PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
POLLACK MIHÁLY MŰSZAKI KAR
Gépészeti Intézet
Gépszerkezettan Tanszék

MECHANIKA III.

gépészmérnököknek

Pécs
2004

ERFP – DD2002 – HU – B – 01 PROJECT 4. MODUL
Ipari hátterű alternáló képzés előkészítése a Gépészmérnöki szakon

Szerző: **Dr. Orbán Ferenc**

Kéziratot lektorálta: **Dr. Németh Béla**

Kiadó: **Pécsi Tudományegyetem**
Pollack Mihály Műszaki
Főiskolai Kar
Pécs

A Mechanika III. gépészmérnököknek jegyzet
a ERFP-DD2002-HU-B-01.sz
Phare pályázat alapján készült

Tartalomjegyzék

1. KINEMATIKA

1.1 Tömegpont kinematikája

A kinematika a mechanikának az az ága, amely a mozgásoknak csak a leírásával foglalkozik anélkül, hogy a mozgások keletkezését, okát vizsgálná. A kinematikát (és később a kinetikát is) a mozgó anyagi test jellege szerint osztályozhatjuk, beszélünk

az anyagi pont

az anyagi pontrendszer és

a merev test mozgásáról.

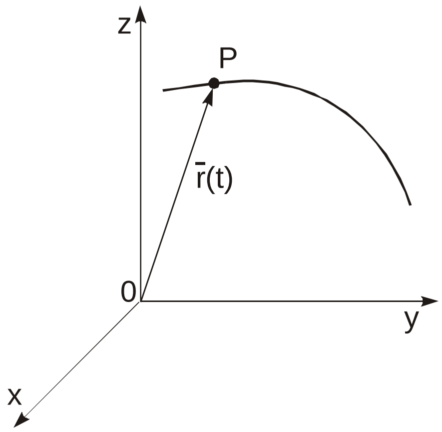
A mozgó testet akkor tekintjük anyagi pontnak (tömegpontnak), ha méretei a mozgás méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsinyek. Ilyenkor az egész test mozgását egyetlen pontjának mozgásával jellemezhetjük. Hogy egy test anyagi pontnak tekinthető-e, az tehát a vizsgált mozgástól függ. Például egy bolygó a Nap körüli mozgását tekintve anyagi pontnak tekinthető, de a tengelye körüli forgását vizsgálva már nem.

A haladó test egyetlen ponttal helyettesíthető, ha a test egy pontjának mozgását ismerjük, akkor az egész test haladó mozgását ismerjük. A kinematikában az anyagi pont és a merev test mozgásviszonyait tárgyaljuk, az anyagi pontrendszerekkel csak a kinetikában foglalkozunk.

Az anyagi pont helyzetét és mozgását a térben mindig valamely koordinátarendszerhez képest kell megadni, illetőleg vizsgálni. A műszaki gyakorlatban a Földhöz kötött koordinátarendszert használjuk.

Valamely tetszőlegesen megválasztott koordinátarendszerben az anyagi pont pillanatnyi helyzete a $\bar{r} = \bar{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adható meg. (1.1 ábra)

$$\bar{r} = \overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$



1.1 ábra

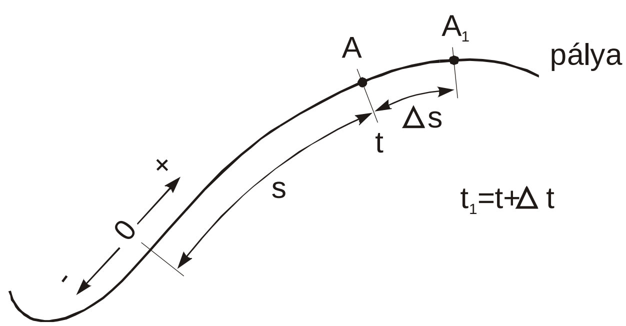
Az anyagi pont mozgása kinematikailag meghatározott, ha az $\bar{r}$ vektort mint az idő függvényét ismerjük, pl. derékszögű koordinátákkal kifejezve;

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t)$$

Az $\bar{r} = \bar{r}(t)$ összefüggést mozgástörvénynek nevezzük. Ez a függvény folytonos. A mozgó pont által befutott folyamatos görbét pályának nevezzük. Matematika szemszögéből nézve a $\bar{r} = \bar{r}(t)$ függvény a térgöbe paraméteres egyenlete.

A mozgások leírásának egy további lehetősége, hogy megadjuk a pályát és azt, hogy valamely pontjából indulva mekkora s utat fut be t idő alatt.

