

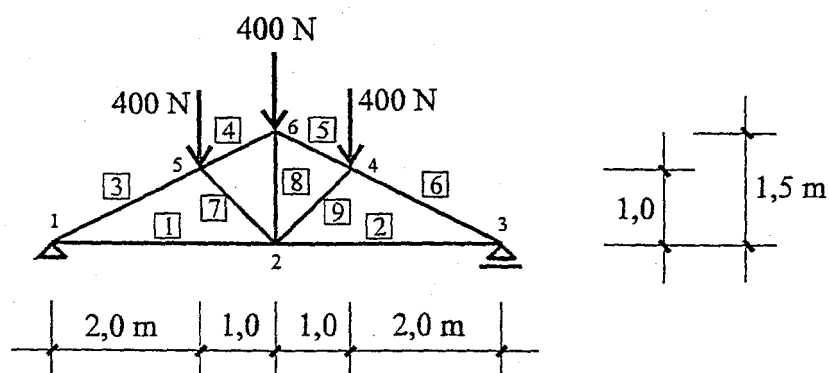
A végeelem módszer mérnöki megközelítése

dr. Orbán Ferenc
főiskolai tanár

Pécs, 1999.

1. Modellezési példák

1.1. A rácsos tartók egyenes rudakból álló szerkezetek. A rudak egymáshoz hegesztéssel vagy szegecseléssel kapcsolódnak. A valóságos helyzetet egyszerűsíti, ha a rudak kapcsolatát ideálisan csuklósnak tételezzük fel. Így a számítási modell és a végelem modell megegyezik egymással. Ha a rudak csak a csomópontokban kapnak terhet, a rudak húzottak vagy nyomottak. Vizsgáljuk meg az 1.1 ábrán feltüntetett rácsos tartót.



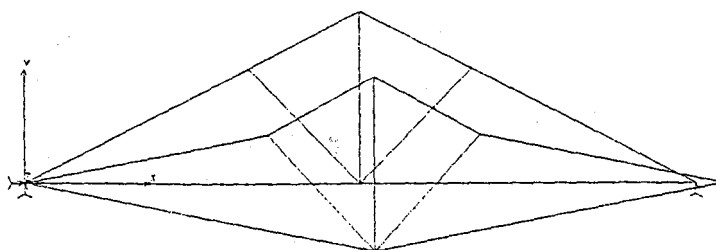
1.1 ábra

A rudak modellezésére választott elem az ún. truss elem.

A számításokhoz meg kell adni a rudak keresztmetszetét és a rugalmassági modulusát.

$A = 100 \text{ mm}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$.

A tartó deformált alakját az 1.2 ábra mutatja.



1.2 ábra

A számítások során kapott eredmények:

Rúderők:

$$S_1 = S_2 = 1200 \text{ N}$$

$$S_3 = S_6 = -1342 \text{ N}$$

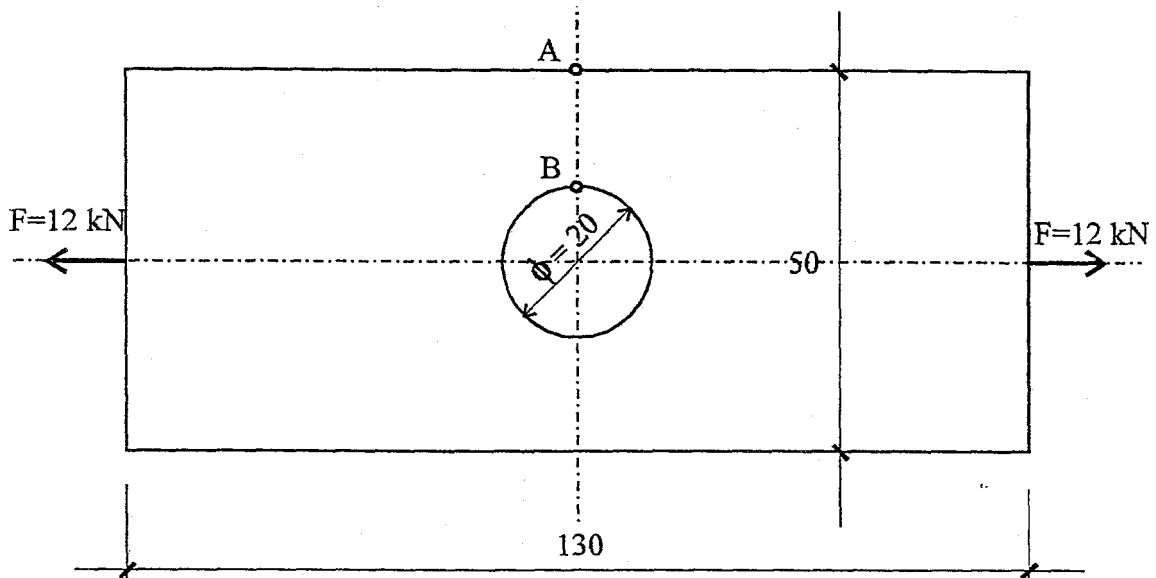
$$S_4 = S_5 = -1040 \text{ N}$$

$$S_7 = S_9 = -377 \text{ N}$$

$$S_8 = 533 \text{ N}$$

A 2-es pont lehajlása: 0,84 mm. A rúderőkre kapott eredmények a számítottal egyezők.

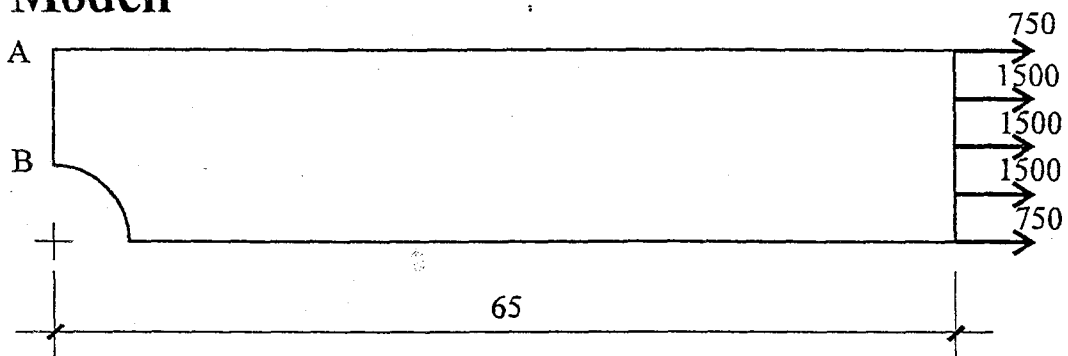
- 1.2. Határozzuk meg az 1.3 ábrán látható furattal gyengített húzott lemezben keletkező maximális feszültséget és az AB pontok közötti feszültség eloszlást.



1.3 ábra

A véges elem modell az 1.4 ábrán látható. A választott elemtípus: plane2d (tárcsaelem)

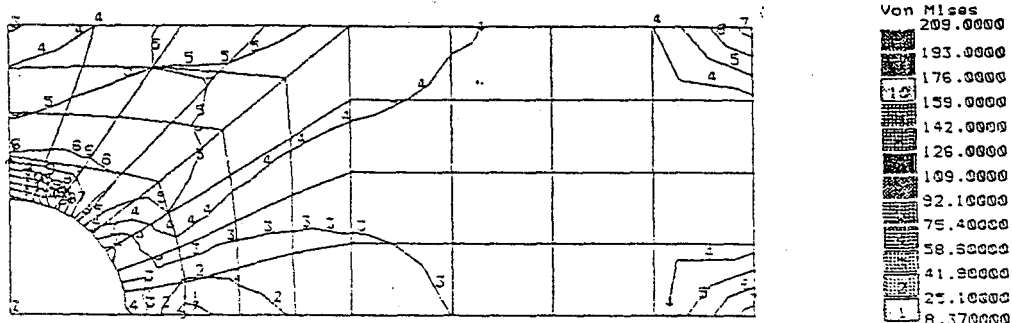
Modell



1.4 ábra

A terhelés és a szerkezet szimmetriája miatt elegendő 1/4 részt vizsgálni. □

Az eredmények az 1.5 ábrán láthatók.

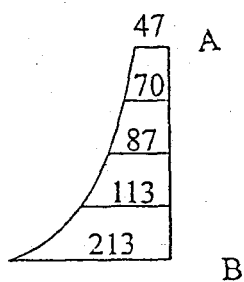


1.5 Ábra

A koncentrált erő hatására feszültségkoncentráció keletkezik. Az 1/4 szerkezetre ható $F/2$ erőt egyenletesen elosztottuk a csomópontokra, azonban így is kialakult a feszültségtorlódás. Az erőbeviteli helyeken érdekesebb sűrűbb hálózatot készíteni. Jelen esetben a furat környékét vizsgáltuk, ezért az elemfelosztás így is megfelelő. Tulajdonképpen egyenletes feszültségeloszlás a jobb oldaltól a harmadik elemekben van.

A maximális feszültség a **B** pontban keletkezik. $\sigma_x = 213 \text{ MPa}$.

A feszültség változása az A-B vonal mentén. (1.6 ábra)



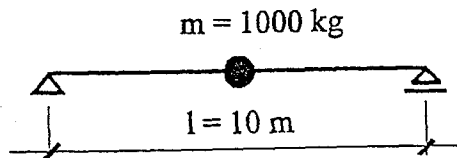
1.6 ábra

Az állandó keresztmetszetű lemezbe készített furat megváltoztatja a feszültség eloszlását. A legnagyobb feszültség a furat közelében lép fel.

Érdeemes összehasonlítani az eredményt a gyengített keresztmetszetben kapott átlagos feszültségértékkel:

$$\sigma_{\text{át}} = \frac{F}{A_{\text{gy}}} = \frac{12000}{120} = 100 \text{ MPa}$$

- 1.3. Határozzuk meg az 1.7 ábrán vázolt kéttámaszú tartó első három saját frekvenciáját. A tartó közepén m tömeg van. A számításokban figyelembe vesszük a tartó tömegét is.



