai kenési körülmények között azonban az áramlás laminárisnak tekinthető, mivel a résméret igen kicsi, alig pár μm . Így a turbulenciát elhanyagolva, az időben átlagolt tagok tekinthetők a folyadék mozgásának leírására szolgáló jellemzőnek, melyek megkülönböztető jelölését a továbbiakban el lehet hagyni.

Ennek következtében az időben átlagolt mennyiségekre a mozgásegyenletet a következő formában alkalmazhatjuk

$$\rho \frac{\partial(\bar{\mathbf{u}})}{\partial t} + \rho(\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \rho \bar{\mathbf{f}} = 0, \quad (5.2.9)$$

melyben a $\rho \frac{\partial(\bar{\mathbf{u}})}{\partial t}$ és a $\rho(\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}$ tagok jellemzik az áramló közeg inerciáját, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ a belső megoszló erőrendszert, míg $\rho \bar{\mathbf{f}}$ a külső megoszló erőhatást. A $\rho \frac{\partial(\bar{\mathbf{u}})}{\partial t}$ tag csak akkor válik számottevővé, ha a felületek gyors, kis amplitúdójú rezgést végeznek. A $\rho(\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}$ a konvektív inercia tag, melynek figyelembe vétele csak nagy Reynolds számú áramlás esetén szükséges [165], mely esetünkben nem áll fenn. Ennek következtében elasztohidrodinamikai kenéseméleti problémák vizsgálata során általánosan elfogadott a tehetetlenségi erőrendszer elhanyagolása. A gravitációs vagy más térbeli erőrendszer hatása csak akkor érvényesülhet, ha igen kicsi a kontaktnyomás, így az elasztohidrodinamikai vizsgálatok során ennek a résznek a figyelembevétele sem szükséges. Azaz az (5.2.9) mozgásegyenlet

elasztohidrodinamikai kenélméleti körülmények között a következő egyensúlyt kifejező alakra egyszerűsödik:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = 0, \quad (5.2.10)$$

ami (5.1.1.7) figyelembevételével:

$$\nabla p - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \nabla = 0 \quad (5.2.11)$$

alakot nyeri, ahol p a nyomás, $\boldsymbol{\sigma}'$ a feszültségi deviátor tenzor.

A Reynolds féle, dimenzióanalízisre alapozott, közelítések alapján Wolff és Kubo [156] szerint, az kontakt feladatok geometriai viszonyaira tekintettel az (5.2.11) egyenlet 5.1. ábra koordináta rendszerét alapul véve a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}. \quad (5.2.12)$$

Továbbá az áramlási viszonyok miatt, $\sigma'_x \ll 1$ és $\sigma'_y \ll 1$, és ezért az első skaláris invariáns eltűnéséből, azaz $\sigma'_i = 0$ -ra való tekintettel következik, hogy $\sigma'_z \ll 1$, így a feszültségi deviátor tenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2.13)$$

Mivel a nyomás alig változik a résvastagság mentén Dowson [41] alapján felírható

$$p = p(x, y, z) = \alpha(x, y, z) + \bar{A}_p(x, y). \quad (5.2.14)$$

h_1 és h_2 között a p integrálátlagát véve z mentén kapjuk, hogy

$$\bar{A}_p(x, y) = \frac{1}{h_2 + h_1} \int_{-h_1}^{h_2} p dz - \frac{1}{h_2 + h_1} \int_{-h_1}^{h_2} \alpha dz = \bar{p} - \bar{\alpha}, \quad (5.2.15)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{h_2 + h_1} \int_{-h_1}^{h_2} p dz. \quad (5.2.16)$$

Így

$$p = \bar{p} + \alpha(x, y, z) - \bar{\alpha}(x, y). \quad (5.2.17)$$

Ezek alapján (5.2.12) alapján kapjuk például, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - \bar{\alpha}) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha - \bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

A feladat geometriai viszonyaiból eredően feltételezhető, hogy a résmenti derivált nagyságrendekkel nagyobb a másik két irányba vett deriválnál ezért felírható, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\end{aligned}\quad (5.2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (\bar{p} \text{ értelmezése alapján állandó a résvastagság mentén})$$

Mivel csak a résmentén átlagolt \bar{p} nyomást keressük, a jelölésmód egyszerűsítése végett a továbbiakban \bar{p} helyett p kerül alkalmazásra.

Az (5.1.1.9) egyenlet értelmében a feszültségi deviátor tenzor elemei tehát:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{\tau_{eq}}{F(\tau_{eq})} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - A \frac{d\tau_{xz}}{dt} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{\tau_{eq}}{F(\tau_{eq})} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - A \frac{d\tau_{yz}}{dt} \right)\end{aligned}\quad (5.2.20)$$

Célszerűségből vezessük be a következő jelölésformát:

$$\vec{u}_{xy} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{így } \vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{xy} \\ w \end{bmatrix}; \quad \nabla_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{így } \nabla = \begin{bmatrix} \nabla_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix},$$

valamint

$$\vec{\sigma}'_z = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}.$$

Ezen jelölések segítségével (5.2.19) miatt

$$\nabla_{xy} p = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_{eq}}{F(\tau_{eq})} \left(\frac{\partial \vec{u}_{xy}}{\partial z} - A \cdot \frac{d\vec{\sigma}'_z}{dt} \right) \right], \quad (5.2.21)$$

illetve

$$\vec{\sigma}'_z = \frac{\tau_{eq}}{F(\tau_{eq})} \left(\frac{\partial \vec{u}_{xy}}{\partial z} - A \frac{d\vec{\sigma}'_z}{dt} \right). \quad (5.2.22)$$

Az 5.1. ábra által bemutatott peremfeltételek a felületeken:

$$z = -h_1: \quad \vec{u} = \vec{u}_1 = [u_1, v_1, w_1] = [\vec{u}_{xy1}, w_1].$$

$$z = h_2: \quad \vec{u} = \vec{u}_2 = [u_2, v_2, w_2] = [\vec{u}_{xy2}, w_2].$$

Ennek segítségével, a résvastagság mentén előbb egyszer majd kétszer integrálva az (5.2.21) egyenletet felírható, hogy:

$$\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} = \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_{eq}} \left[(\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right] + A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt}, \quad (5.2.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xy} = & \bar{u}_{xy1} + \nabla_{xy} p \left(\int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_e} z dz - \frac{F_1}{F_0} \cdot \int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_e} dz \right) + \\ & + \frac{\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy}}{F_0} \cdot \int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_{eq}} dz + \int_{-h_1}^z A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} dz \end{aligned}, \quad (5.2.24)$$

ahol

$$F_0 = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_{eq}} dz \quad F_1 = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{F(\tau_{eq})}{\tau_{eq}} z dz \quad \bar{K}_{0,xy} = \int_{-h_1}^{h_2} A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} dz = \begin{bmatrix} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{Ad\tau_{xz}}{dt} dz \\ \int_{-h_1}^{h_2} \frac{Ad\tau_{yz}}{dt} dz \end{bmatrix}. \quad (5.2.25)$$

Integráljuk az (5.1.1.3) kontinuitási egyenletet z szerint:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{q}_m \right) dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \nabla \cdot \bar{q}_m \cdot dz = \\ = & \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \nabla_{xy} \int_{-h_1}^{h_2} \bar{q}_{m,xy} dz + \bar{q}_{m,xy1} \cdot \nabla_{xy} h_1 + \bar{q}_{m,xy2} \cdot \nabla_{xy} h_2 + q_{mz2} - q_{mz1} = \\ = & \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \nabla_{xy} \cdot \bar{q}_h + \bar{q}_{m,xy1} \nabla_{xy} h_1 + \bar{q}_{m,xy2} \nabla_{xy} h_2 + q_z \end{aligned}, \quad (5.2.26)$$

ahol:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{m,xy} &= \rho \bar{u}_{xy} & q_{mz} &= \rho w \\ \bar{q}_{m,xy1} &= \rho_1 \bar{u}_{xy1} & \bar{q}_{m,xy2} &= \rho_2 \bar{u}_{xy2} \\ q_z &= q_{mz2} - q_{mz1} = \rho_2 w_2 - \rho_1 w_1 \end{aligned}. \quad (5.2.27)$$

A szorzatintegrálási szabályt felhasználva:

$$\begin{aligned} \bar{q}_h &= \int_{-h_1}^{h_2} \bar{q}_{m,xy} dz = \int_{-h_1}^{h_2} \rho \bar{u}_{xy} dz = h_2 \rho_2 \bar{u}_{xy2} + h_1 \rho_1 \bar{u}_{xy1} - \int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial(\rho \bar{u}_{xy})}{\partial z} dz = \\ = & h_2 \rho_2 \bar{u}_{xy2} + h_1 \rho_1 \bar{u}_{xy1} - (\nabla_{xy} p)(F_2 + G_1) - \\ & - \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy2})}{F_0} (F_3 + G_2) - \bar{u}_{xy1} G_3 - \bar{K}_{1,xy} - \bar{K}_{2,xy} \end{aligned}. \quad (5.2.28)$$

Mivel

$$\int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial(\rho \bar{u}_{xy})}{\partial z} dz = \int_{-h_1}^{h_2} \left[z \rho \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} + z \bar{u}_{xy} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] dz, \quad (5.2.29)$$

(5.2.24) és (5.2.23) felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\int_{-h_1}^{h_2} z \rho \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} dz = (\nabla_{xy} p) F_2 + \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} F_3 + \bar{K}_{1,xy}, \quad (5.2.30)$$

illetve:

$$\int_{-h_1}^{h_2} z \bar{u}_{xy} \frac{\partial \rho}{\partial z} dz = \bar{u}_{xy1} G_3 + (\nabla_{xy} p) G_1 + \frac{\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy}}{F_0} G_2 + \bar{K}_{2,xy}, \quad (5.2.31)$$

ahol:

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{-h_1}^{h_2} \rho \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z^2 dz - \frac{F_1 F_3}{F_0}; & F_3 &= \int_{-h_1}^{h_2} \rho \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz \\ G_1 &= \int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} z dz - \frac{F_1}{F_0} \int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dz \right) dz; \\ G_2 &= \int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\int_{-h_1}^z \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dz \right) dz; & G_3 &= \int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \\ \bar{K}_{1,xy} &= \int_{-h_1}^{h_2} z \rho A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} dz & \bar{K}_{2,xy} &= \int_{-h_1}^{h_2} z \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\int_{h_1}^z A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} dz \right) dz \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Így az általánosított Reynolds egyenlet a következő formában fog előállni:

$$\begin{aligned} &\int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \nabla_{xy} \left[h_2 \rho_2 \bar{u}_{xy2} + h_1 \rho_1 \bar{u}_{xy1} - (\nabla_{xy} p)(F_2 + G_1) - \right. \\ &\left. - \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy2})}{F_0} (F_3 + G_2) - \bar{u}_{xy1} G_3 - \bar{K}_{1,xy} - \bar{K}_{2,xy} \right] +, \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

$$+ \rho_1 \bar{u}_{xy1} (\nabla_{xy} h_1) + \rho_2 \bar{u}_{xy2} (\nabla_{xy} h_2) + \rho_2 w_2 - \rho_1 w_1 = 0$$

mely a szokásos, méretviszonyokból adódó, Reynolds által bevezetett, illetve a turbulens és az inercia tagokon kívül, egyéb elhanyagolásokat nem tartalmaz. A Dowson féle viszkozitási-sűrűségi függvények módosított F_i , G_i (5.2.25), (5.2.32) alakjai egyaránt érvényesek newtoni és (5.1.1.9)-nak megfelelő nem-newtoni kenőanyag esetén, figyelembe véve mind a viszkozitás, mind a sűrűség és annak deriváltjának résmenti változását. Így a sűrűség és annak deriváltjának résmenti változását is figyelembe vevő, eddigi legáltalánosabb alaknak tekinthető.

A felületek sebességének résvastagság irányú összetevője esetén a szokásos felbontást alkalmazva:

$$w_1 = \bar{u}_{xy1} (\nabla_{xy} h_1) + W_1(t, x, y), \quad (5.2.34)$$

$$w_2 = -\bar{u}_{xy2} (\nabla_{xy} h_2) + W_2(t, x, y), \quad (5.2.35)$$

a (5.2.33) a következő alakban áll elő:

$$\int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \nabla_{xy} \left[h_2 \rho_2 \bar{u}_{xy2} + h_1 \rho_1 \bar{u}_{xy1} - (\nabla_{xy} p) (F_2 + G_1) - \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy2})}{F_0} (F_3 + G_2) - \bar{u}_{xy1} G_3 - \bar{K}_{1,xy} - \bar{K}_{2,xy} \right] + \rho_2 W_2 - \rho_1 W_1 = 0 \quad (5.2.36)$$

Vezessük be az alábbi függvényeket:

$$\Phi = F_2 + G_1,$$

$$\bar{\Psi} = h_2 \rho_2 \bar{u}_{xy2} + h_1 \rho_1 \bar{u}_{xy1} - \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy2})}{F_0} (F_3 + G_2) - \bar{u}_{xy1} G_3 - \bar{K}_{1,xy} - \bar{K}_{2,xy},$$

$$\Omega = \rho_1 W_1 - \rho_2 W_2 - \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz. \quad (5.2.37)$$

Így (5.2.36) az általánosított Reynolds egyenlet:

$$R(p, \rho, \dot{\rho}, h, \bar{r}, t, \eta, \tau_{eq}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots) = \nabla_{xy} \cdot \bar{\Psi} - \nabla_{xy} \cdot ((\nabla_{xy} p) \Phi) - \Omega = 0, \quad (5.2.38)$$

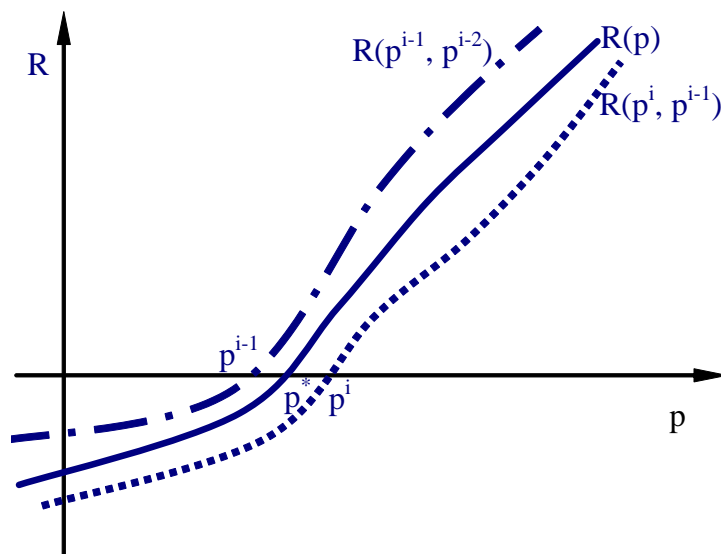
illetve a résvastagság menti tömegáram

$$\bar{q}_h = \bar{\Psi} - (\nabla_{xy} p) \Phi. \quad (5.2.39)$$

A megoldás keresése során az (5.2.38) változóinak olyan értékét keressük, melyre a maradványfüggvény értéke 0. Az egyenlet változói nem függetlenek egymástól, hanem azokat különböző egyenletek, mint pl. a viszkozitás nyomás és hőmérséklet függését leíró vagy az (5.2.20)-(5.1.1.10) egyenlet kapcsolja össze. Ugyanakkor az esetek jelentős részénél a változók közti összefüggéseket nem lehet explicit alakban felírni. Ennek következtében a numerikus megoldás során a változóknak kezdőértéket kell adni, majd a feladatot egy kiválasztott változóra (általában p -re) nézve meg kell oldani, míg a többi változó (τ_{eq} , h , ...) rögzítve marad. Ezt követően a kiválasztott változó új értékéhez kell meghatározni a többi változó értékét, melyek a következő iterációs lépés új kiinduló értékeként fognak szerepelni. Így az i . iterációs lépésben a Reynolds egyenlet maradványértéke a következő lesz:

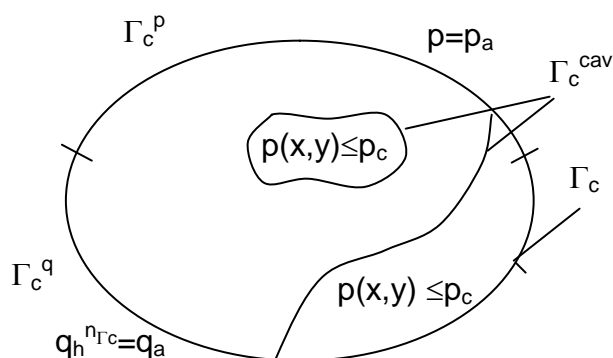
$$R(p^i, p^{i-1}) = \nabla_{xy} \cdot \bar{\Psi}(p^{i-1}) - \nabla_{xy} \cdot (\nabla_{xy} p^i \cdot \Phi(p^{i-1})) - \Omega(p^{i-1}) = 0. \quad (5.2.40)$$

A megoldás menetének szemléltetését szolgálja az 5.2. ábra. Az iterációs lépések során a rögzített p^{i-1} mellett, p^i -re nézve megoldott (5.2.40) szerinti $R(p^i, p^{i-1})$ maradványfüggvények kedvező esetben egyre jobban egybeesnek majd az (5.2.38) szerinti $R(p)$ függvénnyel, konvergálva ezzel a p^* egzakt megoldáshoz. Azonban ez nem minden esetben áll fenn. Ilyenkor az esetleges oszcilláció megszüntetésére és a numerikus megoldás konvergenciájának stabilizálására megoldást jelenthet az $i-1$, i lépések közti ugrások csillapítása (pl. $p^{i+1} = \alpha p^i + (1-\alpha)p^{i-1}$; $\alpha=0..1$)



5.2. ábra Megoldás általános menetének szemléltetése

(5.2.1) Az érintkezési zóna határán a peremfeltételek, kavitáció



5.3. ábra A kontakt zóna határai és a kavitációs perem

A kenési problémák leírása során egyszerre találkozunk hipotetikusan feltételezett peremen megadott peremfeltételekkel, illetve a ténylegesen kialakuló kenési zóna határát alkotó szabadperemre vonatkozó megkötésekkel.

A hipotetikusán feltételezett peremen, egyrészt a nyomásmezőre felírható elsődleges:

$$p = p_a \quad x, y \in \Gamma_c^p, \quad (5.2.1.1)$$

másrészt a peremen átáramló kenőanyag mennyiségét megadó másodlagos peremfeltételek találhatók

$$\bar{q}_h \cdot \bar{n}_{\Gamma_c} = \bar{q}_h^{n_{\Gamma_c}} = q_a \quad x, y \in \Gamma_c^q. \quad (5.2.1.2)$$

ahol p_a a külső nyomás q_a a peremen átáramló kenőanyag mennyisége.

Azonban a hipotetikusán feltételezett Γ_c peremű kenési tartomány az esetek jelentős részében nem egyezik meg a ténylegesen folytonos kenőanyaggal kitöltött tartománnyal. A tényleges kenési tartomány peremének (Γ_c^{cav}) helye előre nem ismert, viszont a rá vonatkozó jellemzők alapján meghatározható.

Abban az esetben, ha a kenőfilm kavitáció hatására szűnik meg és eltekintünk a szubkavitációs nyomástól, akkor az elsődleges és másodlagos peremfeltétel mellett teljesülnie kell a kavitációs tartományokban és annak határain a Swift-Stieber [165] által bevezetett kavitációs peremfeltételnek, melyet az irodalomban Swift-Stieber peremfeltételnek szokás nevezni:

$$p = p_c \quad \left| \nabla_{xy} p \right| = 0 \quad x, y \in \Gamma_c^q. \quad (5.2.1.3)$$

ahol p_c a kavitációs vagy szaturációs nyomás.

Míg az elsődleges és másodlagos peremfeltétel (5.2.1.1)-(5.2.1.2) teljesítése nem jelent különösebb nehézséget, addig a kavitációs peremfeltétel (5.2.1.3) számos problémát okoz. A megoldás során a nehézség elsősorban abban áll, hogy a kavitációval megszűnő kenőfilm határai nem ismertek. Ennek következtében a kiindulásként feltételezett tartomány határai nem egyeznek meg a kenőfilm valós határaival (Γ_c - 5.3. ábra). Így a korábban homogén fázisú, folytonos kenőfilmre felírt összefüggések nem alkalmazhatóak a feltételezett, Γ_c által határolt tartomány egészén.

(5.2.1.1) Jelenleg használatos megoldások a kavitáció kezelésére

Mint ahogy a (3.) fejezetben ismertetésre került, a Swift-Stieber peremfeltétel kielégítése vagy a tartomány határainak változtatásával vagy a kenőfilmre felírt összefüggések érvényességének kavitációs tartományra való kiterjesztésével érhető el. Ugyan az első lehetőségre is található megoldás [164], [166], az alkalmazás

nehézségei miatt, a második utat követő Elrod-Adams féle algoritmusként ismert megoldás terjedt el [94]. E megoldás, a kavitációs indexen és a kitöltési paraméteren keresztül jól modellezhetővé teszi a kavitációs tartományt, miközben a kavitációs határon és a tartományban nem sérül a tömegmegmaradás.

A jól ismert eljárás során feltételezzük, hogy a nyomás felírható mint a sűrűség függvénye, például [94] alapján:

$$p(\theta) = p_c + g\beta(\theta - 1), \quad (5.2.1.1.1)$$

ahol $\theta = \rho/\rho_L$ a kitöltési paraméter, mely az adott helyre jellemző sűrűség és a folytonos kenőanyag sűrűségének arányát fejezi ki, β a kenőanyag rugalmassági tényezője, g pedig a kavitációs index, mely

$$\begin{aligned} g &= 0; \quad \theta < 1 \\ g &= 1; \quad \theta \geq 1 \end{aligned} \quad (5.2.1.1.2)$$

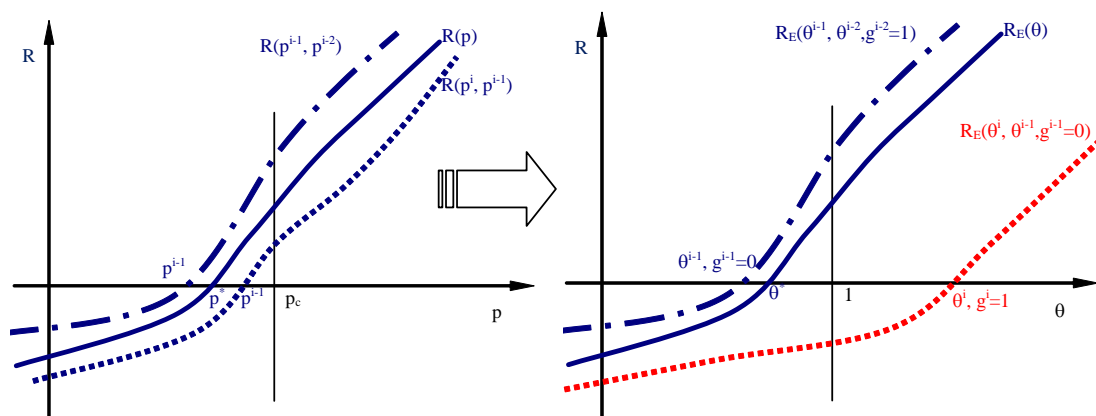
Így az eredeti (5.2.38) alapegyenlet a következőképpen alakul

$$R_E(\theta, g, \dots) = \nabla_{xy} \cdot \bar{\Psi}(\theta) - \nabla_{xy} \cdot (g\beta(\nabla_{xy}\theta)\Phi(\theta)) - \Omega(\theta) = 0. \quad (5.2.1.1.3)$$

A kavitációs index jellege miatt a megoldás minden esetben iterációval érhető csak el, mely során az i . lépésben születendő megoldás az $i-1$. lépésben meghatározott g eloszláson alapul. Így az i . iterációs lépésben az Elrod-Adams kavitációs módszer szerint módosított Reynolds egyenlet maradványértéke a következő lesz:

$$R_E(\theta^i, \theta^{i-1}) = \nabla_{xy} \cdot \bar{\Psi}(\theta^{i-1}) - \nabla_{xy} \cdot (g^{i-1}\beta\Phi(\theta^{i-1})\nabla_{xy}\theta^i) - \Omega(\theta^{i-1}) = 0. \quad (5.2.1.1.4)$$

Az 5.4. ábra egy adott x, y pontban érzékelteti az Elrod-Adams féle kavitációs algoritmus hatását. Elrod-Adams féle kavitációs algoritmus tovább nehezíti ezt az amúgy is igen érzékeny iterációs folyamatot azzal, hogy drasztikusan megváltoztatja a R függvény jellegét a kétértékű kavitációs index lépések közötti esetleges érték váltásával, mint ahogy az, az ábrán is látható. Tételezzük fel, hogy az $R_E^{i-1, i-2}$ -ben szereplő θ^{i-2} -ről tudjuk, hogy nagyobb, mint 1, így $g^{i-2} = 1$ mellett (folytonos kenőfilm) oldjuk meg az (5.2.1.1.4) egyenletet, melynek eredményeként $\theta^{i-1} < 1$ megoldást kapunk, amihez $g^{i-1} = 0$ tartozik. Ennek hatására az $R_E^{i, i-1}$ görbe drasztikusan eltér attól a görbétől, amelyet változatlan g mellett kapnánk. Könnyen előfordulhat, hogy a θ^i megoldás nagyobb lesz, mint 1, így g ismét 1-re vált.



5.4. ábra Elrod-Adams féle kavitációs algoritmus hatása a megoldásra

Az Elrod-Adam féle algoritmus nagy hátránya, hogy egyrészt az egyenletrendszer rosszul kondicionálttá válik a β paraméter igen nagy értéke miatt, másrészt mereven kezeli az iterációs lépések között a kavitációs index változását ($g=0$ vagy 1 - (5.2.1.1.2) szerint), ami esetenként jelentős oszcillációt okozhat. Payvar és Salant 1992-ben [140] közzétett munkájában sikeresen kiküszöbölte, a β paraméter értékéből adódó numerikus problémát. Eljárásuk előnye, hogy szétválasztja a kontakttartomány feletti nyomás és a kavitációs zónán belüli sűrűség számítását, ezáltal jelentősen javítja a számítás stabilitását. Ugyanakkor e megoldás során is a kavitációs index csak diszkrét értéket vehet fel ($0, 1$), ami magában rejti az oszcilláció veszélyét, továbbá a végelem módszer alkalmazása esetén finom háló feltételét teszi szükségessé, mivel egy elemen belül a numerikus integrálás megbízható elvégezhetősége miatt a „ g ”-nek nem lehet szakadása.

Az eddig ismertetett megoldásokra jellemző, hogy elsősorban véges differencia módszerre épülő megoldásokba építhető algoritmusokat közölnek. Kifejezetten végelem módszerhez kifejlesztett megoldást Kumar és Booker 1991-ben [134], [135] tett közzé. A megoldás szintén szétválasztja a nyomás és a sűrűség számítását. Ezt azonban nem egy, a fraktációt kezelő kavitációs indexen keresztül oldották meg, hanem az elemek zónánkénti csoportosításával. A különböző zónák felett pedig különböző mezőket határoznak meg. Így pl. a kenési zónában a nyomás az ismeretlen mező, míg a sűrűség adott, a kavitációs tartományban viszont a sűrűséget határozzák meg adott nyomás mellett.

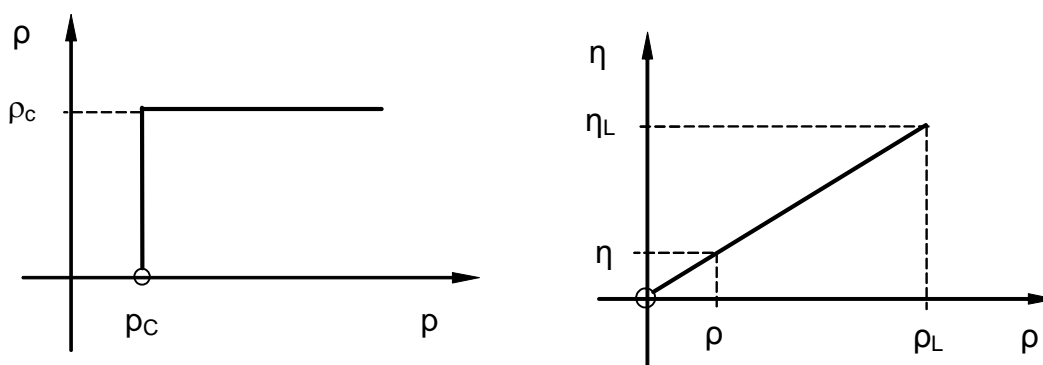
$$\begin{aligned} \rho &= \rho_L(p); & p &> p_c \\ 0 < \rho &\leq \rho_c & p &= p_c \end{aligned} \quad (5.2.1.1.5)$$

ahol ρ_L a folytonos kenőanyag, míg ρ_c a p_c nyomáson vett kenőanyag sűrűség ($\rho_c = \rho_L|_{p=p_c}$). A p_c a kenőanyag kavitációs vagy szaturációs vagy telített gőz nyomása. Mivel a folyadék képes elviselni igen kismértékű húzó feszültséget, a benne lévő nyomás lehet kevesebb, mint 0. Ha $p < p_c$, akkor szubkavitációs nyomásról beszélünk. Coyne-Elrod 1970-ben, a Taylor 1964-es, a kenőanyagok kavitációját tárgyaló művében definiált felületi feszültségi paraméter segítségével, közzétette a szubkavitációs nyomás meghatározásához szükséges film-kavitációs határfelületre vonatkozó peremfeltételt, melyet Savage 1977-ben [89] pontosított. Azonban a szubkavitációs nyomás meghatározása az esetek túlnyomó többségénél szükségtelen, továbbá p_c nullának tekinthető.

Tekinthetjük úgy is, hogy az (5.2.38) szerinti Reynolds egyenlet érvényes a teljes tartományra. A modelljünkben figyelembe veszik Floberg [48] kísérleti, valamint Cole és Hughes [29] elméleti eredményeit, melyben kimutatták, hogy a kavitációs zónában a kenőanyag a rést szakaszosan kitöltő sávokban áramlik. Ennek alapján Kumar és Booker a sűrűség és a viszkozitás kapcsolatára nézve a következőket alkalmazta (5.5 ábra):

$$\frac{\eta}{\eta_L} = \frac{\rho}{\rho_L} \quad \rho \leq \rho_c. \quad (5.2.1.1.6)$$

Azonban a Kumar és Booker modell szintén finom háló alkalmazását teszi szükségessé, mivel nem ugyanazt az ismeretlen mezőt kell meghatározni az egész tartományra, hanem hol a nyomást, hol a sűrűséget, attól függően, hogy épp melyik zónába esik az elem.



5.5. ábra Kumar és Booker modellben a sűrűség és a viszkozitás kapcsolata [134]

A feladatok többségében azonban megelégedhetünk a kavitáció kevésbé igényes, a Swift-Stieber féle peremfeltételt csak közelítő kezelésével, ugyanis az

átlagos nyomásértékek mellett nemcsak a szubkavitációs nyomás hanyagolható el, hanem a nyomás kavitációs zónán belüli állandóságát is elegendő egy adott feladat esetén előírt hibahatáron belül teljesíteni. Ezekben az esetekben a kavitáció modellezésre kiválóan alkalmas a kontaktmechanikában széles körben alkalmazott büntető paraméteres megoldás, melyet Wu 1986-ban [113] javasolt először kenésméleti problémákhoz, majd 1996-ban Pahud [159] és Schlijper, Scales és Rycroft [161] alkalmazott sikeresen hidrodinamikai kenésállapotok modellezése során. Az eljárás lényege, hogy az (5.2.38) Reynolds egyenlethez hozzáadunk egy $\gamma_{Wu} \cdot p$ büntetőtagot, melyben

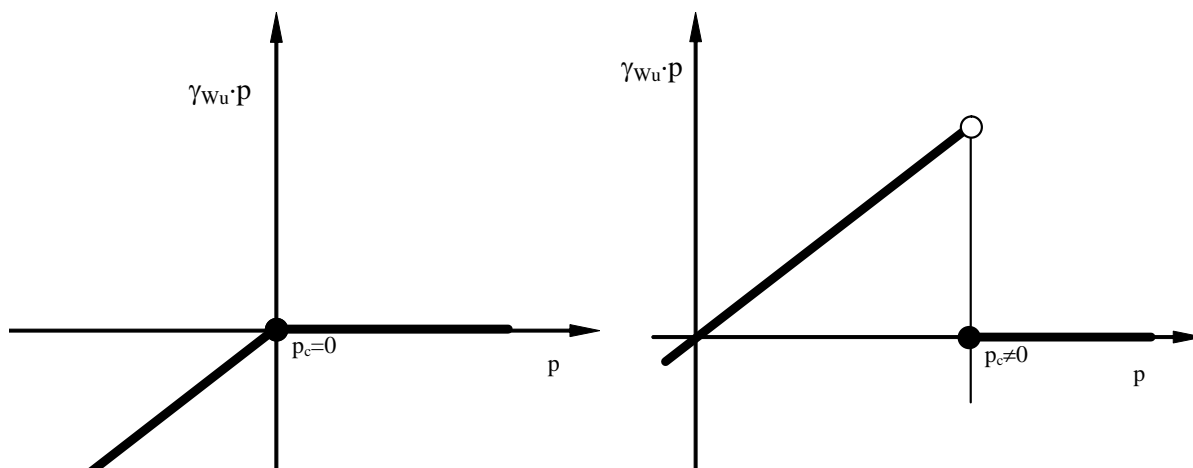
$$\begin{aligned} \gamma_{Wu} &\approx 0, & p &\geq p_c \\ \gamma_{Wu} &\approx c, & p &< p_c \end{aligned} \quad (5.2.1.1.7)$$

ahol c egy elegendően nagy szám.

Így (5.2.38) a következőképpen alakul

$$R_{Wu}(p, \gamma_{Wu}) = \nabla_{xy} \cdot \vec{\Psi}(p) - \nabla_{xy} \cdot (\Phi(p) \nabla_{xy} p) - \Omega(p) + \gamma_{Wu} p = 0. \quad (5.2.1.1.8)$$

Látható, hogy a korábban ismertetett, kavitációs index alkalmazására épülő algoritmusokkal ellentétben itt nyomás értéket kell meghatározni a teljes tartományra. Wu, a gyakorlati esetekből kiindulva eleve feltételezte, hogy a kavitációs nyomás 0. A büntetőparaméteres technikával a kavitációs zónában a nyomás, az Elrod-Adams algoritmussal ellentétben, nem azonosan egyenlő 0-val, hanem „csak” γ mértékének függvényében közelíti azt. Azonban a $\gamma_{Wu} \cdot p$ büntető tagnak csak akkor nincs szakadása a kavitációs határon, ha a kavitációs nyomást 0-nak tekintjük (5.6. ábra). A szakadás kiküszöbölhető, ha az eredeti büntetőtag helyett $\gamma_{Wu} \cdot (p - p_c)$ büntetőtagot alkalmazunk.



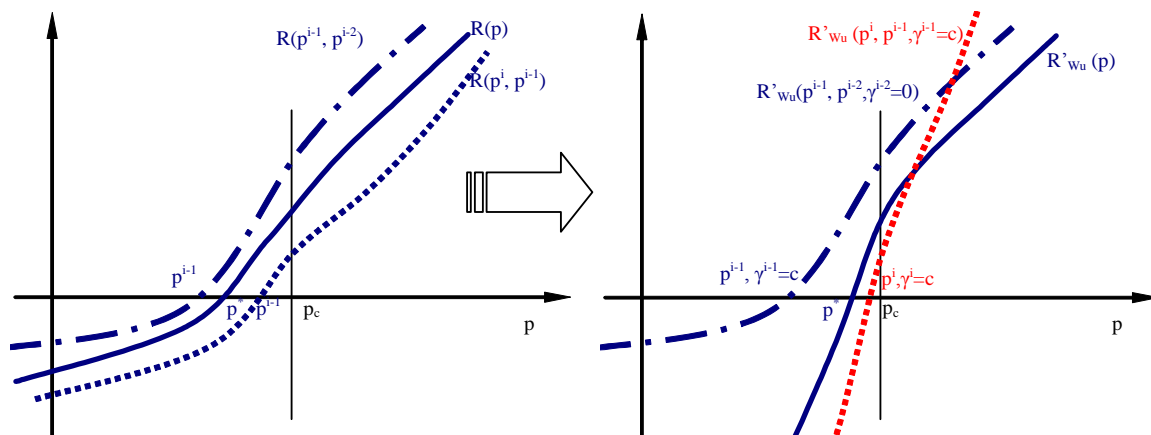
5.6. ábra Wu féle büntetőtag a nyomás függvényében

Így a tetszőleges kavitációs nyomás mellett, a bemutatott módosítással kiegészített Wu-féle büntetőtaggal rendelkező Reynolds egyenlet az (5.2.1.1.9) alakban írható fel.

$$R'_{Wu}(p, \gamma_{Wu}, p_c) = \nabla_{xy} \cdot \vec{\Psi}(p) - \nabla_{xy} \cdot (\Phi(p) \nabla_{xy} p) - \Omega(p) + \gamma_{Wu}(p - p_c) = 0. \quad (5.2.1.1.9)$$

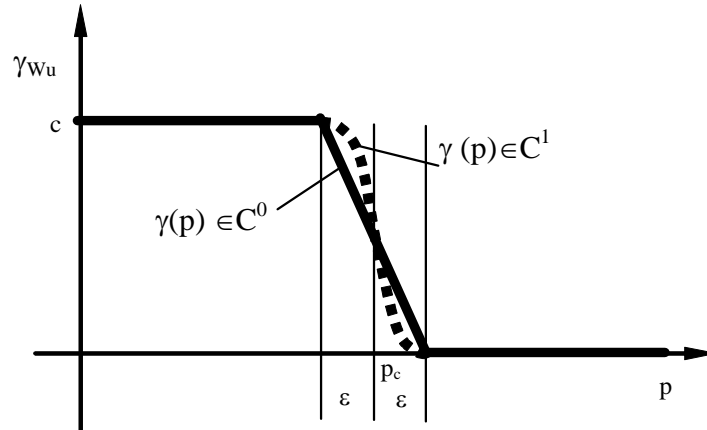
A megoldás természetesen ebben az esetben is iterációra épül. A megoldás menete, a korábbiakhoz hasonlóan itt is szemléltethető szematikusan. A megoldás menetét az 5.7. ábra érzékelteti. A büntető tag hatására az $R'_{Wu}{}^{i,i-1}$ görbe megváltozik, meredekebb lesz, és a „ p ” koordináta tengelyt p_c kavitációs nyomásértékhez közel metszi el.

$$R'_{Wu}(p^i, p^{i-1}, \gamma_{Wu}(p^{i-1}), p_c) = \nabla_{xy} \cdot \vec{\Psi}(p^{i-1}) - \nabla_{xy} \cdot (\Phi(p^{i-1}) \nabla_{xy} p^i) - \Omega(p^{i-1}) + \gamma_{Wu}(p^{i-1})(p^i - p_c) = 0 \quad (5.2.1.1.10)$$



5.7. ábra Wu féle kavitációs algoritmus hatása a megoldásra

Számítási tapasztalatok arra engednek következtetni, hogy a büntető paraméteres technikák esetén a büntetőparaméter (γ_{Wu}) szakadása nehézséget okozhat a numerikus megoldó algoritmusok számára. A büntető paraméternek azonban nem kell szükségszerűen szakadással rendelkeznie a határfelület közelében, mint ahogy azt az (5.2.1.1.7) összefüggés mutatja. Akár folytonosan is változhat az értéke egy legalább C^0 folytonos, lehetőleg szigorúan monoton $f_\gamma(p)$ függvény szerint egy átmeneti $p_c \pm \varepsilon$ tartományon belül, illetve a c paraméter is módosulhat az iterációs lépések során úgy, hogy a legalább C^0 folytonosság fennálljon az átmeneti tartomány határain is. A $f_\gamma(p)$ függvény megválasztásával folytonos, egyszer (lineáris átmenettel) vagy többször (pl. $\sin(x)$ jellegű átmenettel) folytonosan deriválható büntetőparaméter-függvényt is kaphatunk (5.8. ábra).