Így a mozgást az s = s(t) alakú mozgástörvény jellemzi. Az s út előjeles skalár mennyiség.



1.2 ábra

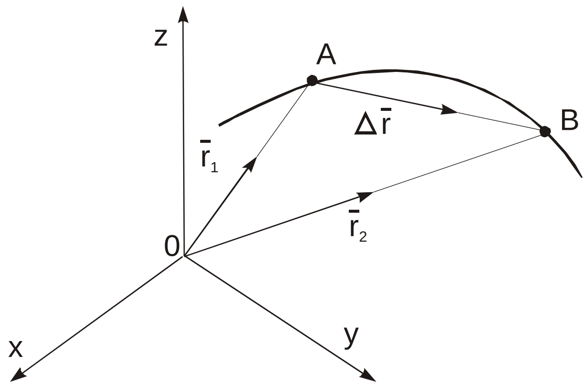
A mozgások a pálya alakja szerint osztályozhatók. Így beszélünk egyenes vonalú mozgásról, körmozgásról, síkmozgásról.

Az anyagi pont mozgása három adattal jellemezhető, három szabadságfoka van. (pl. x, y, z)

Az anyagi pont mozgásának igen fontos jellemzője az időegység alatt befutott út, a sebesség.

Először vizsgáljuk meg a közepes sebesség fogalmát.

A tömegpont a mozgás során t = t_1 időpontban legyen az A pontban, a $t_2 = t_1 + \Delta t$ időpontban pedig a B pontban. (1.3 ábra)



1.3 ábra

A két pont helyzetét az $\bar{r}_1$ *és* $\bar{r}_2$ vektorok határozzák meg. A (t_1, t_2) időszakban a tömegpont mozgására jellemző $\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ vekort elmozdulás vektornak nevezzük.

A $\bar{v}_k = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$ hányadost közepes sebességnek nevezzük. Dimenziója $[ms^{-1}]$.

A közepes sebesség párhuzamos az elmozdulás vektorral. A $\bar{v}_k$ közepes sebesség az AB szakaszon végbemenő mozgásról csak közelítő képet ad. Ha a Δt értékét minden határon túl csökkentjük, úgy a $\bar{v}_k$ közepes sebesség határértéke hú képet ad a mozgásról a t_1 időpontban, illetve az A pontban.

1.1.1 Sebesség

A közepes sebesség határértéke a $\bar{v}$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

vektor a mozgás sebessége a $t = t_1$ időpontban.

Ha a mozgástörvény az ívkoordináta segítségével adott:

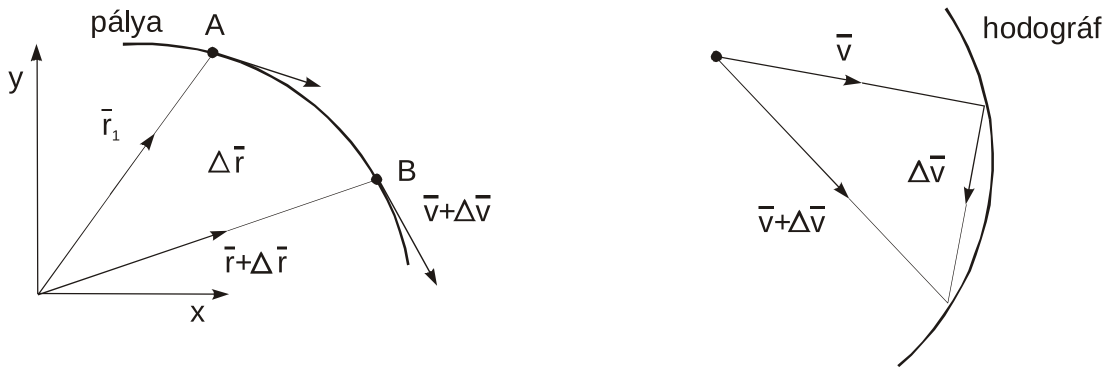
$$\bar{r} = \bar{r}(s); \qquad s = s(t)$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{e}v$$

$$\bar{e} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$, az érintő egységvektor

$$v = \frac{ds}{dt}$$ a pályasebesség.

A sebességvektor a pálya érintőjével párhuzamos. A változásáról szemléletes képet kapunk, ha a sebességvektorokat közös pontból felmérjük. A sebességvektorok végpontja egy görbét határoz meg az ún. hodográfot. (1.4 ábra)



1.4 ábra

1.1.2 Gyorsulás

Ha a sebesség az időben nem állandó, akkor változó mozgásról beszélünk.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$$

A gyorsulás a hodográf érintője.