1.7 ábra

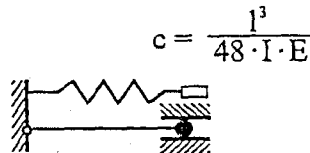
Az adatok:

$$E = 200 \text{ GPa}; \quad I = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A = 0,01 \text{ m}^2; \quad \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

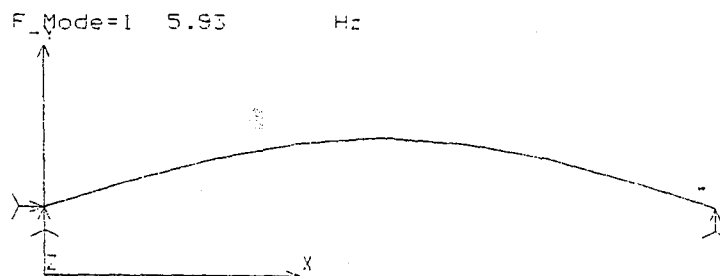
A tartó a vázolt módon is modellezhető, de a modellje az 1.8 ábra szerint is megadható.

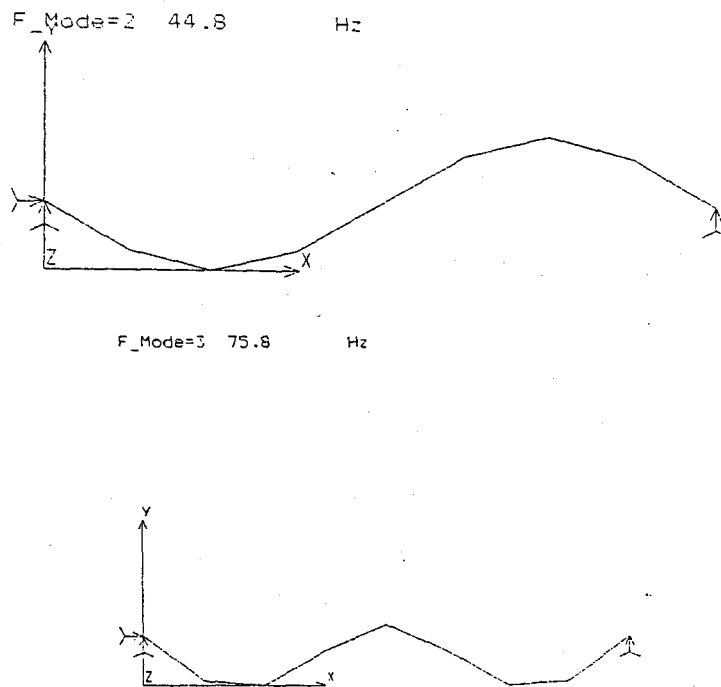


$$c = \frac{l^3}{48 \cdot I \cdot E}$$

1.8 ábra

A számítások során kapott rezgési alak az 1.9 ábrán látható. A választott elem beam 2d (gerenda) volt. Az adatokat célszerű N és m egységében megadni.





1.9 ábra

Az eredmények:

A számított érték	Analitikus	COSMOS
Az első saját frekvencia [Hz]	5,93	5,93
A második saját frekvencia [Hz]	44,85	44,8
A harmadik saját frekvencia [Hz]	75,81	75,8

Az első saját frekvencia a következőképpen számolható.

A tartó tömege: $m_t = A \cdot l \cdot \rho = 785 \text{ kg}$.

Ha a tartó tömegét középre redukáljuk:

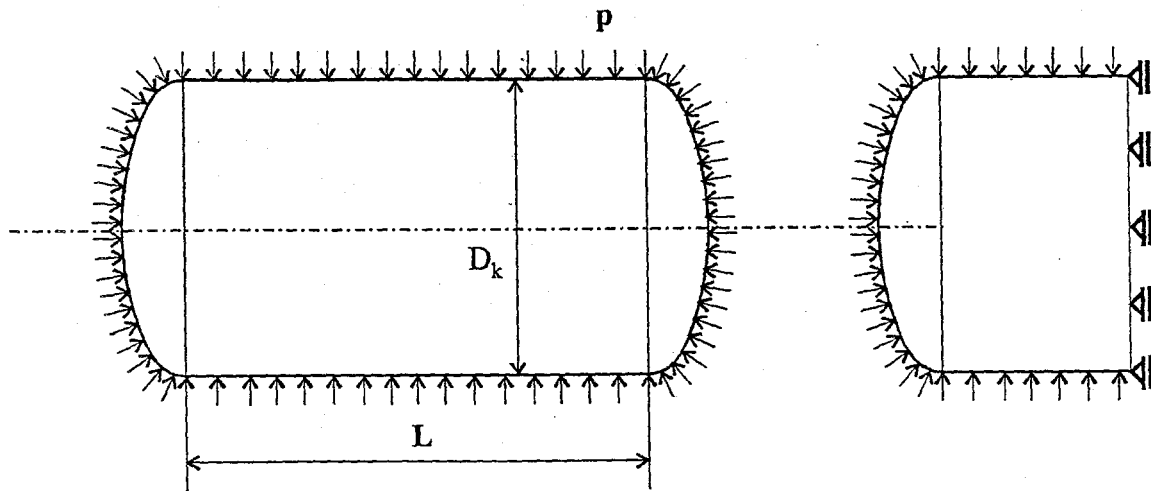
$$m_e = 0,45 \cdot 785 = 384,65 \text{ kg}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3846}} = 37,268 \frac{1}{s}$$

$$f_1 = \frac{\alpha}{2\pi} = 5,93 \text{ Hz}$$

Az elméletileg számolt és a VEM eredmények teljesen megegyeznek, pedig a tartót csak hat elemre osztottuk fel.

1.4. Vizsgáljunk meg egy külső nyomással terhelt hengeres tartályt.(1.10 ábra) A föld alatti tartályok vizsgálatának fontos része a nyomással szembeni stabilitás igazolása. Amennyiben a külső nyomást $p=1 \text{ N/mm}^2$ választjuk a végeleemes vizsgálattal egy arányszámot határozunk meg, amely a kritikus teher és a felvett érték hányadosa.

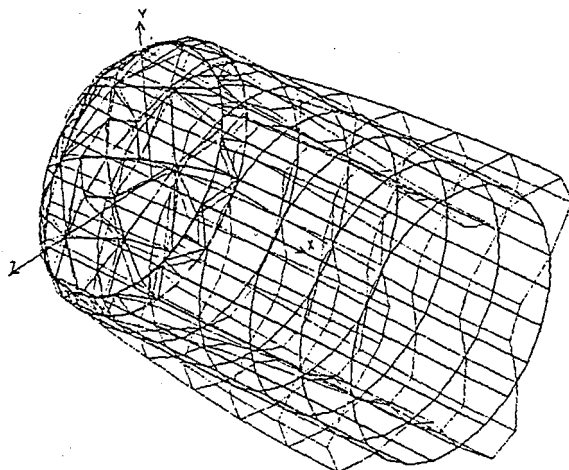


1.10 ábra

A vizsgált tartály adatai $L=6000$ mm, $D_k=2200$ mm, $t=6$ mm, $E=210$ GPa, $\nu=0,3$.

A vizsgálat során a mélydomborítású fenékhez háromszög alakú vékony héjelemet, a hengeres részhez négyszög alakú héjelemet (shell) választottunk. A vizsgált esetben az elemszám 217 db volt, a $p_{krit} = 0,086$ MPa, az edény kör alakú részén $n=4$ hullám alakult ki.

A horpadt alakot az 1.11. ábrán láthatjuk.



1.11 ábra

Az elmélet szerint:

$$p_{kr} = \frac{2 \cdot E}{(n^2 - 1)N^2} \frac{t}{D_k} + 0,73E \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1,3}{N} \right) \left(\frac{t}{D_k} \right)^3 = 0,078 \text{ MPa}$$

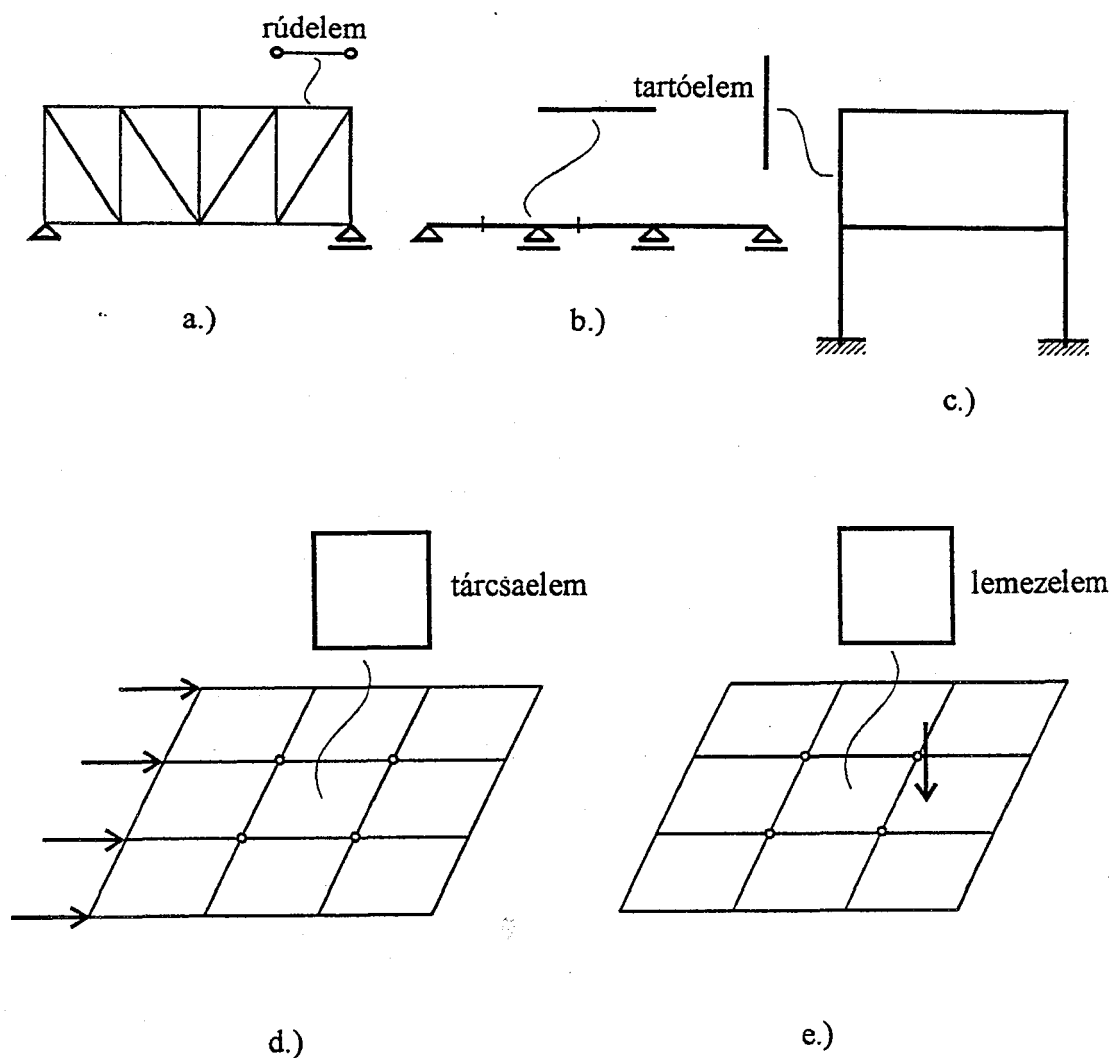
A képletben: $N = 1 + \left(\frac{n \cdot L}{\pi \cdot R_k} \right)^2$