5.8. ábra Folytonos és folytonosan deriválható büntetőparaméter

$$\gamma(p) = \begin{cases} 0 & p > p_c + \epsilon \\ f_\gamma(p) \in C^0, & c > f_\gamma(p) > 0 & p_c - \epsilon < p \leq p_c + \epsilon, \\ c \gg 1 & & p \leq p_c - \epsilon \end{cases} \quad (5.2.1.1.11)$$

Ekkor a büntetőparaméteres megoldások jó numerikus stabilitással rendelkeznek, továbbá a büntetés szigorításával (c növelésével) a megoldás egyre jobban meg közelíteti az Swift-Stieber peremfeltételt (5.2.1.3).

Amennyiben az $f_\gamma(p)$ átmeneti függvény alkalmazása egy már meglévő modellbe nehezen implementálható, más úton is kezelhető a büntetőparaméter iterációs lépések közötti változása. A kavitációs indexszel ellentétben, a büntetőparaméter nem csak két érték között változhat, így maximálható egy adott x, y pontban a lépésenkénti változása például az (5.2.1.1.12) szerint, ahol γ^* pl. az (5.2.1.1.7) szerint meghatározott büntetőparaméter, míg „ n ” ($n \geq 1$) a büntetőparaméter minimum és maximum értéke közti lépcsők száma. Látható, hogy az adott vizsgálati pontban c/n értékkel nő a büntetőparaméter, egészen addig, míg γ el nem éri a minimum vagy maximum értékét.

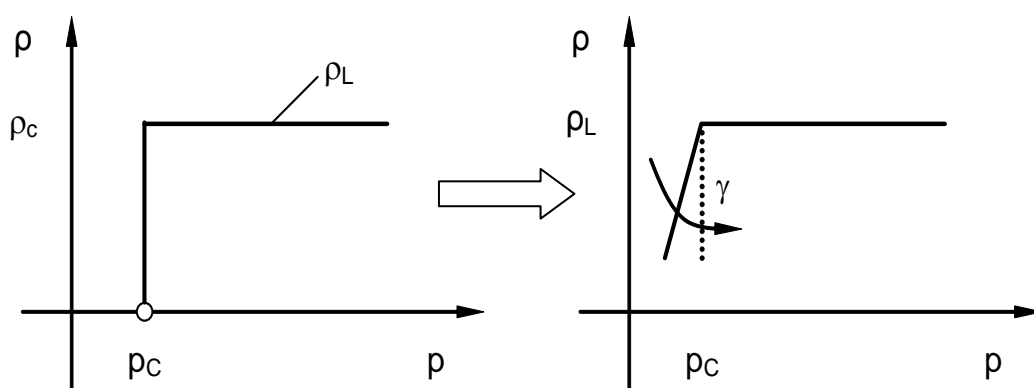
$$\gamma^i = \gamma^{i-1} + \text{signum}(\gamma^* - \gamma^{i-1}) \min\left(|\gamma^* - \gamma^{i-1}|, \frac{c}{n}\right). \quad (5.2.1.1.12)$$

(5.2.1.2) Büntető kavitáció

Jelentős hátránya a Wu féle büntető paraméteres technikának, hogy ugyan a nyomást jól kézben tartja, de a kontinuitás sérül a kavitációs határon, ami az áramló kenőanyag termodinamikai modellezése során problémát jelent, így ez a módszer, termo-hidrodinamikai problémák modellezésére ebben a formájában nem alkalmas.

Áttekintve azon jellemzőket, melyek az (5.2.38) Reynolds egyenletben szerepelnek, megállapíthatjuk, hogy a sűrűség és ezzel együtt a viszkozitás értéke változik a kavitációs határon a kenőanyag felszakadása miatt. Tegyük fel, hogy a sűrűség és a viszkozitás közti kapcsolat Kumar és Booker [134] alapján (5.2.1.1.6) szerint alakul. Ugyanakkor a sűrűség csak közelítőleg követi az (5.2.1.1.5) egyenletben vázolt viselkedést úgy, hogy ha a nyomás a kavitációs nyomás alá esik, a sűrűség a nyomás függvényében meredeken csökken. A Kumar és Booker modellhez képesti eltérést mutatja az 5.9 ábra.

A sűrűség a nyomásfüggésének meredekséget kifejezhetjük egy γ büntető függvény segítségével. A sűrűség annál meredekebben esik a nyomás csökkenésével, minél nagyobb a büntetés mértéke.



5.9. ábra Kumar és Booker modellben büntetőparaméteres közelítése

Az előbb vázolt kritériumokat megvalósíthatjuk, ha a következő formában alkalmazzuk a büntetést a sűrűsége nézve:

$$\rho^* = \frac{\rho_L(p, \vartheta)}{\gamma(p) \cdot (p_c - p) + 1}, \quad (5.2.1.2.1)$$

ahol $\gamma(p)$ büntetőfüggvény a korábban ismertetett (5.2.1.1.7) vagy (5.2.1.1.11) szerint határozható meg. Így egy teljesen új büntetőparaméteres modellt kapunk a kavitáció kezelésére, melyben a γ büntetőfüggvény c paraméterének növelésével egyre jobban meg tudjuk közelíteni a sűrűség-nyomás kapcsolatának Kumar és Booker féle leírását. Ugyanakkor észre kell vennünk, hogy mivel a sűrűség a kavitációs zónában is a nyomás függvénye (5.2.1.2.1), az egész tartományon nyomásmezőt kell meghatározunk.

Az itt szereplő ρ^* immár nem csak a kenési zóna, hanem a teljes tartomány egy adott pontjára érvényes sűrűséget jelöli, mely tartalmazza a kavitációs zónában a réskitöltöttség mértékét is.

$$\theta(p) = \frac{\rho^*}{\rho_L} = \frac{1}{\gamma(p)(p_c - p) + 1}. \quad (5.2.1.2.2)$$

Összevetve a kitöltési paraméter fenti formában való kifejezését a nyomás és a sűrűség Elrod-Adams féle (5.2.1.1.1) kapcsolatával, formailag $g=1/(\gamma\beta)$ adódik, melyből megállapítható, hogy amennyiben a kavitációs zónában a büntetőparaméter tart a végtelenhez, pontosan az Elrod-Adams megoldást kapjuk meg határértékként. A viszkozitás tekintetében megtartva Kumar és Booker-féle leírást, az (5.2.1.2.1) és az (5.2.1.1.6) képlet következtében a viszkozitás:

$$\eta^* = \eta_L(p, \vartheta) \frac{\rho^*}{\rho_L(p, \vartheta)} = \frac{\eta_L(p, \vartheta)}{\gamma(p)(p_c - p) + 1} = \theta(p) \eta_L(p, \vartheta). \quad (5.2.1.2.3)$$

Ugyan a p_c kavitációs nyomás függ a hőmérséklettől, azonban a résméret menti maximális hőmérsékletet kell csak figyelembe venni, hiszen a kavitáció megjelenésének azt a pontot kell tekintenünk, ahol a keresztmetszet mentén valahol fellép a kavitáció és ennek következtében megszakad a folytonos kenőfilm. A vizsgált tartományon a résméret hőmérsékletmaximum ($\mathcal{G}_{max}^z(x, y) = \max_{xy} \mathcal{G}(x, y, z)$) csak x és y függvénye, így $p_c(\mathcal{G}_{max}^z)$ szintén csak x és y -nak függvénye, z -nek viszont nem, tehát ennek következtében $\gamma(p)$ sem függvénye z -nek (amennyiben e_z -t tekintjük a rés menti egységvektornak).

Az (5.2.1.2.1) és (5.2.1.2.3) alkalmazásával, mivel $\gamma(p)$ nem függvénye z -nek az (5.2.38) általánosított Reynolds egyenletben szereplő tagok a következőképpen módosulnak, ha (5.1.1.12) szerinti folyadékmodellt alkalmazzuk:

$$\bar{\Psi}^* = \theta(p) \bar{\Psi}, \quad (5.2.1.2.4)$$

$$\Omega^* = \theta(p) \left(\Omega - \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(p) \int_{-h_1}^{h_2} \rho dz \right). \quad (5.2.1.2.5)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\Omega_\gamma = \Omega - \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(p) \int_{-h_1}^{h_2} \rho dz. \quad (5.2.1.2.6)$$

A leírás egyszerűsítése végett a $\gamma(p)$ jelölés helyett a következőkben csak γ -t írok a büntetőfüggvény jelölésére.

Ezek alapján az új, a kavitációs zónára is érvényes Reynolds egyenlet a következő:

$$\nabla_{xy} \cdot (\theta \vec{\Psi}) - \nabla_{xy} \cdot ((\nabla_{xy} p) \Phi) - \theta \Omega_\gamma = 0. \quad (5.2.1.2.7)$$

A büntetőfüggvény segítségével, a Reynolds egyenlethez hasonlóan, felírható a tömegáram a teljes vizsgált tartományra érvényes formában:

$$\vec{q}_h = \theta \vec{\Psi} - \Phi \cdot \nabla_{xy} p. \quad (5.2.1.2.8)$$

Ellentétben a korábban bemutatott Wu-féle megoldással, ebben az esetben a büntetőparaméter hatása beépül, a sűrűsége és a viszkozitáson keresztül, a tömegáramba is (5.2.1.2.8), így ezáltal nem sérül a kontinuitás. Tehát a javasolt modell alkalmazható a hőtani vizsgálatokhoz is.

A kavitációs indexre épülő megoldásokban a kenési zónára jellemző Poiseuille típusú és a kavitációs zónában hipotetikusán feltételezett Couette típusú (lineáris sebességprofil, nincs nyomásváltozás) áramlásra vonatkozó egyenleteket olvasztják egygá a kavitációs indexen keresztül (5.2.1.1.3). Ezzel ellentétben (5.2.1.2.7) szerint, ebben az esetben az eredeti egyenlet anyagi paramétereinek (ρ, η) kavitációs zónára való kiterjesztésén keresztül ((5.2.1.2.1), (5.2.1.2.3)) válik kezelhetővé a kavitáció.

Míg a kavitációs index csak 1 vagy 0 lehet, addig a büntetőfüggvény tetszőleges értéket felvehet, lehetővé téve ezzel a numerikus megoldó algoritmusok hatékonyságának növelését és az oszcilláció veszélyének csökkentését. A c értékének iterációs lépések közti változtatásával (kezdeti gyenge büntetéssel indítva a megoldást), illetve a büntetőparaméter lépésenkénti változásának korlátozásával befolyásolható a kavitációs peremfeltétel teljesülése, stabilizálható az iterációs megoldások konvergenciája. Ez különösen előnyös azokban az esetekben, amikor a számítás kezdőértékei messze vannak a megoldástól.

(5.2.2) A résméret a felületen megoszló terhelés és a hőmérséklet hatására bekövetkező elmozdulások figyelembevételével

Az elasztohidrodinamikai problémák vizsgálata során kiemelten fontos kérdés a felületi deformációk (normális irányú elmozdulások) meghatározása. A problémakör jellegéből adódóan minden esetben felületen megoszló erőrendszer okozta deformációt, vagy egy adott deformációhoz tartozó megoszló erőrendszert

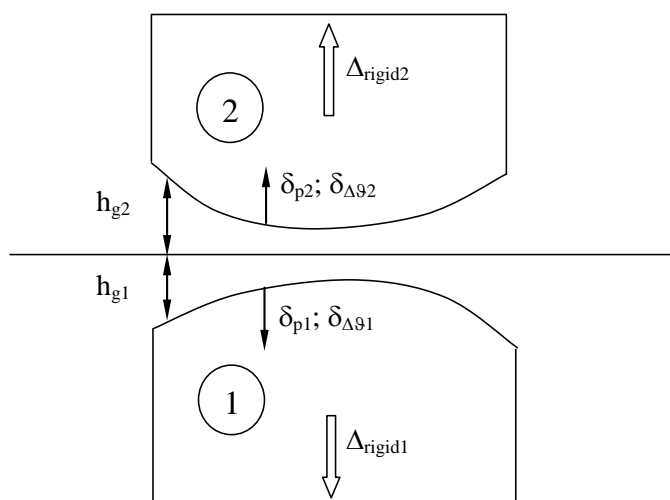
kell meghatározni, attól függően, hogy direkt vagy inverz megoldási technikát választunk.

A résméret, mindazonáltal a felületek terheletlen geometriájából és a kiinduló minimális távolságukból (h_g), a merevtestszerű mozgásukból (Δ_{rigid}), továbbá a „ i ”-edik felületen megoszló erőrendszer δ_p és a hőmérsékletkülönbség ($\Delta\vartheta_i$) okozta deformációjukból $\delta_{\Delta\vartheta_i}$ adódik. Így az i -dik test távolsága egy elméleti középfelülethez viszonyítva:

$$h_i = h_{g_i} + \Delta_{rigid_i} + \delta_{p_i} + \delta_{\Delta\vartheta_i} \quad (5.2.2.1)$$

Ennek alapján a két test közti rés az alábbi alakban számolható:

$$h = h_1 + h_2 = h_{g_1} + \Delta_{rigid_1} + \delta_{p_1} + \delta_{\Delta\vartheta_1} + h_{g_2} + \Delta_{rigid_2} + \delta_{p_2} + \delta_{\Delta\vartheta_2} = h_g + \Delta_{rigid} + \delta_p + \delta_{\Delta\vartheta} \quad (5.2.2.2)$$



5.10. ábra Felületek elmozdulásai

Abban az esetben, ha a felületek merevtestszerű elmozdulása megengedett és a kontakt terhelőerő adott, akkor az egyik felületre redukálva elegendő ezt számítani. Ahhoz, hogy mindkét felületre külön-külön számítható legyen, további ismeretek szükségesek az érintkezésbe lépő testek egyéb kötöttségeiről.

A termo-elasztohidrodinamikai feladat jelen tárgyalása szempontjából a deformációk meghatározásának módja nem központi kérdés. Elegendő feltételeznünk, hogy a résméret változása ($\delta_p(p,x,y); \delta_{\Delta\vartheta}(\vartheta,x,y)$) szakadásmentes az érintkezési tartományon belül, továbbá kölcsönösen egyértelmű függvénye a nyomás és hőmérséklet-eloszlásnak és érvényes az (5.2.2.1) összefüggés. A $(\delta_p(p,x,y); \delta_{\Delta\vartheta}(\vartheta,x,y))$ függvények meghatározása egyaránt történhet numerikus és

analitikus módszerrel. A jelen problémakör megoldása szempontjából tételezzük fel, hogy léteznek a következő egyenletek:

$$L_{p_i}(p(x, y), \delta_{p_i}(x, y)) = 0, \quad (5.2.2.3)$$

$$L_{\Delta g_i}(\Delta g_{s_i}(x, y), \delta_{\Delta g_i}(x, y)) = 0. \quad (5.2.2.4)$$

Elasztohidrodinamikai feladatoknál gyakori, hogy az érintkezés, az érintkező testek méreteihez képest, pont- vagy vonalszerűnek tekinthető. Fordított szemszögből nézve a kontaktzónához képest a testek végtelen nagyoknak tekinthetők. A vizsgált esetekben, a lokális alakváltozás szempontjából kvázistatikus terhelést feltételezünk. Az ennek hatására bekövetkező deformációt, tradicionálisan gyakorta a félvégtelen téren kialakuló deformációval szokás közelíteni, mely megoszló terhelés esetén [107] szerint pont- vagy folszerű terhelésre:

$$\delta_{p_i}(x, y) = \delta_{p_i}(p(\hat{x}, \hat{y}), x, y) = \frac{(1 - \nu_i^2)}{\pi \cdot E_i} \cdot \int_{A_c(\hat{x}, \hat{y})} p(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2}} \cdot dA(\hat{x}, \hat{y}), \quad (5.2.2.5)$$

míg vonalszerű terhelésre:

$$\delta_{p_i}(x) = \delta_{p_i}(p(\hat{x}), x) = \frac{(1 - \nu_i^2)}{\pi \cdot E_i} \cdot \int_{s_c(\hat{x})} p(\hat{x}) \cdot \ln(x - \hat{x})^2 \cdot ds(\hat{x}). \quad (5.2.2.6)$$

Amennyiben mindkét érintkező test félvégtelennek tekinthető és lineárisan rugalmas, akkor a két felület együttes deformációja közvetlenül is meghatározható, mely vonalszerű érintkezésre a következő:

$$\delta_p(x) = \delta_p(p(\hat{x}), x) = \frac{2}{\pi \cdot E'} \cdot \int_{s(\hat{x})} p(\hat{x}) \cdot \ln(x - \hat{x})^2 \cdot ds(\hat{x}), \quad (5.2.2.7)$$

ahol E' a redukált rugalmassági modulus

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right). \quad (5.2.2.8)$$

Hasonlóképpen felírható a hőhatás miatt a félvégtelen téren bekövetkező deformáció is [107]. Azonban többek között Rohde és Oh [84], illetve Sui és Sadeghi [130] bemutatta, hogy azokban az esetekben, amikor a geometriai viszonyok olyanok, hogy az érintkező felületek félvégtelennek tekinthetők, a nyomás okozta felületi deformáció mellett a hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező deformáció gyakorlatilag elhanyagolható. Az olyan esetekben pedig, ahol kis nyomás mellett is jelentős a csúszásból származó hőtermelődés és az ebből származó deformáció, a geometriai viszonyok nem teszik lehetővé, hogy az

érintkező testeket félvégtelennek tekintjük. Ebből adódóan a hőmérséklet hatására bekövetkező deformáció számítása általában nem analitikus úton felállított egyenletek, hanem például numerikus eljárások segítségével előállított ún. hatásmátrixokkal történhet.

A termo-elasztohidrodinamikai feladat jelen tárgyalása szempontjából ugyanakkor csak modellezési részletkérdés a deformációk meghatározásának módja. Elegendő feltételeznünk, hogy a résméret változása $(\delta_p(p, x, y); \delta_{\Delta g}(\mathcal{G}, x, y))$ szakadásmentes az érintkezési tartományon belül, továbbá kölcsönösen egyértelmű függvénye a nyomás és hőmérséklet-eloszlásnak és érvényes a szuperpozíció elve, azaz érvényes az (5.2.2.1) összefüggés.

Amennyiben a termo-elasztohidrodinamikai feladatot „inverz” eljárással kívánjuk megoldani, nem egy ismert nyomás és hőmérséklet-eloszlás és a merev testszerű elmozdulás alapján határozzuk meg a résméretet, hanem fordítva, a résméret alapján kellene kiszámítani az előbbieket. Azonban csak ezek egyikének meghatározására használhatjuk fel az (5.2.2.1) összefüggést, mely szinte kizárólag a nyomáseloszlás lehet, amennyiben létezik a δ_{pi} függvénynek inverzfüggvénye.

(5.2.3) Terhelési és kinematikai peremfeltétel

A legtöbb esetben az érintkező testeknek nem egy adott pontjának elmozdulása, hanem a testeket összeszorító (F_w) erő vagy vonalnyomás (f_w), illetve annak időbeli lefutása ismert. Ha elhanyagolhatónak tekintjük az inercia erőket, akkor a kenőanyagban kialakuló nyomásnak ezzel kell egyensúlyt tartania. Tehát:

- folszerű érintkezés esetén:

$$F_w = \int_{A_c} p \cdot dA, \quad (5.2.3.1)$$

- vonalérintkezésnél

$$f_w = \int_{s_c} p \cdot dx. \quad (5.2.3.2)$$

Ahhoz, hogy e feltétel kielégíthető legyen, az érintkező testek merevtestszerű mozgását (Δ_{rigid}) további változóként kell kezelni. Ugyanakkor az érintkező felületek merevtestszerű elmozdulására nézve további kinematikai peremfeltételre is szükség van, hiszen a két felületnek egy-egy ilyen jellegű szabadságfoka ($\Delta_{rigid1}, \Delta_{rigid2}$) van, míg a terhelési feltételből csak egy egyenlettel rendelkezünk. Így az egyik felületre

további kinematikai peremfeltétel megadása szükséges, vagy elő kell írni a merevtestszerű elmozdulás mértékét (pl. a szokásos módon, $\Delta_{rigid1}=0$ -ra választva), vagy rugalmas támaszként kell kezelni (pl. $\Delta_{rigid1}=c_1 \cdot \int p dA$).

Amennyiben nincs terhelési feltétel, akkor mindkét felületre vonatkozóan kinematikai peremfeltétellel kell rendelkezünk.

Abban az esetben, amikor az inercia erők nem elhanyagolhatóak, akkor az (5.2.3.1) vagy (5.2.3.2) egyenlet helyett, az érintkező testekre vonatkozó mozgásegyenleteket kell megoldani, meghatározva testek pillanatnyi sebességét is.

(5.2.4) A kenőanyag modell kiválasztása

A viszkozitás nyomás- és hőmérsékletfüggésére vonatkozó első összefüggés 1893-ból Barustól [9] származik, melyet 1963-ban Roelands [45] öntött új alakba. Termo-elasztohidrodinamikai számítások során szinte kivétel nélkül ezeket használják, noha a kísérleti eredményekkel a legjobb egyezést a módosított WLF formula adja, melyet 1991-ben Wolff [138] alkalmazott először termo-elasztohidrodinamikai probléma megoldásához. Ezek mindegyikére igaz, hogy a viszkozitás a nyomás és a hőmérséklet nemlineáris függvénye. A numerikus megoldás során a fenti formulák mindegyike jól alkalmazható, hiszen folytonosak és deriválhatóak mind a nyomás, mind a hőmérséklet szerint. A módosított WLF formula előnye ugyanakkor, hogy a képletben szereplő konstansok fizikai jellemzőkre épülnek, továbbá az első kettőtől eltérően, a módosított WLF szerinti viszkozitás-nyomás függvénynek van maximuma, ami stabilabbá teheti a numerikus számítást. Ezért ezt célszerű használni. A módosított WLF formulával a viszkozitás logaritmikus alakban a következőképpen írható fel:

$$\lg(\eta_{WLF}) = \lg(\eta_s) - \frac{C_1}{1 + \frac{C_2}{[1 - B_1 \cdot \ln(1 + B_2 \cdot p)] \cdot [\vartheta - T_{s_0} - A_1 \cdot \ln(1 + A_2 \cdot p)]}}, \quad (5.2.4.1)$$

ahol:

η_s : viszkozitás egy referencia vagy üvegesedési hőmérsékleten

ϑ_{s_0} : referencia hőmérséklet atmoszferikus nyomáson

A_j : referencia hőmérséklet állandói

B_j : a folyadék hőtágulási együtthatóinak állandói

C_j : WLF konstansok atmoszferikus nyomáson

Akár az itt bemutatott, akár a tradicionális Barustól [9] vagy Roelandstól [45] származó egyenletet használjuk, nem használhatunk dimenzió nélküli nyomás és hőmérsékleti értékeket. Emiatt a tribológiában általánosan megszokott, dimenziótlan mennyiségek alkalmazása a termo-elasztohidrodinamikai számításoknál a geometriai és kinematikai jellemzők leírására korlátozódik [165]. Azonban, annak igen kicsi a valószínűsége, hogy két különböző kontaktfeladatnál ugyanazt a nyomás- és hőmérséklet-eloszlást kapjuk a dimenzió nélküli térben. Így egy adott EHD számítás mindig egy adott valós és egyedi geometriai és kinematikai jellemzőkkel rendelkező feladathoz tartozik, ezért a dimenziótlan jellemzőket nem vezetjük be a leírás során. A különböző változatok összevetéséhez szükséges jellemzők, mint például a súrlódási szám, a feladat megoldása után egyszerűen előállíthatók.

(5.3) Termodinamikai feladat

Az elasztohidrodinamikai nyomáseloszlás meghatározásához hasonlóan, a hőmérsékletmező meghatározása során is egyszerre kell foglalkozni a kenőanyagban és az érintkező testekben, illetve azok környezetében lezajló folyamatokkal. Az érintkező testekben lezajló folyamatokkal részleteiben itt nem foglalkozunk, azzal a feltételezéssel élünk, hogy a testekben kialakuló hőmérsékletmező analitikusan vagy numerikusan meghatározható a testre vonatkozó elsődleges, hőmérsékleti és másodlagos, hőátadási peremfeltételek alapján.

A kenőanyagra vonatkozó termodinamikai feladat modellezéséhez az (5.1.2.1) egyenlet következő alakja szolgál esetünkben alapegyenletként:

$$\frac{d(c_v \vartheta)}{dt} + p(\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + \frac{\Xi}{\rho} \quad (5.3.1)$$

A feladat jellegéből adódóan, a Reynolds egyenlet levezetésénél fellelhető egyszerűsítésekhez hasonlóan, [165] szerint a következő egyszerűsítést alkalmazhatjuk:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right). \quad (5.3.2)$$

Azonban ez nem jelent lényegesen könnyebbséget a megoldás során, hiszen a hőmérséklet z szerinti változását nem tudjuk kiküszöbölni. A hőmérséklet mező számításánál meg kell határozni a hőmérséklet résmenti változását is, hacsak nem alkalmazzuk azt a megközelítést, mely a keresztmetszet mentén parabolikus hőmérséklet eloszlást feltételez. Ez utóbbi esetben elegendő egy, a résmenti koordinátától („ z ”) független jellemző hőmérséklet-eloszlás (közép vagy átlaghőmérséklet) meghatározása, ha ismertek, vagy más egyenletek által meghatározottak az érintkező felületek hőmérsékletei. Mint a későbbiekben látható lesz, ennek alkalmazhatósága viszont korlátozott.

Az elasztohidrodinamikai kenési körülmények között, ahogy azt már korábban is kifejtésre került, az áramlás laminárisnak tekinthető, mivel a résméret igen kicsi, alig pár μm . Így a turbulenciát elhanyagolva, az időben átlagolt tagok tekinthetők a folyadék mozgásának leírására szolgáló jellemzőknek.

Az (5.2.13) miatt a kenőanyagban a disszipáció:

$$\Xi = \tau_{xz} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (5.3.3)$$

Tekintettel arra, hogy az u és v mező résmenti deriváltjai jóval nagyobbak, mint a w mező érintkezési síkbeli deriváltja, a disszipáció elhanyagolható hibával [41] a következő:

$$\Xi \approx \tau_{xz} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \bar{\sigma}'_z \cdot \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z}, \quad (5.3.4)$$

ahol (5.2.22) és (5.2.23) szerint:

$$\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left[(\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right] + A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt}, \quad (5.3.5)$$

$$\bar{\sigma}'_z = \frac{\tau_{eq}}{F(\tau_{eq})} \left(\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} - A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} \right). \quad (5.3.6)$$

Newtoni folyadékokra a feszültségi deviátor tenzor a következő alakra egyszerűsödik:

$$\bar{\sigma}'_z = \eta \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z}. \quad (5.3.7)$$

Így a disszipáció newtoni folyadékokra a következő alakban írható fel:

$$\Xi \approx \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = \eta \left(\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} \right)^2. \quad (5.3.8)$$

(5.3.1) *Peremfeltételek:*

A nyomásra vonatkozó peremfeltételtől eltérően a hőmérsékleti mezőre vonatkozólag peremfeltételeket kell megadni mind az érintkező felületeken (S_1, S_2), mind az olajfilm teljes keresztmetszetére a kontaktzóna határán (A_c^0).

Az S_1 és S_2 felületek felbonthatók két-két részre (S_{iQ}, S_{iG}), egyrészt előírható a hőmérsékletmezőre vonatkozó elsődleges, másrészt másodlagos, a felületeken átáramló hőt megadó peremfeltétel:

$$\vartheta(x, y, h_i) = \vartheta_{S_i} (x, y) \quad (x, y) \in S_{iG}, \quad (5.3.1.1)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n_{S_i}} = \nabla \vartheta \cdot \vec{n}_S = \frac{1}{\lambda} \bar{q}_Q(x, y) \cdot \vec{n}_S = -\frac{1}{\lambda} q_Q^{n_{S_i}}(x, y) \quad (x, y) \in S_{iQ}, \quad (5.3.1.2)$$

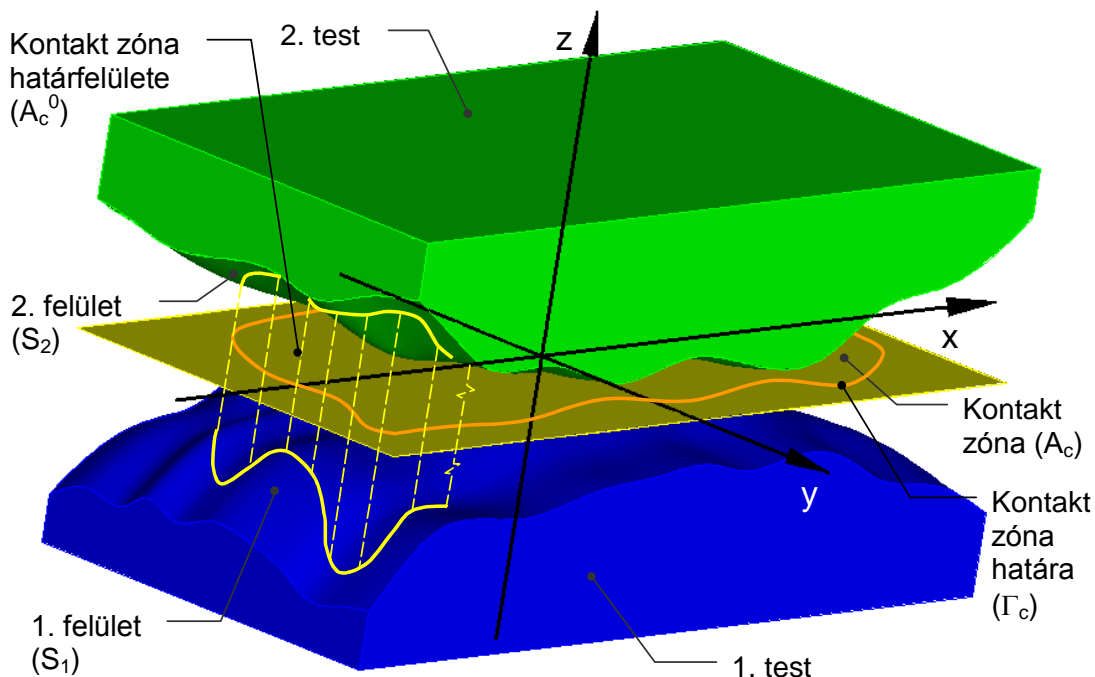
ahol $\vartheta_{S_i}(x, y)$ az S_{iG} felület hőmérséklete, míg $q_Q^{n_{S_i}}$ az S_{iQ} felületen átáramló hő, melyek vagy előre definiáltak vagy a kapcsolt (kenőanyag – kontakttest) hőtani feladat megoldása során kerülnek meghatározásra.

Tiszta csúszás esetén az egyik felülettel együtt mozog a kontakttartomány vagy másképp fogalmazva ez a felület áll a kontakttartományhoz viszonyítva. Ekkor a legtöbb esetben elhanyagolható a kontaktzónához képest álló felületen keresztül lezajló hőcsere, mivel az a kontaktzónához képest mozgó test felületén több nagyságrenddel intenzívebb. Ilyenkor a kontakttartománnyal együtt mozgó felületre alkalmazható a Rohde és Oh [78] által javasolt adiabatikus peremfeltétel is:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n_s} = \nabla \vartheta \cdot \vec{n}_s \approx \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0. \quad (5.3.1.3)$$

Ennek a felületnek az adiabatikus modellezése jelentős könnyebbséget jelent például végtelen féltérnek tekintett testek kvázistacionér vonalérintkezése esetén, mivel a kontakttartománnyal együtt mozgó test hőmérséklet-eloszlása analitikusan nem, vagy csak igen összetetten határozható meg a kezdeti tranziens szakaszon túl.

Míg a tudományterület fejlődése során, az érintkező S_1 és S_2 felületekre általánosan elfogadott peremfeltétel alakult ki (5.3.1.1) és az (5.3.1.3), addig a kenőfilm be és kilépő keresztmetszetén (A_c^0) eltérő peremfeltételekkel találkozhatunk. Gyakorlatilag minden, irodalomban fellelhető megoldásnál találunk eltérő elemeket. Ugyanakkor Huebner 1974-ben [76] már kimutatta, hogy a kenőfilm keresztmetszetén alkalmazott peremfeltétel jelentős kihatással van a számított hőmérséklet-eloszlásra.



5.11. ábra A termodinamikai feladat határai

Az legegyszerűbb eset az, amikor az A_c^0 felület belépő részén a hőmérséklet adott. Eltekintve azoktól a modellektől, ahol a keresztmetszet mentén a hőmérsékletet állandónak tekintik, az esetek jelentős csoportjában előszeretettel alkalmazzák azt a megközelítést, mely a keresztmetszet mentén parabolikus hőmérséklet eloszlást feltételez [131], [138], [154]. Ekkor a hőmérsékleti profil leírásához, a felületi hőmérsékletek meghatározása mellett, elegendő egy jellemző hőmérsékleti érték, általában a réssmenti átlaghőmérséklet (5.3.1.4), kiszámítása a hőtani feladat megoldása során.

$$\mathcal{G}_m(x, y) = \frac{1}{h_1 + h_2} \int_{-h_1}^{h_2} \mathcal{G}(x, y, z) dz . \quad (5.3.1.4)$$

Így elegendő Γ_c -n előírni az átlag hőmérsékletre vonatkozó peremfeltételeket:

- Belépésnél:

$$\mathcal{G}_m(x, y) = \mathcal{G}_{in} \quad (x, y) \in \Gamma_c , \quad (5.3.1.5)$$

ahol \mathcal{G}_{in} a belépő kenőanyag hőmérséklete.

- Kilépésnél:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_m}{\partial n_{\Gamma_c}} = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_c . \quad (5.3.1.6)$$

E megközelítés mindaddig jól alkalmazható, míg nem lép fel a belépésnél visszaáramlás (backflow / reverse flow) [165] a kenőfilm vastagsága mentén, mivel ezen esetekben egyrészt elfogadható a parabolikus résmenti hőmérséklet-eloszlást feltételező közelítés, másrészt elválasztható a belépés a kilépéstől. Megtartva a feltételezett parabolikus hőmérsékleti profilt, a visszaáramlás okozta hőtani peremfeltétel probléma kezelésére Wang, Cusano és Conry [132], [141] kidolgozott ugyan megoldást, bár ebben az esetben a résmenti hőmérsékletprofil parabolikus közelítése nem tekinthető érvényesnek [165], így a belépésnél nem elegendő csak ϑ_m -re nézve peremfeltételt megadni, hanem további megfontolások szükségesek.