Ha a mozgástörvény az ívkoordináta függvényében adott, a gyorsulásvektor a következő alakban írható.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta}{\Delta t}(v\bar{e}) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v -}{\Delta t}e + v\frac{\Delta e}{\Delta t}\right) = a_1 e + \lim_{\Delta t\to} v\frac{\Delta\bar{e}}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s} = a_t\bar{e} + a_n\bar{n}$$

Mivel: $\frac{\Delta\bar{e}}{\Delta s} = \frac{\bar{n}}{r}$

ρ – a pálya görbületi sugara, megegyezik a simuló kör sugarával

a_t – pályamenti vagy tangenciális gyorsulás

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

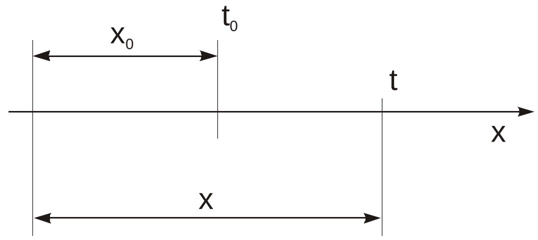
A tömegpont egy adott helyén az $\bar{a}_n$ normális gyorsulás mindig a pálya görbületi középpont-ja felé mutat.

Az egyenes vonalú mozgás

Az egyenes vonalú mozgás pályája egyenes vonal, amit azonosnak tekinthetünk a koordináta-rendszer x tengelyével, így a mozgástörvény

$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i}$; $\quad x(t) = s(t)$ alakban írható.

Beszélhetünk egyenes vonalú és változó mozgásról.



1.5 ábra

Egyenletes mozgás esetén a sebesség nagysága állandó, tehát

$$v = v_{0} = \text{const}; \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

A kinematikai vizsgálatok célja a mozgás három jellemzőjének előállítása az idő függvényében.

A három időfüggvény a következő: út, sebesség, és gyorsulás.

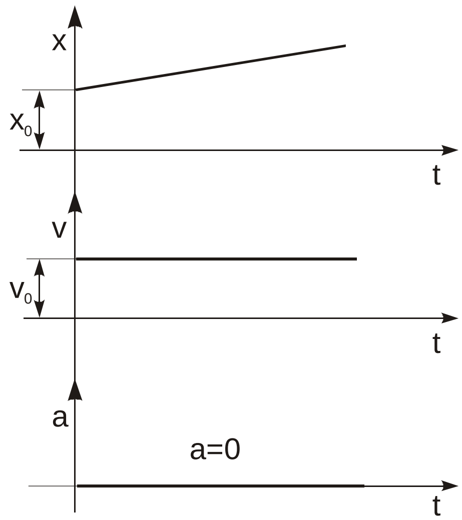
Egyenletes mozgás esetén:

$$x = x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$v = v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$a = a(t) = 0$$

A három függvényt grafikusan is szokás ábrázolni, ezeket kinematikai vagy foronómiai görbének nevezzük.



1.6 ábra

Egyenletesen változó, egyenes vonalú mozgásnál a sebességváltozás az idővel arányos, így

a = a(t) = const

A mozgástörvény a következő alakú lesz:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

A sebesség-függvény:

$$v = v_0 + a\,t$$

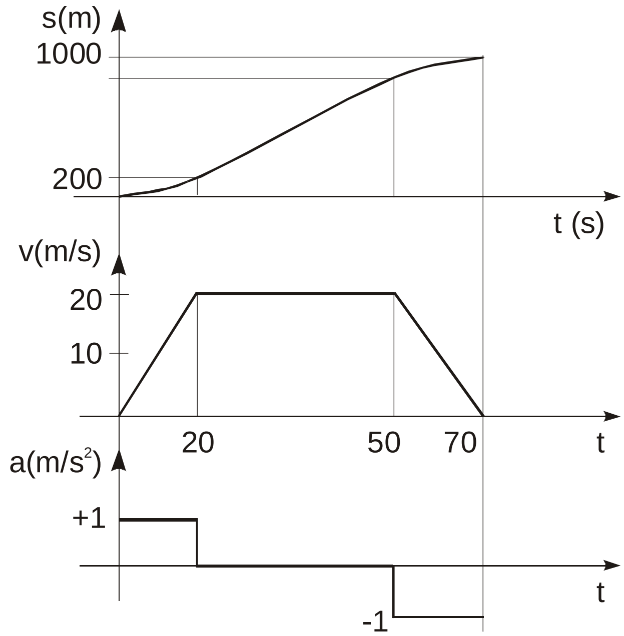
Az egyenletesen változó mozgás foronómiai görbéit egy példa kapcsán tanulmányozzuk.