Ha a modellhez több elemet választunk az elméleti és a végelem modellből kapott eredmények már kevésbé térnek el. Ha az elemszám 795 db az eltérés 6,4 %.,

2. VEM alapelve és módszerei

VEM mérnöki megközelítése

A végelem módszer (továbbiakban VEM) numerikus közelítő eljárás. A végelemeket legkorábban a geometria feladatok megoldására használták. A VEM létrejöttét a repülőgépipar segítette elő. A repülőgép tervezők fő feladata, hogy minimális súly mellett maximális biztonságú gépeket tervezzenek. A feladat megoldása a szerkezet analízis finomított módszereinek kidolgozását igényelte. A VEM alapelve a következő, a vizsgált szerkezetet vonalak (vagy felületek) seregeivel végesszámú elemekre bontjuk. Az eredeti szerkezet folytonosságából származó követelményeket (egyensúly vagy kompatibilitás) általában csak egyes pontokban, az ún. csomópontokban elégítjük ki. A csomópontok helyét és számát elvileg tetszőlegesen választjuk meg, legtöbbször a hálózati vonalak metszéspontjaival esnek egybe. A szerkezetek egy részének felbontása természetesen adott, ilyenek pl. a rácsos tartók, folytatólagos tartók és keretszerkezetek. 2.1 ábra



2.1 ábra

Tárcsák és lemezek esetében az elemekre bontás nem olyan egyértelmű.

A VEM-nek két fő változata van. Kezdetben az ún. erőmódszer fejlődött, ahol az ismeretlenek az erők voltak.

A csomópontokban egyensúlyi vagy alakváltozási egyenleteket írhatunk fel. Az első esetben VEM elmozdulásmódszerről beszélünk az utóbbi esetben pedig erőmódszerről. A konkrét szerkezetek vizsgálatánál a kutatók arra a következtetésre jutottak, hogy az elmozdulások ismeretlenként való kezelése jobb mint az erőké. Az elmozdulásmódszer esetében valamely egyensúlyi egyenlet azt fejezi ki, hogy a vizsgált csomópontra a szomszédos elemekről átadódó erőhatások és a csomóponti terhek összege zérus. Az egyenletrendszer ismeretlenjei a csomópontok elmozdulásai.

Első lépésként néhány elemnél meghatározzuk az erők és elmozdulások közötti kapcsolatot bizonyos pontokban.

Az elemek összekapcsolásával építjük fel a szerkezetet úgy, hogy a csomópontokban az elemek a deformáció során is kapcsolatban maradnak.

2.1. Potenciális energia minimum elve.

Az egyensúlyi helyzet vizsgálata történhet energia módszerekkel is.

A későbbiekben pl. tárcsaelemknél a csomópontok elmozdulásait a potenciális energia minimumának tételével határozzuk meg. Rugalmas rendszereknél a stabilis egyensúlyi helyzet szükséges és elégséges kritériuma a teljes potenciális energia minimuma.

A tétel csak konzervatív külső erőrendszerrel terhelt rugalmas rendszerekre igaz.

A teljes potenciál:

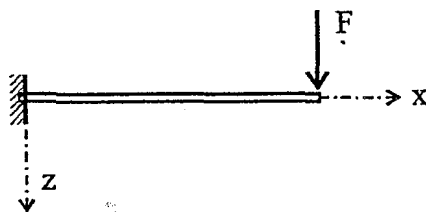
$$\Pi = \Pi_b + \Pi_k \quad (2.1)$$

Π_b - A belső erők potenciálja azaz a rendszerben vagy szerkezetben felhalmozott ún. belső energia

Π_k - külső erők potenciálja

Egy tartó esetén maga a tartó alkotja a rendszert, a terhelő erők és támasztó (támasz) erők a külső erő rendszert, az igénybevételek összessége a belső erőrendszert.

Határozzuk meg egy konzolos tartó rugalmas vonalának egyenletét a potenciális energia minimumának tétele segítségével.



2.2 ábra

A tartó rugalmas vonalának alakját közelítjük:

$$z = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 x^2 + c_4 \cdot x^3 \quad (2.2)$$

c_1, c_2, c_3, c_4 ismeretlen állandók.

Ha a tartó rugalmas vonalának egyenletét ismerjük, úgy bármely pontjának elmozdulása a **síkkeresztmetszetek elvének** elfogadása mellett meghatározható. A végeelem módszernél ilyen típusú közelítő függvényeket alkalmazunk az elmozdulások leírására.

Ha a geometriai korlátozásokat is figyelembe vesszük, pl. $x = 0$ helyen a z irányú elmozdulás 0 és az alakváltozott tartónak az érintője vízszintes. (ezek peremfeltételeket jelentenek)

Így:

$$z(x) = c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3 \quad (2.3)$$

Az ún. belső potenciális energia hajlított tartóknál:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_h^2}{E \cdot I} \cdot ds = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l (z'')^2 dx \quad (2.4)$$

$E \cdot I =$ állandó esetén

$$\Pi_k = -W_k = -F \cdot z(l) \quad (2.5)$$

A teljes potenciális energia tehát (2.3) segítségével

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_k = \frac{I \cdot E}{2} \int_0^l (2 \cdot c_3 + 6 \cdot c_4 \cdot x)^2 dx - F \cdot (c_3 \cdot l^2 + c_4 \cdot l^3) \quad (2.6)$$

A minimum szükséges feltétele:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_3} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_4} = 0 \quad (2.7)$$

$$E \cdot I (4 \cdot c_3 \cdot l + 6 \cdot c_4 \cdot l^2) - F \cdot l^2 = 0 \quad (2.8)$$

$$E \cdot I (6 \cdot c_3 \cdot l^2 + 12 \cdot c_4 \cdot l^3) - F \cdot l^3 = 0 \quad (2.9)$$

és ebből:

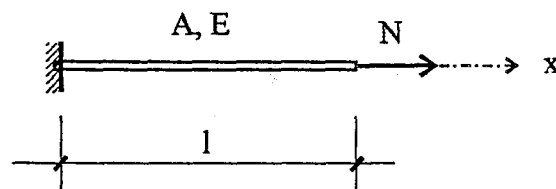
$$c_3 = \frac{F \cdot l}{2 \cdot E \cdot I}; \quad c_4 = -\frac{F}{6 \cdot E \cdot I} \quad (2.10)$$

Visszahelyettesítve a 2.3 egyenletbe, a rugalmas szál differenciálegyenletét kapjuk

$$z(x) = \frac{F}{6EI} \cdot (3 \cdot l \cdot x^2 - x^3) \quad (2.11)$$

2.2. Rúdelem

A rúdelem (angolul truss) olyan speciális tartó, melyben csak normál erő keletkezik. Ilyenek a rácsos tartó rúdjai.



2.3 ábra

A rúdelem valamely pontjának elmozdulása elmozdulás függvény segítségével felírható. Az elmozdulás függvényben annyi ismeretlen van, ahány kerületi feltétel írható fel.

$$u(x) = c_1 + c_2 \cdot x \quad (2.12)$$

Az elmozdulásokat most közvetlenül egyensúlyi egyenletekből határozzuk meg. Egy befogott rúd esetén a következő egyenletek írhatók:

Egyensúlyi egyenlet: $\sigma = \frac{N}{A}; N = \sigma \cdot A \quad (2.13)$

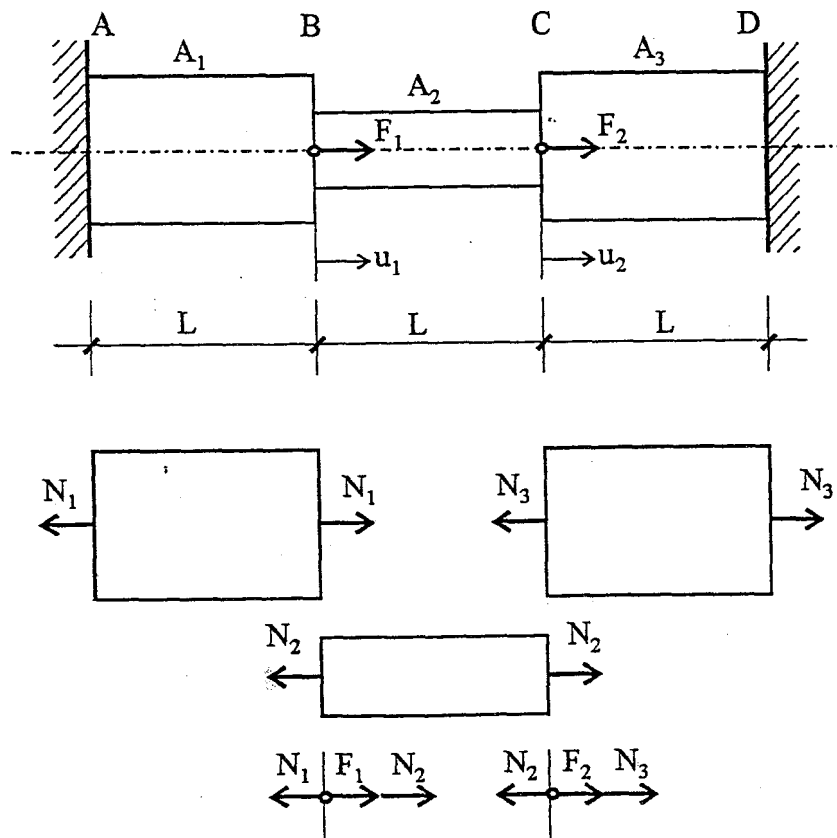
Geometriai egyenlet: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}; \Delta L = \varepsilon \cdot L \quad (2.14)$