Továbbá a belépő keresztmetszeten feltételezett ϑ_{in} értéke is nehezen adható meg. Egyes esetekben, mikor a felületek ciklikusan lépnek kapcsolatba, a ϑ -t a felületek által keringetett ($Q_{rec1}, \vartheta_{rec1}$ és $Q_{rec2}, \vartheta_{rec2}$) és a környezetből bekerülő (Q_L, ϑ_L) kenőanyagok mennyiségének és hőmérsékletének arányában határozzák meg [136], feltételezve, hogy a kenőanyag hőtani jellemzői állandónak tekinthetők.

$$\vartheta_{mix} = \frac{Q_{rec1} \cdot \vartheta_{rec1} + Q_{rec2} \cdot \vartheta_{rec2} + Q_L \cdot \vartheta_L}{Q_{rec1} + Q_{rec2} + Q_L} \quad (5.3.1.7)$$

Ha figyelembe vesszük a hőmérséklet résmenti változását, ϑ_{mix} nem alkalmazható közvetlenül a ϑ_m -re vonatkozó peremfeltételként, mivel eltérő az értelmezésük. ϑ_{mix} alkalmazása esetén a következő feltételt írhatjuk fel a belépő hőmérsékletre:

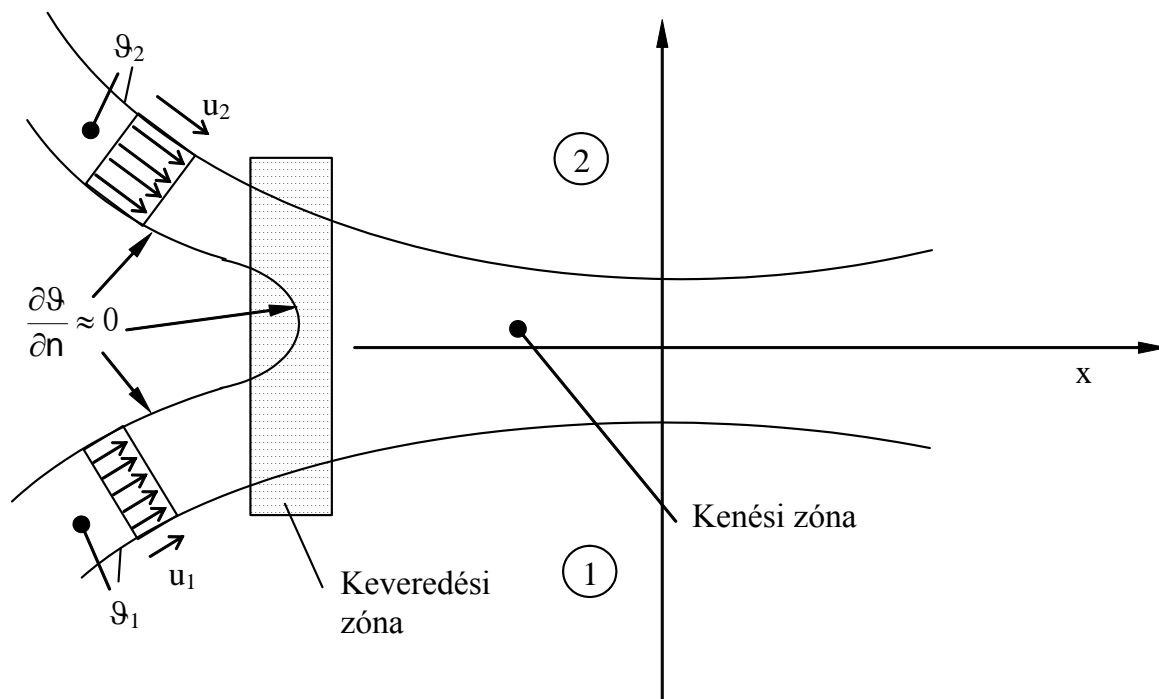
$$\vartheta_{mix}(x, y) \cdot (Q_{rec}(x, y) + Q_L(x, y)) = \int_{-h_1}^{h_2} \vartheta(x, y, z) \cdot q_m(x, y, z) \cdot dz \quad (x, y) \in \Gamma_c \quad (5.3.1.8)$$

Amennyiben [131] szerint parabolikus hőmérséklet-eloszlást tételezünk fel, akkor (5.3.1.4) és (5.3.1.8) segítségével ϑ_m meghatározható. Ez a módszer kiválóan alkalmazható siklócsapágyak elemzéséhez, amikor a kenőanyag (5.3.1.7) szerinti keveredése közvetlenül a kontaktzónába történő belépés előtt zajlik le (Γ_c -n, 5.11. ábra), így az érintkezésbe lépő felületek hőmérséklete függetlennek tekinthető a környezetből az A_c^0 -n keresztül érkező kenőanyagétól. Más a helyzet viszont, ha a kenőanyagot a felületek kvázi végtelen távolról szállítják az érintkezés helyére. Ekkor ugyanis a környezetből érkező és a szállító testek felületein (később felületek) lévő kenőanyag vegyülése a kontaktzónától távol alakul ki és mire a felület a szállított kenőanyaggal a kontaktzónához ér, a felületen keresztül már rég lezajlik a hőcsere, így a kontaktzónához közelítő kenőanyag hőmérséklete jó közelítéssel a felület hőmérsékletével egyenlő. Továbbá a felületekre tapadt kenőanyag

sebessége a kontaktzónán kívül megegyezik a szállító felület sebességével. A bemutatásra került, korábbi modellekben alkalmazott, direkt hőmérsékleti feltétel a belépésnél nem írható elő, mivel a kenőfilm szélén, az érintkező testeken lévő kenőanyag keveredése és hőcseréje folytán alakul ki a kontaktzónába lépő kenőanyag résmenti hőmérsékleteloszlása. A belépő hőmérsékleti profil semmiképpen nem írható elő önkényesen (pl. ϑ_i belépő kenőanyag hőmérséklet), mivel a belépő kenőanyag hőmérséklete az S_1 és S_2 felületeken megegyezik a testek felületi hőmérsékletével, továbbá a felületek közti hőmérséklet eloszlását a felületeken beszállított, közelítőleg felületi hőmérsékletű kenőanyagfilmek keveredése és az érintkezési síkra merőleges hőcseréje adja. A belépő hőmérsékleti profil meghatározásához tehát, a keveredési zóna (5.12. ábra) hőtani és áramlástani modellezése lenne szükséges, viszont még a felületek által szállított kenőanyagfilmek vastagsága sem határozható meg nagy biztonsággal, így ilyen számítások gyakorlati kivitelezhetősége igen valószínűtlen. Ugyanakkor itt nincs vagy elhanyagolható a disszipáció, így ebben a szakaszban, az (5.3.2) egyenletben [165] szerint alkalmazott egyszerűsítések megtehetőek. Alkalmazható közelítésnek tekinthető az, hogy a felületeken szállított kenőanyagfilm hőmérsékletének felület síkjával párhuzamos deriváltjai elhanyagolhatóan kicsik, továbbá, hogy a kenőanyag szabad, levegővel érintkező felülete jó közelítéssel adiabatikusnak tekinthető (5.12. ábra). Így a keveredési zónában is jellemzően a hőmérséklet résmenti deriváltja lesz a meghatározó. Azaz a belépés környezetében, a felületre merőleges hővezetés mellett, az áramlás irányába eső hővezetés, tekintettel a méretekre, elhanyagolható még akkor is, ha ezt a kontakttartományon belül nem tesszük meg.

Ezek alapján, amennyiben eltekintünk a kontakttartomány szélén található keveredés, Reynolds egyenlettel amúgy sem leírható, gyakorta turbulens és visszaáramlástól sem mentes zónájának modellezésétől, elasztohidrodinamikai esetekben (pont, folt vagy vonalszerű érintkezés) mind a belépésnél, mind a kilépésnél a kenőanyag teljes A_c^0 (5.11. ábra) keresztmetszetén adiabatikus peremfeltételt alkalmazhatunk, mely érvényes visszaáramlás esetén is.

$$\frac{\partial \vartheta(x, y, z)}{\partial n_{\Gamma_c}} = 0; \quad r(x, y, z) \in A_c^0. \quad (5.3.1.9)$$



5.12. ábra Hőmérsékleti peremfeltétel a belépésnél

Ehhez hasonló peremfeltétel a korábbi számítások során is megjelent [165], mivel egyéb megbízható és gyakorlatban alkalmazható peremfeltételt nem sikerült felállítani a visszaáramlás, a szállított kenőanyagfilm vastagságának és ezzel együtt a kontakttartomány kezdetének a meghatározása okozta problémák miatt. Ugyanakkor ennek helyességét nem vizsgálták, sem nem indokolták, holott a fentiek alapján belátható, hogy pont vagy folszerű érintkezésnél az A_c^0 keresztmetszet adiabatikus modellje jelenti a legmegbízhatóbb peremfeltételt, így ezekre az esetekre általánosan javasolom az alkalmazását.

(5.3.2) A kavitáció figyelembevétele

A kavitációs zónában a kenőanyag a felületekhez tapadva és sávokra esve áramlik. Ezért a termodinamikai egyenlet során is figyelembe kell venni a réskitöltöttség mértékét. Így (5.2.1.2.1) és (5.2.1.2.3)-hez hasonlóan, feltételezve, hogy a hidrodinamikai feladat során teljesül az (5.2.1.3) feltétel, az (5.3.3)-(5.3.8) szerinti disszipáció elhanyagolható hibával:

$$\mathcal{E}^* = \theta \mathcal{E}_L = \theta \mathcal{E}(\eta_L), \quad (5.3.2.1)$$

mivel a sebesség részmenti deriváltja és ebben az irányban a feszültség a kitöltési paraméter figyelembevételével a következő alakban írható fel, figyelembe véve, hogy a kontakttartományban a kiöltési paraméter értéke 1 illetve, a kavitációs zónában a nyomás változása elhanyagolhatóan kicsi:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z}\right)^* &= \frac{1}{\theta} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left[(\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \theta \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right] + A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} \approx \\
&\approx \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left[(\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right] + A \frac{d\bar{\sigma}'_z}{dt} = \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5.3.2.2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}'_z^* &= \left((\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \theta \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right) \approx \\
&\approx \theta \left((\nabla_{xy} p) \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) + \frac{(\bar{u}_{xy2} - \bar{u}_{xy1} - \bar{K}_{0,xy})}{F_0} \right) = \theta \bar{\sigma}'_z
\end{aligned} \tag{5.3.2.3}$$

tehát

$$\Xi^* \approx \bar{\sigma}'_z^* \left(\frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} \right)^* \approx \theta \bar{\sigma}'_z \frac{\partial \bar{u}_{xy}}{\partial z} = \theta \Xi \tag{5.3.2.4}$$

A hővezetési tényező és a viszkozitáshoz hasonlóan fejezhető ki a térfogat kitöltési tényezővel :

$$\lambda^* = \theta \lambda_L \tag{5.3.2.5}$$

a fajlagos hőkapacitás ugyanakkor annak fajlagos volta miatt nem változik

$$c_v^* = c_{vL} = c_v \tag{5.3.2.6}$$

Ezek alapján a hővezetés differenciálegyenlete (5.1.2.1) a következőképpen módosul:

$$\frac{d(c_v \vartheta)}{dt} + p \nabla \cdot \bar{u} = \frac{1}{\theta \rho_L} \nabla (\theta \lambda_L \cdot \nabla \vartheta) + \frac{\Xi_L}{\rho_L} \tag{5.3.2.7}$$

Amennyiben a kontinuum hőtani jellemzőit állandónak tekintjük:

$$c_v \frac{d\vartheta}{dt} + p \nabla \cdot \bar{u} = \frac{\lambda_L}{\theta \rho_L} \nabla (\theta \cdot \nabla \vartheta) + \frac{\Xi_L}{\rho_L} \tag{5.3.2.8}$$

Mivel a tömegmegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{d\rho^*}{dt} + \rho^* \nabla \cdot \bar{u} = 0 \tag{5.3.2.9}$$

ahol ρ^* az (5.2.1.2.1) szerint értelmezett.

A (5.3.2.8) hővezetési egyenletben szereplő $\text{div}(u)$ tag a következőképpen írható fel, tekintettel az (5.2.1.2.2)-ra:

$$\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt} = -\frac{\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \rho^* \cdot \bar{u}}{\rho^*} = -\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta}. \quad (5.3.2.10)$$

Ennek alapján:

$$\frac{d(c_v \vartheta)}{dt} + p \left(-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta \rho_L} \nabla(\theta \lambda_L \cdot \nabla \vartheta) + \frac{\Xi_L}{\rho_L}, \quad (5.3.2.11)$$

vagy másképp, kifejtve a szubsztanciális deriváltat:

$$\frac{\partial(c_v \vartheta)}{\partial t} + \nabla(c_v \vartheta) \cdot \bar{u} + p \left(-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta \rho_L} \nabla(\theta \lambda_L \cdot \nabla \vartheta) + \frac{\Xi_L}{\rho_L}. \quad (5.3.2.12)$$

Ahhoz, hogy a végeelem modellben szimmetrikus mátrixokat kaphassunk, szorozzuk át az egyenletet $\theta \rho_L$ -vel:

$$\theta \rho_L \left(\frac{\partial(c_v \vartheta)}{\partial t} + \nabla(c_v \vartheta) \cdot \bar{u} \right) + p \left(-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} \right) \theta \rho_L = \nabla(\theta \lambda_L \cdot \nabla \vartheta) + \theta \Xi_L. \quad (5.3.2.13)$$

A fenti egyenlet néhány alapesetben a következők szerint egyszerűsíthető.

Amennyiben a kenőanyag sűrűség állandó ($\rho_L = \text{áll}$, $d\rho_L/dt = 0$), akkor a következő tag:

$$-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta}. \quad (5.3.2.14)$$

Stacioner érintkezés esetén, az érintkezési tartomány időben állandósult:

$$-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} = -\frac{\nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta}. \quad (5.3.2.15)$$

Stacioner érintkezéskor állandó kenőanyag sűrűség mellett:

$$-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} = -\frac{\nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta}. \quad (5.3.2.16)$$

Visszatérve az eredeti (5.3.2.13) egyenletre, a $\rho_L = \rho_c$ közelítőleg állandónak tekinthető a kavitációs zónában. A kenési tartomány felett viszont a kitöltési paraméter értéke $\theta = 1$. Így a kenési zónában:

$$-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} = -\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L}, \quad (5.3.2.17)$$

míg a kavitációs zónában

$$-\frac{\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u}}{\rho_L} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u}}{\theta}. \quad (5.3.2.18)$$

Vegyük észre, hogy ρ_L csak a kenési zónában változhat, ahol $\theta = 1$, ugyanakkor θ csak a kavitációs zónában változhat, ahol viszont jó közelítéssel $\rho_L = \rho_c$.

Ezek alapján, a kitöltési paraméter segítségével levezetett új hővezetési egyenlet az alábbi:

$$\begin{aligned} \theta \rho_L \left(\frac{\partial (c_v \mathcal{G})}{\partial t} + \nabla (c_v \mathcal{G}) \cdot \bar{u} \right) + p \left(-\frac{\partial \rho_L}{\partial t} - \nabla \rho_L \cdot \bar{u} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u} \right) \rho_c \right) = \\ = \nabla (\theta \lambda_L \cdot \nabla \mathcal{G}) + \theta \mathbf{E}_L \end{aligned} \quad (5.3.2.19)$$

Állandó sűrűség és hőtani jellemzők mellett a következő egyszerűsített differenciálegyenletet kapjuk:

$$\theta \rho_L c_v \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \nabla \mathcal{G} \cdot \bar{u} \right) - p \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u} \right) \rho_L = \lambda_L \nabla (\theta \cdot \nabla \mathcal{G}) + \theta \mathbf{E}_L. \quad (5.3.2.20)$$

(5.3.3) Az érintkező testek hőmérséklete a felületükön megoszló hőforrás hatására

Mint ahogy az az (5.3.1) fejezetben látható, az érintkező testek és azok felületeinek hőmérsékletének meghatározása kiemelkedően fontos feladat a termodinamikai probléma megoldása során. Mint ahogy az az (5.3.1.1) peremfeltételből is látszik, a kontakttartományban a felületekhez tapadt kenőanyag hőmérséklete megegyezik a felület hőmérsékletével, továbbá a felületeken keresztül (5.3.3.1) szerinti hő terheli a testeket.

$$\begin{aligned} q_{s1}(x, y) &= \lambda_f \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, -h_1)}{\partial z} \\ q_{s2}(x, y) &= \lambda_f \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, h_2)}{\partial z}; \quad (x, y) \in A_c; \quad \vec{n}_s \approx \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (5.3.3.1)$$

A felületi deformáció meghatározásához hasonlóan, termoelasztohidrodinamikai problémák hőtani részének számításánál is gyakorta alkalmazható az érintkező testek félvégtelen testként való modellezése. Amennyiben ez megtehető, a testek hőmérséklet-eloszlásának meghatározásához alkalmazhatók a [36] szerinti, végtelen féltéren ([36]-ban végtelen téren) mozgó hőforrás esetére kidolgozott összefüggések.

$$\mathcal{G}_s(x, y, z) - \mathcal{G}_{0_s} = \frac{1}{2\pi} \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{q_s(\hat{x}, \hat{y})}{\rho_s c_s \kappa_s} \frac{e^{\frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_s - U_s R}{2 \cdot \kappa}}}{R} dA(\hat{x}, \hat{y}), \quad (5.3.3.2)$$

$$\begin{aligned} R^2 &= (\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2 + z^2 \\ r^2 &= (\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2, \\ U_s^2 &= \vec{u}_s \cdot \vec{u}_s \end{aligned} \quad (5.3.3.3)$$

míg vonalszerű terhelésre:

$$\mathcal{G}_{si}(x, z) - \mathcal{G}_{0_{si}} = \frac{1}{\pi} \int_{s(\hat{x})} \frac{q_{si}(\hat{x})}{\rho_{si} c_{si} \kappa_{si}} e^{\frac{U_{si}(\hat{x}-x)}{2 \cdot \kappa}} K_0 \left[\frac{U_{si} \sqrt{(\hat{x}-x)^2 + z^2}}{2 \kappa} \right] ds(\hat{x}). \quad (5.3.3.4)$$

ahol K_0 másodfajú, nullad-rendű, módosított Bessel függvény.

Amennyiben a fenti közelítés nem engedhető meg, alkalmazható a végeselemes gyakorlatban jól ismert alszerkezeti megközelítés, mely esetben az érintkező testek hőtani problémáját a kenésméleti feladat alszerkezeteként kezeljük. Kevésbé hatékony, de elvégezhető a szerkezetre és a kontakttartományra vonatkozó hőmérsékleti mező együttes meghatározása is, ha az alszerkezeti modellhez szükséges hatásmátrix előállítását nem, vagy csak nehezen megoldható.

(6.) Az alapegyenletek integrál alakja

(6.1) Variációs módszerek

Mint ahogy az már említésre került, a differenciálegyenlet vagy egyenletrendszer variációs elvekre épülő megoldása során az eredeti egyenletet vagy egyenletrendszert a vele azonos súlyozott integrál alakba alakítják át.

Az alapegyenletek variációs módszerrel differenciálegyenletről integrál alakra való átalakításának követhetősége érdekében, tekintsük át a lépéseket a következő egyszerű peremérték feladaton, annak túlzott részletezése nélkül:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = q(x) \quad 0 < x < L. \quad (6.1.1)$$

A peremfeltételek legyenek a következők:

$$u(0)=u_0, \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = Q_L. \quad (6.1.2)$$

A megoldást célszerűen választott approximáló függvények (ϕ_j) és ismeretlen állandók (c_j) lineáris kombinációjaként keresik ($\sum_j c_j \phi_j$). A c_j állandókat úgy határozzák meg, hogy az így előálló $\sum_j c_j \phi_j$ kielégítse az eredeti egyenlet integrál alakját.

A megoldást, az adott approximáló függvények (ϕ_j) mellett, az ismeretlen állandók (c_j) olyan halmazán keressük, mely a lehető legjobban kielégíti a (6.1.1) egyenletet.

$$R = -\frac{d}{dx}\left(a\sum_j c_j \frac{d\phi_j}{dx}\right) - q(x) = A\left(\sum_j c_j \phi_j\right) - q(x) \rightarrow 0. \quad (6.1.3)$$

Rendezzük a differenciál egyenletet implicit alakba, szorozzuk be egy tetszőleges "w" ún. súlyfüggvénnyel majd integráljuk a (0, L) tartomány felett

$$0 = \int_0^L w \left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) - q \right] dx. \quad (6.1.4)$$

Amennyiben a kiinduló differenciálegyenlet vagy egyenletrendszer másodrangú, előállítható a gyenge integrál alak is. Jelen esetben ez a feltétel fenn áll. Alkalmazzuk az első tagra a Green-Gauss integrál átalakítási szabályt:

$$0 = \int_0^L \left\{ w \left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) \right] - wq \right\} dx = \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L. \quad (6.1.5)$$

Az így kapott második tagnak az esetek túlnyomó részében van fizikai jelentése. Ha például a mostani kiinduló differenciálegyenletet egydimenziós hővezetési feladatnak tekintjük, akkor a második tag a végeken átáramló hőmennyiséget jelenti. Azaz:

$$Q \equiv \left(a \frac{du}{dx} \right). \quad (6.1.6)$$

Ennek felhasználásával kapjuk a következő egyenletet:

$$0 = \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L = \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - (wQ)_L + (wQ)_0. \quad (6.1.7)$$

A variációs elmélet szerint, ahol a keresett mezőre nézve direkt (elsődleges) peremfeltétel adott, ott a súlyfüggvény értéke 0. Esetünkben $w(0)=0$, mivel $u(0)$ adott.

A tartomány másik végén természetes peremfeltétel adott:

$$Q(L) = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{n_x} \Big|_{x=L} = \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_L. \quad (6.1.8)$$

Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenlet gyenge integrál alakjába (6.1.7) kapjuk azt az egyenletet, mely egyaránt tartalmazza a kiinduló egyenletet és a peremfeltételeket:

$$0 = \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(L)Q_L. \quad (6.1.9)$$

A gyenge integrál alakot minden olyan esetben elő lehet állítani, amikor a kiinduló differenciálegyenlet vagy egyenletrendszer másod- vagy magasabb rangú, még akkor is, ha nemlineáris. Ezt a módszert egyes források Rayleigh és Ritz módszerként is említik, noha Rayleigh és Ritz egy konkrét probléma variációs megoldásával foglalkozott.

Mivel a keresett u mezőt ekkor is $\sum_j c_j \phi_j$ alakban keressük és súlyfüggvénynek az approximációs függvényeket választjuk $w=\phi_j$, azt a (6.1.7) gyenge integrál alakba való behelyettesítése után kapjuk, hogy:

$$0 = \int_0^L \left(a \cdot \frac{d\phi_i}{dx} \sum_j c_j \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i q \right) dx - \phi_i(L)Q_L \quad i = 1..n; j = 1..n. \quad (6.1.10)$$

Ez az egyenlet c_j -re nézve lineáris algebrai egyenlet, melyben szimmetrikus mátrixokkal találkozhatunk, tartalmazza a peremfeltételeket, továbbá a keresett mező folytonosságára nézve kevésbé szigorú követelményeket kell kielégítenünk.

Bizonyos esetben nem állítjuk fel a gyenge integrál alakot, csak a súlyozott integrál alakot használjuk. A súlyfüggvény bármilyen tetszőlegesen választott lineárisan független függvényhalmaz lehet. Mivel a súlyozott integrál alak nem tartalmazza a peremfeltételeket, így az approximációs függvényeket úgy kell megválasztani, hogy azok kielégítsék mind a direkt, mind a természetes peremfeltételt. A módszer nagyfokú rugalmassága előnyös lehet bizonyos nemlineáris problémák megoldásánál. Általánosságban elmondható ugyanakkor, hogy a súlyozott maradék módszere szigorúbb követelményeket támaszt a közelítő mező folytonosságával szemben.

A variációs módszerekhez vagy a végeelem-módszerhez ugyan nem feltétlenül szükséges, de esetenként a gyenge integrál alak felbontható két részre. Az egyikben mind a súlyfüggvény (w) mind a keresett mező (u) szerepel ($B(w,u)$), a másikban csak a súlyfüggvény ($l(w)$). Esetünkben ez megtehető:

$$B(w,u) = \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx, \quad l(w) = \int_0^L (wq) dx - w(L)Q_L. \quad (6.1.11)-(6.1.12)$$

Ha a súlyfüggvényt a keresett mező első variációjának tekintjük, azaz $w = \delta u$, akkor az egyenlet egy másik formában is felírható:

$$B(\delta u, u) - l(\delta u) = 0. \quad (6.1.13)$$

Amennyiben $l(w)$ lineáris, $B(w,u)$ bilineáris és szimmetrikus a gyenge-integrál alak úgy is felfogható, mint a következő kvadratikus funkcionál első variációja:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \cdot B(u, u) - l(u). \quad (6.1.14)$$

Azonban ilyen funkcionál előállítás, melynek első variációja a variációs formát adja vissza, nem mindig lehetséges.

A különböző variációs elvek, mint például a Rayleigh-Ritz, Galjorkin és a hibanégyzetek módszere, az integrál alak (gyenge-integrál, súlyozott maradék), a súlyfüggvény és az approximációs függvény megválasztásában különböznek.

(6.2) A variációs elv kiválasztása

A variációs elvek közül, a Reynolds egyenlet ezen elvekre épülő megoldása során, találkozhatunk az előbb említett bilineáris formával, a gyenge integrál vagy más néven Rayleigh-Ritz módszerrel, a Petrov-Galjorkin [159], illetve a Bubnov-Galjorkin módszerrel [102]. Az irodalomban viszont nem sikerült fellelni olyan megoldást, melyben vagy a hibanégyzetek módszere vagy akár a kollokációs módszer szerepelne.

A gyenge integrál alakra épülő megoldások közkedveltsége érthető, hiszen hidrodinamikai feladatok megoldása során előnyös, hogy kevésbé szigorú követelményeket szab meg a folytonosságra nézve, így pl. a nyomásra nézve csak első fokú deriváltakat tartalmaz. Az alkalmazott módszerek közül a bilineáris forma csak hidrodinamikai feladatok megoldására alkalmas. Ekkor létezik olyan funkcionál, melynek minimuma a megoldás. Ez Reynolds egyenlet végeselem módszerrel való korai megoldásai során is már gyakorta használt módszer. Ezen eljárás mindaddig használható, míg legalább az iterációs ciklusokon állandó a résméret és a viszkozitás. A Reynolds egyenlet gyenge integrál alakja elasztohidrodinamikai esetben is előállítható. Mivel a megoldás során a bilineáris forma esetén sem a közvetlen minimumkereső eljárásokat használják, hanem az első deriváltak eltűnését vizsgálják, a megoldandó egyenletrendszer hasonló. Sajnos ennek következtében sokszor olyankor is funkcionálról beszélnek, és ennek minimumát keresik, amikor az bilineáris módon nem írható fel.

Az elasztohidrodinamikai feladatok megoldása során szinte kivétel nélkül a gyenge integrálokra épülő variációs elv kerül alkalmazásra, viszont sok esetben Galjorkin módszerként kerül említésre, noha a gyenge integrál alak felállítása nem szerves része semelyik Galjorkin módszernek sem. A megszokottól eltérő megoldással találkozhatunk mind Allaire és társai [102], mind Pahud [159] munkájában, ahol a Bubnov-Galjorkin, illetve a Petrov-Galjorkin variációs elv kerül felhasználásra a gyenge integrál alak nélkül. Pahud [159] munkájának a különlegessége az, hogy felhívja a figyelmet a Streamline-Upwind/Petrov-Galjorkin módszer alkalmazásának előnyeire az energia egyenlet oszcillációjának elkerülése érdekében. Azonban kipróbáltsága miatt mind a kenéselmélet, mind a p-verziós végeselem módszer területén, továbbá a kedvező tapasztalatok miatt, jelen megoldás során is a gyenge integrál alakot használjuk majd.

(6.3) A mezők approximációja és a geometria leképzése

Ahogy azt korábban kifejtettük, a variációelméletre épülő megoldások során, az ismeretlen mezőket célszerűen vállaszott approximáló függvények (ϕ) és ismeretlen állandók (c_j) lineáris kombinációjaként keresik ($\sum_j c_j \phi_j$). A c_j paramétereket úgy határozzák meg, hogy kielégítse az eredeti egyenlet integrál alakját. A végeselemes gyakorlatot követve, az alakfüggvények oszlopvektorát \mathbf{N} -nel fogjuk jelölni. Az approximációs függvényként több függvénycsoport is alkalmazható. Azonban általában a vizsgált tartomány teljes egésze feletti mezők közelítéséhez egyik sem nyújt kielégítő megoldást. Courant [21] és Turner [30] voltak azok, akik elsőként alkalmazták a tartomány részekre, elemekre bontását és a mezők elemenkénti approximációját (egy approximáló függvény csak az egész tartomány egy meghatározott része fölött működik, azon kívül 0 értéket vesz fel), lehetővé téve ezzel összetett geometriájú és terhelésű testek modellezését. Az elemek feletti approximáló függvények kezdetben lineárisak voltak, majd később Ergatoudis, Irons és Zienkiewicz 1968-ban [60] a Lagrange polinomokat alkalmazta kvadratikus elemeinek felépítéséhez. A Lagrange polinomok hátránya viszont, hogy a magasabb fokú approximációk nem épülnek hierarchikusan az alacsonyabbakra. Erre megoldásként Szabó, Babuska és Katz javasolta [96] a Legendre polinomokat használatát az elemek feletti közelítés felépítéséhez, megteremtve ezzel a p-verziós végeselem módszer alapjait. Az approximáció felépítésének alapos részletezése megtalálható Szabó és Babuska [137], illetve Páczelt [168] könyvében, így azt itt nem ismertetem.

Kenéselméleti vonatkozásban eddig egyedül Nguyen tett közé Lagrange és hierarchikus, de nem Legendre típusú polinomikus approximációra vegyesen épülő megoldást 1991-ben [129]. Nguyen csak egyszerű szűkülő rés és lépcsős saru esetén határozta meg a nyomáseloszlást, és a felületeket tökéletesen merevnek tekintette. Eredményeiből azonban látható, hogy a hálósűrűség nagyságrendekkel kisebb lehet. Például ha a nyomás közelítésére 5-öd, 6-od fokú polinomikus közelítést alkalmazunk egyenletesen szűkülő résnél, egyetlen elem felvétele elégséges. Noha a Lagrange típusú elemek megfelelőek a tartomány geometriájának leírására, Legendre típusú hierarchikus elemek itt is alkalmazhatóak. Különösen kívánatos ez akkor, ha az elasztohidrodinamikai problémáknál a résméretnek a felületek deformációjából származó változásának

számítását is hierarchikus elemekre épülő p-verziós végelem módszerrel kívánjuk elvégezni. Így ebben az értekezésben az ismeretlen mezők és a geometria egyaránt Legendre típusú hierarchikus polinomok segítségével kerül leírásra. A p-verziós végelem módszer lehetőségeivel élve, a különböző mezők approximációja független lesz egymástól.

A Legendre típusú elemek esetén az alakfüggvényeket a következők szerint lehet csoportosítani:

- Csomóponti függvények, melyek a tartományt felosztó háló egy csomópontjában 1 értéket vesznek fel, a többiben pedig 0-t, a tartományon pedig lineárisan változnak:

$${}^{\circ}N_i.$$

- Az élfüggvények, melyek maximumukat egy adott élen érik el, míg a többin értékük 0

$$\tilde{N}_i^e.$$

- Felületi vagy oldal függvények, melyek az éleken és a csomópontokban nem vesznek értéket.

$$\hat{N}_i^s.$$

- Illetve a térfogati belső buborékfüggvények, melyek csak az elem belsejében vesznek fel értéket

$$\tilde{N}_i^v.$$

Ezekből felépítve az approximációs függvények vektorát kapjuk, hogy 3D elemre:

$$\mathbf{N}^T = [{}^{\circ}\mathbf{N}^T, \tilde{\mathbf{N}}^T, \hat{\mathbf{N}}^T, \tilde{\mathbf{N}}^T]. \quad (6.3.1)$$

2D illetve héj elemre:

$$\mathbf{N}^T = [{}^{\circ}\mathbf{N}^T, \tilde{\mathbf{N}}^T, \hat{\mathbf{N}}^T]. \quad (6.3.2)$$

Míg rúd elemre:

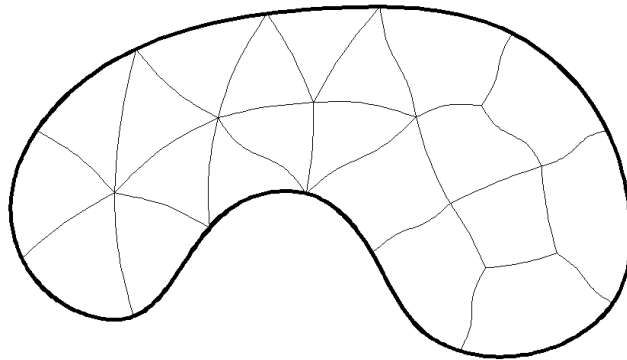
$$\mathbf{N}^T = [{}^{\circ}\mathbf{N}^T, \tilde{\mathbf{N}}^T]. \quad (6.3.3)$$

A hierarchikus elemfelépítésből következően a magasabb fokú közelítés tartalmazza az alacsonyabbat teljes egészében, így az approximáció fokszámának növelése egy újabb, magasabb fokú tag behozatalával megoldható, a korábbiak megtartása mellett, mindenfajta transzformáció nélkül.

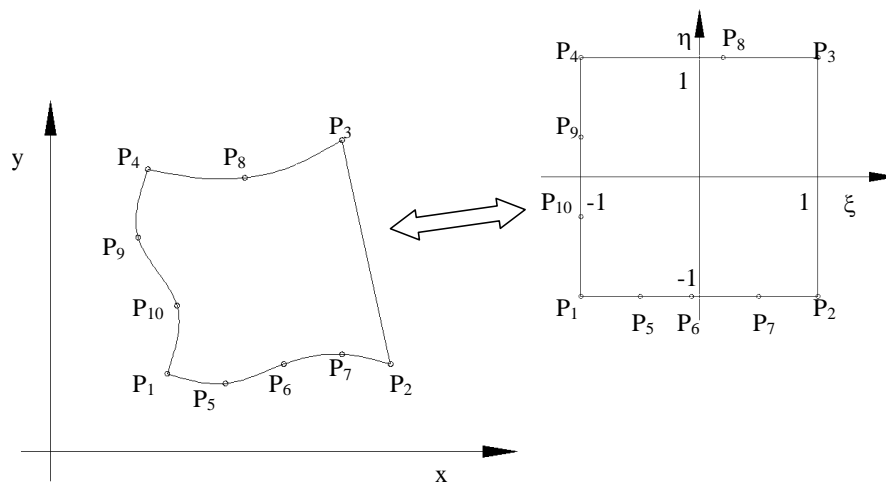
Akkor, ha egy elemnek nincsenek belső függvényei, serendipity elemekről beszélünk.

(6.3.1) A vizsgált tartomány leképezése

A variációs módszereknél a differenciál egyenletek integrál alakjával dolgozunk, mely során értelemszerűen integrálni kell bizonyos mennyiségeket a vizsgált tartomány felett. Ezt az integrálást legtöbbször numerikusan, Gauss integrálás segítségével végezzük el. A végeelem módszer alkalmazásához az integrálási tartományt egy adott elemtípusra jellemző alakzatokra kell felosztani, majd a numerikus integrálás számára, konform transzformáció segítségével egységesített alakra kell leképezni:



6.1. ábra Tartomány felosztása



6.2. ábra Elem leképezése

Szokványos leírási módot követve a kontakttartomány:

$$x(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_i X^i(t) N_x^i(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_x^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}(t), \quad (6.3.1.1)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_j Y^j(t) N_y^j(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_y^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{Y}(t). \quad (6.3.1.2)$$

A termodinamikai feladat miatt szükségünk van a z koordináta leképezésére is:

$$z(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_k Z^k(t) N_z^k(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_z^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{Z}(t). \quad (6.3.1.3)$$

(6.3.1.1) Az elem geometriájának Legendre alapú approximációja

Ahhoz, hogy az adott tartomány egy tetszőleges geometriájú elemét le tudjuk képezni, szükség van az elem határoló felületeinek és ezzel együtt az élgörbéinek leképezésére. Egy oldal és az ehhez tartozó élek leképezésére több út lehetséges. Ezek Páczelt [168] szerint:

1. Az oldalt sarok, valamint él és oldal közbülső csomópontok segítségével Lagrange féle approximációval közelítjük.

Ez az út viszonylag egyszerűen járható és a másodfokú közelítéseknel általánosan elterjedtnek is mondható. Ugyanakkor az eljárás számos hátránnyal rendelkezik:

- Nem hierarchikus
- A közbülső csomópontok nem jelölhetők ki tetszőleges helyen, ugyanis a Lagrange leképezés könnyen szinguláris vagy nonkonform elemhez vezethet (oldalnegyedelő pontban megadott csomópont problémája)
- p-VEM esetén kétfajta approximációs függvénnyel kell dolgoznunk

2. Amennyiben rendelkezésre áll az oldalfelület parametrikus egyenlete, akkor ezek felhasználásával is leírható a geometria, azonban ekkor is kétfajta approximációval kellene dolgozni.

3. Ha az oldalfelület egyenlete vagy pontjai az (x,y,z) koordináta rendszerben van megadva, akkor a Legendre-féle approximáció a közelített és közelítő oldalfelület közti távolságvektorra vonatkozó legkisebb négyzetek módszerével is illeszthető az adott geometriai információkhoz. A módszer kétségtelen előnye, hogy csak tisztán Legendre-féle függvényekkel kell dolgozni. Ugyanakkor nehézséget jelent a két felület közti távolság meghatározása.

A mérnöki felületek áttekintésével azt tapasztalhatjuk, hogy azok szinte kivétel nélkül közelíthetők úgynevezett „serendipity” elemekkel, melyek esetén nem alkalmazunk oldalakon belüli buborékfüggvényeket, csak az éleket adó térgörbét kell közelíteni. A foltyszerű kontakttartomány esetében ez szintén elegendő. A térgörbék koordinátáinak egyenletei előállíthatók az ívhossz függvényében:

$$\begin{aligned} x &= x(s) = x_0 + \Delta x(s) \\ y &= y(s) = y_0 + \Delta y(s) \\ z &= z(s) = z_0 + \Delta z(s) \end{aligned} \quad s = 0..l . \quad (6.3.1.1.1)$$

Annak érdekében, hogy a Gauss pontok minél egyenletesebben helyezkedjenek el, legyen az adott élen a leképzéshez használt szabad változó (pl. az „ η ”) és az ívhossz közti kapcsolat lineáris. Ekkor:

$$s = \frac{1+\eta}{2}l \quad \eta = -1..1. \quad (6.3.1.1.2)$$

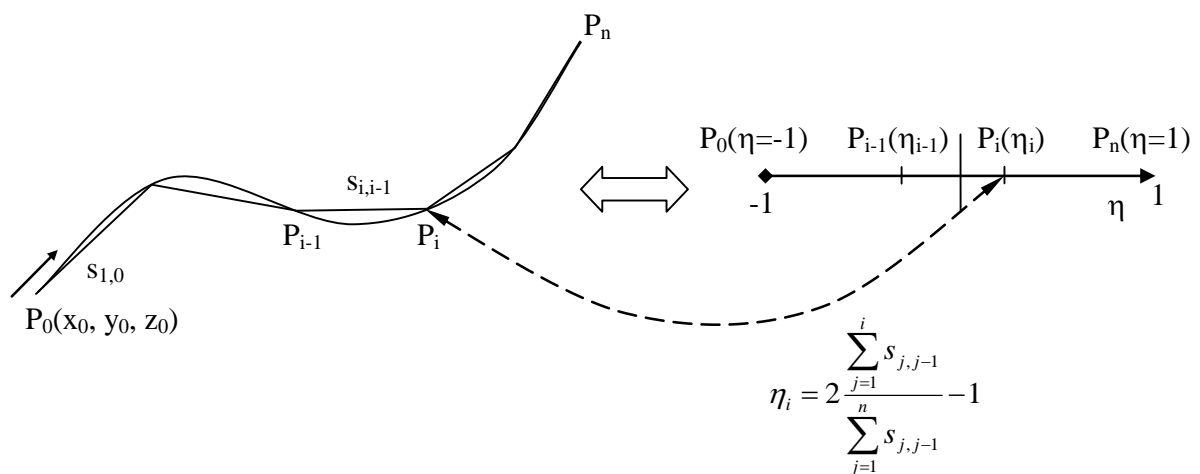
Ennek segítségével például az adott görbe és az approximáció x koordinátája közti különbség:

$$d_x = x\left(\frac{1+\eta}{2}l\right) - \left(\frac{1-\eta}{2}x_0 + \frac{1+\eta}{2}x(l)\right) - \tilde{\mathbf{N}}^T(\eta)\tilde{\mathbf{X}}. \quad (6.3.1.1.3)$$

Melyből az oldal közbülső X_i paraméterek a legkisebb négyzetek módszerével meghatározható, csakúgy, mint az Y_i és a Z_i paraméterek.