1. Példa

A metró-szerelvény két, 1 km távolságban levő megálló között 20 másodpercig gyorsít, illetve lassít. A gyorsítás, illetve lassítás mértéke 1m/s^2. A közbenső 30 másodpercben egyenletesen mozog a szerelvény. Rajzoljuk meg a foronómiai görbéket a számszerű értékek meghatározásával.

A gyorsítás és lassítás útja

$$s_1 = s_3 = \frac{at^2}{2} = \frac{1 \cdot 20^2}{2} = 200\ m$$



1.7 ábra

Az egyenletes sebesség:

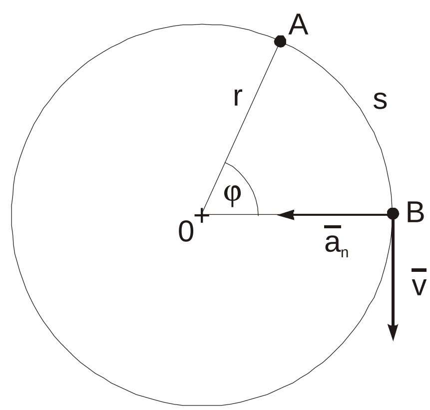
$$v = \frac{s}{t} = \frac{600}{30} = 20\ m/s$$

1.1.3 A körmozgás

Ha egy anyagi pont valamely síkban úgy végzi mozgását, hogy közben egy kijelölt pontból azonos r távolságra marad, akkor körmozgást végez.

A mozgás pályája egy 0 középpontú és r sugarú kör. Az út-idő függvényt a befutott íven s = s(t) alakban adhatjuk meg.

$$s = r\,\varphi$$



1.8 ábra

Ha a mozgó pont a körpálya A pontjából a B pontba jut, közben az íven s utat tesz meg. Egyenletes körmozgásról akkor beszélünk, ha a mozgás során a pályasebesség nagysága nem változik, tehát

$$|\bar{v}| = v = \frac{ds}{dt} = const$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{dj}{dt} = rw$$

A mozgás három időfüggvénye felírható kerületi és poláris jellemzőkkel is

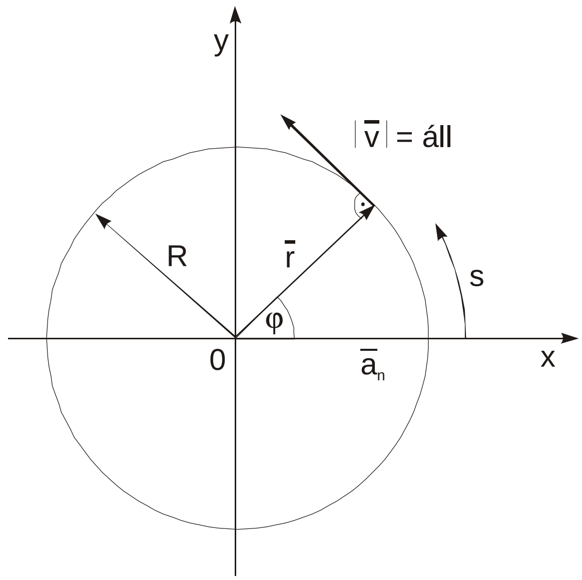
$$s = s(t) = s_0 + v_0 t \qquad j = j(t) = j_0 + w_0 t$$

$$v = v(t) = v_0 = const \qquad w_0 = w(t) = const$$

$$a_t = 0 \qquad a = 0 \text{ szöggyorsulás}$$

A körmozgás mozgástörvénye felírható még a következőképpen is:

$$\bar{r}(j) = R(\bar{i}\cos j + \bar{j}\sin j)$$



1.9 ábra

$$\bar{r}(t) = R[\bar{i}\cos(j_0 + w_0 t) + \bar{j}\sin(j_0 + w_0 t)]$$

v - szögsebesség, vektormennyiség a pályasíkra merőleges és az 0 ponthoz köthető, mértékegysége: 1/s.

$$\bar{v} = v_0 x\bar{r}$$

A tömegpont gyorsulása:

A kapott gyorsulás érték a pálya középpontja elé mutat a pontbeli normálissal párhuzamosan.

A körmozgás egyenletesen gyorsuló, ha szöggyorsulás α = áll.