Anyagegyenlet: $\sigma = E \cdot \varepsilon; \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.15)$

A rudat terhelő erő és elmozdulás közötti kapcsolatra írható:

$$N = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \Delta L \quad (2.16)$$

Vizsgáljunk meg egy három különböző keresztmetszetből álló rudat. (2.4. ábra)



2.4 ábra

Az egyes rúdszakaszokat terhelő erő és elmozdulások között írható:

$$N_1 = \frac{EA_1}{L} \cdot \Delta L_1 \quad (2.17)$$

$$N_2 = \frac{EA_2}{L} \cdot \Delta L_2 \quad (2.18)$$

$$N_3 = \frac{EA_3}{L} \cdot \Delta L_3 \quad (2.19)$$

A rúdrészek kapcsolódó keresztmetszeteire írható

$$F_1 + N_2 - N_1 = 0; \quad N_1 - N_2 = F_1 \quad (2.20)$$

$$N_3 + F_2 - N_2 = 0; \quad N_2 - N_3 = F_2 \quad (2.21)$$

Ezek az egyenletek egyensúlyi egyenletek. Végül a szerkezet folytonosságára írható, ha figyelembe vesszük az A,D pontokban a befogás kényszerét:

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= u_1 \\ \Delta L_2 &= u_2 - u_1 \\ \Delta L_3 &= -u_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ezen egyenletek az ún. összeférhetőségi egyenletek.

Az egyensúlyi egyenletbe helyettesítsük be az anyagtörvényeket.

$$\frac{EA_1}{L} \cdot \Delta L_1 - \frac{EA_2}{L} \cdot \Delta L_2 = F_1 \quad (2.23)$$

$$\frac{EA_2}{L} \cdot \Delta L_2 - \frac{EA_3}{L} \cdot \Delta L_3 = F_2 \quad (2.24)$$

Majd az elmozdulásokat behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{EA_1}{L} u_1 - \frac{EA_2}{L} (u_2 - u_1) = F_1 \quad (2.25)$$

$$\frac{EA_2}{L} (u_2 - u_1) - \frac{EA_3}{L} (-u_2) = F_2 \quad (2.26)$$

Rendezés után:

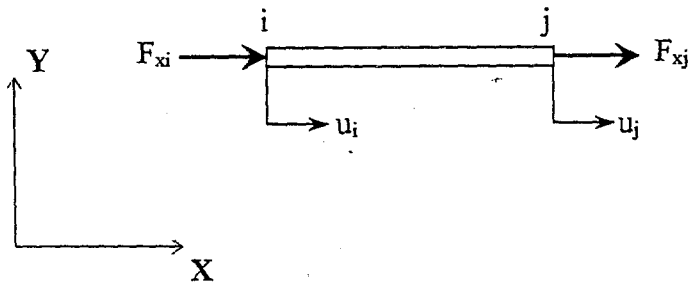
$$\frac{EA_1}{L} \cdot u_1 + \frac{EA_2}{L} u_1 - \frac{EA_2}{L} u_2 = F_1 \quad (2.27)$$

$$-\frac{EA_2}{L} u_1 + \frac{EA_2}{L} u_2 + \frac{EA_3}{L} \cdot u_2 = F_2 \quad (2.28)$$

Az egyenletrendszert mátrixokkal is felírhatjuk:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{L} & -\frac{EA_2}{L} \\ -\frac{EA_2}{L} & \frac{EA_2}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_3}{L} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Nézzük most kissé általánosabban egy ún. két csomópontos rúdelemet.



2.5 ábra

Tételezzük fel, hogy $u_i \neq 0$; $u_j = 0$. Ekkor j helyen mereven rögzítettük. A terhelés pedig F_{xi}

$$F_{xi} = \frac{EA}{L} \cdot u_i \quad (2.29)$$

$$F_{xj} = -F_{xi} = -\frac{EA}{L} \cdot u_i \quad (2.30)$$

Ha most, $u_i = 0$; $u_j \neq 0$

$$F_{xj} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot u_j \quad (2.31)$$

$$F_{xi} = -F_{xj} = -\frac{AE}{L} \cdot u_j \quad (2.32)$$

A rúdnek két szabadsági foka van.

Ha $u_i \neq 0$; $u_j \neq 0$, úgy a két fent vizsgált speciális eset szuperpozícióját kapjuk

$$F_{xi} = \frac{EA}{L} \cdot (u_i - u_j) \quad (2.33)$$

$$F_{xj} = \frac{EA}{L} \cdot (u_j - u_i) \quad (2.34)$$

Ezen utóbbiakat mátrixegyenlet formájában átírva

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

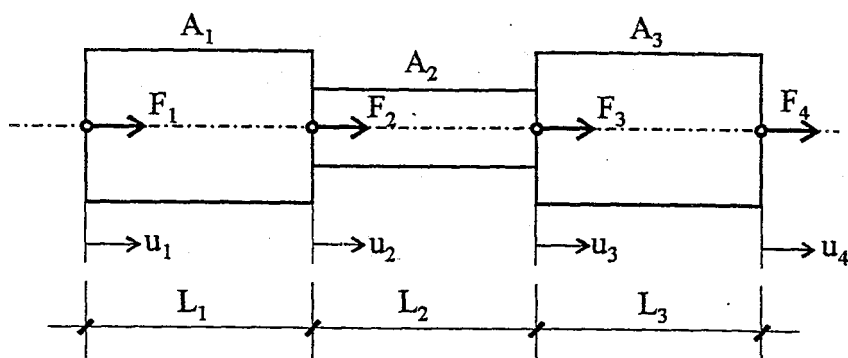
Az elem ún. merevségi mátrixa

$$\underline{\underline{K}}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A mátrix elemei az egységnyi elmozdulásokból keletkező erőket jelentik. Pl. a mátrix első eleme azt jelenti, hogy az i -edik csomópont egységnyi elmozdulásához mekkora erőre van szükség. Mivel az i -edik csomópont egységnyi elmozdulásához az i -edik és j -edik csomópontban is tartozik egy erő, de ugyanez a helyzet a j -edik csomópontnál is, ezért a mátrix négy elemet tartalmaz.

A korábban levezetett eredmények, melyet a három különböző keresztmetszetből álló rúdra kaptunk, az elemek merevségi mátrixából is levezethetők.

A rúd általánosan egy négy csomópontos szerkezet



2.6 ábra

Bővítsük az elem merevségi mátrixot négycsomópontosra:

$$\left(\frac{EA_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_3}{L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Elvégezve a kijelölt műveletet:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2} + \frac{EA_3}{L_3} & -\frac{EA_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{L_3} & \frac{EA_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Ha visszatérünk az eredeti példához akkor $u_1 = u_4 = 0$, és ebben az esetben az F_1 és F_4 erők támasz (támasztó) erők, melyek meghatározhatók, ha u_2 és u_3 ismert. Az u_2 , u_3 meghatározására elegendő a következő mátrixegyenletet megoldani.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} & -\frac{EA_2}{L_2} \\ -\frac{EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2} + \frac{EA_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Természetesen ugyanarra az eredményre jutottunk más utakon. Most a 2-es csomópont a korábbi 1-es, a 3-as csomópont a korábbi 2-es.

Az első esetben az ún. szerkezet merevségi mátrixot állítottuk elő közvetlenül, az utóbbi esetben pedig az elem merevségi mátrixaiból építettük fel a szerkezet merevségi mátrixot.

A 2.38 mátrix egyenlet ismeretlenjei az u_2 és u_3 , így elegendő a 2.39 mátrix egyenletet megoldani.

De természetesen a 2.37 mátrix egyenletből az F_1 és F_4 erők is meghatározhatók, melyek most a támasztóerők.

Korábban felírtuk a rúdelem elmozdulás függvényét (2.12)

Írjuk fel az elmozdulás függvényt a csomópontok elmozdulásai segítségével, a csomópontok koordinátáit behelyettesítve kapjuk:

$$u(x) = u_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_j \frac{x}{L} \quad (2.40)$$

Mátrix egyenletté alakítva kapjuk:

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Más jelölésekkel:

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{e} \quad (2.42)$$

\underline{N} az elmozdulási mátrix.