Az ívhossz és az „ η ” közti kapcsolat nem csak lineáris lehet. A kapcsolat alkalmas megválasztásával előállíthatók szinguláris és félvégtelen elemek is.

A fenti eljárás akkor is járható, ha az oldalgörbének csak a közbülső pontjai az ismertek. Ekkor az ívhosszt a görbét leíró pontokon keresztül vezetett egyenes láncolattal közelíthetjük.



6.3. ábra Görbe vonal pontjainak leképzése

Ez alapján az i -dik ponthoz tartozó „ η ” érték a következők alapján számítható:

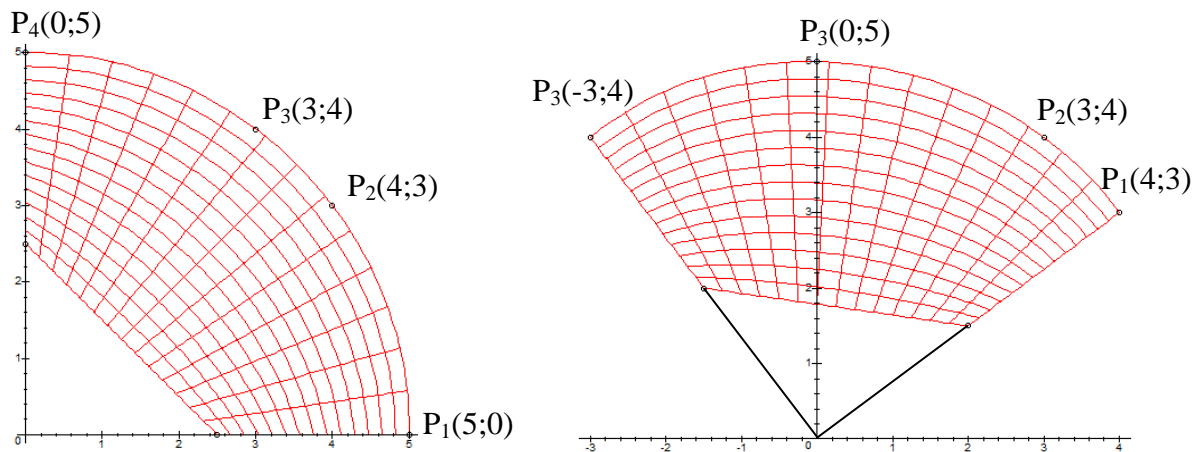
$$\eta_i = 2 \frac{\sum_{j=1}^i s_{j,j-1}}{\sum_{j=1}^n s_{j,j-1}} - 1. \quad (6.3.1.1.4)$$

Melynek segítségével az i -dik ponttól való eltérés x -ben:

$$d_x^i = x_i - \left(\frac{1-\eta_i}{2} x_0 + \frac{1+\eta_i}{2} x_n \right) - \tilde{\mathbf{N}}^T(\eta_i) \tilde{\mathbf{X}}. \quad (6.3.1.1.5)$$

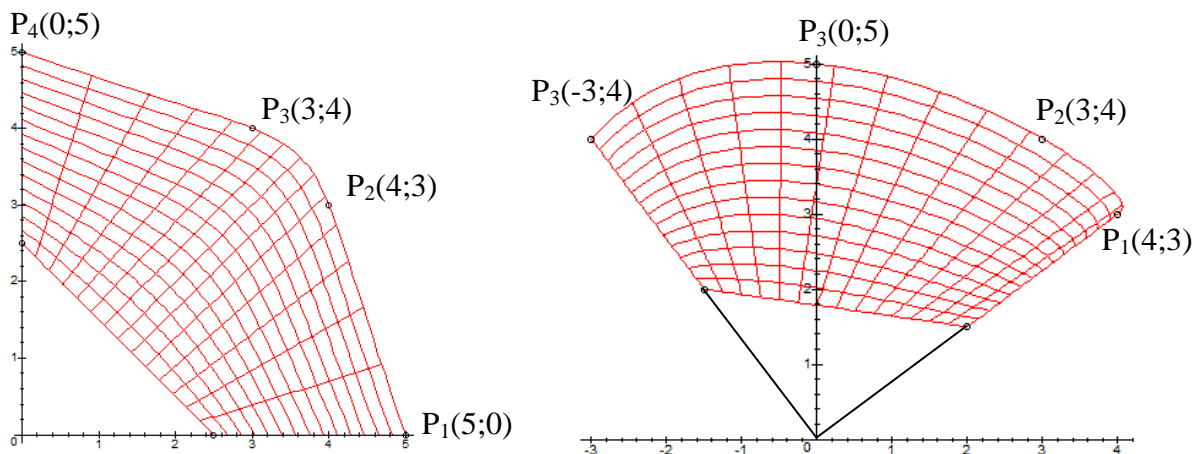
A geometriai paraméterek értelemszerűen ebben az esetben is legkisebb négyzetek segítségével meghatározhatók, vagy interpoláció esetén az előálló egyenletrendszer megoldható.

A leképezés hatékonyságának és pontosságának bemutatására egy 5 egység sugarú 90° -os körcikk 4 pontját adom meg kétféleképpen, melynek csúcsából hiányzik egy $2,5 \times 2,5$ egység oldalú derékszögű háromszög. Az általam javasolt geometriai leképezéssel kapott elemeket a 6.4 ábra mutatja.



6.4. ábra Pontokkal leírt negyed körcikk új geometriai leképezésével kapott elemek

Ugyanez a leképezés megvalósítható harmadfokú Lagrange interpolációra épülő elemekkel, mely a 6.5 ábrán látható.

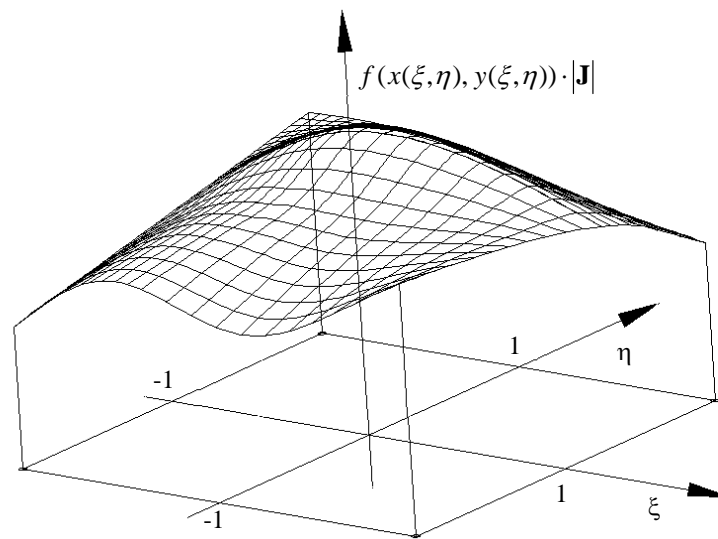


6.5. ábra Hagyományos Lagrange geometriai leképezésével kapott elemek

Egyértelműen megállapítható, hogy míg a hagyományos Lagrange interpoláció esetén az elem alakját jelentősen befolyásolja az oldalpontok elhelyezkedése, addig a javasolt leképezésnél az elem alakjára ennek nincs jelentős befolyása.

Az elem alakja mellett a leképezés akkor jó, ha annak eredeti célját, azaz az elem feletti integrálhatóságot a lehető legpontosabban biztosítani tudja. Az integrálást a következő szokásos átalakítással (6.6 ábra) végezzük el, ahol \mathbf{J} a Jakobi mátrix:

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta. \quad (6.3.1.1.6)$$



6.6. ábra Integrandusz a leképezést követően

Az integrálás pontosságának vizsgálatához válasszuk az $f(x, y) = 1$ függvényt, azaz az elem területét határozzuk meg. A körcikk területét analitikusan is meg tudjuk határozni:

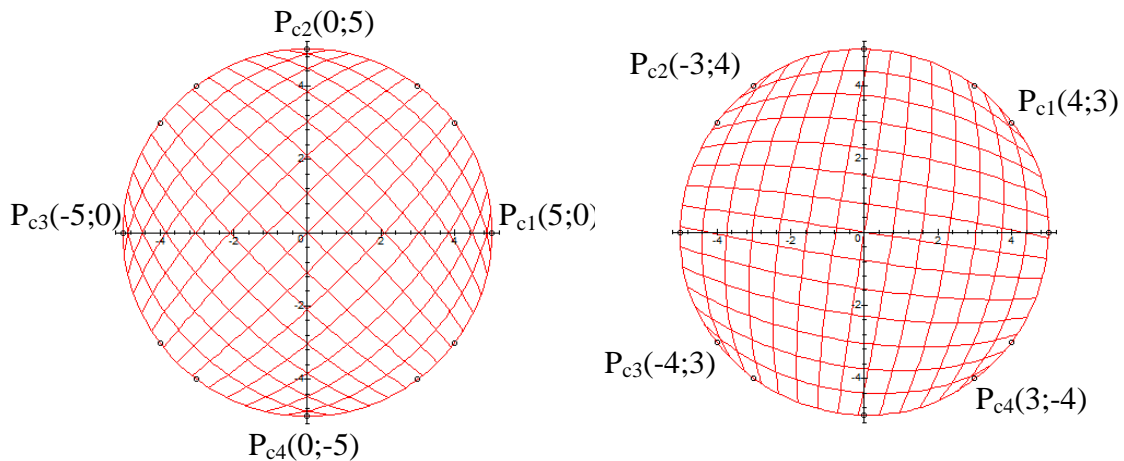
$$A_{\text{körcikk}} = \frac{5^2 \cdot \pi}{4} - \frac{2,5^2}{2} = 16.50995409. \quad (6.3.1.1.7)$$

A numerikus integrálást mind a négy leképezés esetén elvégezve és összehasonlítva az analitikus megoldással a következő eredményt kapjuk:

Leképezés	Hagyományos Lagrange		Új Legendre	
	a)	b)	a)	b)
Pontok				
Terület	15.52500001	16.72500001	16.54150010	16.54253596
Hiba (%)	-5.965819618	1.302522822	0.191072669	0.197346824

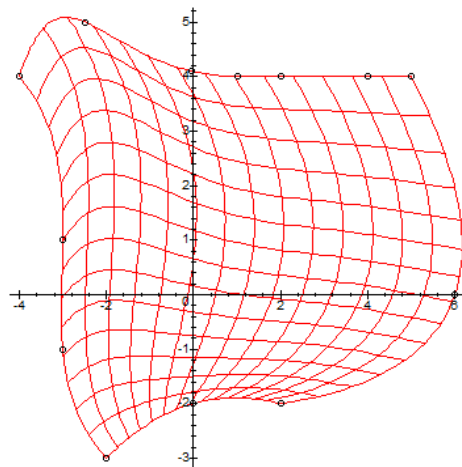
A területszámítások eredményeit összehasonlítva is látható, hogy míg a hagyományos Lagrange interpolációnál a hiba erősen függ a pontok elhelyezésétől, addig az új Legendre függvényekre alapuló leképezésnél a hiba nemcsak, hogy jó közelítéssel azonos, de egy nagyságrenddel kisebb is.

Bár gyakorlati haszna mérséklet, de az új leképezéssel megtehető nemcsak egy körcikk, de egész kör leképezése is 0,16-0,17% pontossággal (6.7 ábra).



6.7. ábra Teljes kör leképezése különböző oldalkiosztás esetén

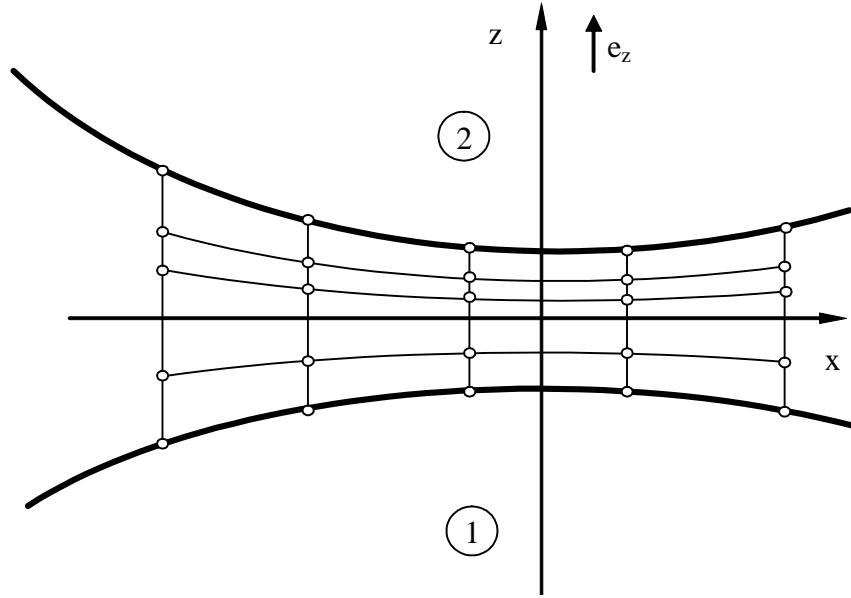
Az így leírt geometriai közelítés egyszerűen elvégezhető, csak Legendre függvényekre támaszkodik. Az oldal mentén bárhol szabadon megadhatók közbenső pontok, nem kell törekedni a közbensőpontok egyenletes elosztására, továbbá a Lagrange interpolációra épülő megoldáshoz képest sokkal pontosabb eredmények érhetők el. Akár a 6.8 ábrán látható szabad formájú elemek is leképezhetők.



6.8. ábra Pontokkal megadott szabadformájú elem az új leképezéssel

(6.3.1.2) Kontakttartomány és a résméret leképzése

Tételezzük fel, hogy az A_c kontakt "középfelület" felosztását, az A_c normálisával vetítjük rá a két test kontaktfelületére. A két kontaktfelület között n_h részre osztjuk a rést, de nem feltétlenül egyenközűen.



6.9. ábra Rész felosztása elemekre

Az elemek rés menti élei, oldalai párhuzamosak a z koordinátatengellyel, így a kontaktfelülethez kötött globális koordináta-rendszer e_z és az elemhez kötött koordináta-rendszer e_ζ egységvektorai egy irányba esnek. Ennek következtében az x és y koordináták nem függvényei a ζ -nak, továbbá z leképzéséhez lineáris alakfüggvények elegendők:

$$x(\xi, \eta, t) = \sum_i X^i(t) N_x^i(\xi, \eta) = \mathbf{N}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{X}(t), \quad (6.3.1.3)$$

$$y(\xi, \eta, t) = \sum_j Y^j(t) N_y^j(\xi, \eta) = \mathbf{N}_y^T(\xi, \eta) \mathbf{Y}(t). \quad (6.3.1.4)$$

A termodinamikai feladat miatt szükségünk van a z koordináta leképzésére is:

$$z(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_k Z^k(t) N_z^k(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_z^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{Z}(t). \quad (6.3.1.5)$$

Mivel z ζ -ban lineáris:

$$\mathbf{N}_z^T(\xi, \eta, \zeta) = \left[\mathbf{N}_z^T(\xi, \eta) \left(\frac{1-\zeta}{2} \right), \mathbf{N}_z^T(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) \right]. \quad (6.3.1.6)$$

A feladat megoldás szempontjából célszerű a kezdeti geometriát is a következő alakban, alakfüggvényeken keresztül közelíteni:

$$h_{g_i}(\xi, \zeta, t) = \sum_j H_{g_i}^j(t) N_{h_g}^j(\xi, \zeta) = \mathbf{N}_{h_g}^T(\xi, \zeta) \mathbf{H}_{g_i}(t). \quad (6.3.1.7)$$

Míg a deformációkat is tartalmazó geometria:

$$h_i(\xi, \zeta, t) = \sum_j H_i^j(t) N_h^j(\xi, \zeta) = \mathbf{N}_h^T(\xi, \zeta) \mathbf{H}_i(t). \quad (6.3.1.8)$$

Értelemszerűen vonalérintkezésre a fenti közelítések a következőképpen alakulnak:

$$x(\xi, t) = \sum_i X^i(t) N_x^i(\xi) = \mathbf{N}_x^T(\xi) \mathbf{X}(t), \quad (6.3.1.9)$$

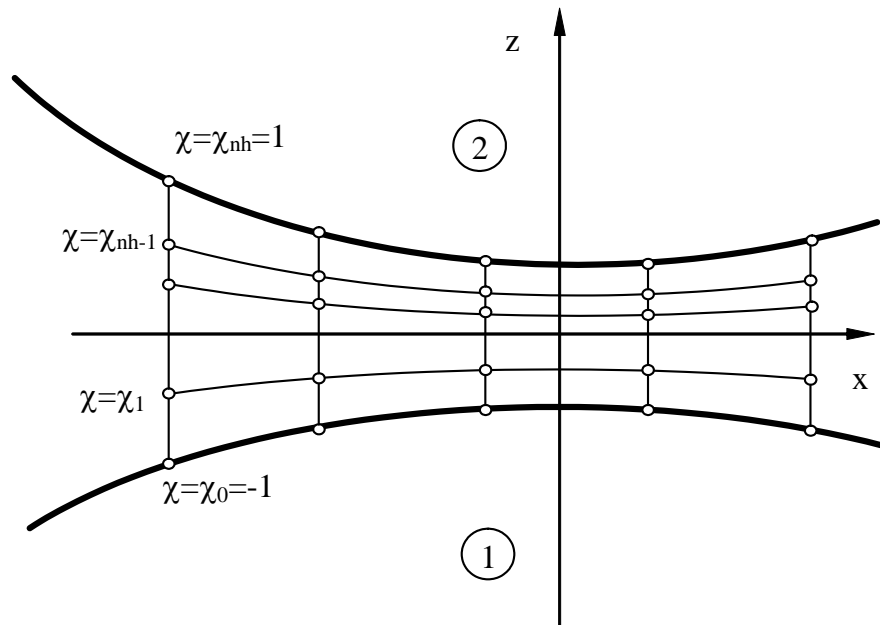
$$z(\xi, \zeta, t) = \sum_k Y^k(t) N_z^k(\xi, \zeta) = \mathbf{N}_z^T(\xi, \zeta) \mathbf{Z}(t), \quad (6.3.1.10)$$

$$h_{g_i}(\xi, t) = \sum_j H_{g_i}^j(t) N_{h_g}^j(\xi) = \mathbf{N}_{h_g}^T(\xi) \mathbf{H}_{g_i}(t), \quad (6.3.1.11)$$

$$h_i(\xi, t) = \sum_j H_i^j(t) N_h^j(\xi) = \mathbf{N}_h^T(\xi) \mathbf{H}_i(t). \quad (6.3.1.12)$$

Mivel a résméretet n_h részre osztjuk, célszerű a z és h_i mezőknél ugyanazt az approximációt használni. Vezessünk be a χ résmenti dimenziótlan koordinátát a következők szerint:

$$\begin{aligned} z = -h_1 & & \chi = -1 \\ z = h_2 & & \chi = 1 \\ \bar{e}_\chi \cdot \bar{e}_z = 1 & & \text{illetve } \bar{e}_\chi \cdot \bar{e}_\zeta = 1 \end{aligned} \quad (6.3.1.13)$$



6.10. ábra Résvastagság felosztásának definiálása

Ennek segítségével:

$$z = -h_1 \left(\frac{1-\chi}{2} \right) + h_2 \left(\frac{1+\chi}{2} \right) , \quad (6.3.1.14)$$

$$z = -\left(\frac{1-\chi}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_2 . \quad (6.3.1.15)$$

Így az i -dik sorban lévő elemekre:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{N}_z^T \mathbf{Z} = & \left(-\left(\frac{1-\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_2 \right) \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) + \\ & + \left(-\left(\frac{1-\chi_i}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_i}{2} \right) \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_2 \right) \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) . \end{aligned} \quad (6.3.1.16)$$

Mely rendezése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} z = \mathbf{N}_z^T \mathbf{Z} = \mathbf{N}_h^T & \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) \left(-\left(\frac{1-\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) + \\ & + \mathbf{N}_h^T \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) \left(-\left(\frac{1-\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) = \\ = & \left[\mathbf{N}_h^T \left(\frac{1-\zeta}{2} \right), \mathbf{N}_h^T \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) \right] \begin{bmatrix} \left(-\left(\frac{1-\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) \\ \left(-\left(\frac{1-\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3.1.17)$$

Tehát az i -dik sorban lévő elemre a \mathbf{Z} paraméter a következőképpen számítható az osztásköz és a résméret paramétereinek ismeretében:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \left(-\left(\frac{1-\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_{i-1}}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) \\ \left(-\left(\frac{1-\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_1 + \left(\frac{1+\chi_i}{2} \right) \mathbf{H}_2 \right) \end{bmatrix} . \quad (6.3.1.18)$$

Mivel a z koordináta leképezése χ -nek és ζ -nek lineáris függvénye, valamint az x és y nem függvénye se χ -nek, se ζ -nek, továbbá $\partial z / \partial \xi \ll \partial z / \partial \zeta$ és $\partial z / \partial \eta \ll \partial z / \partial \zeta$, így a résvastagság menti integrálok a következő alakban határozhatóak meg:

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} f(z) dz = & \frac{(h_1 + h_2)}{2} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{\chi_i - \chi_{i-1}}{2} \right) \int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i} f(\chi) d\chi = \frac{(h_1 + h_2)}{2} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{\chi_i - \chi_{i-1}}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \\ = & \mathbf{N}_h^T \frac{(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)}{2} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{\chi_i - \chi_{i-1}}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.3.1.19)$$

Az A_c érintkezési tartomány feletti integrálások (6.3.1.1.6) szerint, a rés menti integrálásoktól függetlenül elvégezhetőek a η - ξ síkra leképzett tartomány felett.

(6.3.2) Az ismeretlen mezők approximációja

A variációs elvek felhasználásakor elsődleges feladat, hogy meghatározzuk, hogy mely egyenletből, melyik mezőt kívánjuk meghatározni, annak variációja által. Jelen esetben 6 ismeretlen mező; a p nyomás, a ϑ hőmérséklet és a 2 felületi nyomás és hőmérsékletkülönbség okozta δ_{p_i} , $\delta_{\Delta\vartheta_i}$ ($i=1,2$) elmozdulások, valamint a 2 test $\Delta_{rigid,i}$ ($i=1,2$) merevtest szerű elmozdulásának meghatározására törekszünk.

Az ismeretlen nyomást, alakváltozási és hőmérsékleti mezőt alakfüggvények és állandók lineáris kombinációjaként keressük, mely folszerű érintkezésnél:

$$p(\xi, \eta, t) = \sum_j P^j(t) N_p^j(\xi, \eta) = \mathbf{N}_p^T(\xi, \eta) \mathbf{P}(t), \quad (6.3.2.1)$$

$$\delta_{p_i}(\xi, \eta, t) = \sum_j H_{\delta_{p_i}}^j(t) N_{h_p}^j(\xi, \eta) = \mathbf{N}_{h_p}^T(\xi, \eta) \mathbf{H}_{\delta_{p_i}}(t), \quad (6.3.2.2)$$

$$\delta_{\Delta\vartheta_i}(\xi, \eta, t) = \sum_j H_{\delta_{\Delta\vartheta_i}}^j(t) N_{h_{\Delta\vartheta}}^j(\xi, \eta) = \mathbf{N}_{h_{\Delta\vartheta}}^T(\xi, \eta) \mathbf{H}_{\delta_{\Delta\vartheta_i}}(t), \quad (6.3.2.3)$$

$$\vartheta(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_j T^j(t) N_\vartheta^j(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_\vartheta^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{T}(t), \quad (6.3.2.4)$$

míg vonalszerű érintkezés esetén:

$$p(\xi, t) = \sum_j P^j(t) N_p^j(\xi) = \mathbf{N}_p^T(\xi) \mathbf{P}(t), \quad (6.3.2.5)$$

$$\delta_{p_i}(\xi, t) = \sum_j H_{\delta_{p_i}}^j(t) N_{h_p}^j(\xi) = \mathbf{N}_{h_p}^T(\xi) \mathbf{H}_{\delta_{p_i}}(t), \quad (6.3.2.6)$$

$$\delta_{\Delta\vartheta_i}(\xi, t) = \sum_j H_{\delta_{\Delta\vartheta_i}}^j(t) N_{h_{\Delta\vartheta}}^j(\xi) = \mathbf{N}_{h_{\Delta\vartheta}}^T(\xi) \mathbf{H}_{\delta_{\Delta\vartheta_i}}(t), \quad (6.3.2.7)$$

$$\vartheta(\xi, \zeta, t) = \sum_j T^j(t) N_\vartheta^j(\xi, \zeta) = \mathbf{N}_\vartheta^T(\xi, \zeta) \mathbf{T}(t). \quad (6.3.2.8)$$

A merev testszerű ($\Delta_{rigid,i}(t)$) elmozduláshoz nem szükséges alakfüggvény, hiszen az egy testhez kötött jellemző.

A geometria és az elmozdulások leírásánál nem feltétlenül szükséges, de célszerű ugyanazt az alakfüggvény típust használni, mert (5.2.2.1) szerint az alakváltozott félrész:

$$h_i = h_{g_i} + \Delta_{rigid,i} + \delta_{p_i} + \delta_{\Delta\vartheta_i}. \quad (6.3.2.9)$$

A hierarchikus elemfelépítés miatt nem okoz gondot, ha a geometria és az alakváltozások approximációjának fokszáma nem egyezik meg. Ebben az esetben a legmagasabb és legteljesebb alakfüggvényhalmazt kell venni, mely tartalmazza a geometria és az alakváltozások approximációjánál felhasznált alakfüggvények mindegyikét. Ezt a továbbiakban egyszerűen \mathbf{N}_h -val jelöljük és mind a geometria, és mind az alakváltozások approximációját jelöli. Ennek alakjára könnyedén transzformálhatók a geometriai és az alakváltozási paraméterek is, hiszen a feladat

csak annyi, hogy az adott approximációnál nem használt alakfüggvény paramétereit 0-ra kell felvenni.

A fenti (6.3.2.9) egyenlet így a következő formában is felírható:

$$h_i = \left[\mathbf{N}_{h_g}^T, \mathbf{1} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{g_i} + \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} + \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_i}} \\ \Delta_{rigid_i} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_h^T \mathbf{H}_i, \quad (6.3.2.10)$$

$$\begin{aligned} h = h_1 + h_2 &= \left[\mathbf{N}_{h_g}^T, \mathbf{1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{g_1} + \mathbf{H}_{g_2} + \mathbf{H}_{\delta_{p_1}} + \mathbf{H}_{\delta_{p_2}} + \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_1}} + \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_2}} \\ \Delta_{rigid_1} + \Delta_{rigid_2} \end{bmatrix} = \\ &= \left[\mathbf{N}_{h_g}^T, \mathbf{1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_{\delta_p} + \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g}} \\ \Delta_{rigid} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_h^T (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) = \mathbf{N}_h^T \mathbf{H} \end{aligned} \quad (6.3.2.11)$$

(6.4) Az alapegyenletek

A felsorolt mezők és ismeretlenek meghatározására 8 egyenlet áll rendelkezésünkre. Ezek az alábbiak:

1. Az érintkezés geometriájára, illetve alakváltozására vonatkozóan (5.2.2.3), (5.2.2.4) egyenletek:

$$L_{p_i}(p(x, y), \delta_{p_i}(x, y)) = 0 \quad i = 1, 2, \quad (6.4.1)$$

$$L_{\Delta g_i}(\Delta g_{s_i}(x, y), \delta_{\Delta g_i}(x, y)) = 0 \quad i = 1, 2. \quad (6.4.2)$$

2. A terhelési és kinematikai előírások lehetnek például a következők szerint:

$$F_w = \int_{A_c} p \cdot dA, F_w: \text{összeszorító erő} \quad (6.4.3)$$

$$\Delta_{rigid_1} = 0. \quad (6.4.4)$$

3. A büntetőfüggvényt is tartalmazó (5.2.1.2.7) általános Reynolds egyenlet:

$$\nabla_{xy} \cdot (\theta \bar{Y}) - \nabla_{xy} \cdot (\Phi \nabla_{xy} p) - \theta \Omega_y = 0. \quad (6.4.5)$$

4. A kenőanyag hőtani leírására szolgáló (5.3.2.19) egyenlet:

$$\begin{aligned} \theta \rho_L \left(\frac{\partial (c_v \mathcal{G})}{\partial t} + \nabla (c_v \mathcal{G}) \cdot \bar{u} \right) + p \left(- \frac{\partial \rho_L}{\partial t} - \nabla \rho_L \cdot \bar{u} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u} \right) \rho_c \right) = \\ = \nabla (\theta \lambda \nabla \mathcal{G}) + \theta \Xi \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

mely állandó sűrűség és hőtani (c_v és a λ) jellemzők mellett az alábbi alakot nyeri:

$$\theta \rho_L c_v \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \nabla \mathcal{G} \cdot \bar{u} \right) - p \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \nabla \theta \cdot \bar{u} \right) \rho_L = \lambda \nabla (\theta \nabla \mathcal{G}) + \theta \Xi. \quad (6.4.7)$$

A variációs módszer szempontjából meg kell meghatározni, hogy melyik alapegyenletben melyik mező variációja szerepel. Mivel az általánosan elterjedt megoldásokban, a szilárd testekre vonatkozó mechanikai egyenletekből az elmozdulás-, míg a hőtani egyenletekből a hőmérsékletmező variációjával állítják elő a megoldáshoz szükséges egyenletrendszert, a Reynolds-egyenlet megoldásában a nyomásmező variációjának kell szerepelnie ahhoz, hogy a megfelelő számú algebrai egyenletet kapjuk a diszkretizáció után.

(6.4.1) A Reynolds-egyenlet gyenge integrál alakja

Amint ismeretes az integrál alak felírásának első lépcsője az adott differenciálegyenlet, jelen esetben a (6.4.5) egyenlet, súlyozott integrál alakjának a felírása, melyhez a (6.4.5) egyenletet jobbról szorozni kell egy w_R , majd a vizsgált tartomány felett integrálni kell.

$$\int_{A_c} w_R (\nabla_{xy} \cdot (\theta \bar{\Psi}) - \nabla_{xy} \cdot (\Phi \nabla_{xy} p) - \theta \Omega_\gamma) dA = 0, \quad (6.4.1.1)$$

(6.4.1.1) gyenge integrál alakja így a következő lesz

$$\int_{A_c} (\nabla_{xy} w_R \cdot (\Phi \nabla_{xy} p - \theta \bar{\Psi}) - w_R \theta \Omega_\gamma) dA - \oint_{\Gamma_c} w_R (\Phi \nabla_{xy} p - \theta \bar{\Psi}) d\Gamma = 0, \quad (6.4.1.2)$$

mely (5.2.1.2.8) alapján

$$\int_{A_c} (\nabla_{xy} w_R \cdot (\Phi \nabla_{xy} p - \theta \bar{\Psi}) - w_R \theta \Omega_\gamma) dA + \oint_{\Gamma_c} w_R (\bar{q}_h \cdot \bar{n}_\Gamma) d\Gamma = 0, \quad (6.4.1.3)$$

illetve (5.2.1.2) szerint

$$\int_{A_c} (\nabla_{xy} w_R \cdot (\Phi \nabla_{xy} p - \theta \bar{\Psi}) - w_R \theta \Omega_\gamma) dA - \oint_{\Gamma_c} w_R q_h^{n_\Gamma} d\Gamma = 0, \quad (6.4.1.4)$$

Amennyiben a $w_R = \mathbf{N}_p$, továbbá felhasználva a (6.3.2.1) alatti közelítő összefüggéseket, akkor a (6.4.1.4) helyett az alábbi diszkretizált egyenletet kapjuk

$$\int_{A_c} \Phi (\mathbf{N}_p \nabla_{xy}^T) (\nabla_{xy} \mathbf{N}_p^T) dA - \int_{A_c} \theta (\mathbf{N}_p \nabla_{xy}^T) \Psi dA - \int_{A_c} \theta \Omega_\gamma \mathbf{N}_p dA - \oint_{\Gamma_c} q_h^{n_\Gamma} \mathbf{N}_p d\Gamma = 0, \quad (6.4.1.5)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\nabla_{xy} \mathbf{N}_p^T = \mathbf{B}_p. \quad (6.4.1.6)$$

Így a diszkretizált Reynolds egyenlet az alábbi alakot nyeri

$$\int_{A_c} \Phi \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p dA - \int_{A_c} \theta \mathbf{B}_p^T \Psi dA - \int_{A_c} \theta \Omega_\gamma \mathbf{N}_p dA - \oint_{\Gamma_c} q_h^{n_\Gamma} \mathbf{N}_p d\Gamma = 0. \quad (6.4.1.7)$$

(6.4.2) A termodinamikai-egyenlet gyenge integrál alakja

A Reynolds egyenletéhez hasonlóan a (6.4.6) termodinamikai egyenletnek is felírható a gyenge integrál alakja egy w_Q súlyfüggvény segítségével:

$$\int_{V_c} w_Q \left(\theta \rho_L \left(\frac{\partial(c_v \vartheta)}{\partial t} + \nabla(c_v \vartheta) \cdot \bar{u} \right) - p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u} + \nabla \theta \cdot \bar{u} \rho_c \right) - \theta \varepsilon_L \right) + \theta \lambda \cdot \nabla w_Q \cdot \nabla \vartheta \Big|_{\Omega_c} dV - \int_{\Omega_c} \theta \lambda_L w_Q \nabla \vartheta \cdot \bar{n}_\Omega dA = 0 \quad (6.4.2.1)$$

mely (5.3.1.2) alapján

$$\int_{V_c} w_Q \left(\theta \rho_L \left(\frac{\partial(c_v \vartheta)}{\partial t} + \nabla(c_v \vartheta) \cdot \bar{u} \right) - p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u} + \nabla \theta \cdot \bar{u} \rho_c \right) - \theta \varepsilon_L \right) + \theta \lambda_L \cdot \nabla w_Q \cdot \nabla \vartheta \Big|_{\Omega_c} dV - \int_{\Omega_c} w_Q \bar{q}_Q \cdot \bar{n}_\Omega dA = 0 \quad (6.4.2.2)$$

illetve

$$\int_{V_c} \left(w_Q \left(\theta \rho_L \left(\frac{\partial(c_v \vartheta)}{\partial t} + \nabla(c_v \vartheta) \cdot \bar{u} \right) - p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \rho_L \cdot \bar{u} + \nabla \theta \cdot \bar{u} \rho_c \right) - \theta \varepsilon_L \right) + \theta \lambda_L \cdot \nabla w_Q \cdot \nabla \vartheta \right) dV + \int_{\Omega_c} w_Q q_\vartheta^{n_\Omega} dA = 0 \quad (6.4.2.3)$$

amennyiben a $w_Q = \mathbf{N}_g$ továbbá \mathbf{u} vektorból a végeeselemes jelöléssel \mathbf{u} vektor jelenik meg

$$\int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_g (\mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{N}_g^T)) dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_g (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c \nabla \theta) \right) \mathbf{N}_g dV - \int_{V_c} \theta \varepsilon_L \mathbf{N}_g dV + \int_{V_c} \theta \lambda_L (\mathbf{N}_g \nabla^T) (\nabla \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} + \int_{\Omega_c} q_\vartheta^{n_\Omega} \mathbf{N}_g dA = 0 \quad (6.4.2.4)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\nabla \mathbf{N}_g^T = \mathbf{B}_g. \quad (6.4.2.5)$$

Így a diszkrétizált hőtani egyenlet

$$\int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_g (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_g (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_g dV - \int_{V_c} \theta \varepsilon_L \mathbf{N}_g dV + \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_g^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \int_{\Omega_c} q_\vartheta^{n_\Omega} \mathbf{N}_g dA = 0 \quad (6.4.2.6)$$

mely állandó sűrűség és hőtani jellemzők mellett:

$$\begin{aligned}
 & \rho_L c_v \int_{V_c} \theta \mathbf{N}_g \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \rho_L c_v \int_{V_c} \theta \mathbf{N}_g (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\
 & - \rho_c \int_{V_c} p \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \theta) \right) \mathbf{N}_g dV - \int_{V_c} \theta \mathbf{E}_L \mathbf{N}_g dV + \cdot \\
 & + \lambda_L \int_{V_c} \theta \mathbf{B}_g^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_g dA = 0
 \end{aligned} \tag{6.4.2.7}$$

(6.4.3) A résméret deformációjának meghatározása approximációval

A felületen működő megoszló terhelés hatására bekövetkező elmozdulások számítása mára már rutinfeladat a numerikus módszerek körében, így az ehhez szükséges egyenleteket nem is részletezem. Jelen problémakör szempontjából elegendő, ha elfogadjuk, hogy a (6.4.1) és a (6.4.2) egyenletek, (6.3.2.2) és (6.3.2.3) közelítések bevezetése után, a következő alakú algebrai egyenletrendszerként állnak elő, ha feltételezzük, hogy az elmozdulás kvázi statikus:

A nyomásból származó elmozduláshoz hozzárendelt végeleemes egyensúlyi egyenlet:

$$\mathbf{K}_{p_i}(\delta_{p_i}) \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} + \mathbf{f}_{p_i}(p) = 0, \tag{6.4.3.1}$$

míg a hőmérséklet-eloszlásból származó elmozdulásra vonatkozóan áll

$$\mathbf{K}_{\Delta g_i}(\delta_{\Delta g_i}) \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_i}} + \mathbf{f}_{\Delta g_i}(\Delta g_i) = 0. \tag{6.4.3.2}$$

Más oldalról a p nyomáshoz, ill. a hőterheléshez tartozó redukált csomóponti terhelési vektor:

$$\mathbf{f}_{p_i}(p) = \mathbf{C}_{p_i}(\mathbf{P}) \mathbf{P}, \tag{6.4.3.3}$$

$$\mathbf{f}_{\Delta g_i}(\Delta g_i) = \mathbf{C}_{\Delta g_i}(\mathbf{T}) \mathbf{T}. \tag{6.4.3.4}$$