Az elmozdulásokból meghatározhatjuk az alakváltozásokat és a feszültségeket.

$$\underline{\varepsilon} = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{B} \cdot \underline{e} \quad (2.43)$$

$$\underline{\sigma} = E \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.44)$$

A csomópontok elmozdulásait a potenciális energia minimuma tételéből határozhatjuk meg.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\varepsilon}^* \cdot \underline{\sigma} dV - \underline{e}^* \cdot \underline{q} \rightarrow \min \quad (2.45)$$

$$\frac{d\Pi}{d\underline{e}} = \left(\int_{(V)} \underline{B}^* \cdot E \cdot \underline{B} \cdot dV \right) \cdot \underline{e} - \underline{q} = \quad (2.46)$$

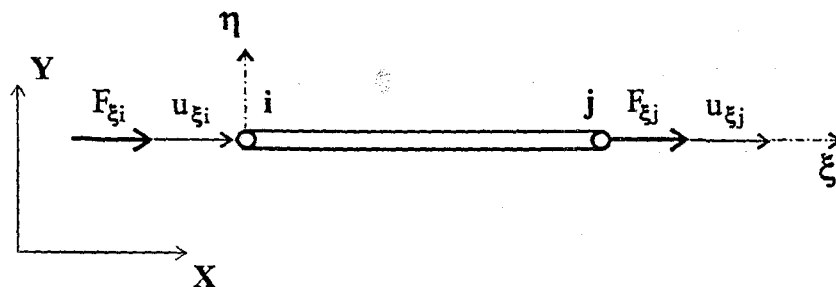
$$\underline{K}_e \cdot \underline{e} = \underline{q} \quad (2.47)$$

A \underline{K}_e az elem merevségi mátrixa:

$$\begin{aligned} \underline{K}_e &= \int_{(V)} \underline{B}^* \cdot E \cdot \underline{B} dV = AE \int_{x=0}^L \underline{B}^* \cdot \underline{B} dx = \\ &= AE \int_{x=0}^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ismét a már többféle módon levezetett elem merevségi mátrixot kapjuk. Ez a módszer bonyolultnak látszik, de pl. tárcsa elemeknél már csak ez használható.

Az eddigiekben megismert rúdelemet általánosítsuk kissé.



2.7. ábra

Az elem merevségi mátrixát legkönnyebben az elemhez kötött ún. lokális koordináta rendszerben adhatjuk meg. Ha egy szerkezetet vizsgálunk úgy a szerkezet esetében használt koordináta rendszer (globális koordináta rendszer) általában nem egyezik a lokális rendszerrel, ezért most rúdelem esetében bemutatjuk az áttérés módját.

Addig amíg a rúdelem vízszintes helyzetű az ún. lokális és globális koordináta rendszer egybeesik.

A merevségegyenlet a lokális koordinátarendszerben, ahogy ezt korábban bevezettük:

$$\begin{bmatrix} F_{\xi_i} \\ F_{\eta_j} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\xi_i} \\ u_{\xi_j} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Egy rúdelemnek a globális koordinátarendszerben négy szabadságfoka van, azaz csomópontként két-két elmozdulással rendelkezik.

$$F_{\xi_i} = \frac{AE}{L} \cdot (u_{\xi_i} + 0 \cdot u_{\eta_i} - u_{\xi_j} + 0 \cdot u_{\eta_j}) \quad (2.50)$$

$$F_{\eta_i} = \frac{AE}{L} \cdot (0 \cdot u_{\xi_i} + 0 \cdot u_{\eta_i} + 0 \cdot u_{\xi_j} + 0 \cdot u_{\eta_j}) \quad (2.51)$$

$$F_{\xi_j} = \frac{AE}{L} \cdot (-u_{\xi_i} + 0 \cdot u_{\eta_i} + u_{\xi_j} + 0 \cdot u_{\eta_j}) \quad (2.52)$$

$$F_{\eta_j} = \frac{AE}{L} \cdot (0 \cdot u_{\xi_i} + 0 \cdot u_{\eta_i} + 0 \cdot u_{\xi_j} + 0 \cdot u_{\eta_j}) \quad (2.53)$$

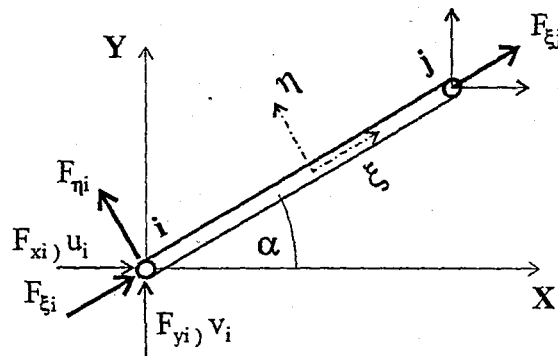
Az egyenletet átírva mátrixegyenletté:

$$\begin{bmatrix} F_{\xi_i} \\ F_{\eta_i} \\ F_{\xi_j} \\ F_{\eta_j} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\xi_i} \\ v_{\eta_i} \\ u_{\xi_j} \\ v_{\eta_j} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Az egyenlet általános alakja:

$$\underline{q}_e^{\xi} = \underline{K}_e^{\xi} \cdot \underline{e} \quad (2.55)$$

Írjuk át a mátrixegyenletet globális (X,Y,Z) koordinátarendszerben.



2.8. ábra

A két koordinátarendszer erőkomponensei között a következők írhatók:

$$F_{\xi_i} = F_{x_i} \cos \alpha + F_{y_i} \cdot \sin \alpha \quad (2.56)$$

$$F_{\eta_i} = -F_{x_i} \sin \alpha + F_{y_i} \cos \alpha \quad (2.57)$$

Mátrixegyenletté írva:

$$\begin{bmatrix} F_{\xi_i} \\ F_{\eta_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\underline{q}_{ei}^{\xi} = \underline{\Delta} \cdot \underline{q}_{ei} \quad (2.59)$$

A globális rendszerben az i csomópontban ható erő kifejezhető:

$$\underline{q}_{ei} = \underline{\Delta}^{-1} \cdot \underline{q}_{ei}^{\xi} \quad (2.60)$$

A $\underline{\Delta}$ mátrix inverze $\underline{\Delta}^{-1}$, most viszonylag egyszerűen számolható ugyanis a $\underline{\Delta}$ mátrix transzponáltja.

$$\underline{\Delta}^{-1} = \underline{\Delta}^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

A két csomópont transzformációját egy egyenletbe írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ F_{x_j} \\ F_{y_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\xi_i} \\ F_{\eta_i} \\ F_{\xi_j} \\ F_{\eta_j} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\underline{q}_e = \underline{T}^* \cdot \underline{q}_e^{\xi} \quad (2.63)$$

\underline{T}^* -ún. forgató mátrix

$$\underline{q}_e = \underline{T}^* \cdot \underline{K}_e^{\xi} \cdot \underline{e} \quad (2.64)$$

Az elmozdulások írható:

$$\underline{u} = \underline{T}^* \cdot \underline{e} \quad (2.65)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Az utóbbi egyenletet a merevségegyenletbe írva:

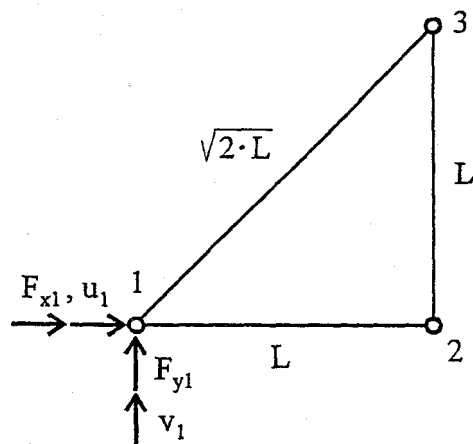
$$\underline{q}_e = (\underline{T}^* \cdot \underline{K}_e^* \cdot \underline{T}) \cdot \underline{u} = \underline{K}_e \cdot \underline{u} \quad (2.67)$$

A \underline{K} merevségi mátrixot, amely a globális koordináta-rendszerben érvényes hármas mátrix szorzással nyerjük.

$$\underline{K}_e = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Egy egyszerűbb rácsos tartószerkezet merevségi mátrixát most már könnyen felépíthetjük:

A rácsos tartó három rúdból áll (2.9 ábra)



2.9 ábra

A rendszer szabadságfoka: 6, ui. csomópontonként két elmozdulás lehetséges.

A ferde rúdelem merevségi egyenlete a következő, a 2.68 egyenletből $\alpha = 45^\circ$... helyettesítéssel.

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{bmatrix} = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

A vízszintes rúdelem merevségi mátrixa ha $\alpha = 0$ helyettesítéssel, valamint a rúdelem merevségi mátrixát illesszük be az egész szerkezet mátrixába.

$$\underline{K}_a = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

A függőleges rúdelem merevségi mátrixa, ha $\alpha = 90^\circ$

$$\underline{K}_b = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

A ferde rúdelemé pedig:

$$K_c = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

A szerkezet merevségi mátrixot most az egyes elemek merevségi mátrixainak összegezésével állíthatjuk elő, ezért minden esetben a három csomópontot (6 szabadságfok) már figyelembe vettük.

$$\underline{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & & & & & & & & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & & & & & & & \\ -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & & & & \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & & & & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & & & \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

szimm.

A szerkezet merevségi mátrixának ismeretében a merevségi egyenlet felírható.

$$\underline{q}_e = \underline{K}_e \cdot \underline{e} \quad (2.74)$$

Az ismeretlen elmozdulások is meghatározhatók:

$$\underline{e} = \underline{K}_e^{-1} \cdot \underline{q}_e \quad (2.75)$$

A megoldandó feladatokban azonban nem az az eset fordul elő, hogy az összes erő ismert és az elmozdulások az ismeretlenek, hanem esetleg az elmozdulásokból egy néhány ismert és az erőket keressük ilyenkor.

Legyen \underline{q}_α az ismert erő és \underline{u}_α az ismeretlen elmozdulás, \underline{q}_β -val jelöljük az ismeretlen erőket és az ismert elmozdulást \underline{u}_β -val, ha az elmozdulás 0, úgy a reakcióerő is meghatározható. Pl. támaszoknál az elmozdulásokat ismerjük, de a támaszerők ismeretlen nagyságúak.

A merevségmátrixot úgy bontjuk részekre, (más néven partícionáljuk), hogy alkalmazkodjon az ismert ill. ismeretlen értékekhez.

A merevségegyenlet ekkor írható:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_\alpha \\ \underline{q}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{\alpha\alpha} & \underline{K}_{\alpha\beta} \\ \underline{K}_{\beta\alpha}^T & \underline{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_\alpha \\ \underline{u}_\beta \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Az ismeretlen csomóponti erők mátrixaritmetikai számításokkal írhatók:

$$\underline{q}_\beta = (\underline{K}_{\beta\beta} - \underline{K}_{\alpha\beta}^* \underline{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \underline{K}_{\alpha\beta}) \cdot \underline{u}_\beta + \underline{K}_{\alpha\beta}^* \cdot \underline{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \underline{q}_\alpha \quad (2.77)$$

A feladatok megoldása során nemcsak a csomóponti erők megfogalmazása fontos, hanem pl. a belső erők meghatározása is. Rácsos szerkezetek esetén ez a rúderő meghatározását jelenti. A 2.8 ábrán vázolt esetben $S_{i,j}$ belső erő akkor pozitív, ha F_{ξ_j} pozitív.

A korábban felírt (2.52) egyenlet szerint:

$$F_{\xi_j} = \frac{AE}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} u_{\xi_i} \\ v_{\eta_i} \\ u_{\xi_j} \\ v_{\eta_j} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Ha az elmozdulásokat átranzformáljuk a globális rendszerbeli elmozdulásokra (2.55)

$$F_{\xi_j} = \frac{AE}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} u_{\xi_i} \\ v_{\eta_i} \\ u_{\xi_j} \\ v_{\eta_j} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

a belső erő az elmozdulásokból számítható:

$$S_{i-j} = F_{\xi_j} = \frac{AE}{L} [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

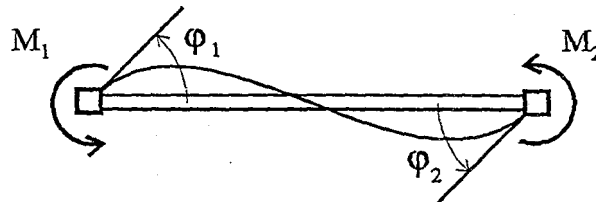
2.3. Gerendaelem

A következőkben egy gerenda elem merevségi mátrixát írjuk fel. A 2.10 ábrán egy két csomópontos és csomópontonként csak elfordulási lehetőséggel rendelkező gerendaelemet tüntettünk fel. Az általános ún. síkbeli gerendaelem csomópontonként két elmozdulási és egy elfordulási lehetőséggel bír.

Az egyszerűsített gerendaelemnek mégis nagy jelentősége lehet ha a csomópontok pl. egy töbttámaszú tartó pontjai nem mozdulnak el vagy ez elhanyagolható.

Itt az elmozdulás függvény az alábbiakban írható:

$$\varphi = c_1 + c_2 \cdot x \quad (2.81)$$

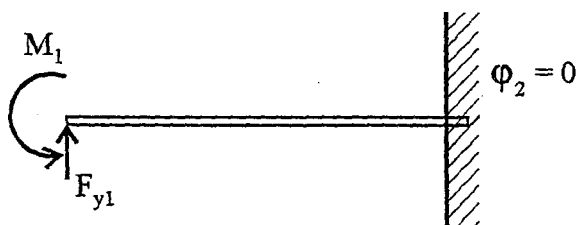


2.10. ábra

A nyomatékok és elfordulások közötti összefüggések elemi úton is előállíthatók.

Nem sérti az általánosságot, ha a továbbiakban $i = 1$ és $j = 2$.

Ha $\varphi_1 \neq 0$ és $\varphi_2 = 0$ akkor egy egy konzolos tartót kapunk.



2.11. ábra

Ahhoz, hogy az 1-es csomópont függőlegesen ne mozduljon el F_{y1} erőt kell működtetnünk. A két hatásból a függőleges elmozdulás megegyezik.

$$\frac{M_1 \cdot L^2}{2EI} = \frac{F_{y1} \cdot L^3}{3EI}$$

$$F_{y1} = \frac{3}{2 \cdot L} \cdot M_1 \quad (2.82)$$

A szögelfordulás:

$$\varphi_1 = \varphi_M - \varphi_F = \frac{M \cdot L}{EI} - \frac{3M_1 \cdot L^2}{2L \cdot 2EI} = \frac{M_1 \cdot L}{4 \cdot E \cdot I} \quad (2.83)$$

vagy pedig:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_1 \quad \left. \vphantom{M_1} \right\} M_2 = \frac{M_1}{2} \quad (2.84)$$

A befogásnál ébredő nyomaték:

$$M_2 = -M_1 + F_{y1} \cdot L = \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_1 \quad (2.85)$$

Hasonló eredményt kapunk ha $\varphi_1 = 0$; és $\varphi_2 \neq 0$

$$M_1 = \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_2 \quad (2.86)$$

$$M_2 = \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_2 \quad (2.87)$$

A két eset szuperpozíciójából kapjuk:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_1 + \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_2 \quad (2.88)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} \cdot \varphi_1 + \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_2 \quad (2.89)$$

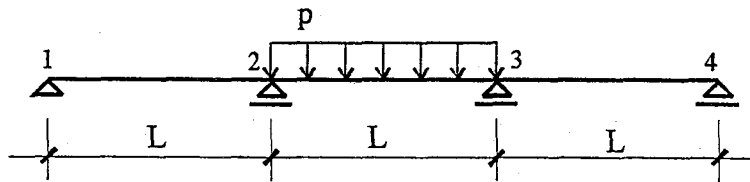
Az utóbbi egyenletrendszert mátrix formában írva:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Így tehát eljutottunk a két csomópontos két szabadságfokú elem merevségi mátrixához

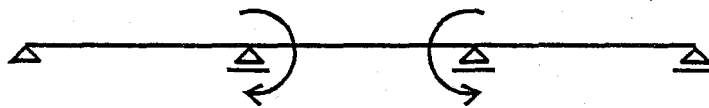
$$\underline{\underline{K}}_e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Vizsgáljunk meg egy három támaszközű tartót. Legyen $EI = \text{áll.}$ a tartó teljes hosszában.



2.12 ábra

Határozzuk meg: a 2-es pontnál ébredő nyomatékot és a reakcióerőt az 1-es pontban. A feladatot először a 2-es és 3-as csomópont ismertnek feltételezett nyomatékaira oldjuk meg.



2.13 ábra

A négycsomópontos háromtámaszú tartó merevségi mátrixát a három elem merevségi mátrixának összegezésével kaphatjuk:

$$\frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

A példa megoldása egyszerűsíthető ui. $M_1=M_4=0$; valamint a két szélő illetve középső szögelfordulások nagyságra megegyeznek.

$$\frac{E \cdot I}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Tételezzük fel, hogy:

$$M_2 = -\frac{pL^2}{12}; \quad M_3 = \frac{pL^2}{12} \quad (2.94)$$

A mátrix egyenletből nyerjük:

$$4 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 = 0 \quad (2.95)$$

$$\frac{EI}{L} (2\varphi_1 + 8\varphi_2 + 2\varphi_3) = -\frac{pL^2}{12} \quad (2.96)$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 \cdot L}{5EI} = -\frac{pL^3}{60EI} \quad (2.97)$$

$$\varphi_1 = -\frac{\varphi_2}{2} = \frac{pL^3}{180 \cdot EI} \quad (2.98)$$

A megoldásnál figyelembe vettük, hogy $\varphi_2 = -\varphi_3$.

A baloldali tartórészre jutó nyomaték:

$$M_2^{bal} = -\frac{pL^2}{20} \quad (2.99)$$

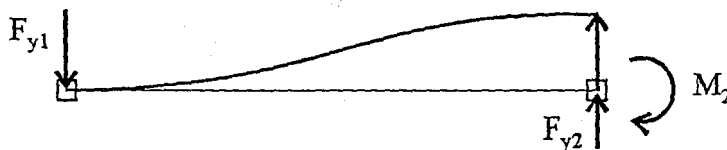
Az 1-es csomópontban ébredő támaszerő:

$$F_{y1} = -\frac{pL}{20} \quad (\downarrow) \quad (2.100)$$

A támaszponti nyomatékokat úgy kaptuk, hogy a középső részt a 2-es és 3-as csomópontban befogottuk tételeztük fel és a támaszponti nyomatékokat felcserélt forgatással helyezzük a tartóra.

A megoszló terheléssel terhelt tartó pontos megoldását az utóbbi megoldás és a középső kéttámaszú rész eredményeinek szuperpozíciójával nyerhetjük. A nem elmozduló csomópontú megoldás tovább általánosítható. Egy gerendaelem a síkban csomópontonként 3 szabadságfokkal (azaz 3 elmozdulási lehetőséggel) rendelkezik. A 2 + 1 rúdra kapott eredményeket is felhasználjuk, de újabb kiegészítés is szükséges.

Ha egy gerenda elem egyik vége egységnyit mozdul el, de a csomópontok nem fordulnak el.



2.14 ábra

$$F_{y_1} = F_{y_2} = \frac{12 \cdot EI}{L^3}; \quad M_2 = \frac{6EI}{L^2} \quad (2.101)$$

Az általánosított síkbeli gerendaelem merevségi mátrixa tehát:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Ha a gerendaelem nem vízszintes úgy a lokális és globális koordináta-rendszerek nem esnek egybe. Egy általánosabb helyzetű gerendaelemnél a kapott merevségi mátrixot transzformálni kell.

$$\underline{\underline{K}}_e = \underline{\underline{T}}^* \cdot \underline{\underline{K}}_e^* \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.103)$$

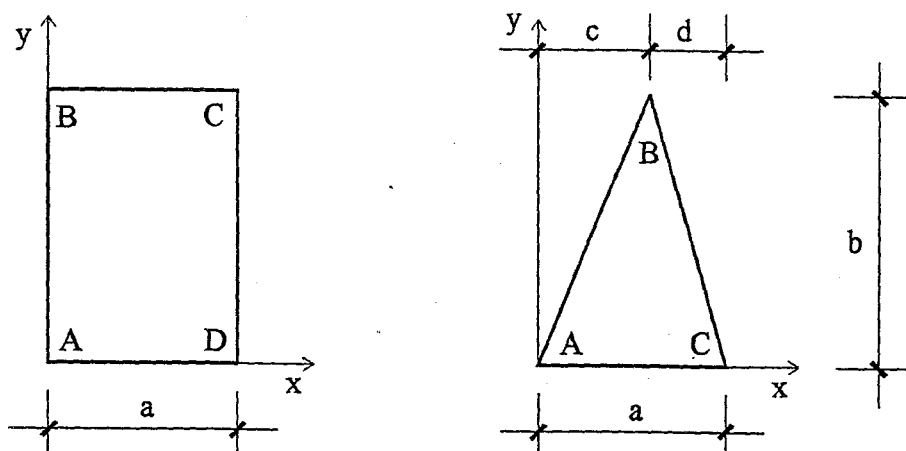
A transzformáló mátrix:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

2.4. Tárcsa elemek

A síkjukban terhelt lemezeket tárcsáknak szokás nevezni. A síkbeli felületszerkezeteknél az elemekre bontás nem olyan egyértelmű, mint rúd illetve tartókból (gerendákból) álló szerkezeteknél, ahogy azt a bevezetőben említettük. A felületet hálózati vonalakkal kis tárcsákra, tárcsaelemekre bontjuk fel. A tárcsaelemek legtöbbször derékszögű négyszög, vagy háromszög alakúak. (2.15 ábra)

Az elem típusának megválasztásához a vizsgált szerkezet alakja meghatározó. Derékszögű négyszögekre csak hasonló alakú tartomány osztható fel, egyéb esetekben pl. görbe vonalnál háromszögelem alkalmazható. Egy jó hálózat elkészítése már önmagában is nehéz feladat, de ezzel itt most részletesen nem foglalkozunk.