Ekkor a nyomásból és a hőmérséklet-eloszlásból származó elmozdulásokra vonatkozólag felírhatók a hatásmátrixok is:

$$\mathbf{H}_{\delta_{p_i}} = \mathbf{K}_{p_i}^{-1} \mathbf{C}_{p_i} \mathbf{P} = \mathbf{D}_{p_i} \mathbf{P}, \tag{6.4.3.5}$$

$$\mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_i}} = \mathbf{K}_{\Delta g_i}^{-1} \mathbf{C}_{\Delta g_i} \mathbf{T} = \mathbf{D}_{\Delta g_i} \mathbf{T}, \tag{6.4.3.6}$$

Illetve a két test vonatkozásában

$$\mathbf{H}_{\delta_p} = \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{P} = \mathbf{D}_p \mathbf{P}, \tag{6.4.3.7}$$

$$\mathbf{H}_{\delta_{\Delta g}} = \mathbf{K}_{\Delta g}^{-1} \mathbf{C}_{\Delta g} \mathbf{T} = \mathbf{D}_{\Delta g} \mathbf{T}. \tag{6.4.3.8}$$

(6.4.3.1) A nyomáseloszlásból származó diszkretizált közelítő elmozdulásmező számítása a félvégtelen térként modellezett test esetén

Mint ahogy az már korábban említésre került, elasztohidrodinamikai feladatoknál gyakori, hogy az érintkezés, az érintkező testek méreteihez képest, pont- vagy vonalszerűnek tekinthető. Az ennek hatására bekövetkező deformációt megoszló terhelés esetén [107] szerint pont- vagy foltszerű terhelésre az (5.2.2.5) szerinti analitikus összefüggéssel lehet meghatározni. Az összefüggés kétségtelenül alkalmas a deformáció számítására és az elasztohidrodinamikai számításoknál egyeduralgódó. Így ugyan a nyomáseloszlás függvényében lesz ismeretes a felület elmozdulása, azonban az egyenleteinkben több helyen is szerepel a résméret, ezért kívánatos, hogy egy iterációs cikluson belül csak egyszer kelljen elvégezni a deformáció számítását és a deformált alak végig rendelkezésünkre álljon. A résméret meghatározását lehetőleg olyan formában kell elvégezni, hogy az megegyezzen azzal, amit a szilárd test végeselemes megoldása során kapnánk. Így szükség szerint (pl. inhomogén felületi tulajdonságok esetén) az analitikus megoldás felváltható numerikus eljárásokkal. Mivel a kiinduló résméret és az elmozdulás közelítő függvények megegyeznek, a paraméterek összeadhatók és együtt kezelhetők. Ennek okán célszerű a résméret deformációját is p -verziós approximációval (6.3.2.6) szerint közelíteni, melyet a legkisebb négyzetek módszerével illeszthetünk pl. az (5.2.2.5) analitikus függvényhez a következők szerint:

$$cél: \quad \min \int_{A_c} \frac{1}{2} \left(\mathbf{N}_h^T \cdot \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} - \delta_{p_i} \right)^2 dA. \quad (6.4.3.1.1)$$

Minimumfeltétel miatt:

$$\int_{A_c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}_{\delta_{p_i}}} \left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{N}_h^T \cdot \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} - \delta_{p_i} \right)^2 \right) dA = \int_{A_c} \mathbf{N}_h \left(\mathbf{N}_h^T \cdot \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} - \delta_{p_i} \right) dA = 0. \quad (6.4.3.1.2)$$

Foltszerű érintkezésre felírt (5.2.2.5) elmozdulás a p mező diszkretizációjával:

$$\delta_{p_i} = \frac{2}{4\pi E_i} \int_{A_c} \frac{1}{\sqrt{(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2}} \mathbf{N}_p^T dA \mathbf{P}, \quad (6.4.3.1.3)$$

integrál révén számítható. Így (6.4.3.1.2) a (6.4.3.1.3) figyelembevételével

$$\int_{A_c} \mathbf{N}_h \mathbf{N}_h^T dA \mathbf{H}_{\delta_{p_i}} - \frac{2}{4\pi E_i} \int_{A_c} \mathbf{N}_h \int_{A_c} \frac{1}{\sqrt{(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2}} \mathbf{N}_p^T dA dA \mathbf{P} = 0. \quad (6.4.3.1.4)$$

Összehasonlítva az előbbi egyenletet az (6.4.3.1) egyenlettel, esetünkben a „merevségi” mátrix:

$$\mathbf{K}_{pi} = \int_{A_c} \mathbf{N}_h \mathbf{N}_h^T dA, \quad (6.4.3.1.5)$$

míg a „terhelési” vektor (6.4.3.3)-ra is tekintettel:

$$\mathbf{f}_{pi} = -\frac{2}{4\pi E_i} \int_{A_c} \mathbf{N}_h \int_{A_c} \frac{1}{\sqrt{(\hat{x}-x)^2 + (\hat{y}-y)^2}} \mathbf{N}_p^T dAdAP = \mathbf{C}_{pi} \mathbf{P}. \quad (6.4.3.1.6)$$

Vagyis meghatároztuk a (6.4.3.5)-ben szereplő \mathbf{K}_{pi} és \mathbf{C}_{pi} mátrixokat, így ebben az esetben is felírható a $\mathbf{H}_{\delta pi}$ paramétereire vonatkozó \mathbf{D}_{pi} hatásmátrix. Az eljárás jelentős előnye, hogy a kenéseméleti számítások során már csak az (6.4.3.5) egyenletet kell használnunk, melyben a \mathbf{D}_{pi} hatásmátrix mind numerikus, mind az előbb ismertetett analitikus úton meghatározható, a megoldás további menete változatlan marad. Hasonlóképpen felírható a hőhatás miatt a félvégtelen téren bekövetkező deformáció esetére is a hatásmátrix. Azonban, mint ahogy azt már korábban említettük, amikor a geometriai viszonyok olyanok, hogy az érintkező felületek félvégtelennek tekinthetők, a nyomás okozta felületi deformáció mellett a hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező deformáció gyakorlatilag elhanyagolható. Az olyan esetekben pedig, ahol kis nyomás mellett is jelentős a csúszásból származó hőtermelődés és az ebből származó deformáció, a geometriai viszonyok nem teszik lehetővé, hogy az érintkező testeket félvégtelennek tekintsük. Ebből adódóan a hőmérséklet hatására bekövetkező deformáció számítása általában nem analitikus úton felállított egyenletek, hanem például numerikus eljárások segítségével előállított hatásmátrixokkal történhet.

(6.4.4) Az érintkező testekben és a kenőanyagban kialakuló hőmérsékletmező csatoltása

A termodinamikai feladat esetén nem csak a kenőanyagot, hanem az érintkező testeket is vizsgálni kell, ha az (5.3.1.1) és (5.3.1.2) szerinti peremfeltételek nem előre definiáltak, hanem a kapcsolt (kenőanyag – kontakttest) hőtani feladat megoldása során kerülnek meghatározásra. A csatolásra két lehetséges út áll rendelkezésre. Az egyik megoldásnál a hagyományos alszerkezetekre vonatkozó technikát használjuk, megtartva a határon mind a kenőanyagra, mind a kontakttestre vonatkozó egyenleteket. Ez az út könnyen

járható, ha a kontakttestekre is az energiaegyenlet gyenge integráljára alapuló variációs megoldást használjuk. A másik lehetséges út szerint, a peremen a kontakttestre vonatkozó egyenletet tekintjük érvényesnek, míg a kenőanyagra vonatkozó differenciálegyenlet egyenlet variációját csak a kenőanyagon belül képezzük. Ez utóbbi lehetőség főként akkor előnyös, ha a kontakttest hőmérsékletére vonatkozólag analitikus megoldást kívánunk alkalmazni.

Termo-elasztohidrodinamikai problémák hőtani részének számításánál is gyakorta alkalmazható az érintkező testek félvégtelen testként való modellezése, mely például foltszerű érintkezésre (5.3.3.2) szerint, a felületi pontokra vonatkozólag:

$$\vartheta_{s_i}(x, y, z) - \vartheta_{0s_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{q_{s_i}(\hat{x}, \hat{y})}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} e^{\frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_{s_i} - U_{s_i} r}{2 \kappa_{s_i}}} dA(\hat{x}, \hat{y}), \quad (6.4.4.1)$$

ahol

$$r^2 = (\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2; \quad U_{s_i}^2 = \vec{u}_{s_i} \cdot \vec{u}_{s_i}. \quad (6.4.4.2)$$

ϑ_{S_i} az S_i felület hőmérséklete, ϑ_{0i} az S_i felületű test távoli pontjának hőmérséklete, ρ_{S_i} a sűrűsége, c_{S_i} a fajhője, κ_{S_i} a hőmérsékletvezetési tényező, az S_i felületen a hőfluxus

$$\begin{aligned} q_{s_1}(x, y) &= \lambda_{fs_1} \frac{\partial \vartheta(x, y, -h_1)}{\partial z}; & (x, y) \in A_c; & \quad \vec{n}_{s_1} \approx \vec{e}_z, \\ q_{s_2}(x, y) &= \lambda_{fs_2} \frac{\partial \vartheta(x, y, h_2)}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.4.4.3)$$

ahol:

$$\lambda_{fs_i} = \lambda(x, y, z); \quad (x, y, z) \in S_i, \quad (6.4.4.4)$$

figyelembe véve a kavitációt (5.3.2.5) szerint:

$$\lambda_{fs_i}^* = \theta \lambda_{Ls_i} = \theta \lambda_L(x, y, z); \quad (x, y, z) \in S_i. \quad (6.4.4.5)$$

A fentiekhez hasonlóan a felület hőmérséklete vonalszerű terhelésre:

$$\vartheta_{s_i}(x, z) - \vartheta_{0s_i} = \frac{1}{\pi} \int_{s(\hat{x})} \frac{q_{s_i}(\hat{x})}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} e^{\frac{U_{s_i}(\hat{x}-x)}{2\kappa}} K_0 \left[\frac{U_{s_i} \sqrt{(\hat{x}-x)^2 + z^2}}{2\kappa} \right] ds(\hat{x}), \quad (6.4.4.6)$$

ahol K_0 másodfajú, nullad-rendű, módosított Bessel függvény.

A (6.3.2.4) szerint a kenőanyagban a hőmérséklet-eloszlás közelítése:

$$\vartheta = \mathbf{N}_g^T \mathbf{T}. \quad (6.4.4.7)$$

Vegyük észre, hogy az S_i felületeken az \mathbf{N}_g elemeinek csak a felületi csomóponti, él és oldal alakfüggvényei vesznek fel értéket. Így három csoportra oszthatjuk az alakfüggvényeket, S_1 és S_2 felületi és a kenőanyag belsejében működő alakfüggvényekre:

$$\mathbf{N}_g^T = [\mathbf{N}_{gS_1}^T, \mathbf{N}_{gV}^T, \mathbf{N}_{gS_2}^T] = [\mathbf{N}_{gS_1}^T, \mathbf{N}_{gV,S_2}^T] = [\mathbf{N}_{gV,S_1}^T, \mathbf{N}_{gS_2}^T]. \quad (6.4.4.8)$$

Ennek megfelelően a \mathbf{T} is hasonlóképpen csoportosítható:

$$\mathbf{T}_g^T = [\mathbf{T}_{S_1}^T, \mathbf{T}_V^T, \mathbf{T}_{S_2}^T] = [\mathbf{T}_{S_1}^T, \mathbf{T}_{V,S_2}^T] = [\mathbf{T}_{V,S_1}^T, \mathbf{T}_{S_2}^T]. \quad (6.4.4.9)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{gV,S_j}^T &= [\mathbf{N}_{gV}^T, \mathbf{N}_{gS_j}^T], \\ \mathbf{T}_{V,S_j}^T &= [\mathbf{T}_V^T, \mathbf{T}_{S_j}^T]. \end{aligned} \quad (6.4.4.10)$$

Míg a belső alakfüggvények 0 értéket vesznek fel az érintkezési felületeken, addig azok deriváltja ugyanitt nem lesz egyenlő 0-val. Ezek alapján a (6.4.4.3) a következőképpen írható fel az i -dik felületre $z=z_{S_i}$ mellett.

$$q_{s_i} = \theta \lambda_{Ls_i} \frac{\partial \mathbf{N}_{gS_i}^T}{\partial z} \mathbf{T}_{S_i} + \theta \lambda_{Ls_i} \frac{\partial \mathbf{N}_{gV,S_j}^T}{\partial z} \mathbf{T}_{V,S_j} \quad \begin{array}{l} i=1, \quad j=2 \\ i=2, \quad j=1 \end{array} \quad (6.4.4.11)$$

Ezek után a (6.4.4.1) alatti felületi hőmérséklet (6.4.4.11)-re való tekintettel:

$$\begin{aligned} g_{s_i}(x, y) - g_{0_s} &= \frac{1}{2\pi} \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{gS_i}^T}{\partial z} \frac{\theta \lambda_{Ls_i}}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} \frac{e^{\frac{\bar{r} \cdot \bar{u}_s - U_{s_i} r}{2 \cdot \kappa_{s_i}}}}{r} dA(\hat{x}, \hat{y}) \mathbf{T}_{S_i} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{gV,S_j}^T}{\partial z} \frac{\theta \lambda_{Ls_i}}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} \frac{e^{\frac{\bar{r} \cdot \bar{u}_s - U_{s_i} r}{2 \cdot \kappa_{s_i}}}}{r} dA(\hat{x}, \hat{y}) \mathbf{T}_{V,S_j} \end{array} \quad \begin{array}{l} i=1, \quad j=2 \\ i=2, \quad j=1 \end{array} \quad (6.4.4.12)$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$A_{S_j} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_{Ls_i}}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} \frac{e^{\frac{\bar{r} \cdot \bar{u}_s - U_{s_i} r}{2 \cdot \kappa_{s_i}}}}{r}. \quad (6.4.4.13)$$

mely értelemszerűen vonalérintkezésre (5.3.3.4) figyelembevételével:

$$A_{S_j} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_{Ls_i}}{\rho_{s_i} c_{s_i} \kappa_{s_i}} e^{\frac{U_{s_i}(\hat{x}-x)}{2 \cdot \kappa_{s_i}}} K_0 \left[\frac{U_{s_i}(\hat{x}-x)}{2 \kappa_{s_i}} \right]. \quad (6.4.4.14)$$

Kövessük azt a legkisebb négyzetekre alapuló közelítő módszert, amit az elmozdulás számításánál is tettünk:

$$cél: \quad \min_{A_c} \int \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{gS_i}^T \cdot \mathbf{T}_{S_i} - g_{s_i})^2 dA. \quad (6.4.4.15)$$

Keressük (6.4.4.15) minimumát, mint:

$$\int_{A_c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}_{S_i}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{N}_{g_{S_i}}^T \mathbf{T}_{S_i} - g_{S_i})^2 \right) dA = \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \frac{\partial(g_{S_i})}{\partial \mathbf{T}_{S_i}} \right) (\mathbf{N}_{g_{S_i}}^T \mathbf{T}_{S_i} - g_{S_i}) dA = 0. \quad (6.4.4.16)$$

Így

$$\int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}}^T \mathbf{T}_{S_i} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}^T}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \mathbf{T}_{V_{S_j}} - g_{0_s} \right) dA = 0 \quad (6.4.4.17)$$

Ennek rendezésével kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}}^T - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}^T}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) dA \mathbf{T}_{S_i} - \\ & - \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{V_{S_j}}^T}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) dA \mathbf{T}_{V_{S_j}} - \\ & - \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) dA g_{0_s} = 0 \end{aligned} \quad (6.4.4.18)$$

Legyen:

$$\mathbf{K}_{g_{S_i}} = \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}}^T - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}^T}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) dA, \quad (6.4.4.19)$$

továbbá

$$\mathbf{K}_{g_{S_j}} = - \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{V_{S_j}}^T}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) dA, \quad (6.4.4.20)$$

míg

$$\mathbf{f}_{g_{S_i}} = - \int_{A_c} \left(\mathbf{N}_{g_{S_i}} - \int_{A(\hat{x}, \hat{y})} \frac{\partial \mathbf{N}_{g_{S_i}}}{\partial z} \theta_{A_{S_j}} dA(\hat{x}, \hat{y}) \right) dA. \quad (6.4.4.21)$$

Ezek alapján felírható, az S_1 , S_2 felületeken a hőtani peremfeltételből származó egyenlet:

$$\mathbf{K}_{g_{S_i}} \mathbf{T}_{S_i} + \mathbf{K}_{g_{S_j}} \mathbf{T}_{V_{S_j}} + \mathbf{f}_{g_{S_i}} g_{0_s} = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, & j = 2 \\ i = 2, & j = 1 \end{matrix}, \quad (6.4.4.22)$$

Vagyis:

$$\left[\mathbf{K}_{gsii}, \mathbf{K}_{gsij} \right] \mathbf{T} + \mathbf{f}_{gsi} \mathcal{G}_{0_s} = 0 \quad \begin{array}{ll} i=1, & j=2 \\ i=2, & j=1 \end{array} \quad (6.4.4.23)$$

Ezeket az egyenleteket a (6.4.2.6) alatti hőtani egyenlettel együtt iterációval vagy párhuzamosan kell megoldani, azzal a módosítással, hogy ott $w_Q = \mathbf{N}_{gV}$ mivel az S_1 , S_2 peremen adott a (6.4.4.22) által kifejezett feltétel. Ha csak az i jelű kontaktfelületen áll fenn a fenti (6.4.4.22) peremfeltétel akkor $w_Q = \mathbf{N}_{gVS_j}$. Abban az esetben, ha egy iterációs ciklusban oldjuk meg a (6.4.2.6) (6.4.4.22) egyenleteket, a megoldandó egyenletrendszer szimmetrikus maradnak. A (6.4.2.6) egyenletből ekkor, annak megfelelően, hogy mindkét kontaktfelületen vagy csak az egyikén áll a fenti peremfeltételi modell, csak a \mathbf{T}_V vagy \mathbf{T}_{V,S_i} míg a (6.4.4.22) egyenletből a \mathbf{T}_{S_j} paramétereket számítjuk. Ha a párhuzamos megoldási módot választva, egy lépésben mindkét egyenletet meg kívánjuk oldani, akkor a hőtani egyenletünk:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV} dV - \quad (6.4.4.24) \\ & - \int_{V_c} \theta \mathcal{E}_L \mathbf{N}_{gV} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV} dA = 0 \end{aligned}$$

Vagy, ha az S_j felületen adiabatikus peremfeltételt alkalmazunk:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \quad (6.4.4.25) \\ & - \int_{V_c} \theta \mathcal{E}_L \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV,S_j}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV,S_j} dA = 0 \end{aligned}$$

A kapott egyenleteket vizsgálva megállapítható, hogy azok nem szimmetrikusak, így a megoldása több erőforrást, viszont csak egy lépést igényel.

A felületi deformációktól eltérően, itt a felületre vonatkozó hőmérsékleteloszlás nem építhető be hatásmátrixon keresztül a folyadék termodinamikai egyenletébe, hanem direkt peremfeltételként jelenik meg és vagy iterációval, vagy egy lépésben csatolt feladatként kerül meghatározásra.

(7.) Az egyenletrendszer numerikus megoldása

A feladat megoldása során alapvetően a tradicionális megoldási algoritmusok kerülnek előtérbe. Minden bizonnyal kijelenthető, hogy az olyan hatékony eljárások, mint a közkezdvelt multigrid-multilevel algoritmus ebben az esetben is hatékony eszköze lehetne a numerikus megoldásnak, azonban ennek implementálása nélkül is bemutatható a korábban ismertett eredmények alkalmazhatósága a termo-elasztohidrodinamikus kenésállapot modellezése területén.

(7.1) A megoldás során felhasznált diszkretizált egyenletek

Az előző fejezetben előállításra kerültek azon egyenletek, melyek egy véges elem módszerre épülő megoldás során felhasználandók. Ezek tehát a következők:

A diszkretizált Reynolds egyenlet, egyenletrendszer (6.4.1.7):

$$\int_{A_c} \Phi \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p dA \mathbf{P} - \int_{A_c} \Theta \mathbf{B}_p^T \Psi dA - \int_{A_c} \theta \Omega_\gamma \mathbf{N}_p dA - \oint_{\Gamma_c} q_h^{n_r} \mathbf{N}_p d\Gamma = 0. \quad (7.1.1)$$

A résméret diszkretizált alakja (6.3.2.11):

$$h = [\mathbf{N}_h^T, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_{\delta_p} + \mathbf{H}_{\delta_{\Delta g}} \\ \Delta_{rigid} \end{bmatrix}. \quad (7.1.2)$$

A nyomásból származó elmozdulás paramétereire vonatkozó összefüggés (6.4.3.5):

$$\mathbf{H}_{\delta_{p_i}} = \mathbf{K}_{p_i}^{-1} \mathbf{C}_{p_i} \mathbf{P} = \mathbf{D}_{p_i} \mathbf{P}. \quad (7.1.3)$$

A hőmérséklet-eloszlásból származó elmozdulás (6.4.3.4):

$$\mathbf{H}_{\delta_{\Delta g_i}} = \mathbf{K}_{\Delta g_i}^{-1} \mathbf{C}_{\Delta g_i} \mathbf{T} = \mathbf{D}_{\Delta g_i} \mathbf{T}. \quad (7.1.4)$$

A diszkretizált hőtani egyenlet (6.4.4.24):

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV} dV - \\ & - \int_{V_c} \theta \varepsilon_L \mathbf{N}_{gV} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV} dA = 0 \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Az S_1 , S_2 felületeken a hőtani peremfeltételből származó egyenlet (6.4.4.23):

$$[\mathbf{K}_{gs11}, \mathbf{K}_{gs12}] \mathbf{T} + \mathbf{f}_{gs1} g_{0_1} = 0, \quad (7.1.6)$$

$$[\mathbf{K}_{gs22}, \mathbf{K}_{gs21}] \mathbf{T} + \mathbf{f}_{gs2} g_{0_2} = 0. \quad (7.1.7)$$

Vagy, ha az S_j felületen adiabatikus peremfeltételt alkalmazunk, akkor (6.4.4.25):

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \cdot \quad (7.1.8) \\ & - \int_{V_c} \theta \varepsilon_L \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV,S_j}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV,S_j} dA = 0 \end{aligned}$$

Természetesen a fenti egyenletek egy szorosan kapcsolt rendszert képeznek, ugyanakkor a hőtani és a kontaktfeladatnak külön is kezelhetőnek kell lennie.

Mivel a három mező, még ha áttételesen is, de egyszerre jelen van mindegyik egyenletben, elvileg egy mező meghatározására bármelyik egyenlet alkalmas lehet. Ugyanakkor a hővezetés differenciálegyenletét felhasználni a nyomáseloszlás vagy az alakváltozás meghatározására meglehetősen erőltetett lenne. Ezek alapján az alakváltozásra vonatkozó, illetve az általános Reynolds egyenlet áll rendelkezésre a nyomáseloszlás és a résméret meghatározására. Az elasztohidrodinamikai feladat megoldására két iteratív út kínálkozik. A direkt útnak nevezett metodika szerint az alakváltozási egyenlet szolgál a résméret, míg a nyomás meghatározására a Reynolds egyenlet. A másik lehetőség, az úgynevezett inverz módszer, melynek alap gondolata az, hogy egy adott kiinduló nyomáseloszláshoz kerül meghatározásra a szükséges résalak a Reynolds egyenlet felhasználásával, majd a kapott résalakhoz kell megkeresni a szükséges nyomáseloszlást. A numerikus módszerek elterjedésével ugyan a direkt eljárás kétségtelenül vezető szerepet kapott, különösen a felületi deformációból visszszámolt nyomáseloszlás pontos meghatározásának nehézsége, illetve a deformáció nyomásváltozásra vonatkozó viszonylag alacsony érzékenysége miatt. Az előbbieket mellett elképzelhető olyan megoldás is, melynek során az alakváltozási és a kenési problémát kapcsolt feladatként oldjuk meg, melyre lehetőséget teremt a résméret korábban ismertetett módon, nyomásfüggésének hatásmátrixszal való előállítás.

(7.2) A diszkretizált Reynolds egyenlet linearizálása

A vizsgált tárgykörben a megoldás nehézségét különösen a Reynolds egyenlet erősen nemlineáris tulajdonsága okozza. Az erősen nemlineáris egyenletek megoldásai az esetek túlnyomó többségében a Newton vagy gradiens módszerre alapulnak.

Ebből adódóan a (7.1.1) egyenletet linearizálni kell, hogy a nyomáseloszlás és a hozzá tartozó résalak meghatározható legyen. Tekintsük a (7.1.1) mint:

$$\mathbf{R} = \int_{A_c} \Phi \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p dA - \int_{A_c} \Theta \mathbf{B}_p^T \Psi dA - \int_{A_c} \theta \Omega_\gamma \mathbf{N}_p dA - \int_{\Gamma_c} q_h^{nr} \mathbf{N}_p d\Gamma = 0. \quad (7.2.1)$$

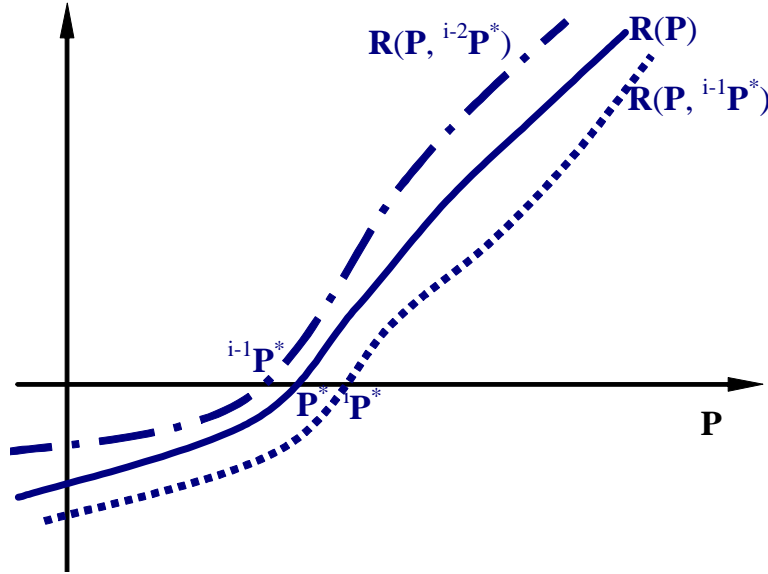
Ha áttekintjük a kiinduló egyenleteket, akkor megállapíthatjuk, hogy

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{P}, \rho, \dot{\rho}, h, \bar{r}, t, \eta, \tau_{eq}, \vartheta, \theta, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots). \quad (7.2.2)$$

A megoldás keresése során a (7.2.1) változóinak olyan értékét keressük, melyre a R maradványfüggvény értéke 0. Az egyenlet változói nem függetlenek egymástól, hanem azokat különböző egyenletek, mint pl. az anyagegyenlet kapcsolja össze. Ugyanakkor az esetek jelentős részénél a változók közti összefüggéseket nem lehet explicit alakban felírni. Ennek következtében a numerikus megoldás során a változóknak kezdőértéket kell adni, majd a feladatot egy kiválasztott változóra (esetünkben \mathbf{P}) nézve meg kell oldani, míg a többi változó (τ_{eq} , h , ...) rögzítve marad. Ezt követően a kiválasztott változó új értékéhez (az új \mathbf{P} -hez) kell meghatározni a többi változó értékét, melyek a következő iterációs lépés új kiinduló értékeként fognak szerepelni. Így az i . iterációs lépésben a Reynolds egyenlet maradványértéke a következő lesz:

$${}^i \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{P}^{i-1}, \rho^{i-1}, \dot{\rho}^{i-1}, h^{i-1}, \dot{h}^{i-1}, \bar{r}^{i-1}, t^{i-1}, \eta^{i-1}, \tau_{eq}^{i-1}, \vartheta^{i-1}, \theta^{i-1}, \bar{u}_1^{i-1}, \bar{u}_2^{i-1}, \dots) = 0. \quad (7.2.3)$$

A megoldás menetének szemléltetését szolgálja a 7.1. ábra. Az iterációs lépések során az $i-1$ -dik lépésben ${}^{i-1} \mathbf{P}^*$ -nél rögzített egyéb változók mellett, (7.2.3) szerinti maradványfüggvények kedvező esetben egyre jobban egybeesnek majd a (7.2.1) szerinti függvénnyel, melynek ${}^i \mathbf{P}^*$ megoldása konvergál a \mathbf{P}^* egzakt megoldáshoz. Azonban ez nem minden esetben áll fenn. Ilyenkor az esetleges oszcilláció megszüntetésére és a numerikus megoldás konvergenciájának stabilizálására megoldást jelenthet az $i-1$, i lépések közti ugrások csillapítása (pl. ${}^i \mathbf{P}^* = \alpha {}^j \mathbf{P}^* + (\alpha-1) {}^{i-1} \mathbf{P}^*$; $\alpha=0..1$).



7.1. ábra Megoldás általános menetének szemléltetése

A Reynolds egyenlet változóinak áttekintése során megállapíthatjuk, hogy a sűrűség, a viszkozitás, a kitöltési tényező és a lineárisan rugalmas anyagmodell mellett a felületek deformációból származó résméret esetén a nyomással és a hőmérséklettel való kapcsolat explicit alakban felírható, így a \mathbf{P} -re vett linearizálás során ezek deriváltjait is figyelembe tudjuk venni, mely nagymértékben gyorsíthatja a megoldást és párhuzamosan kerül meghatározásra a nyomáseloszlás és az ehhez tartozó résméret.

$${}^i \mathbf{R} = \mathbf{R} \left(\mathbf{P}, \rho(p(\mathbf{P}), {}^{i-1} \mathcal{G}), {}^{i-1} \dot{\rho}, h(\mathbf{P}, {}^{i-1} \mathcal{G}), {}^{i-1} \dot{h}, \right. \\ \left. {}^{i-1} \bar{r}, {}^{i-1} t, \eta(p(\mathbf{P}), {}^{i-1} \mathcal{G}), {}^{i-1} \tau_{eq}, {}^{i-1} \mathcal{G}, \theta(\mathbf{P}), {}^{i-1} \bar{u}_1, {}^{i-1} \bar{u}_2, \dots \right). \quad (7.2.4)$$

Az előbbi formalizmust egyszerűsítve:

$${}^i \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{P}, \rho(p(\mathbf{P})), h(\mathbf{P}), \eta(p(\mathbf{P})), \theta(p(\mathbf{P})), {}^{i-1} \mathbf{R}). \quad (7.2.5)$$

Ennek linearizált formája egy tetszőleges $\mathbf{P}=\mathbf{P}^j$ pontban:

$${}^i \mathbf{R}(\mathbf{P}^j, \rho(p(\mathbf{P}^j)), h(\mathbf{P}^j), \eta(p(\mathbf{P}^j)), \theta(p(\mathbf{P}^j)), {}^{i-1} \mathbf{R}) + \\ + \left(\frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \mathbf{N}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial p} \mathbf{N}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial h} \mathbf{N}_h \mathbf{D}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \mathbf{N}_p \right) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}^j} \Delta \mathbf{P} + O = 0, \quad (7.2.6)$$

vagy tömörebben

$${}^i \mathbf{R}(\mathbf{P}^j, {}^{i-1} \mathbf{R}) + \left(\frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \mathbf{N}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial p} \mathbf{N}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial h} \mathbf{N}_h \mathbf{D}_p + \frac{\partial {}^i \mathbf{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \mathbf{N}_p \right) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}^j} \Delta \mathbf{P} + O = 0. \quad (7.2.7)$$

Ezen egyenlet $\Delta \mathbf{P}^j$ megoldásnak sorozatával közelítjük az $\mathbf{R}=0$ maradvány \mathbf{P}^* megoldását a következő szerint:

$$\mathbf{P}^{j+1} = \mathbf{P}^j + \Delta \mathbf{P}^j. \quad (7.2.8)$$

Vagy, ha a megoldás oszcillál

$$\mathbf{P}^{j+1} = \mathbf{P}^j + \alpha \cdot \Delta \mathbf{P}^j \quad \alpha = [0..1]. \quad (7.2.9)$$

Mivel az EHD feladatok esetén a kiinduló egyenletrendszer többszörösen nemlineáris, igen nehéz olyan kiinduló állapotot találni, mely esetén elkerülhető a megoldás oszcillációja. Ezért egy célszerűen megválasztott α csillapításra van szükségünk, amelyik a leggyorsabb konvergenciát eredményezi. Ennek meghatározására viszont csak általános megfontolások állnak rendelkezésre, melyek adott feladathoz való megfelelősége nem biztosított. Ezért a csillapítás optimális mértékét úgy érdemes meghatározni, hogy az a maradvány értékének a lehető legnagyobb mértékű csökkenését eredményezze. Természetesen ezt csak egy eljárással lehet biztosítani.

Az α csillapítás optimális értékének meghatározásához a maradvány négyzet minimumát keresem. Az α csillapítás meghatározásakor \mathbf{P}^j és $\Delta \mathbf{P}^j$ vektorok állandóak, így az $\mathbf{R}(\mathbf{P}^j + \alpha \cdot \Delta \mathbf{P}^j)$ maradványvektor egyváltozós függvény, melyet továbbiakban $\mathbf{R}(\alpha)$ -val jelölök.

Annak érdekében, hogy ne legyen szükség a minimumkeresés során a deriváltak időigényes meghatározására, a maradvány értékét másodfokú approximációval közelítem a következő módon:

Legyen \mathbf{R}_0 az $\alpha=0$ -hoz tartozó maradvány.

Kezdő értéként legyen $\alpha_1=0,6$ melyhez tartozó maradvány \mathbf{R}_1

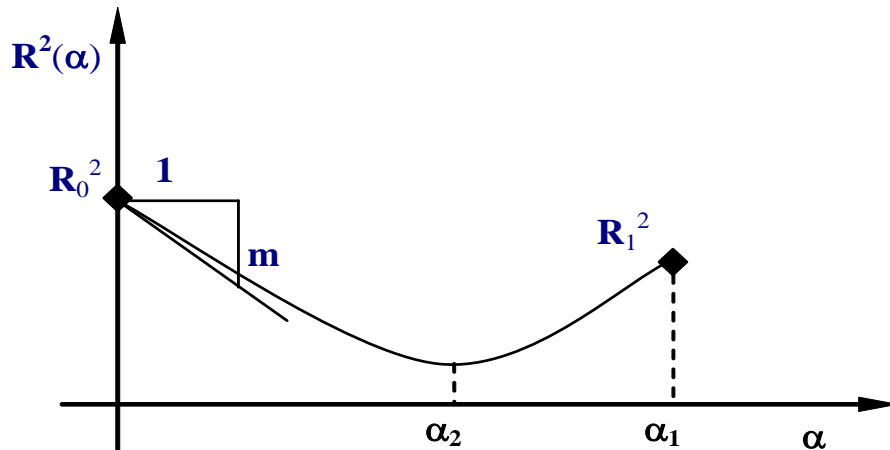
Az α_2 érték meghatározásánál rendelkezésre áll két pontban ($\alpha_0=0$ és α_1 pontban) a maradvány \mathbf{R}_0 és \mathbf{R}_1 értéke és természetesen azok $(\mathbf{R}_0)^2 = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{R}_0$ és $(\mathbf{R}_1)^2 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1$ négyzetösszege. Valamint a kiinduló pontban a maradvány deriváltjait is ismerjük, így a $(\mathbf{R}(\alpha))^2$ maradványnégyzet függvény meredeksége is ismert, melyet jelöljük „ m ”-mel. Az előbbi adatokkal $(\mathbf{R}(\alpha))^2$ másodfokú közelítése alapján:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{m \cdot \alpha_1^2}{(\mathbf{R}_1)^2 - (\mathbf{R}_0)^2 + m \cdot \alpha_1} \quad (7.2.10)$$

$$m = \left(2 \cdot \mathbf{R} \frac{d \mathbf{R}}{d \alpha} \right) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}^j} \quad (7.2.11)$$

Amennyiben az m értéke valamilyen oknál fogva nem állna rendelkezésre, az $[0; \alpha_1]$ tartományon a következő súlyozott átlaggal a következőképpen is felvehető α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1(\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{R}_0) + \alpha_0(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1)}{(\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{R}_0) + (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1)}. \quad (7.2.12)$$

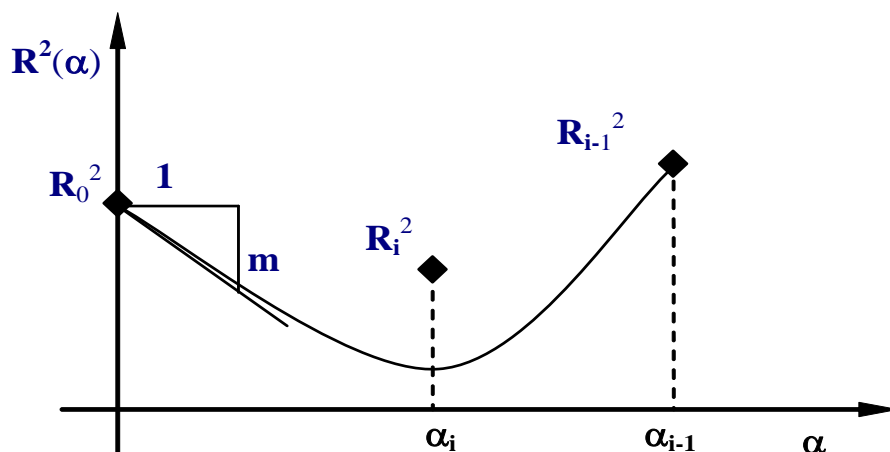


7.2. ábra Maradványnégyzet első közelítése

Ehhez a csillapításhoz tartozó maradvány érték legyen \mathbf{R}_2 . Így három α - \mathbf{R} értékpár lehetőséget ad az $\mathbf{R}(\alpha)$ maradványérték $\mathbf{R}^2(\alpha) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$ négyzetének másodfokú közelítéséhez, mely mellett továbbra is rendelkezésre áll a kiinduló pontban az $(\mathbf{R}(\alpha))^2$ maradványnégyzet függvény meredeksége. A parabolikus közelítéshez azonban az egyik adat felesleges. Magasabb fokú közelítésnek viszont többszörös szélsőértéke lehet, ezért ki kell választani azt a három adatot, amit a közelítéshez felhasználunk.

Abban az esetben, ha $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \varepsilon$ fennáll, ahol ε egy megválasztott elegendően kicsi hibahatár, az α_2 az optimális lépéscsillapításnak tekinthető.

Abban az esetben, ha $\alpha_2 < \alpha_1$ és $(\mathbf{R}_0)^2 < (\mathbf{R}_2)^2$ fennáll az α_3 értékét az $[0; (\mathbf{R}_0)^2]$ és $[\alpha_2; (\mathbf{R}_2)^2]$ pontok valamint az $[0; (\mathbf{R}_0)^2]$ pontbeli m érték alapján határozzuk meg. Tesszük ezt mindaddig, míg $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ és $(\mathbf{R}_i)^2 < (\mathbf{R}_0)^2$ nem teljesül (7.3 ábra).



7.3. ábra Első minimumkeresési lépéssorral kapott három pont

Legyen ekkor

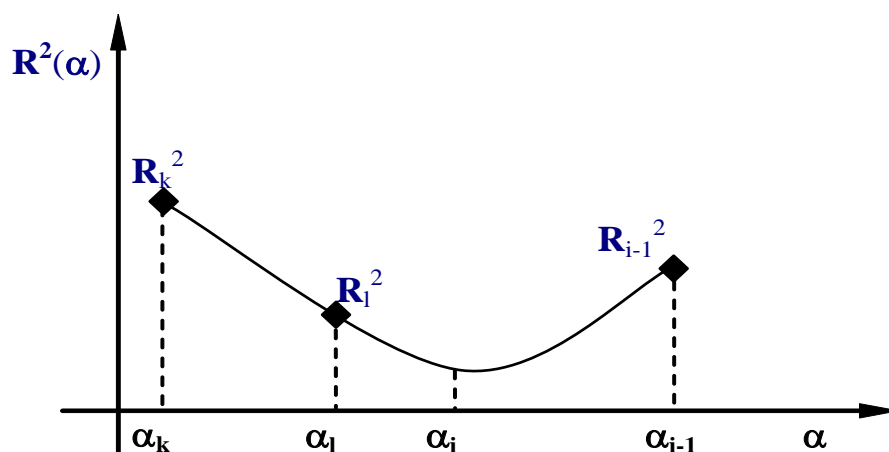
$$\alpha_1 = \alpha_{i-1}, (\mathbf{R}_1)^2 = (\mathbf{R}_{i-1})^2 \text{ és } \alpha_2 = \alpha_i, (\mathbf{R}_2)^2 = (\mathbf{R}_i)^2.$$

A fenti eljárás során mindenképpen előáll egy olyan $[0; (\mathbf{R}_0)^2]$, $[\alpha_1; (\mathbf{R}_1)^2]$, $[\alpha_2; (\mathbf{R}_2)^2]$ ponthármas, ahol $(\mathbf{R}_1)^2$ és $(\mathbf{R}_2)^2$ értékek közül legalább egy kisebb, mint $(\mathbf{R}_0)^2$.

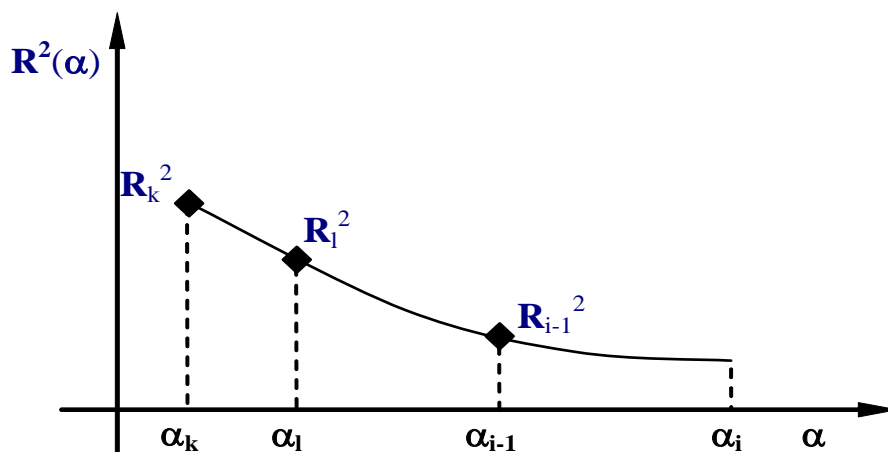
Ezt követően a soron következő α_i értékét már két célszerűen megválasztott, a korábbi pontok közül a két legkisebb, $[\alpha_k; (\mathbf{R}_k)^2]$, $[\alpha_i; (\mathbf{R}_i)^2]$ és az $[\alpha_{i-1}; (\mathbf{R}_{i-1})^2]$ pontra

fektetett $\sum_{j=0}^2 c_j \alpha^j$ alakú másodfokú interpolációval előállított parabola minimumhelye,

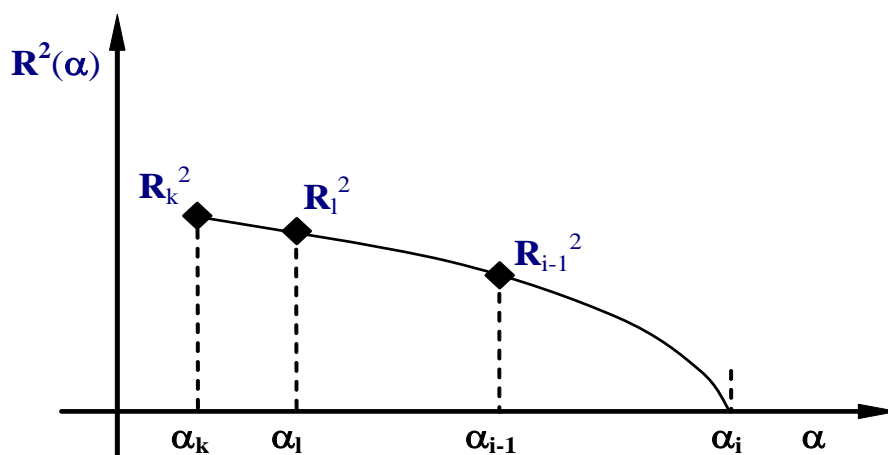
vagy α tengellyel vett metszéspontja adja (7.4-7.6 ábra).



7.4. ábra Három ponton keresztül a maradványnégyzet közelítésének 1. esete



7.5. ábra Három ponton keresztül a maradványnégyzet közelítésének 2. esete



7.6. ábra Három ponton keresztül a maradványnégyzet közelítésének 3. esete

Belátható, hogy a rendelkezésre álló ponthalmazból ez három egymás melletti pont, az interpoláció α_k , α_l és α_{i-1} sorrendjétől függetlenül, 3 különböző esetet jelöl ki, melyeket a 7.4. ábra, 7.5. ábra és 7.6. ábra mutat. Azt az esetet, amikor a 3 pont egy egyenesbe esik a 7.6. ábra által mutatott esetben soroljuk. Speciális eset, ha

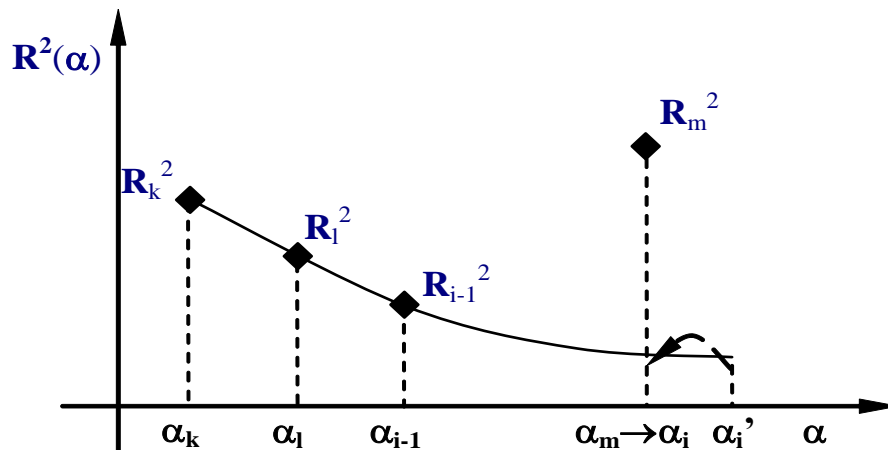
$$(R_k)^2 = (R_l)^2 = (R_{i-1})^2. \text{ Ekkor legyen } \alpha_l = (\alpha_{i-1} + \alpha_k) / 2.$$

A 7.4. ábra és 7.5. ábra által mutatott esetekben, mikor a $d^2 \left(\sum_{i=0}^2 c_i \alpha^i \right) / d\alpha^2 > 0$ az α_3 értékét a másodfokú interpolációs görbe minimumpontja jelöli ki.

Ha 7.6. ábra által mutatott eset áll fenn, vagy a három pont egy egyenesbe esik, azaz $d^2 \left(\sum_{i=0}^2 c_i \alpha^i \right) / d\alpha^2 \leq 0$, az α_i értékét a görbe α tengellyel vett metszéspontja

adja, ahol $\sum_{i=0}^2 c_i \alpha^i = 0$. Mivel a görbének két metszéspontja van, az lesz az α_i , amelyik nagyobb, mint 0 és közelebb áll az α_{i-1} -hez.

A 7.5. ábra és a 7.6. ábra által mutatott esetben a meghatározott α_i kívül esik a három pont által felvett tartományon. Ekkor előfordulhat, hogy a tartomány határa és az új α_i érték közé esik egy korábban felvett α_m érték, ahol ismert az $(R_m)^2$ értéke. Ebben az esetben, a meghatározott α_i helyett az $\alpha_i = \alpha_m$ -t veszünk, ahogy azt a 7.6. ábra is mutatja.



7.7. ábra Három ponton keresztül a maradványnégyzet közelítésének 4. esete

A fenti eljárással viszonylag gyorsan megtalálható az α érték, ami mellett a megoldás felé vezető, optimális lépés tehető. Mivel a lépés iránya kötött, az α értékét nem kell nagy pontossággal meghatározni, 10%-os pontosság elegendő a kívánt hatás eléréséhez.

(7.3) A Termodinamikai feladat kezelése

A diszkrétizált hőtani egyenlet (7.1.5) megoldása során lényegesen egyszerűbb utat is követhetünk. Az egyenlet sajátossága, hogy a megoldására leginkább a sebességmező van kihatással, ami viszont a nyomás és a hőmérséklet függvénye. A sebességmezőnek biztosítania kell az állandó térfogatáramlást. Természetesen a (7.1.5) egyenletben is megtalálhatók a nyomás és hőmérsékletfüggő változók, amelyek még inkább nemlineárisá teszik az egyenletrendszert. Ugyanakkor a sebességmező meghatározásához szükséges nyomáseloszlás erősen függ a hőmérséklet érzékeny anyagi paraméterektől. Így az

egyenletet, rögzített nyomáseloszlás és ehhez tartozó résméret mellett lehet megoldani. Amennyiben az adott ciklusban rögzítjük az anyagi paramétereket, lineáris egyenletrendszert kapunk kézhez, aminek a linearizációja szükségtelen. A (7.1.5) és (7.1.6) egyenleteket párhuzamosan megoldva az eredmény egy lépésben számítható az alábbi egyenletek megoldásával:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV} dV - \cdot \quad (7.3.1) \\ & - \int_{V_c} \theta \mathbf{E}_L \mathbf{N}_{gV} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV} dA = 0 \end{aligned}$$

Vagy, ha az S_j felületen adiabatikus peremfeltételt alkalmazunk:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \theta \rho_L \frac{\partial c_v}{\partial t} \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \mathbf{T} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} \mathbf{N}_g^T dV \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \int_{V_c} \theta \rho_L c_v \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_g) dV \mathbf{T} + \\ & \int_{V_c} \theta \rho_L \mathbf{N}_{gV,S_j} (\mathbf{u}^T (\nabla c_v) \mathbf{N}_g^T) dV \mathbf{T} - \int_{V_c} p \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u}^T (\nabla \rho_L + \rho_c (\nabla \theta)) \right) \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \cdot \quad (7.3.2) \\ & - \int_{V_c} \theta \mathbf{E}_L \mathbf{N}_{gV,S_j} dV - \int_{V_c} \theta \lambda_L \mathbf{B}_{gV,S_j}^T \mathbf{B}_g dV \mathbf{T} + \oint_{\Omega_c} q_\rho^{n_\Omega} \mathbf{N}_{gV,S_j} dA = 0 \end{aligned}$$

Az oszcilláció elkerülése érdekében korlátozható az egy lépésben megengedhető maximális változás az alábbiak szerint:

$$\mathbf{T}^{j+1} = \mathbf{T}^j + \alpha \cdot \Delta \mathbf{T}^j \quad \begin{array}{ll} \alpha = \beta & \text{ha } |\Delta T|/|T| < \beta \\ \alpha = \beta^2 \cdot |T|/|\Delta T| & \text{ha } |\Delta T|/|T| \geq \beta \end{array} \quad \beta = [0..1]. \quad (7.3.3)$$

Az így meghatározott hőmérséklet-eloszlás pedig megteremti az alapját a következő nyomás és résméret számítási ciklus bemenő adatainak. β értékét tapasztalatok alapján 0,5÷0,6 körül célszerű felvenni.

(7.4) Mintafeladatok

A dolgozatban a korábban bemutatott eredmények helyességét igazolandó, egyszerű mintafeladatok megoldását mutatom be. Ezeken keresztül látható a polinomiális approximáció előnye, a kavitációs algoritmus hatékonysága, a kapcsolt feladatok megoldhatósága a bemutatott eljárással. A megoldott feladatok:

- egyszerű hidrodinamikai feladat állandó résméret mellett
- egyszerű hidrodinamikai feladat állandó terheléssel
- hidrodinamikai feladatok a kavitációs algoritmus bemutatására

- elasztohidrodinamikai feladat állandó hőmérséklet mellett
- termodinamikai feladatok tiszta gördülés és csúszás valamint csúszva-gördülés esetén, különböző sebességek mellett. A feladatok során vizsgálom a hőfeladat résmenti approximációjának hatását az eredményekre.

(7.4.1) Végtelen szélességű hidrodinamikusan sík siklófelületpár

A kidolgozott eljárás helyes és hatékony működésének bemutatását a kenélméletben előforduló egyik legegyszerűbb esettel, a végtelen szélességű hidrodinamikusan sík siklófelületpár során kialakuló nyomáeloszlás meghatározásával kezdem, melyre a rendelkezésre álló analitikus megoldás jó lehetőséget teremt az eredmények ellenőrzésére. A rendelkezésre álló analitikus megoldás [79] szerint:

$$p = \frac{6\eta Ul}{h_0^2} \frac{\left(\frac{h_1}{h_0} - 1\right) \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\left[\left(\frac{h_1}{h_0} + 1\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{h_1}{h_0} - 1\right) \frac{x}{l}\right]\right]^2}. \quad (7.4.1.1)$$

A feladat vázlatát mutatja a 7.8. ábra. A ki- és belépésnél a nyomás 0 MPa.

Legyen a két felület sebessége:

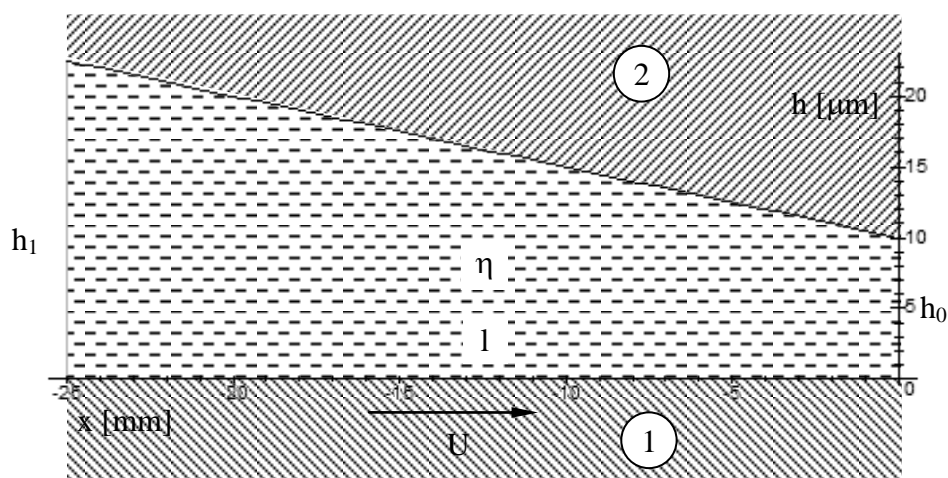
$$U = u_{x1} = 25 \text{ m/s}; \quad u_{x2} = 0$$

A rés geometriai jellemzői:

$$h_0 = 10 \mu\text{m}; \quad h_1/h_0 = 1,25; \quad l = 25 \text{ mm}.$$

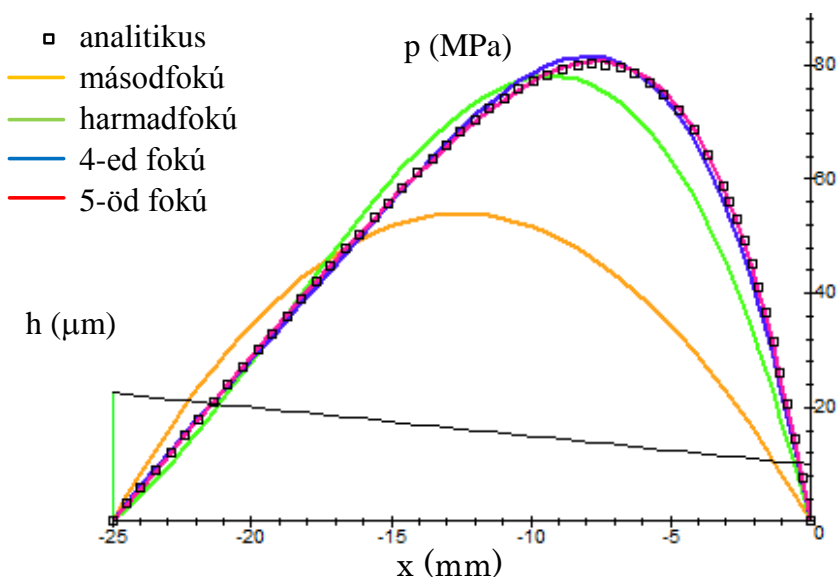
A kenőanyag viszkozitása:

$$\eta = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$



7.8. ábra 1. mintafeladat: Sík siklófelületpár

A feladatot a rés mentén egy elem felvételével oldottam meg, a közelítés fokszámának folyamatos növelésével. Az eredményeket és az analitikus megoldást a 7.9. ábra mutatja.



7.9. ábra Analitikus és p-verziós közelítéssel kapott nyomáeloszlás

Az eredményekből látható, hogy ötöd fokú közelítés esetén, már egy elem felvétele mellett is nagyon jó közelítéssel megoldható a feladat. Mivel a ki- és belépésnél a nyomás ismert, így az 5-öd fokú közelítéshez a nyomásapproximáció 4 állandóját kellett meghatározni, ami jóval kevesebb annál, mint, amit lineáris közelítésnél alkalmazni kellett volna.

(7.4.2) Végtelen szélességű hidrodinamikus sík siklófelülepár adott terhelés mellett

Az előző feladatban a felületek adott távolságra helyezkedtek el egymástól. Azonban általában nem a felületek távolsága, hanem a terhelése ismert. Tehát vonalérintkezésnél teljesülnie kell az alábbi egyensúlyi egyenletnek is

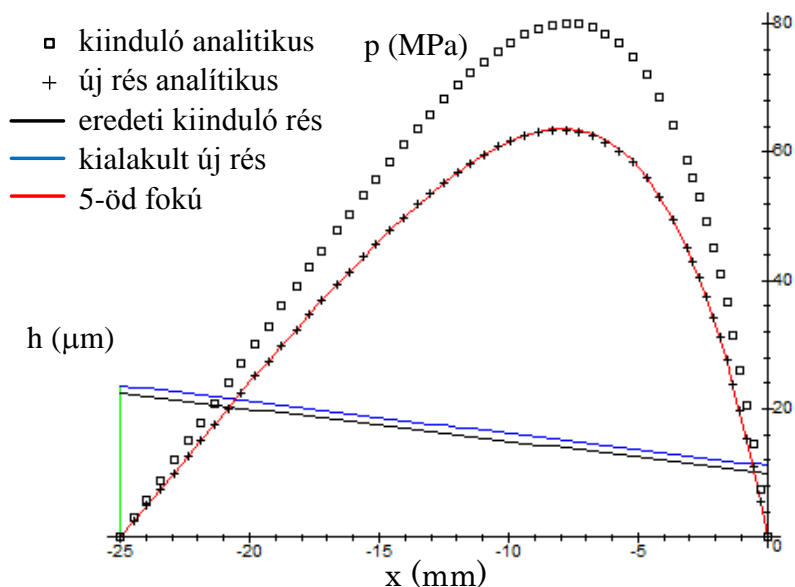
$$f_w = \int_{s_c} p \cdot dx. \quad (7.4.2.1)$$

A nyomáeloszlás analitikus megoldásából végtelen szélességű hidrodinamikus sík siklófelülepár esetén [79] szerint meghatározható az ébredő vonalterhelés értéke:

$$f_w = \frac{\eta U l^2}{h_0^2} \left[\frac{6 \cdot \ln\left(\frac{h_1}{h_0}\right)}{\left(\frac{h_1}{h_0} - 1\right)^2} + \frac{12}{1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2} \right]. \quad (7.4.2.2)$$

Ennek segítségével az előző esetben a vonalterhelés $f_w = 1,250983410 \text{ MN/m}$.

Az egyensúlyi feltétel kielégítésének vizsgálatához előírom, hogy változatlan geometriai és kinematikai feltételek mellett legyen a vonalterhelés $f_w=1\text{ MN/m}$. Ahhoz, hogy e feltétel kielégíthető legyen, az érintkező testek merevtestszerű mozgását (Δ_{rigid}) további változóként kell kezelni. A két felületnek 2 ilyen jellegű szabadságfoka ($\Delta_{rigid1}, \Delta_{rigid2}$) van. Szokásos módon, $\Delta_{rigid1}=0$ -ra választva, Δ_{rigid2} további változóként jelenik meg. A számítás eredményét a 7.10. ábra mutatja.



7.10. ábra Egyensúlyi feltétel kielégítésével kapott résméret és nyomáseloszlás

Látható, hogy a megoldás során a 2. felület felfelé mozdult el. Az elmozdulás értéke $\Delta_{rigid2}=-1,181225474\mu\text{m}$.

A kialakult részben numerikusan 5-öd fokú polinommal közelített nyomáseloszlás integrálásával kapott vonalnyomás $f_{w_num}=1,000000001\text{MN/m}$.

A kialakult részre analitikusan meghatározott nyomáseloszlás integrálásával kapott nyomáseloszlás $f_{w_analitikus}=1,000277248\text{MN/m}$.

Látható, hogy a megoldás során olyan közelítő nyomáseloszlás adódik, mely nagyon pontosan kielégíti az egyensúlyi feltételt. Ugyanakkor a kialakult részre vonatkozó analitikus és numerikusan közelített nyomáseloszlás integrál értelemben is nagyon jól egyezik. A két megoldás integrál értékének eltérése 0.027% , ami igen kicsiny.

(7.4.3) Kavitációs zóna meghatározása büntetőparaméteres elven

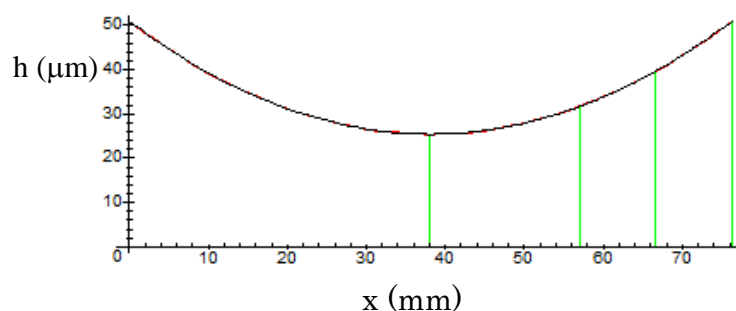
A kavitációs algoritmus vizsgálatához Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G. [119] által bemutatott egyszerű feladatot választottam. Az általuk vizsgált feladat kellő részletességgel publikált és egyszerűsége ellenére kiválóan alkalmas a kavitációs algoritmus teszteléséhez.

Az első feladat egy egyszerű parabolikus saru.

A feladat paraméterei:

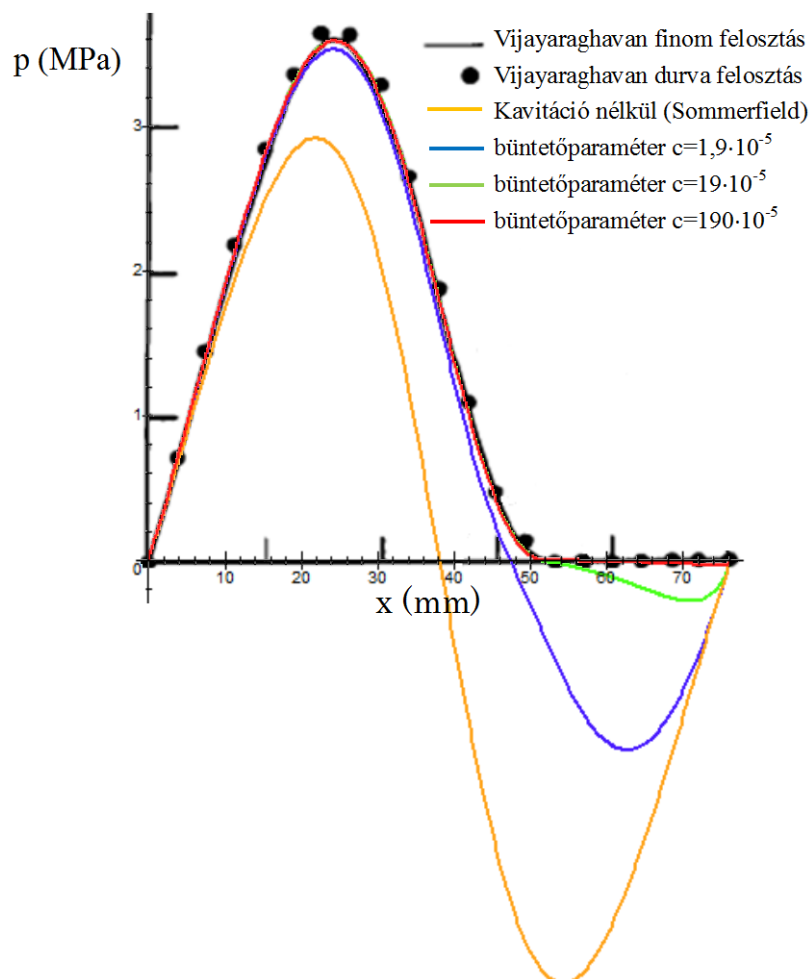
- saru hossza: $l=76,2 \text{ mm}$
- minimális résméret: $h_0=25,4 \mu\text{m}$
- maximális résméret: $h_1=50,8 \mu\text{m}$
- csúszási sebesség: $U=4,57 \text{ m/s}$
- Viskozitás: $\eta=0,039 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

A feladat megoldásához a 7.11. ábra által mutatott felosztást használtam, a közelítést 8-ad fokú Legendre függvénycsoporttal végeztem el.

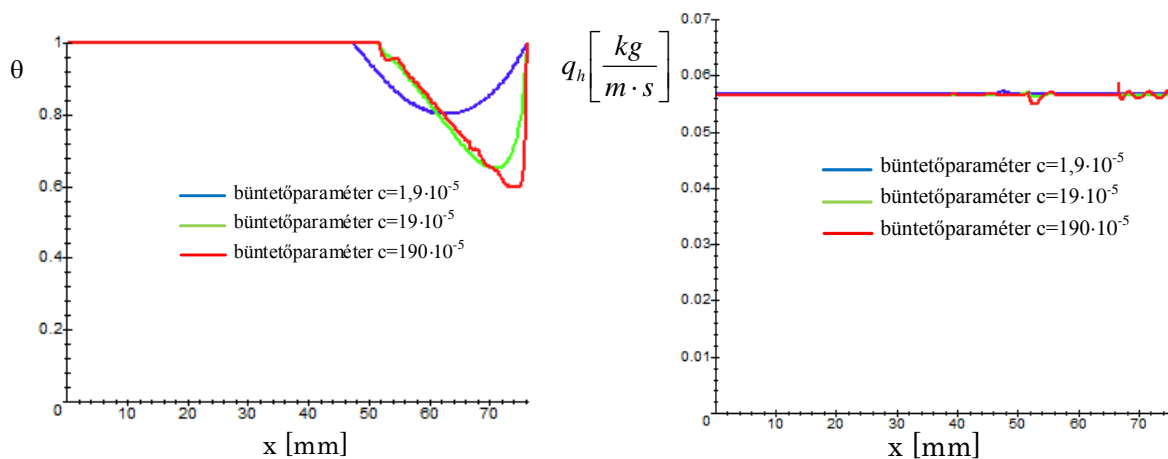


7.11. ábra Részfelosztás parabolikus saru esetén

A megoldás során a büntetőparaméter értékét 0-ról indulva három lépésben növeltem. A megoldás során előállt réskitöltési tényezőt és a térfogatáramot a 7.13. ábra tartalmazza. Látható, hogy a tömegáram a résben állandó marad a kavitációs zónán belül is. Kismértékű oszcilláció jelentkezik a kilépéshez közeli elemeken, amennyiben a büntetőparaméter értéke elegendően nagyra nő, azonban ezek mértéke nem veszélyezteti a későbbi felhasználást. Az így kapott nyomáseloszlás görbéket Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G. [119] által bemutatott megoldással vettem össze, melyet a 7.12. ábra mutat. Az ábrából látható, hogy a büntetőparaméter növelésével az irodalomban megtalálható eredményekkel azonos megoldást kaptam.

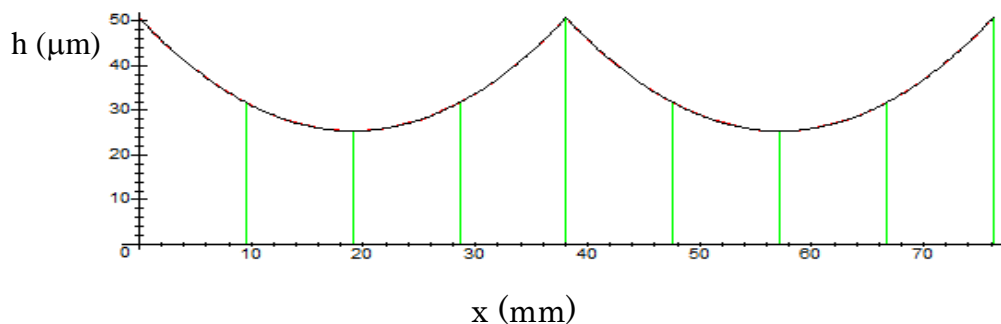


7.12. ábra Parabolikus saru esetén a nyomáseloszlás különböző büntetőparaméterek mellett és a Vijayaraghavan féle megoldás [119]



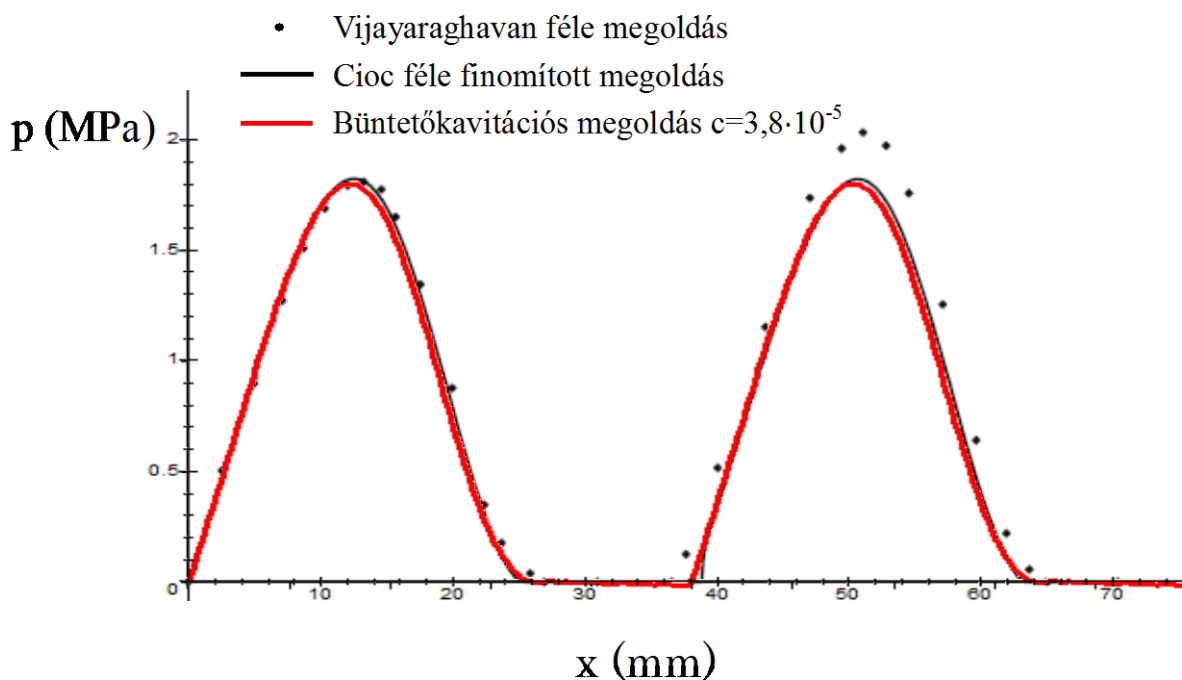
7.13. ábra Réskitöltés és rés menti térfogatáram különböző büntetőparaméterek mellett

A Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G. [119] által közzétett cikk nemcsak egyszeres, hanem kétszeres parabolikus csuszka esetét is elemzi. A probléma vázlatát és az alkalmazott felosztást a 7.14. ábra mutatja. A feladat paraméterei megegyeznek az előbbi feladattal.



7.14. ábra Részfelosztás kétszeres parabolikus csuszka esetén

A feladat eredeti cikkben közölt megoldása mellett, Cioc, S. [177] munkájában egy újabb finomított megoldás is megtalálható. A számításom eredményeinek a korábbi megoldásokkal való összehasonlítását mutatja a 7.15. ábra. Jól látható, hogy a büntetőparaméteres kavitációs algoritmusra épített megoldás jól követi Cioc, S. [177] 2004-ben publikált eredményeit úgy, hogy mindössze 8 p-verziós elem került alkalmazásra.



7.15. ábra Kétszeres parabolikus csuszka esetén a számított nyomáseloszlás és irodalmi megoldások [119] [177]

(7.4.4) Elasztohidrodinamikai feladat megoldása

A dolgozatban bemutatott megoldási módszert kifejezetten elasztohidrodinamikai feladatok megoldására fejlesztettem ki. Miután az előzőekben bemutatott példák igazolják a megoldás alkalmasságát hidrodinamikai feladatok megoldására, beleértve a kavitáció modellezését is, a következő példában a Hamrock, B. J. és Jacobson, Bo O. által 1984-ben publikált cikkben [100] bemutatott problémán keresztül igazolom a kifejlesztett eljárás alkalmasságát.

A feladat paraméterei:

Dimenzió nélküli sebesség: $U=2 \cdot 10^{-11}$

Dimenzió nélküli terhelési paraméter: $W=2,0452 \cdot 10^{-5}$

Dimenzió nélküli anyagi paraméter: $G=5000$

Dimenzió nélküli minimális résméret: $H_{min}=19,711 \cdot 10^{-6}$

Vonalnyomás: $f_w=50000 \text{ N/m}$

Az alkalmazott viszkozitási modell a Barus féle modell: $\eta=\eta_0 \cdot e^{\alpha \cdot p}$

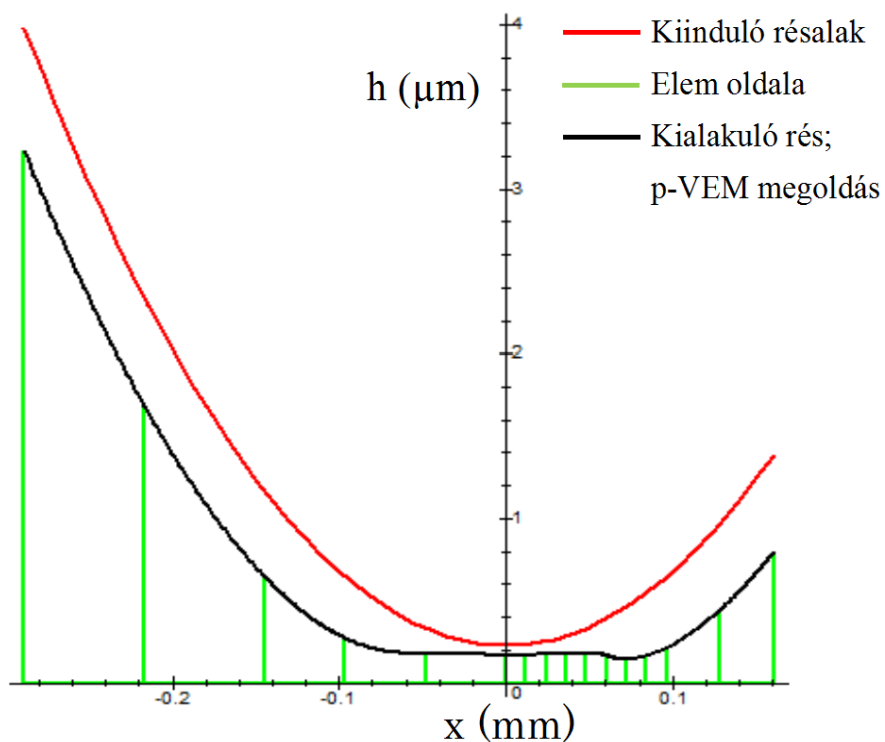
Noha a fenti paraméterek dimenzió nélküli formában szerepelnek, a feladat mégis nagyon jól behatárolt konkrét esetet mutat be, hiszen E' redukált rugalmassági modulus ismeretében a paraméterek dimenziói visszaállíthatóak. Mivel EHD kenésállapot leginkább ötvözt és hőkezelt acél felületepárok esetén áll fenn, így jó közelítéssel a redukált rugalmassági modulus: $E'=219,8 \text{ GPa}$.