2.15 ábra

Mivel a tárcsa pontjaiban síkbeli feszültségi állapot van, a tárcsa bármely pontjának elmozdulása két eltolódással adható meg.

Pl. egy négy csomópontos tárcsaelem ezért 8 szabadságfokú. Az elem merevségi mátrixának felírását két lépésben végezhetjük.

Először az elemen belüli elmozdulásokat írjuk le a csomóponti elmozdulások segítségével.

Második lépésként a csomóponti elmozdulások és a csomóponti erők közötti kapcsolatot állítjuk elő a potenciálisenergia minimumának tétele alapján.

Az elem egy belső pontjának elmozdulásait az **elmozdulás függvény** adja meg.

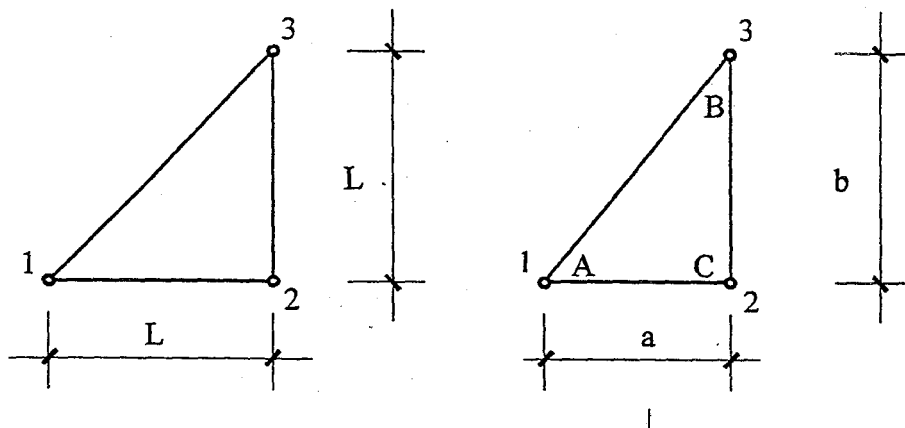
Az elmozdulás függvényt szokás még bázis függvénynek, aproximációs és interpolációs függvénynek is nevezni.

Az elmozdulás függvényt bizonyos megszorítástól eltekintve, önkényesen vesszük fel. Az elmozdulás függvényeknek meg kell felelni bizonyos konvergencia kritériumoknak, ilyen pl. hogy a sarokpontok merevtestszerű mozgásából nem keletkezhessen alakváltozás, így feszültség sem. A közelítő elmozdulás függvények a teljes függvénysorok első tagjaiból választhatók. Egy kétdimenziós esetben a harmadfokú teljes sor 10 tagot tartalmaz

$$\begin{matrix}
 & & & & 1 \\
 & & & x & y \\
 & x^2 & & xy & y^2 \\
 x^3 & x^2 \cdot y & & xy^2 & y^3
 \end{matrix}$$

2.4.1 Háromszögelem

A tárcsaelemek merevségi mátrixait elemi úton már nehéz előállítani. A rácsos tartó szerkezeti merevség mátrixa és a háromszög alakú tárcsaelem merevségi mátrixa között hasonlóság fedezhető fel.



2.16 ábra

Mindkét esetben a csomópontok két-két elmozdulási lehetőséggel bírnak. (2.16 ábra) Ha a rácsos tartóra kapott szerkezet mátrixot csomópontonként partícionáljuk a következőket kapjuk:

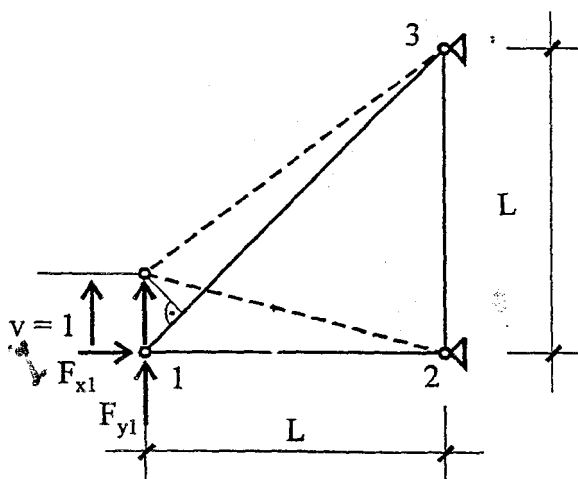
$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \underline{\underline{K}}_{13} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} & \underline{\underline{K}}_{23} \\ \underline{\underline{K}}_{31} & \underline{\underline{K}}_{32} & \underline{\underline{K}}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

A $\underline{\underline{K}}_{ij}$ 2x2-es mátrix az i csomópontban ébredő erőket jelenti a j csomóponti mozgásokból.

Nézzük meg részletesen mit jelent a $\underline{\underline{K}}_{11}$

$$\underline{\underline{K}}_{11} = \begin{bmatrix} K_{11}^{xx} & K_{11}^{xy} \\ K_{11}^{yx} & K_{11}^{yy} \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

A K_{11}^{yy} az 1-es csomópontban ébredő x irányú erőt jelent, ha az 1-es pont y irányban egységnyit mozdul el.



2.17. ábra

A geometriai feltétel:

$$u_1 = 0 \text{ és } v_1 = 1.$$

Ahhoz, hogy csak függőleges elmozdulás jöjjön létre F_{x1} és F_{y1} erőnek is kell működnie.

Az 1-3 rúd összenyomódása: $\Delta L_{13} = \frac{\sqrt{2}F_{y_1} \cdot \sqrt{2} \cdot L}{A \cdot E}$ (2.107)

A függőleges eltolódás:

$$v_1 = \sqrt{2} \cdot \Delta L_{13} = \frac{2\sqrt{2} \cdot F_{y_1} \cdot L}{A \cdot E}$$
 (2.108)

Ha nincs vízszintes elmozdulás, úgy

$$F_{x_1} = F_{y_1} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
 (2.109)

A keresett $K_{11}^{xy} = \frac{AE}{L} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

A háromszögelem merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{AA} & \underline{\underline{K}}_{AB} & \underline{\underline{K}}_{AC} \\ \underline{\underline{K}}_{BA} & \underline{\underline{K}}_{BB} & \underline{\underline{K}}_{BC} \\ \underline{\underline{K}}_{CA} & \underline{\underline{K}}_{CB} & \underline{\underline{K}}_{CC} \end{bmatrix}$$
 (2.110)

A csomópontokra vonatkozó mátrixok fizikai jelentésükben megegyeznek a rácsos tartó csomóponti mátrixaival.

A $\underline{\underline{K}}_{AA}$ és $\underline{\underline{K}}_{11}$ ugyanazt jelenti.

A merevségi mátrix elemeinek meghatározására azonban most más utat fogunk bejárni, melyet részletesen egy négyszögelem esetében tárgyalunk.

2.4.2 Négyszögelem

Határozzuk meg a 2.15 ábrán látható derékszögű négyszögelem merevségi mátrixát. Az elem szabadságfoka 8, így függvényenként 4-4 állandót választhatunk.

Az elmozdulási függvények:

$$u(x, y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x \cdot y$$
 (2.111)

$$v(x, y) = c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot y + c_8 \cdot x \cdot y$$
 (2.112)

A sarokponti koordináták behelyettesítésével és a csomóponti elmozdulások ismeretében a c_i állandók számolhatók.

Az A pont $x = 0, y = 0$ így

$$c_1 = u_A, \quad c_5 = v_A$$
 (2.113)

B pont $x = 0$ és $y = b$, így

$$c_3 = \frac{u_B - u_A}{b}; \quad c_7 = \frac{v_B - v_A}{b}$$
 (2.114)

D pont $x = a$ és $y = 0$, így

$$c_2 = \frac{u_D - u_A}{a}; \quad c_6 = \frac{v_D - v_A}{a}$$
 (2.115)

C pont $x = a$ és $y = b$

$$c_4 = \frac{1}{ab}(u_A - u_B + u_C - u_D)$$
 (2.116)

$$c_8 = \frac{1}{ab}(v_A - v_B + v_C - v_D) \quad (2.117)$$

Az elmozdulás függvényeket mátrix formában írva:

$$\underline{u} = \underline{F} \cdot \underline{c} \quad (2.118)$$

A \underline{c} oszlopvektor a c_i állandókat (együtthatókat) tartalmazza.