A rést hosszmentén 15 elemre osztottam fel. Az approximáció fokszámát az 1. táblázat mutatja. A rés elemekre való felosztását szemlélteti a 7.16. ábra.

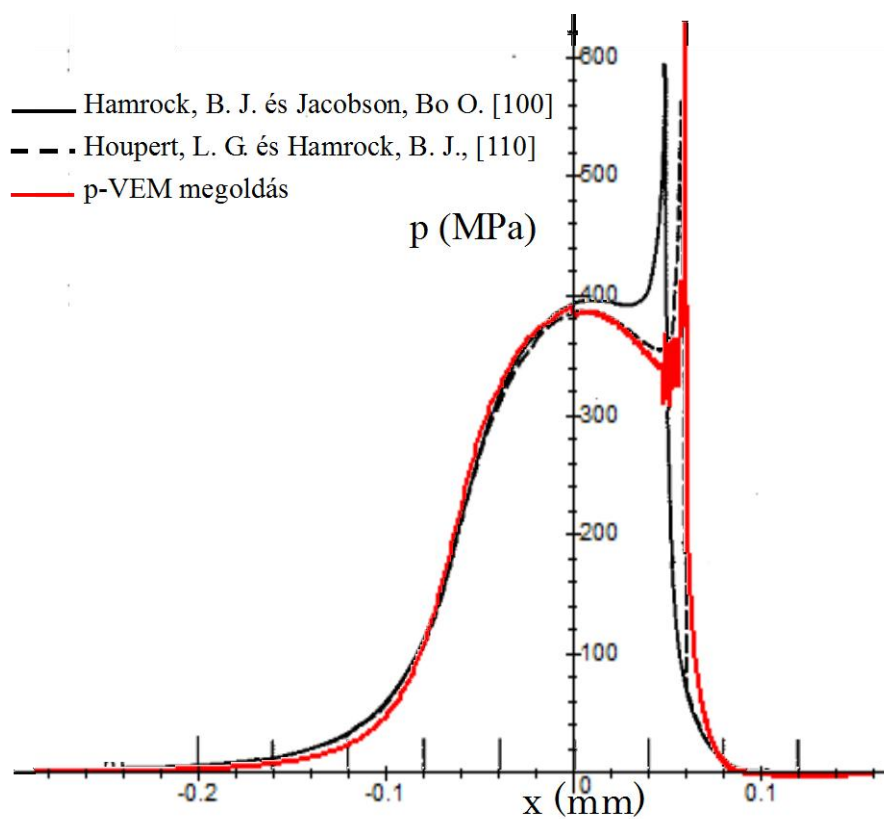
1. táblázat

Elem száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nyomás approximáció foka	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	6	6	6	6

A nyomáseloszlás megoldását a 7.17. ábra mutatja az irodalomban közölt eredményekkel együtt. Összehasonlítva megállapítható, hogy az eredmények jó egyezést mutatnak, különösen a Houpert, L. G. és Hamrock, B. J. [110], 1986-ban közölt eredményével. Míg az irodalomban található megoldásban 321 csomóponti változót használtak fel a megoldáshoz, addig a jelen esetben mindösszesen 94 változó került felhasználásra.

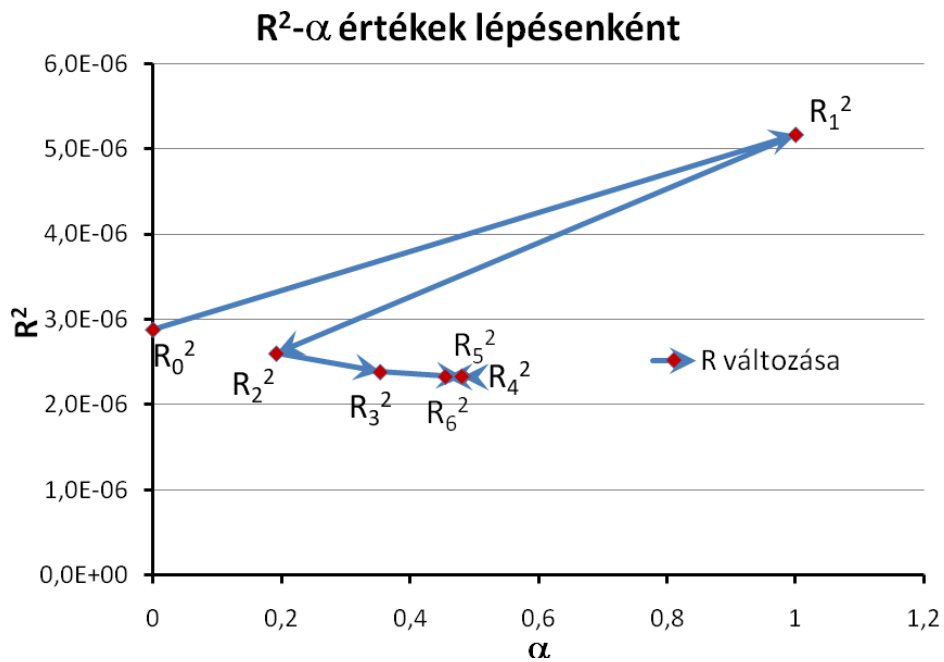


7.16. ábra A kiinduló és a kialakuló résméret

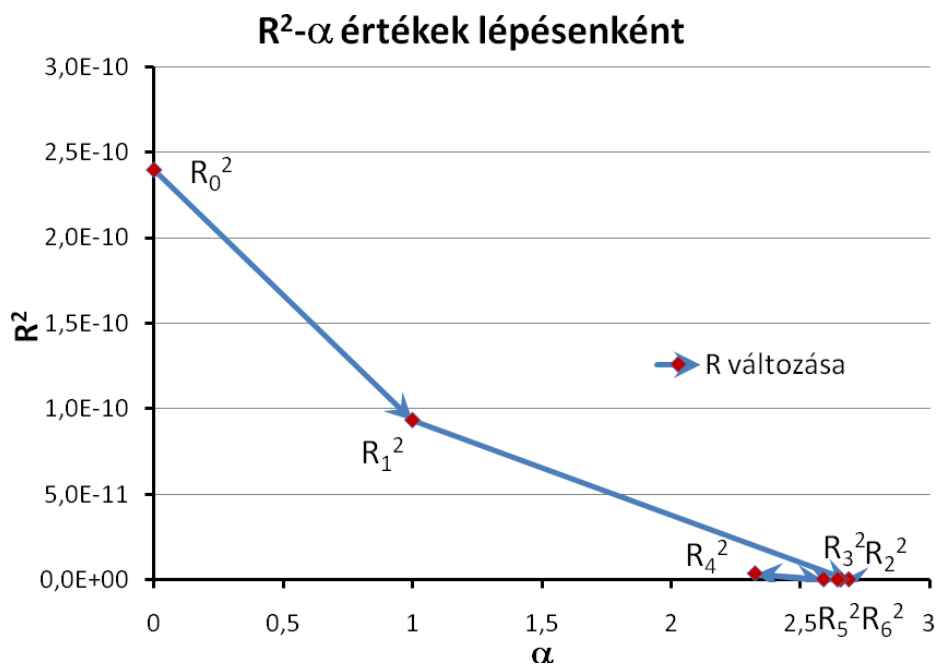


7.17. ábra A megoldás során és az irodalomban [110] közölt kialakuló nyomáseloszlás

A megoldás során a kidolgozott optimalizált lépésközü Newton-Rapshon került alkalmazásra. Az algoritmus hatékonyságának szemléltetésére két kiragadott lépésben látható a hibanégyzet alakulása az optimális lépésköz meghatározása során a 7.18. és 7.19. ábrán. A számítás elején az algoritmus megakadályozza az iteráció elszállását, míg a későbbiekben hatékonyan gyorsítja a megoldás menetét.



7.18. ábra R²-α értékek lépésenként megoldás kezdetén



7.19. ábra R²-α értékek lépésenként a megoldás későbbi fázisában

(7.4.5) *Termo-elasztohidrodinamikai probléma vizsgálata*

Az elasztohidrodinamikai feladat megoldása után a következő lépés a hőfejlődés hatásának figyelembevétele. A probléma p-verziós véges elemes módszerrel történő megoldását a Wolff, R., Nonaka, T., Kubo, A. és Matsuo, K., által 1992-ben [143] publikált cikkben található példákon keresztül mutatom be, mivel Wolff és társai a Houpert, L. G. és Hamrock, B. J., [110] között elasztohidrodinamikai feladatot vettek alapul, melyre az előbb bemutatott feladat esetén igazolt a felépített megoldási módszer alkalmazhatósága.

A feladat paramétereit:

Redukált érintkezési sugár : $r_{red}=0,0175 \text{ m}$

Dimenzió nélküli sebesség: $U=2 \cdot 10^{-11}$

Herzt féle nyomás: $p_h=400 \text{ MPa}$

Érintkező testek jellemzői:

Rugalmassági modulusa: $E=200 \text{ GPa}$

Poisson szám: $\mu=0,3$

Sűrűség: $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$

Hővezetési tényező: $\lambda_s=52 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

Fajhő: $c_v=460 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$

Kenőanyag jellemzői:

Kenőanyag típusa: Parafin olaj P-150

Belépő kenőanyag hőmérséklete: 323 K

Belépő kenőanyag viszkozitása: $\eta=1,539 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Belépő kenőanyag sűrűsége: $\rho=864 \text{ kg/m}^3$

A kenőanyag nyomás és hőmérsékletfüggése:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{0,6 \cdot 10^{-9} p}{1 + 1,7 \cdot 10^{-9} p} \right) \cdot [1 - \varepsilon \cdot (g - g_0)].$$

Hőtágulási tényező: $\varepsilon=6,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Hővezetési tényező: $\lambda=0,12 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

Fajhő: $c=2000 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$

A kenőanyag viszkozitásának nyomás és hőmérséklet függését leíró módosított WLF formula (5.2.4.1) tényezőit a 2. táblázat mutatja.

2. táblázat

WLF tényező	T_{S0} °C	A_1 °C	A_2 GPa ⁻¹	B_1	B_2 GPa ⁻¹	C_0	C_1	C_2 °C
	-71.41	122.32	1.025	0.206	22.00	7.0	11.04	30.94

Az előző feladathoz hasonlóan a rést hosszmentén ugyancsak 15 elemre osztottam fel, míg vastagság mentén mindössze egy elemet vettem fel a hőmérséklet számításához. Az approximációk fokszámát a 3. táblázat mutatja.

3. táblázat

Elem száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nyomás approximáció foka	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	6	6	6	6
Hőmérséklet approximáció foka	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4	4x4

Először a tiszta gördülés állapotára vonatkozóan végeztem el a számításokat, a (7.) fejezetben bemutatott módon. A elasztohidrodinamikai feladatot az optimalizált Newton-Raphson eljárással, míg a termodinamikai problémát a csillapított direkt algoritmussal oldottam meg iteratív úton. A kapott nyomáseloszlást a 7.20. ábra, míg a kialakult résméret és hőmérséklet eloszlást a 7.21. ábra mutatja.

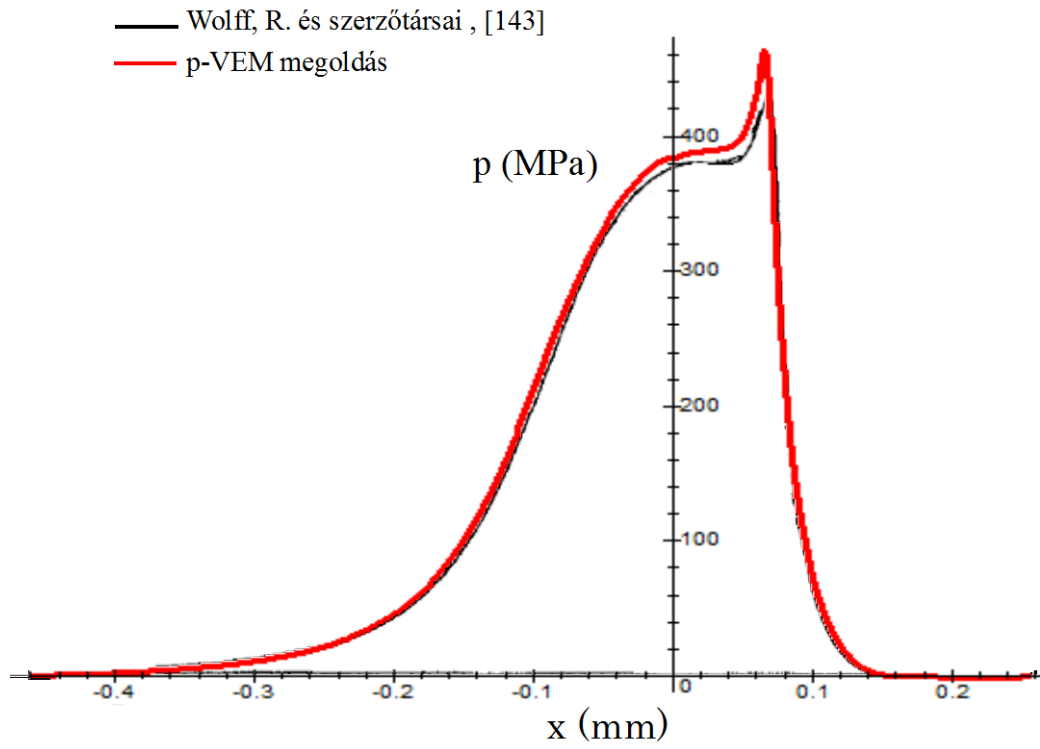
A tiszta gördülés feladata után a csúszási arány legyen:

$$S = 2 \frac{u_{x2} + u_{x1}}{u_{x2} - u_{x1}} = 1,9. \quad (7.4.5.1)$$

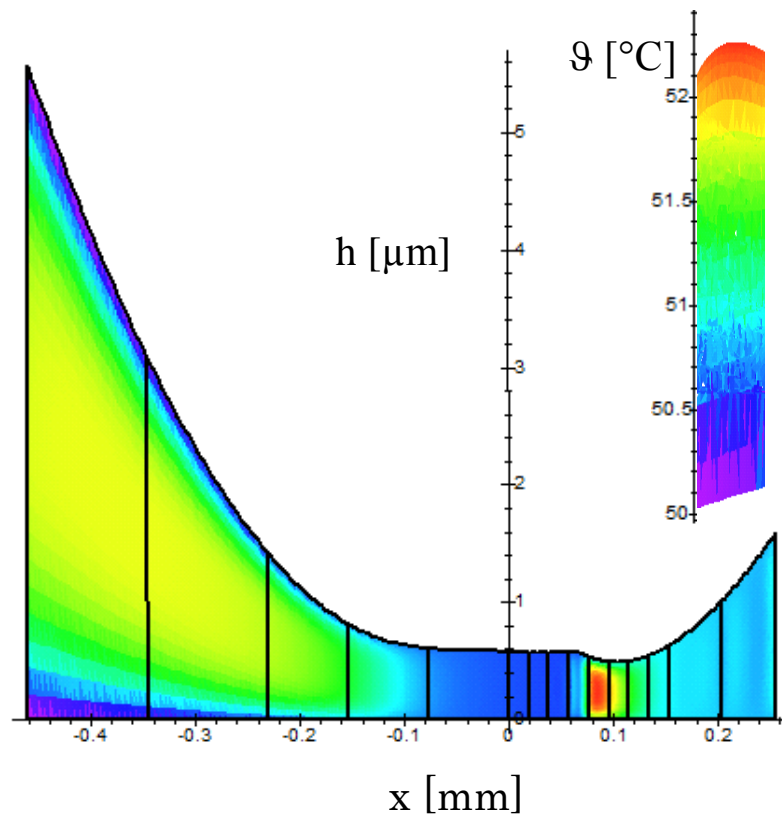
Ekkor sokkal nagyobb a hőfejlődés, így a résméret hőmérséklet-eloszlás modellezésének módja jelentősen befolyásolja az eredményeket, mely Wolff és szerzőtársai által publikált eredményeken jól látható. A megoldásomban a résméret hőmérséklet-eloszlás teljes mértékben figyelembevételre került az által, hogy negyedfokú közelítést alkalmaztam.

A nyomáseloszlás számítás eredményét a 7.22. ábra mutatja. A tiszta gördüléshez képesti változás egyértelműen megmutatkozik, bár a Wolff és társai által, résméret változó hőmérséklet mellett, számított nyomáseloszláshoz képest kisebb hatás látható.

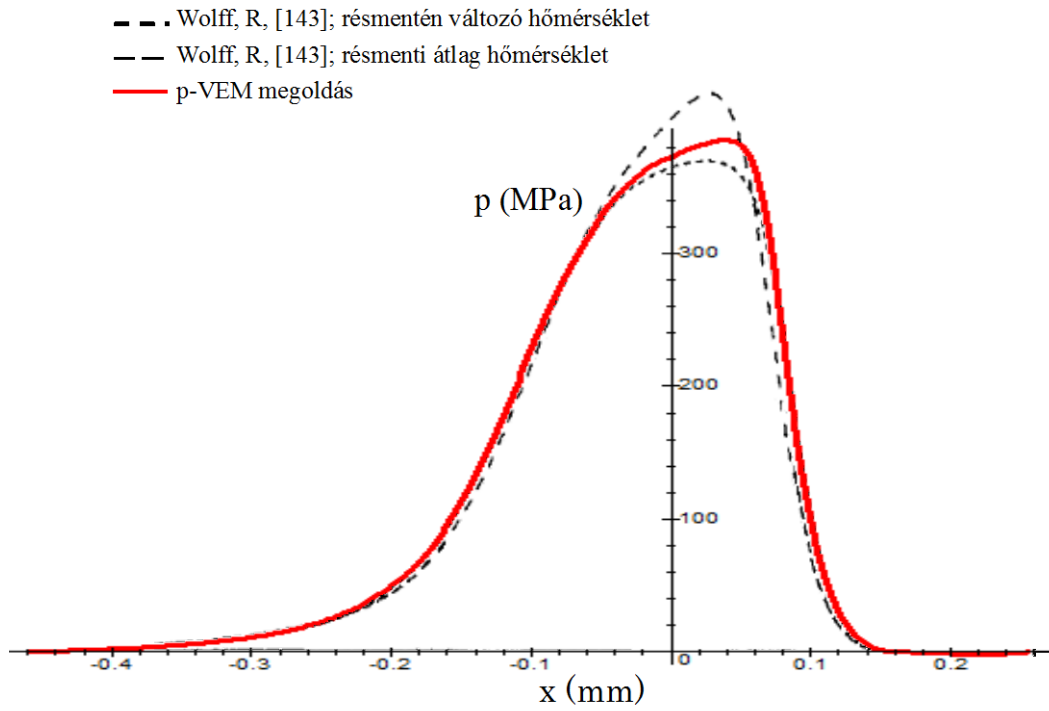
Az adott nyomáseloszlás a 7.23. ábra által mutatott résalak és hőmérséklet-eloszlás mellett alakul ki, melyen jól látható a nyomáscsúcs közelében kialakuló határozott hőmérsékletemelkedés, mely a felső, lassabban mozgó felület felé tolódik el.



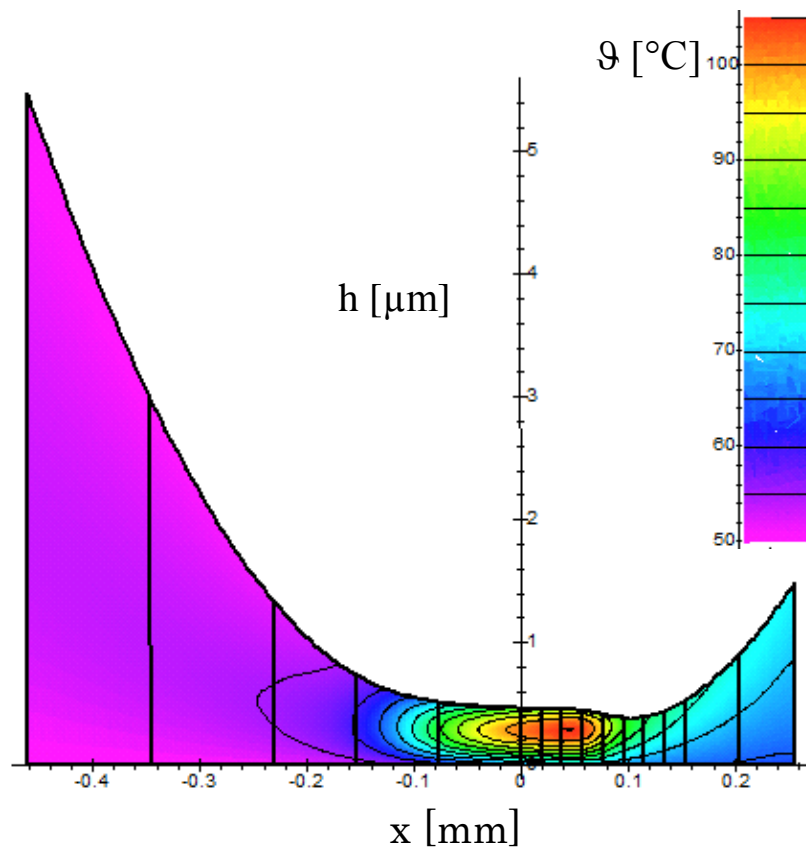
7.20. ábra Nyomáseloszlás tiszta gördülés esetén



7.21. ábra Hőmérsékleteloszlás tiszta gördülés esetén

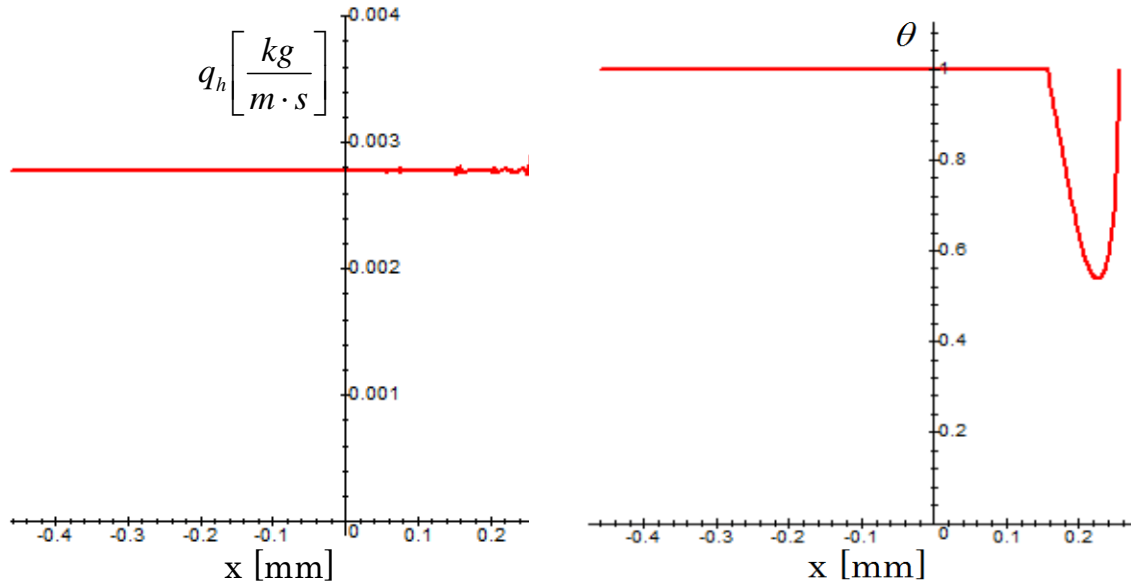


7.22. ábra Nyomáeloszlás 1,9-es csúszási arány mellett

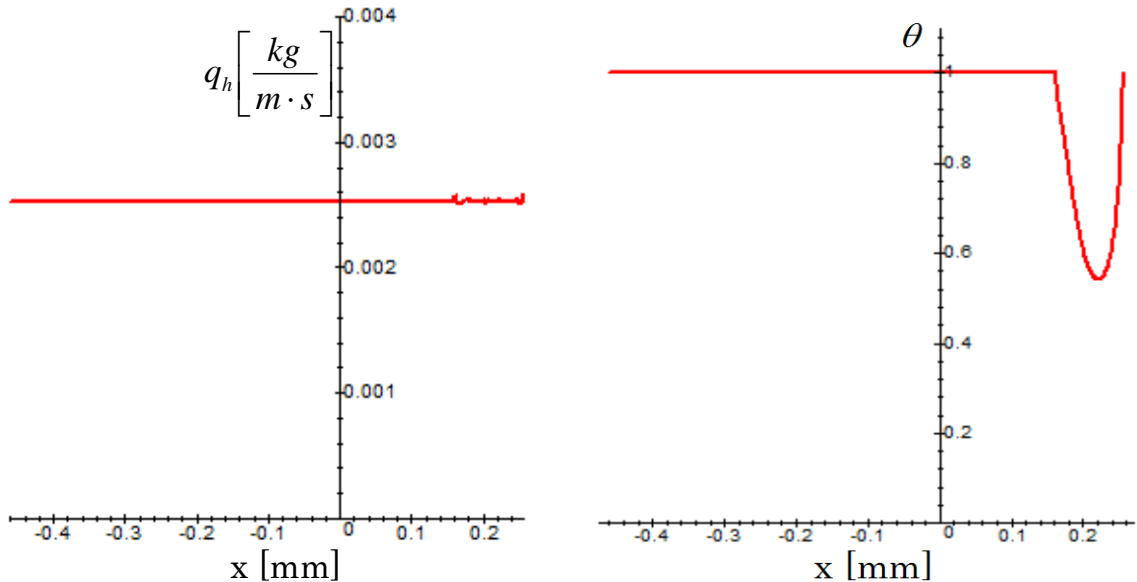


7.23. ábra Hőmérsékleteloszlás 1,9-es csúszási arány mellett

A feladat megoldásához hozzátartozik a résmenti tömegáram állandóságának ellenőrzése és a kidolgozott büntetőparaméteres technika melletti kitöltési paraméter, melyet a 7.24. ábra mutat. Jól látható, hogy a résben a tömegáram állandó, miközben a kavitáció is megjelenik.



7.24. ábra A rés menti tömegáram és kitöltési tényező tiszta gördülés esetén



7.25. ábra A rés menti tömegáram és kitöltési tényező 1,9-es csúszási arány mellett

A fentiek alapján kijelenthető, hogy a kifejlesztett p-verziós végeleemes számítási módszer alkalmas eszköz termo-elasztohidrodinamikai feladatok megoldására is.

(8.) Új tudományos eredmények összefoglalása; hasznosítási és továbbfejlesztési lehetőségek

(8.1) Tézisek

1. *A turbulens és az inercia tagokon kívül, egyéb elhanyagolásokat nem tartalmazó eddigi legáltalánosabb alaknak tekinthető Reynolds egyenlet olyan módosított alakját írtam fel, amelyben a Dowson féle viszkozitási-sűrűségi függvények módosított alakjai egyaránt érvényesek newtoni és nem-newtoni kenőanyag esetén, figyelembe véve mind a viszkozitás, mind a sűrűség és annak deriváltjának résmenti változását. Az egyenletnek ez a formája, a kenéselméleti problémák egyes folyadéksúrlódási eseteire érvényes egyenleteit általánosított alakba foglalja és egyaránt alkalmazható kvázi-statisztikus, valamint dinamikai feladatok megoldására is {7}, {8}, {9}, {12}, {13}.*

2. *Kidolgoztam a kavitáció figyelembevételére szolgáló büntetőparaméteres technikát, amellyel az egész tartomány felett a nyomás mint ismeretlen mező jelenik meg a numerikus megoldási nehézségeket eredményező, finom hálót szükségessé tevő, vagy a kavitációs tartományban a kontinuitási feltételt ki nem elégítő kavitációs algoritmusok helyett. Ugyanakkor a büntetőparaméter növelésével határértékben a gyakorta alkalmazott Elrod-Adams féle algoritmusban szereplő kitöltési tényezőt kapjuk vissza. Kimutattam, hogy a büntetőparaméteres kitöltési tényező beépül az áramlástan és termodinamikai egyenletekbe úgy, hogy a megoldás során a kontinuitási feltétel nem sérül {10}, {11}, {14}, {15}.*

3. *Bemutattam, hogy a termo-elasztohidrodinamikai feladatoknál a be- és kilépésnél is az adiabatikus peremfeltétel alkalmazása az indokolt és egyben célszerű, így nem kell megkülönböztetni a be- és a kiáramlási tartományt. Ez jelentős könnyebbséget jelent a megoldás során, szemben a megszokott eljárással, ahol a belépésnél a hőmérsékleti, a kilépésnél pedig az adiabatikus peremfeltételt alkalmazzák, így fel kell osztani a peremet be- és kilépő zónára {7}, {8}, {9}.*

4. *Újszerű megoldást dolgoztam ki a kontakt-tartomány leképezésére folszerű érintkezéseknél Legendre függvények felhasználásával, mely során a diszkrét pontokban ismert perem geometriai közelítése egyszerűen elvégezhető, továbbá a Lagrange interpolációra épülő megoldáshoz képest sokkal pontosabb integrálási eredmények érhetőek el. A megoldás könnyen kiválthatja a hagyományos elemgeometria leképezést, amely érzékeny az oldalpontok kiosztására {12}.*

5. *Az általánosított Reynolds és a termodinamikai egyenletekből előállítottam a korábbi megoldásoknál általánosabb érvényű végeselem megoldás alapját képező diszkrétizált egyenleteket, figyelembe véve a büntetőparaméteres kavitációs modellt és a peremfeltételek levezetésénél a szilárd test hatását is {10}, {11}, {14}, {15}.*

Ennek során:

Megoldottam, hogy a résméret és a felületek deformációja ugyanabban a megszokott p -verziós diszkrétizált formában álljon elő, akár analitikus, akár numerikus úton számított a deformáció. Ennek érdekében, a szokásostól eltérően, analitikusan számított deformáció esetében, az approximáció szükséges paraméterei a hibanégyzet minimum elv alapján meghatározhatóak, és mint a nyomásapproximáció paramétereinek függvénye, hatásmátrix segítségével kifejezhető

Felállítottam a kenőanyagra vonatkozó numerikus, illetve a szilárd testre vonatkozó analitikus hőtani egyenletek kapcsolt modelljét, hogy iteráció helyett egy lépésben megoldhatóvá váljon a termodinamikai peremérték feladat. Ezért a kontaktfelületek diszkrétizált hőmérséklet-eloszlásának meghatározásánál hibanégyzet minimum elv alapján, hierarchikus approximációval közelítem a félvégtelen téren mozgó hőforrás okozta hőmérsékletmező analitikus megoldását. {7}, {8}, {9}, {12}, {13}. A megszokottól eltérően a kenőanyag-test határán a felületi hőmérséklet nem mint ismeretlen mező, hanem mint peremfeltétel van figyelembe véve. A hőmérsékleti peremfeltétel hatásmátrixon keresztül mint a kenőanyag hőmérsékletének függvénye jelenik meg.

6. *Újszerű lépésköz-optimalizálást vezettem be a numerikus elasztó-hidrodinamikai feladat Newton-Raphson megoldása során, mely jelentősen csökkenti a N-R lépések számát, illetve a megoldás oszcillációját. {3}*

(8.2) Az eredmények hasznosítása, továbbfejlesztési lehetőségek

A felépített p -verziós végeselemes modellezési technika alkalmas a folyadékkenési problémák széles körének megoldására, de alapvetően a termo-elasztohidrodinamikai feladatok megoldása során jelentkeznek előnyei. Mivel a megoldás nagymértékben lecsökkenti a szükséges elemszámot, így olyan feladatok megoldása során is alkalmazható lehet, mint az érdes felületek érintkezési problémái, vagy a dinamikus terhelésű felületpárok esete.

Az ismertetett modellezési úttól függetlenül, legyen az akár végeselemes, akár nem, a büntetőparaméteres kavitációs algoritmus könnyen adaptálható a kenéseméleti feladatok megoldása során.

A kidolgozott numerikus megoldási eljárás hatékonyan használható más, nemlineáris feladatok során is, ahol a megoldás a Newton–Raphson eljárásra épül. Ugyancsak széles körben alkalmazható a diszkrét pontokkal jellemzett görbült határu tartományok leképzése.

A mintafeladatok megoldásához megírt program vonalérintkezési feladatok megoldására alkalmas. Kívánatos a jövőben egy megfelelő programozási környezetben, például egy végeselem szoftvercsomaghoz illesztetten felépíteni a megoldást, kiterjesztve felületi érintkezésekre.

A kidolgozott módszer továbbfejlesztésének lehetősége természetesen továbbra is fennáll. Ilyen irány lehet a nem tisztán lamináris kenőanyag áramlással rendelkező feladatok megoldása vagy az upwind Petrov-Galerkin variációs elv alkalmazása az alapegyenletek integrál alakjának felállításához.

(8.3) Köszönetnyilvánítás

Életem 1990 óta szorosan összefonódott a Miskolci Egyetemmel. Előbb egyetemi hallgatóként, később doktorandusként, majd tanársegédként töltöttem napjaimat az almamáter falai között. Kapcsolatom azután is megmaradt, hogy a Bay Zoltán Logisztikai és Gyártástechnikai Intézetben folytattam kutatómunkám. Külön öröm számomra, hogy mint részállású adjunktus, ismét bekapcsolódhattam az oktatómunkába a Mechanikai Technológia Tanszéken. Az eltelt több mint 20 év alatt az Egyetem, ezen belül is leginkább az akkori Gépészmérnöki Kar és annak Gépelemek Tanszéke valamint a Bay-Logi minden munkatársa maximális

támogatásával végezhettem tanulmányaimat és munkámat. Reménytelen és igazságtalan is lenne névsort készíteni azokról, akik segítséggel, biztatással és jóakarattal voltak irányomban, hisz ennek ellenkezőjére nem volt példa. Hálával és tisztelettel gondolok mindannyiukra.

Nem tehetem meg viszont, hogy ne mondjak köszönetet azért a lehetőségért, melyet Dr. Döbröczöni Ádám professzor úr jóvoltából megragadhattam és módomban állt másfél évet eltölteni Monbusho ösztöndíjasként az Okayamai Egyetemen Akira Yoshida Professzor Úr irányítása alatt. Köszönöm Yoshida Professzor Úrnak azt a gondos és szerető támogatást, ami mind a mai napig kihat munkámra és magánéletemre.

Külön köszönet illeti Családomat, akik kitartóan noszogattak, a disszertáció elkészítésében segítettek és az ezzel járó nehézségeket türelemmel elszenvedték.

A „Csúszva-gördülő felületpárok termo-elasztohidrodinamikusan kenéselméleti vizsgálata p-verziós végeelem módszerrel” című Ph.D. értekezés a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

(9.) Summary

As well known, since Osborne Reynolds (1886), who approached the lubricating phenomenon analytically, presented the theory of hydro-dynamic lubrication and the governing partial differential equation for the pressure field, many complex problems in fluid-film lubrication have been studied.

Rolling-sliding machines such as gears, cams and followers, and bearings are often subjected to high loads, high speeds and high slip conditions. The elastohydrodynamic lubrication of rolling-sliding contacts has been investigated extensively by Dowson [2] and Higginson (1961), Sternlicht et al. (1961), Cheng (1965), Ghosh and Hamrock (1985), Houpert and Hamrock (1986), Lubrecht et al. (1986), and Sadeghi (1990). The generalized Reynolds equation was developed by Dowson [2] and Higginson (1961) as a differential equation.

Sternlicht et al. (1961) were one of the first researchers who investigated thermal effects in EHL contacts. Cheng and Sternlicht (1965) obtained the numerical solution of the thermal EHL model in which viscosity was assumed to be constant through the film thickness. Later, Cheng (1965) presented a refined solution in which viscosity was variable through the oil film. On the contrary, however, Murhc and Wilson (1975) analyzed the flow at inlet zone, and showed that there was a significant influence of thermal effects on minimum film thickness, particularly at high rolling speeds. Sadeghi (1990) presented a complete numerical solution of the thermal EHD rolling-sliding contacts. He also reported a significant influence of thermal effects on minimum film thickness. Wolff et al. (1992) [5] examined the influence of the different viscosity models on the results. He et al. advised to use the modified WLF formula for TEHD problems, which has the best fitting of experimentally measured viscosity.

These works based on the solution of the generalized Reynolds equation by finite difference method. However, in many practical problems involving complex film thickness, irregular bearing shapes and boundary conditions, the finite difference methods are clumsy and difficult to use. Lubrication analysts began looking into the finite element formulation in the sixties Reddi (1969), in the seventies Reddi and Chu (1970), Rohde (1974) and Rohde an Oh (1975), and in the eighties Gercia-Suarez et al. (1984), and they found the method promising and reliable. Freund and Tieu (1993) [6] used h-FEM for solving the generalised Reynolds equation. In these

investigations, the traditional h-version finite element method (h-FEM) had been used in the formulation for lubrication problems till 1991 when Nguyen [4] reported an analysis using p-version finite element method. That was the first p-version formulation for lubrication problems but the geometry and the oil properties were assumed to be constant. Actually the p-approximation concept was introduced by Zienkiewicz et al. (1970). It was soon followed by others, e.g. Babuska et al. (1979), but the most p-version formulations appear in the literature dealing with problems in solid mechanics and heat transfers.

In this work the application possibility of p-FEM for TEHD problem is presented with the necessary developments.

As the first stage of the recent work, based on the concepts of Dowson and Higginson, the most general Reynolds equation has been developed neglecting only the turbulences and inertia forces. The given equation is valid for Newtonian and non-Newtonian lubricant, under static and dynamic condition as well. The temperature variation through the fluid film has been taken into consideration for thermodynamic problem of the fluid-film contact.

For FEM governing equation the weak form of the weighted-residual integral form of the Reynolds and energy equation have been applied. Legendre functions have been used for the polynomial approximation of the unknown pressure and temperature distribution. The p-FEM based solution of TEHD problems, the polynomial approximation makes the opportunity of replacement of the smooth mesh with a rough one.

In order to have the compatible formulation to the well-known FEM solutions, the film shape has been calculated as a superposition of the discretized original geometry, the displacement of a rigid surface and the discretized deformation of a half-space under pressure. The parameters for discretized deformation have been determined from the least square approximation of the analytical solution for half-space.

On one hand p-FEM makes the opportunity of replacement of the smooth mesh with a rough one. On the other hand applying rough mesh at the end of the contact can locate far from the boundaries of the elements. Due to this fact cavitation has to be managed inside elements instead of deactivating the elements where the cavitation occurs. Nevertheless, in most cases, a lower level of accuracy

of cavitation can be acceptable. In these cases, the widely used penalty parameter based approximation can be used. So, a new penalty parameter model is given to approximate the density-pressure relation according to Kumar and Booker. The approximation can be increased with applying higher penalty values. The penalty parameter does not keep the value of pressure but, according to Swift boundary condition, the gradient of pressure is around zero, so it is applicable if cavitation pressure $p_c \neq 0$, as well. We have to notice that the density depends on the pressure not only in the lubrication region, but in the cavitation zone, as well. Contrary to the previous penalty parameter methods, here the continuity can be provided, so this method can be used for thermo-hydraulic problems, too.

As for further development, the boundary conditions for thermal problem have been redefined. Unlike other works, it has been shown that all inlet and outlet boundaries can be treated as adiabatic boundaries, so no further effort has to be done to separate the two kinds of boundaries.

For the contact surfaces, substructure model has been defined based on the p-version approximation of surface temperature determined by analytical solution of the moving heat source (Carslaw and Jaeger (1959) [1]). The thermal models for lubricant and surfaces have been solved as a coupled analysis in one step.

Concerning the geometry transformation of the element for integration, new p-version element type has been developed. The sides of the new element can be defined by discrete points. Opposite to the traditional element defined by Lagrange interpolation, the locations of the points have no significant effect on the transformation and the Jacobian matrix, so the integration error can be decreased.

New optimized Newton-Raphson method has been implemented for solving the nonlinear equation system. The proposed technique reduces the step number during the iteration and the solution is stabilized.

Finally, it can be concluded that the developed tools are useful for solving TEHD lubrication problems with good efficiency. Reduce the model size by decreasing the number of elements and it can be implemented for other problem types as well, such as rough surfaces, dynamically loaded bearings. The geometry transformation and the numerical solver are applicable for non-tribology problems where nonlinear problem has to be solved or complex geometries have to be meshed for p-version finite element model.

(10.) Az értekezés témájában megjelent tudományos publikációk

Hazai konferencia előadások

1. Sz. Szávai, Gy. Szota: Tribological problems of the twist drive at double-twist bunching machine, VI. Nemzetközi Tribológiai Konferencia, Budapest, 1996. június 6-7.
2. Sz. Szávai: Thermo-Elasto Hidrodinamikusan Kenésállapot Modellezése Végeselem Módszerrel, Géptervezők és Termékfejlesztők XV. Országos Szemináriuma, Miskolc, 1999. szept. 30-okt.
3. Szávai Sz.: Optimalizált Newton-Rapson Algoritmus TEHD feladat megoldásához, Géptervezők és Termékfejlesztők XXVI. Szemináriuma Miskolc, 2010. november 11-12.

Nemzetközi konferencia előadások

4. Sz. Szávai, Á. Szávai, Quality control of pressure joints, Junior-Euromat '96 Conference, Lausanne, 1996. augusztus 26-30.

Nemzetközi konferenciák kiadványaiban megjelent publikációk

5. Szávai Sz., Rugalmas anyagú siklócsapágyak, II. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka (109-112. old.), Kolozsvár, 1997. március 21-22.
6. Sz. Szávai: Sliding bearings made of elastic material, International Conference of Ph.D. Students (251-257. old), Miskolc, 1997. augusztus 11-17.
7. Sz. Szávai: Solution method for TEHD problems based on P-version FEM model, 2nd International Conference of Ph.D. Students (pp. 233-238.), Miskolc, 1999. augusztus 8-14.
8. Sz. Szávai: Solution method for TEHD problems based on p-version FEM model, 7th International Conference on Tribology (pp. 311-314.), Budapest, 2000. szeptember 4-5.
9. Sz. Szávai: Solution method for TEHD problems based on p-version FEM model, 2th World Tribology Congress (CD), Bécs, 2-7. September 2001.
10. Sz. Szávai: Penalty-Parameter Based Cavitation Model for Solving Thermo-Elastohydrodynamic Lubrication Problems, 8th International Conference on Tribology (pp. 95-99), Veszprém, 3-4. June 2004.

Lektorált magyar nyelvű publikációk

11. Szávai Sz.: Büntető Paraméteres Kavitációs Modell Termo-Elasztohidrodinamikusan Kenésméleti Problémák Megoldásához, Géptervezők és Termékfejlesztők XIX-Országos Szemináriuma, Miskolc, 2003. november 13-14.; megjelent: Gép (pp.151-154.), Vol. LIV. No.: 10-11., 2003.

Lektorált idegennyelvű publikációk

12. Sz. Szávai, Masahiro Fujii, Akira Yoshida: P-version FEM model as a possible powerful calculation method of THED problems, Japanese Scientific Conference of Machine Theory, 1999. március 8., megjelent: Nippon Kikai Gakkai Chugoku Shikoku Shibu Sokai, Koenkai Koen Ronbunshu (pp. 61-62.), Yamaguchi, Vol. 37.,1999.
13. Sz. Szávai: Solution method for TEHD problems based on P-version FEM model, Publ. Univ. of Miskolc, Series C, Mechanical Engineering (pp. 153-160.), Miskolc, Vol. 48. 1999.
14. Sz. Szávai: Penalty-parameter based cavitation model for solving thermo-elastohydrodynamic lubrication problems, International Journal of Applied Mechanics and Engineering (pp. 233-239), vol.9 - Special issue: ITC 2004
15. Sz. Szávai; Efficient p-version FEM Solution for TEHD Problems with New Penalty-Parameter Based Cavitation Model, BALTTTRIB'2009, Kaunas, 19-21 November 2009; megjelenik: Conf. proc of BALTTTRIB'2009 (ISSN 1822-8801)

(11.) Felhasznált irodalom

- [1] Amontons, G., 1699, De La Resistance Causee dans les Machines, Roy. Soc., Paris,
- [2] Coulomb, C. A., 1785, Theorie des Machines Simples, Mem. Math. Phys. Acad. Sci.
- [3] Al Hirn, 1854, G. A., "Sur Les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats et sur les diverses manières de déterminer la valcur mécanique des matières employées au graissage des machines", Bull. Sic. Ind. de Mulhouse, Vol. 25.
- [4] Hertz, H., 1882, „Über die Berührung fester elastischer Körper“, J. reine und angewandte Mathematik, Vol 92, pp. 156-171.
- [5] Hertz, H., 1882, „Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte“, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, Leipzig
- [6] Petroff, N. P., 1883, "Friction in Machines and the Effect of the Lubricant", Inzhenerii Zhurnal, St. Petersburg, Vol. 1, pp. 71-140.
- [7] Tower, B., 1883, "First Report on Friction Experiments", Proc. Inst. Mech. Eng., pp. 632-66.
- [8] Reynolds, O., 1886, "On the Theory of Lubrication and Its Applications to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil", Phi. Trans., Vol. 177(I), pp. 157-234.
- [9] Barus, C., 1893, "Isotherms, Isopiestic, and Isometrics Relative to Viscosity", Am. J. Sci., 45, pp. 87-96
- [10] Kingsbury, A., 1897, "Experiments with an Air Lubricated Bearding", Journal of the American Society of Naval Engineers, Vol. 9.
- [11] Sommerfeld, A., 1904, "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung", Z. Math. und Physik, Vol. 50.
- [12] Michell, A. G. M., 1905, "The Lubrication of Plane Surfaces", Z. Math. und Physik, Vol. 132.
- [13] Rayleigh, Lord, 1918, "Notes on the Theory of Lubrication", Phil. Mag., Vol. 35, No. 1.
- [14] Martin, A. M., 1916, "The Lubrication of Gear Teeth", Engineering, Vol. 102, pp. 119.
- [15] da Vinci, L, 1519, The Notebooks of Leonardo da Vinci, szerk. E. Macurdy, Reynal & Hitchcock, New York, 1938
- [16] Stodola, A., 1925, "Kritische Wellenstoerung infolge der Nachgiebigkeit des Oelposters im Lager", Schweizerische Bauzeitung, Vol. 85., pp. 265-266.
- [17] Newkirk, B. L., Taylor, H., D., 1925, "Shaft Whipping Due to oil Action in Journal Bearings", Gen. El. Review, Vol. 28., p. 559.

-
- [18] Swift, H. W., 1932, "The Stability of Lubricating Film in Journal Bearings ", Proc. of the Institution of Civil Engineering, Vol. 233., pp. 267-322.
- [19] Swift, H. W., 1937, "Fluctuating Loads in Sleeve Bearings", Journal of the Institution of Civil Engineering, Vol. 5., pp. 151-195.
- [20] Ertel A. M., 1939, "Hydrodynamic Lubrication Based on New Principles" Akad. Nauk SSSR Prikadnaya Matematika i Mekhanika, Vol. 3, no.:2, pp. 41-52.
- [21] Courant, R., 1943, "Variational Methods for the Solution of Problem of Equilibrium and Vibrations", Bulletin of American Mathematics Society, Vol. 49., pp. 1-23.
- [22] Hang, A., C., 1946, "The Influence of oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 13 No. ?, pp. 200-211.
- [23] Cope, W., F., 1949, "A hydrodynamic theory of film lubrication", Proc. of Royal Society, Vol. 197. A., pp. 201-217.
- [24] Grubin, A. N., Vinogaroda, I.E., 1949, "1949 Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering", Moscow Book No. 30, English Translation D.S.I.R.
- [25] Petrusevich, A. I., 1951, "Fundamental Conclusions from the Contact-Hydrodynamic Theory of Lubrication", Izv. Uzbekist. Fil. Akad. Nauk SSSR 209.
- [26] Charnes, A., Osterle, F. és Saibel, E., 1952, "On the Energy Equation for Fluid-Film Lubrication", Proc. of Royal Society, Vol. 214. A., pp. 133-137.
- [27] Pestel, E., 1954, "Beitrag zur Ermittlung der Hydrodynamischen Dampflungs und Federeigenschaften von Gleitlagern", Ingenieur-Archive, Vol. 22 No. 3., pp. 147-155.
- [28] Pinkus, O., 1956, "Analysis of Elliptical Bearings", Trans. ASME, Vol. 78, Július.
- [29] Cole, J. A. és Hughes, C. J., 1956, "Oil Flow and Film Extent in Complet Journal Bearings", Proc. Inst. Mechanical Engineers, London, Vol. 170, No. 17.
- [30] Turner, M., J., Clough, R., J., Martin, H., C. és Topp, L., J., 1956, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", Journal of Aeronautics Science, Vol. 23., No. 9., pp. 805-823.
- [31] Floberg, L., Jakobsson, B., 1957, "The Finite Journal Bearing, Considering Vaporization", Trans. Chalmers Univ. Tech., Goteborg, pp. 190.
- [32] Tondl, A., 1957, "The Motion of a Journal Bearing in the Unstable Region of Equilibrium Position of the Center of the Journal", Ninth International Congress of Applied Mechanics, Vol. 5.
- [33] Raimondi, A. A., és Boyd, J., 1958, "A Solution for the Finite Journal Bearings and Its Application to Analysis and Design", Trans. ASLE, Vol. 80 No. 1, 159-209.
- [34] Raimondi, A. A. és Boyd, J., 1958, "A Solution for the Finite Journal Bearings and Its Application to Analysis and Design-III ", Trans. ASLE, Vol. 1, No 1.

-
- [35] Hays, D. F., 1958, "Plane Sliders of Finite Width", Trans. ASLE, Vol. 1, No 2.
- [36] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press.
- [37] Dowson, D. és Higginson, G., R., 1959, "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem", Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 1 No. 1, pp. 6-15.
- [38] Dowson, D. és Higginson, G., R., 1961, "New Roller-Bearing Lubrication Formula", Engineering London, Vol. 192, p. 158.
- [39] Floberg, L., 1961, "Boundary Conditions of Cavitation Region in Journal Bearings", Trans. ASLE, Vol. 4, pp. 262-266.
- [40] Sternlicht, B., Lewis, P. and Flynn, P., 1961, "Theory of lubrication and Failure of Rolling Contacts", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 83., pp. 213-226.
- [41] Dowson, D., 1962, "A Generalised Reynolds Equation for Fluid-Film Lubrication", Int. Journal of Mechanical Science, Pergamon Press.
- [42] Sternlicht, B., 1962, "Stability and Dynamics of Rotors Supported on Fluid Film Bearings", Trans. ASLE paper
- [43] Gross, W., 1962, "Gas Film Lubrication", Wiley, New York
- [44] Dowson, D. és Hudson, J., D., 1963, "Thermohydrodynamic Analysis of the finite Slider Bearing I-II", Proc. Institution of Mechanical Engineers, Lubrication and Wear Convention
- [45] Roelands, C. J. A. Vlugter, J. G. and Waterman, H. I., 1963, "The Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils and Its Correlation with Chemical Constitution", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 85., pp. 601-610.
- [46] Floberg, L., 1964, "Cavitation in Lubricating oil films. In Cavitation in Real Liquid", R. Davies (ed.) American Elsevier, New York
- [47] Taylor, G. I., 1964, "Cavitation in Lubricating oil films. In Cavitation in Real Liquid", R. Davies (ed.) American Elsevier, New York
- [48] Floberg, L., 1965, "On Hydrodynamic Lubrication with Special Reference to Subcavity Pressures and Number of Streamers in Cavitation Regions", Acta Polytech. Scand. Mech. Eng. Ser., Vol. 19, pp. 3-35.
- [49] Lund, J., W., 1965, "The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible Damped Supports", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32. No. 4, pp. 911-920.
- [50] Carl, T., E., 1965, "The Experimental Investigation of a Cylindrical Journal Bearing Under Constant and Sinusoidal Loading", Proc. of the 2nd Convention on Lubrication and Wear, Institution of Mechanical Engineers, London

-
- [51] Cheng, H., S és Sternlicht, B., 1965, "A Numerical Solution for the Pressure, Temperature and Film Thickness Between Two Infinitely Long, Lubricated Rolling and Sliding Cylinders, Under Heavy Load", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 87., pp. 695-707.
- [52] Cheng, H., S, 1965, "A Refined Solution of the Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling and Sliding Cylinders", ASLE Trans., Vol. 8., pp. 379-410.
- [53] Olsson, K., 1965, "Cavitation in Dynamically Loaded Bearings", Trans. Chalmers Univ. Tech., Goteborg, p. 308.
- [54] Tanner, R., I., 1966, "An Alternative Mechanism for the Lubrication of Sinovial Joints", Physics in Medicine and Biology, Vol. 11. P 119.
- [55] Cameron, A., 1966, "The Principles of Lubrication", Wiley, New York
- [56] Dowson, D. és March, C., N., 1967, "A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings", Proc. Institution of Mechanical Engineers, Vol. 181, pp. 117-126
- [57] Dowson, D., 1967, "Modes of Lubrication in Human Joints", Proc. of the Symposium on Lubrication and Wear in Living and Artificial Human Joints, Institution of Mechanical Engineers, London
- [58] Dowson, D., 1968, "Elastohydrodynamics", Proc. Institution of Mechanical Engineers, Vol. 182, pp.: 151-167.
- [59] Castelli v. and Pirvics J., 1968, "Review of numerical methods in gas bearing film analysis", ASME Journal of Lubrication Tecnology, Vol. 90. No. 4, pp. 777-792.
- [60] Ergatoudis, J., G., Irons, B., M. és Zienkiewicz, O., C., 1968, "Curved Isoparametric, Quadrilateral Element for Finite Element Analysis", International Journal of Solid Structures, Vol. 4. No. 1, pp. 31-42.
- [61] Reddi, M. M., 1969, "Finite Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem", ASME Journal of Lubrication Tecnology, Vol. 91., No. 3, pp. 524-533.
- [62] Fujino, T., 1969, "Analysis of Hydrodynamic Problems by the Finite Element Method", Japan-US Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo Augustus 25-30, Paper No. J5-4
- [63] Argyris, J., H. és Scharpf, D., W., 1969, "The Incomprissible Lubrication Problem", 12th Lanchester Memorial Lecture, Appendix IV, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 14., No. 77, pp. 1044-1046.
- [64] Coyne, J. C. és Elrod, H. G., 1970., "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film, Part 2., New Boundary Conditions for Reynolds' Equation", ASME Pap., 70-Lub-3.
- [65] Coyne, J. C. és Elrod, H. G., 1970., "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film, Part 1., Theoretical Model", ASME Journal of Lubrication Tecnology, Vol. 92., No. 3, pp. 451-457.

-
- [66] Reddi, M. M. és Chu, T., Y., 1970, "Finite Element Solution of the Steady-State Compressible Lubrication Problem", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 92., No. 3, pp. 495-503
- [67] Cheng, H. S., 1970, "A Numerical Solution of the Elastohydrodynamic Film Thickness in an Elliptical Contact", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 92, No. 1, pp. 155-162.
- [68] McCallion, H., Yousif, F. és Lloyd, T., 1970, "The Analysis of Thermal Effects in a Full Journal Bearing", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 92, No. 4, pp. 578-586.
- [69] Wada, S., Hayashi, H. és Migita, M., 1971, "Application of Finite-Element Method to Hydrodynamic Lubrication Problems (Part 1, Infinite-Width Bearings)", Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 14, No. 77, pp. 1222-1233.
- [70] Wada, S. és Hayashi, H., 1971, "Application of Finite-Element Method to Hydrodynamic Lubrication Problems (Part 2, Finite-Width Bearings)", Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 14, No. 77, pp. 1234-1244.
- [71] Allan, T., 1972, "The Application of Finite Element Method to Hydrodynamic and Externally Pressurized Pocket Bearings", Wear, Vol. 19. február, pp. 169-206.
- [72] Ezzat, H., A. és Rohde, S., M., 1972, "A Study of the Thermohydrodynamic Performance of Finite Slider Bearings", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 95, No. 2, pp. 298-307.
- [73] Booker, J. F. and Huebner, K. H., 1972, "Application of the Finite Element Method to Lubrication: An Engineering Approach", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 94, No. 4, pp. 313-323.
- [74] Taylor, C. and O'Callaghan, J. F., 1972, "A Numerical Solution of the Elastohydrodynamic Lubrication Problem Using Finite Elements", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 14, No. 4, pp. 229-237
- [75] Rohde, S., M., 1974, "Finite Element Optimization of Finite Stepped Slider Bearing Profiles", Trans ASLE, Vol 17., No. 2.
- [76] Huebner, K., H., 1974, "Application of Finite Element Methods to Thermohydrodynamic Lubrication", Int. J. of Numerical Methods in Engineering, Vol. 8., No. 2., pp. 139-165
- [77] Rohde, S., M., és McAllister, G., T., 1975, "A Variational Formulation for a Class of free Boundary Problems Arising in Hydrodynamic Lubrication", International Journal of Mechanical Engineering, Vol 13.
- [78] Rohde, S., M., és Oh, K., P., 1975, "A Thermoelastohydrodynamic Analysis of Finite Slider Bearings", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol 97., pp. 450-460.
- [79] Szota Gy., 1974, Sikócsapágyak tervezése, Műszaki könyvkiadó, Budapest

-
- [80] Elrod, H. G., és Adams, M. L., 1975, "A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems", *Cavitation and Related Phenomena in Lubrication*, (Proc. 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds, England, szept. 1974), szerk.: Dowson, D., Godet, M. és Taylor, C. M. Mechanical Engineering Publications Ltd., London, pp. 37-41.
- [81] Browne, A., L., Whicker, D. és Rohde, S., M., 1975, "The Significance of Thread Element Flexibility on Thin Wet Traction", *Tire Science and Technology Journal*, Vol. 3. No. 4.
- [82] Huilgol, R., R., 1975, "On the Concept of the Deborah Number", *Trans. Society of Rheology*, Vol. 19, pp. 297-306.
- [83] Rohde, S. M. and Oh, K. P., 1975, "A Unifield Treatment of Thick and Thin Film Elastohydrodynamic Problems by Using Higher Order Element Methods", *Proc. Royal Soc., Series A (London)*, Vol. 343, 1975, pp. 325-331.
- [84] Rohde, S. M. and Oh, K. P., 1975, "A Thermoealstohydrodynamic Analysis of a finite Slider Bearing", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 97, No. 3, 1975, pp. 450-460.
- [85] Huebner, K., 1975, "The Finite Element Method for Engineers", Wiley, New York
- [86] Hamrock, B. J., és Dowson, D., 1976, "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts Part I – Theoretical Formulation", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 98, No. 2, pp. 223-229.
- [87] Alleire, P. E., Nicolas, J., C. és Gunter, E., J., 1977, "Systems of Finite Elements for Finite Bearings", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 99, No. 2, pp. 187-197.
- [88] Hamrock, B. J., és Dowson, D., 1977, "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts Part III – Fully Flooded Results", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 99, No. 2, pp. 264-276.
- [89] Savage, M. D., 1977, "Cavitation in Lubrication", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 80, pp. 743-767
- [90] Brandt, A., 1977, "Multi-level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems", *Mathematics of Computing*, Vol. 31. No. 138, pp. 333-390
- [91] Suganami, T. és Szeri, A., Z., 1979, "A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 101, No. 1, pp. 21-27.
- [92] Bourgin, D., 1979. "Fluid-Film Flows of Differential Fluids of Complexity n Dimensional Approach – Application to Lubrication Theory", *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 101, No. 1, pp. 140-144.

-
- [93] Li, D., F., Choy, K., C. és Allaire P., E., 1980, "Stability and Transient Characteristics of Four Multilobe Journal Bearings", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 102, No. 2, pp. 291-299.
- [94] Elrod, H. G., 1981, "A Cavitation Algorithm", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 103, No. 2, pp. 350- 354.
- [95] Conry, T., F., 1981, "Thermal Effects on Traction in EHD Lubrication", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 103, No. 3, pp. 533-538.
- [96] Szabó, B., Babuska, I. és Katz, I. N., 1981, "The p-Version of the Finite Element Method", SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 18, pp. 515-545.
- [97] Curnier, A., R. és Taylor, R., L., 1982, "A Thermomechanical Formulation and Solution of Lubricated Contacts Between Deformable Solids", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 104, No. 1, pp. 109-117.
- [98] Jones, G. J., 1983, "Crackshaft Bearings: Oil Film History", Tribology of Reciprocating Engines, (Proc. 9. Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds, England, September 7-10, 1982), Eds. D. Dowson, C. M. Taylor, M. Godet and D. Berthe, Butterworths, London, England, pp. 83-88.
- [99] Shu, C. F. és Booker, J. F., 1983, "Finite Element Analysis of Elastohydrodynamic Lubrication" Proc. 10. Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Lyon, France, September
- [100] Hamrock, B. J. and Jacobson, Bo O. 1984, " Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts", Tribology Transactions, Vol. 27. No. 4, pp. 275-287.
- [101] Goenka, P. K., 1984, "Dynamically Loaded Journal Bearings: Finite Element Method Analysis", ASME Journal of Tribology, Vol. 106. No. 4, pp. 429-439.
- [102] Allaire, P. E., Kocur, J. A., and Nicholas, J. C., "A Pressure Parameter Method For Finite Element Solutions of Reynolds Equation", ASLE Transactions, Vol. 28, No. 2, April 1985, pp. 150-158.
- [103] LaBouff, G. A. és Booker, J. F., 1985, "Dynamically Loaded Journal Bearings: Finite Element Treatment for Rigid and Elastic Surfaces ", ASME Journal of Tribology, Vol. 107. No. 4, pp. 505-515.
- [104] Gethin, D., T., 1985, "An Investigation into Plain Journal Bearing Behavior Including Thermo-Elastic Deformation of the Bush", Proc. of Institution of Mechanical Engineering, Vol. 109. No. 3, p. 215.
- [105] Terauchi, Y, Nadano, H és Kohno, M, 1985, "On the Temperature Rise Caused by Moving Heat Sources (2nd Report, Calculation of Temperature Considering Heat Radiation from Surface)", Bulletin of JSME, Vol. 28. No. 245, pp. 2789-2795.

- [106] Chittenden, R. J., Dowson, D., Dunn, J. F., és Taylor, C. M., 1985, "A Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts, Part I-II.", Proc. of Royal Society, Vol. 397. A., pp. 245-294.
- [107] Johnson, K., L., 1985, "Contact Mechanics", Cambridge Univ. Press, Cambridge
- [108] Obata, F, Fujita, K és Fujii, M, 1986, "Temperature Rise of Spur Gear Tooth Due to Repeated Action of Moving Heat Sources", Bulletin of JSME, Vol. 29. No. 258, pp. 4403-4408.
- [109] Boncompain, R., Fillon, M. és Frêne, J., 1986 "Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 108, No. 2, pp. 219-224.
- [110] Houpert, L. G. and Hamrock, B. J., 1986 "A Fast Approach for Calculating Film Thickness and Pressure in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads", ASME Journal of Tribology, Vol. 108, No. 3, pp. 411-420.
- [111] Lubrecht, A. A., Napel, W. E. és Bosma, R., 1986, "Multigrid, An Alternative Method for Calculating Film Thickness and Pressure Profiles in Elastohydrodynamic Lubricated Line Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 108. No. 4, pp. 551-556.
- [112] Brewe, D. E., 1986, "Theoretical Modelling of Vapour Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 108. No. 4, pp. 628-638.
- [113] Wu, S. R., 1986, "A Penalty Formulation and Numerical Approximation of the Reynolds-Hertz Problem of Elastohydrodynamic Lubrication", International Journal of Engineering Science, Vol. 24. No. 6, pp. 1001-1013.
- [114] Pinkus, O., 1987, "The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication", ASME Journal of Tribology, Vol. 109. No. 1, pp. 2-20.
- [115] Lubrecht, A., A., ten Napel, W., E., 1987, "Multigrid, an Alternative Method of Solution for Two-Dimensional Elastohydrodynamically Lubricated Point Contact Calculations", ASME Journal of Tribology, Vol. 109. No. 3, pp. 437-443.
- [116] Wang, S., H., Zhang, H., H., 1987, "Combined Effects of Thermal and Non-Newtonian Character of Lubricant on Pressure, Film Profile, Temperature Rise, and Shear Stress", ASME Journal of Tribology, Vol. 109. No. 4, pp. 666-670.
- [117] Gethin, D., T., 1988, "A Finite Element Approach to Analysing Thermohydrodynamic Lubrication in Journal Bearings", Tribology International, Vol. 21. , p. 21.
- [118] Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G., 1989, "Numerical Prediction of Cavitation in Noncircular Journal Bearings", STLE Tribology Transaction, Vol. 32, No. 2, pp. 215-224.
- [119] Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G., 1989, "Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm", STLE Tribology Transaction, Vol. 32, No. 2, pp. 225-233.
- [120] Najji, B., Bou-Said, B. és Berthe, D., 1989, "New Formulation for Lubrication with Non-Newtonian Fluids", ASME Journal of Tribology, Vol. 111. No. 1, pp. 29-34.

-
- [121] Chang, L., Conry, T., F. és Cusano, C., 1989, "An Efficient, Robust, Multi-Level Computational Algorithm for Elastohydrodynamic Lubrication", ASME Journal of Tribology, Vol. 111. No. 2, pp. 193-199.
- [122] Woods, C. M. és Brewe, D. E., 1989, "The Solution of the Elrod Algorithm for a Dynamically Loaded Journal Bearings Using Multigrid Techniques", ASME Journal of Tribology, Vol. 111. No. 2, pp. 302-308.
- [123] Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G., 1990, "An Efficient Robust and Time Accurate Numerical Scheme Applied to a Cavitation Algorithm", ASME Journal of Tribology, Vol. 112. No. 1, pp. 44-51.
- [124] Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G., 1990, "Grid Transformation and Adaption Techniques Applied in the Analysis of Cavitated Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 112. No. 1, pp. 52-59.
- [125] Vijayaraghavan, D. és Keith, T. G., 1990, "Analysis of a Finite Grooved Misaligned Journal Bearings Considering Cavitation and Starvation Effects", ASME Journal of Tribology, Vol. 112. No. 1, pp. 60-67.
- [126] Sadeghi, F., and Sui, P. C., 1990, "Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 112, pp. 189-195.
- [127] Mittwollen, N. és Glienicke, J., 1990, "Operating Condition of Multi-Lobe Journal Bearings under High Thermal Loads", ASME Journal of Tribology, Vol. 112. No. 3, pp. 330-338.
- [128] Lee, R., T. és Hamrock, B., J., 1990, "A Circular Non-Newtonian Fluid Model: Part I – Used in Elastohydrodynamic Lubrication", ASME Journal of Tribology, Vol. 112. No. 3, pp. 486-496.
- [129] Nguyen, S. H., 1991, "p-Version Incompressible Lubrication Finite Element Analysis of Large Width Bearing", ASME Journal of Tribology, Vol. 113, No. 1, pp. 116-119.
- [130] Sui, P. C. és Sadeghi, F., 1991, "Thermoelastic Effects in Lubricated Rolling/Sliding Line Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 1., pp. 174-181.
- [131] Salehizadeh, H. és Saka, N., 1991, "Thermal non-Newtonian Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling Line Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 3., pp. 481-491.
- [132] Wang, S., Cusano, C és Conry, T., F., 1991, "Thermal Analysis of Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts Using the Ree-Eyring Fluid Model", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 2., pp. 232-244.
- [133] Vijayaraghavan, D., Keith, T. G. és Brewe, D. E., 1991, "Extension of Transonic Flow Computational Concepts in the Analysis of Cavitated Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 3, pp. 539-546.

-
- [134] Kumar, A. és Booker, J. F., 1991, "A Finite Element Cavitation Algorithm: Application/Validation", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 2, pp. 255-261.
- [135] Kumar, A. és Booker, J. F., 1991, "A Finite Element Cavitation Algorithm", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 2, pp. 276-286.
- [136] Khonsari, M. M. és Wang, S. H., 1991, "On the Fluid-Solid Interaction in Reference to Thermoelastohydrodynamic Analysis of Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 113. No. 2, pp. 398-404.
- [137] Szabó, B., Babuska, I., 1991., "Finite Element Analysis", John Wiley & Sons Inc., New York,
- [138] Wolff, R. J., Kubo, A., Nonaka, T. and Matsuo, K., 1991, "The Influence of Thermal Effects on EHD Lubrication", Proc. of the Int. Conf., on Motion and Power Transmission, Japan, pp. 947-952.
- [139] Kim, K., H. és Sadeghi, F., 1992, "Three-Dimensional Temperature Distribution in EHD Lubrication: Part I. – Circular Contact", ASME Journal of Tribology, Vol. 114. No. 1, pp. 32-42.
- [140] Payvar, P. és Salant, R. F., 1992, "A Computational Method for Cavitation in Wavy Mechanical Seal", ASME Journal of Tribology, Vol. 114. No. 2, pp. 199-204.
- [141] Wang, S., Conry, T., F. és Cusano, C, 1991, "Thermal Non-Newtonian Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts Under Simple Sliding Conditions", ASME Journal of Tribology, Vol. 114. No. 2., pp. 317-327.
- [142] Hsiao, Hsing-Sen, S. és Hamrock, B., J., 1992, "A Complete Solution for Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts Using Circular Non-Newtonian Fluid Model", ASME Journal of Tribology, Vol. 114. No. 3, pp. 540-552.
- [143] Wolff, R., Nonaka, T., Kubo, A. és Matsuo, K., 1992, "Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Line Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 114. No. 4, pp. 706-713.
- [144] Venner, C., H. és Napel, W., E. 1992, "Multilevel Solution of the Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contact Problem, Part I: Theory and Numerical Algorithm", Wear, Vol. 152., pp. 351-367.
- [145] Venner, C., H. és Napel, W., E. 1992, "Multilevel Solution of the Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contact Problem, Part I: Smooth Surface Results", Wear, Vol. 152., pp. 369-381.
- [146] Kim, K., H. és Sadeghi, F., 1993, "Three-Dimensional Temperature Distribution in EHD Lubrication: Part I. – Point Contact and Numerical Formulation", ASME Journal of Tribology, Vol. 115. No. 1, pp. 36-45.

-
- [147] Freund, N., O. és Tieu, A., K., 1993, "A Thermal Elasto-Hydrodynamic Study of Journal Bearing with Controlled Deflection", ASME Journal of Tribology, Vol. 115. No 3, pp. 550-556.
- [148] Lee, R., T. és Hsu, C., H. 1993, "A Fast Method for the analysis of Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Line Contacts", Wear, Vol. 166., pp. 107-117.
- [149] Nguyen, S. H., 1993, "Use of a p-Version Finite Element Formulation for Compressible Lubrication Calculation", Communication in Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 139-145.
- [150] Dowson, D. és Wang, D., 1994, "An Analysis of the Normal Bunching of a Solid Elastic Ball on an Oily Plate", Proc 6th Nordic Symposium on Tribology, Vol. 1., pp. 85-101.
- [151] Hsu, C., H. és Lee, R., T. 1994, "Advanced Multilevel Solution for Elastohydrodynamic Lubrication Circular Contact Problem", Wear, Vol. 177., pp. 117-127.
- [152] Lee, R., T. és Hsu, C., H. 1994, "Advanced Multilevel Solution for Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication of Simple Sliding Line Contacts", Wear, Vol. 177., pp. 227-237.
- [153] Hsu, C., H. és Lee, R., T. 1994, "An Efficient Algorithm for Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication under Rolling/Sliding Line Contacts", ASME Journal of Tribology, Vol. 116. No. 4, pp. 762-769.
- [154] Lee, R., T., Hsu, C., H. és Kuo, W., F. 1995, "Multilevel Solution for Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Circular Contacts", Tribology International, Vol. 28. No. 8, pp. 541-552.
- [155] Kozák, I., 1995, "Kontinuum-Mechanika", Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc
- [156] Wolff, R. és Kubo, A., 1996, "A Generalized Non-Newtonian Model Incorporated into Elastohydrodynamic Lubrication", ASME Journal of Tribology, Vol. 118. No. 1, pp. 74-82.
- [157] Bouard, L., Fillon, M. és Frêne, J., 1996, "Thermohydrodynamic Analysis of Tilting-Pad Journal Bearings Operating in Turbulent Flow Regime", ASME Journal of Tribology, Vol. 118. No. 2, pp. 225-231.
- [158] Bouchoule, C., Fillon, M., Nicolas, D. és Baresi, F., 1996, "Experimental Study of Thermal Effects in Tilting-Pad Journal Bearings at High Operating Speeds", ASME Journal of Tribology, Vol. 118. No. 4, pp. 532-538.
- [159] Pahud, P., 1996, "Thermo-elasto-hydrodynamic (TEHD) lubrication", Tribology International, Vol. 29. No. 1, pp. 1-9.

- [160] Piccigallo, B., 1996, "A Fast Method for the Numerical Solution of Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication Problem", *Wear*, Vol. 193. No. 1, pp. 56-65.
- [161] Schlijper, A. G., Scales, L. E. és Rycroft, J. E., 1996, "Current Tools and Techniques for EHL Modelling", *Tribology International*, Vol. 29. No. 8, pp. 669-673.
- [162] Xue, Y., K., Gethin, D. T. és Lim, C., H., 1996, "Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of Layered Line Contact by the Boundary Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39., pp. 2531-2554.
- [163] Monmousseau, P., Fillon, M. és Frêne, J., 1998, "Transient Thermoelastohydrodynamic Study of Tilting-Pad Journal Bearings – Application to Bearing Seizure", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 120. No. 2, pp. 319-324.
- [164] Hsiao, Hsing-Sen, S., Hamrock, B. J. és Tripp, J. H., 1998, "Finite Element System Approach to EHL of Elliptical Contacts: Part I – Isothermal Circular Non-Newtonian Formulation", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 120. No. 4, pp. 695-704.
- [165] Szeri, A. Z., 1998, *Fluid film lubrication: Theory and design*, Cambridge University Press.
- [166] Hsiao, Hsing-Sen, S., Bordon, J., I., Hamrock, B. J. és Tripp, J. H., 1998, "Finite Element System Approach to EHL of Elliptical Contacts: Part II – Isothermal Results and Performance Formulas", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 121. No. 4, pp. 711-720.
- [167] Nguyen, S. H., 1991, "p-Version Finite Element Analysis of Gas Bearings of Finite Width", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, No. 2, pp. 417-420.
- [168] Páczelt, I., 1999, "Végeselem-módszer a Mérnöki Gyakorlatban, I. Kötet", Miskolci Egyetemi kiadó
- [169] Onsa, M., H., Basri, S., Sapuan, S., M., Megat Ahmed, M., M., H. és Sadique, S., E., 1999, "Solution of the Coupled Reynolds and Elasticity Equations Using Boundary Element Method", *WEC '99 Aerospace Technical Conference*, pp. 97-102.
<http://www.eng.upm.edu.my/~kaa/WEC/WECPapers-FinalVersion/AE06.doc>
- [170] Arghir, M. és Frene, J. 2000, "A Triangle Based Finite Volume Method for the Integration of Lubrication's Incompressible Bulk Flow Equations.", *ASME/STLE International Joint Tribology Conference*, Seattle, október 1-4.
- [171] Czibere, T. 2001, "Three Dimensional Stochastic Model of Turbulence", *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol. 2, pp. 7-20.
- [172] Wu, L. és Bogoy, D., B. 2001, "Numerical Simulation of the Slider Air Bearing Problem of Hard Disk Drives by two Multidimensional Upwind Residual Distribution Schemes over Unstructured Triangular Mesh" *Journal of Computational Physics*. Vol. 172. No. 2, pp. 640 - 657.

-
- [173] Rapposelli, E. és d'Agostino, L., 2001, "A Modified Isentalpic Model of Cavitation in Plane Journal Bearings", Proc. CAV2001 Fourth International Symposium on Cavitation, USA, http://cav2001.library.caltech.edu/documents/disk0/00/00/01/51/00000151-00/CAV2001_sessionB5-003.pdf
- [174] Arenaz, M., Doallo, R., Touriño J. és Vázquez, C., 2001, "Efficient Parallel Numerical Solver for the Elastohydrodynamic Reynolds–Hertz Problem", Parallel Computing, Vol. 27. No 13, pp. 1743-1765
- [175] Gulwadi, S. és Shrimpling, G., "Journal Bearing Analysis in Engines Using Simulation Techniques", SAE Technical Paper 2003-01-0245, 2003 www.ricardo.com/PressRelease/orbit.pdf <http://www.docin.com/p-167162094.html>
- [176] Durany, J., García, G., és Vázquez, C., 2002, "Numerical Simulation of a Lubricated Hertzian Contact Problem under Imposed Load", Finite Elements in Analysis and Design, Vol.: 38, No.: 7, pp. 645-658.
- [177] Cioc, S., 2004, "Application of the Space - Time Conservation Element and Solution Element Numerical Method to Flows in Fluid Films", PhD. thesis, The University of Toledo