Az állandók meghatározhatók, ha a csomópontok elmozdulásait ismertnek tételezzük fel. A számításokat az előzőekben elvégeztük, így nem volt szükség mátrix invertálásra.

$$\underline{c} = \underline{F}_s^{-1} \cdot \underline{e} \quad (2.119)$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{F} \cdot \underline{F}_s^{-1} \cdot \underline{e} = \underline{N} \cdot \underline{e} \quad (2.120)$$

$$\underline{N} = \underline{F} \cdot \underline{F}_s^{-1} \quad (2.121)$$

Az \underline{F} és az \underline{F}_s^{-1} mátrixok szorzásával nyerjük az ún. \underline{N} elmozdulási mátrixot.

$$\underline{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$\underline{F}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\underline{N}(x,y) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) & 0 & \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}\right) & \left(\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}\right) & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & 0 & \left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}\right) \end{bmatrix}$$

(2.124)

Az \underline{N} mátrix segítségével az elem tetszőleges pontjának elmozdulásai felírhatók adott sarokponti elmozdulások esetén.

Ha az elem tetszőleges pontjának elmozdulása ismert az alakváltozások is felírhatók a geometriai egyenletekkel.

Az alakváltozásokból feszültségek is számolhatók a Hooke-törvény alkalmazásával.

Ha az alakváltozás: $\underline{\varepsilon}$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u} = \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{e} \quad (2.125)$$

\underline{L} - differenciál operátor,

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A Hooke törvény síkbeli feszültség állapotra:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.126)$$

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \lambda = \frac{1-\nu}{2} \quad (2.127)$$

Az elmozdulás módszer egyensúlyi egyenletrendszerét a potenciális energia minimumának tételével állítjuk elő.

A belső erők potenciálja skalárisan írható:

$$\Pi_a = \int_{(V)} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot dV \quad (2.128)$$

A mátrixok felhasználásával pedig

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\sigma}^* \cdot \underline{\varepsilon} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\varepsilon}^* \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (2.129)$$

azaz

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \underline{e}^* \int_V \underline{B}^* \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV \cdot \underline{e} \quad (2.130)$$

A külső erők potenciálja a külső erők munkájának ellentettje:

$$\Pi_k = -W_k = -\underline{q}_a \cdot \underline{e} \quad (2.131)$$

$$\text{Ha } \frac{d\Pi}{de} = 0 \quad (2.132)$$

A differenciálás elvégzése után:

$$\underline{K} \cdot \underline{e} = \underline{q}_{cs} \quad \text{ahol} \quad (2.133)$$

$\underline{K} = \int_{(V)} \underline{B}^* \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV$, az elem merevségi mátrixa. Ezen integrált bizonyos esetekben zárt

alakban, máskor numerikus integrálással számolhatjuk.

A \underline{q}_{cs} tehervektorba nemcsak a csomópontokban ható erőket lehet figyelembe venni, hanem például az elemekre ható megoszló terhelést is. A teher számítása ilyenkor

$$\underline{q}_e = \int_{(A)} \underline{N}^* \cdot \underline{p} \cdot dA \quad (2.134)$$

összefüggésből számolható.

2.5. Lemezelemek

A lemezelemek merevségi mátrixának előállításához először a csomópontok szabadságfokát kell meghatározni.

A lemezelmélet tanítása szerint elegendő ismerni a lemez középfelületének elmozdulásait leíró $w = w(x, y)$ függvényt, ugyanis ennek ismertében a lemez valamennyi igénybevétele számítható. Ha a csomópontokban folytonosságot akarunk biztosítani, akkor nem elegendő, hogy az elemeken lévő függvények értékei azonosak legyenek, hanem a függvények érintőinek is azonosnak kell lenni. Így egy csomópontban három alakváltozási jellemzőt kell meghatározni.

$$\underline{u}_i^* = [w_i, \phi_{ix}, \phi_{iy}] \quad (2.135)$$

A szögelfordulások meghatározhatók:

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.136)$$

és pl. az M_x nyomaték:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.137)$$

ahol: $D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$

A görbületek a lehajlás függvényből:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{\rho_{xy}} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.138)$$

A lemezelemek számításánál egy \underline{L} operátort célszerű felvenni:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

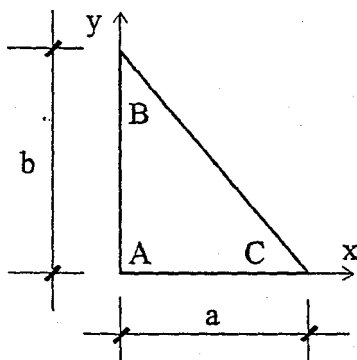
Az ún. anyagtörvény, itt most az igénybevételek és a görbület között teremt kapcsolatot.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_x} \\ \frac{1}{\rho_y} \\ \frac{1}{\rho_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Rövidebb formában:

$$\underline{M} = \underline{D}_L \cdot \underline{\rho}$$

A következőkben egy egyszerűbb esetet vizsgálunk a vizsgált elem derékszögű háromszög alakú.



2.18 ábra

Az elem szabadságfoka: 9, ui. csomópontonként három adat megadása szükséges ahogy ezt korábban magyaráztuk.

Az elmozdulásfüggvényben a teljes harmadfokú hatványsort szerepeltetjük. A geometriai izotrópia megtartása érdekében mind a 10 tagot figyelembe kell venni.

$$w(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 + c_8 (x^2 y + xy^2) + c_9 y^3 \quad (2.141)$$

Megfigyelhető, hogy az elmozdulási függvényben az x, y változók fokszáma azonos.

A csomóponti elfordulások:

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = c_2 + 2 \cdot c_4 \cdot x + c_5 y + 3c_7 x^2 + c_8 (2xy + y^2) \quad (2.142)$$

$$\phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = c_3 + c_5 \cdot x + 2c_6 \cdot y + c_8 (x^2 + 2xy) + 3c_9 \cdot y^2 \quad (2.143)$$

A $w(x, y) = \underline{F}(x, y) \cdot \underline{c}$ összefüggéshez:

$$\underline{F}(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, (x^2 \cdot y + xy^2), y^3] \quad (2.144)$$

$$\underline{c}^* = [c_1, c_2, \dots, c_9] \quad (2.145)$$

A csomóponti elmozdulások vektora:

$$\underline{e}^* = [w_A, \phi_{Ax}, \phi_{Ay}, w_B, \phi_{Bx}, \phi_{By}, w_C, \phi_{Cx}, \phi_{Cy}] \quad (2.146)$$

A sarokponti koordináták behelyettesítésével, meghatározható az \underline{F}_s mátrix.

Az A pont esetében $x=0, y=0, w_A=c_1, \phi_{Ax}=c_2, \phi_{Ay}=c_3$

A B pont esetén $x=0; y=b$.

$$w_B = c_1 + c_3 \cdot b + c_6 \cdot y^2 + c_9 \cdot y^3 \quad (2.147)$$

$$\phi_{Bx} = c_2 + c_5 \cdot b + c_8 \cdot b^2 \quad (2.148)$$

$$\phi_{By} = c_3 + 2c_6 \cdot b + 3c_9 \cdot b^2 \quad (2.149)$$

$$\underline{F}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 3b^2 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

Az \underline{F}_s mátrixból az \underline{F}_s^{-1} mátrix már előállítható.

$$\underline{F}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a}{bc} & -\frac{b}{ac} & 0 & -\frac{a}{bc} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{ac} \\ -\frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{2}{b} & \frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{bc} & \frac{1}{ac} & 0 & \frac{1}{bc} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{ac} \\ \frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} & -\frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

Ahol $c = b - a$

A csomópontok elmozdulásaiból a belső pontok lehajlásfüggvénye már meghatározható:

$$w(x, y) = \underline{F}(x, y) \cdot \underline{F}_s^{-1} \cdot \underline{e} = \underline{N}(x, y) \cdot \underline{e} \quad (2.152)$$

ahol:

$$\underline{N}^*(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{3}{b^2}y^2 + \frac{2}{a^3}x^3 + \frac{2}{b^3}y^3 \\ x - \frac{2}{a}x^2 + \frac{a}{bc}xy + \frac{1}{a^2}x^3 - \frac{1}{bc}x^2y - \frac{1}{bc}xy^2 \\ y - \frac{b}{ac}xy - \frac{2}{b}y^2 + \frac{1}{ac}x^2y + \frac{1}{ac}xy^2 + \frac{1}{b^2}y^3 \\ \frac{3}{b^2}y^2 - \frac{2}{b^3}y^3 \\ -\frac{a}{bc}xy + \frac{1}{bc}x^2y + \frac{1}{bc}xy^2 \\ -\frac{1}{b}y^2 + \frac{1}{b^2}y^3 \\ \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{2}{a^3}x^3 \\ -\frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{a^2}x^3 \\ \frac{b}{ac}xy - \frac{1}{ac}x^2y - \frac{1}{ac}xy^2 \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Az elem merevségi mátrixa most már előállítható.

$$\underline{B} = \underline{L} \cdot \underline{N} = \underline{L} \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}_s^{-1} \quad (2.154)$$

$$\underline{K}_e = \int_{(V)} \underline{B}^* \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} dV = \left(\underline{F}_s^{-1} \right)^* \int_{(A)} \underline{B}_f^* \cdot \underline{D}_L \cdot \underline{B}_f \cdot dA \cdot \underline{F}_s^{-1} \quad (2.155)$$

2.6. Hibaanalízis

A végelem-analízis alkalmazása során több hiba is előfordulhat. Ezen hibák egy része a számítógép véges pontosságú számábrázolása miatt történik, valamint a numerikus integrálásnál is felléphetnek.

A legnagyobb hiba azonban a merevségi mátrix megadásában illetve a merevségi egyenlet megoldása során jelentkezik.

Példaként hasonlítsuk össze az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és az} \quad (2.156)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0,999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{egyenletrendszer megoldásait.} \quad (2.157)$$

u_1 értéke -999 és 1001 között változik, u_2 értéke pedig -1000 és 1000 között.

A megoldások közötti igen nagy eltérést az együtthatómátrix kis változása (K_{22} -ben az eltérés csupán 0,002) okozta. A fent vázolt jelenséget geometriailag igen könnyű magyarázni. Mindegyik megoldást két, majdnem párhuzamos egyenes metszéspontjaiként tekinthetjük.