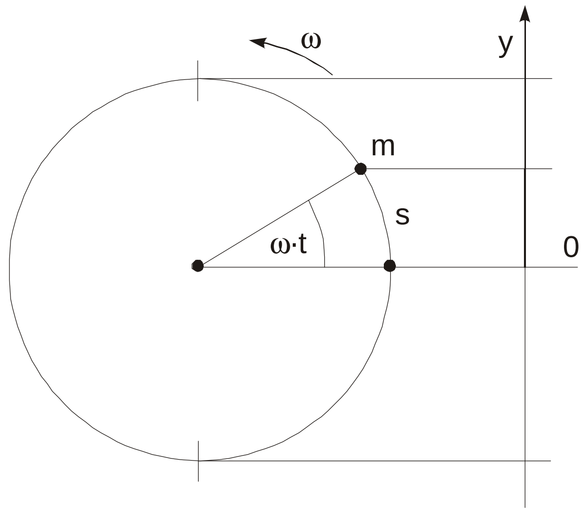
Ebben az esetben

$$j = j_0 + w_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

A tangenciális gyorsulás most nem 0, hanem $a_t = r\,\alpha$

1.1.4 Harmonikus rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgás értelmezhető, mint a körmozgás vetülete.



1.10 ábra

Egyszerű kísérlettel igazolható, hogy a függőleges síkban megfelelő fordulatszámú egyenletes körmozgást végző pontszerű test vetülete és a rugóra függesztett golyó rezgése egyforma.

$$y = r \sin \omega t$$

Legyen r = A, a legnagyobb kitérés így:

$$y = A \sin \omega t$$

A rezgő test sebességét a kormozgás sebességének vetülete adja

$$v = A \sin \omega t$$

A normálirányú gyorsulás vetülete pedig:

$$a = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 y$$

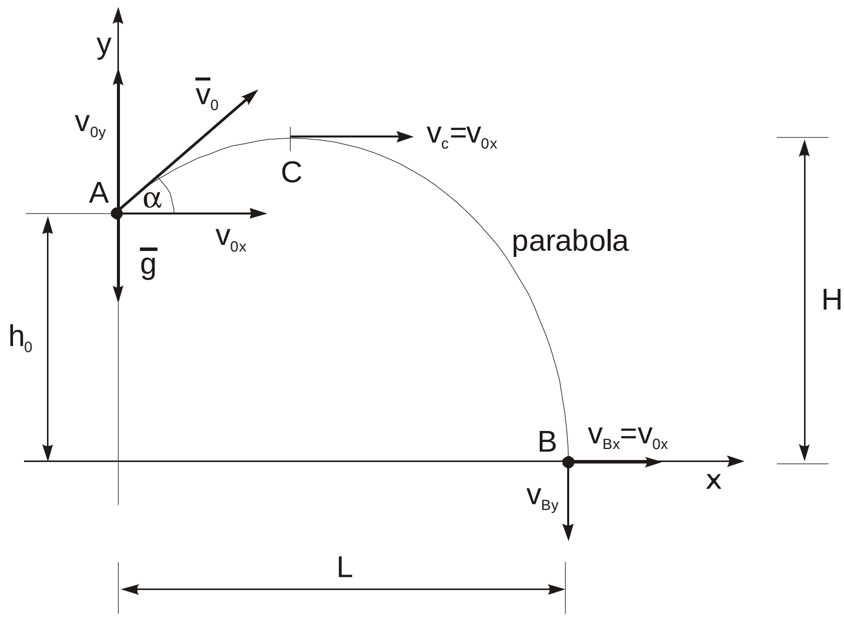
Rezgésidőnek vagy periódusidőnek nevezzük azt az időt, amely alatt az y értéke megegyezik a kitérés kezdeti értékével.

$$T = \frac{2p}{w}$$

A frekvencia pedig a rezgésidő reciproka: $f = \dfrac{1}{T}$

1.1.5 Hajítás

A ferde hajítás két mozgás eredőjeként fogható fel. Vízszintes irányban mint egyenletes mozgás, amikor is a tömegpont v_{0x} sebességével halad, függőleges irányban pedig egyenletesen változó mozgásról beszélhetünk, amikor is az induló sebesség v_{0y} és a gyorsulás pedig $\underline{g}$ az ún. nehézségi gyorsulás.



1.11 ábra

A vízszintes, illetve függőleges mozgásegyenletek:

$$x = (v_0 \cos a)\,t$$

$$y = h_0 + (v_0 \sin a)\,t - \frac{g}{2}t^2$$

Ha az első egyenletből a t értékét a másikba helyettesítjük, a pályagörbe egyenletét kapjuk.

$$y = xtga - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 a} + h_0$$

Ez az összefüggés egy parabola egyenlete. A mozgáspálya $\bar{v}_0$ ls $\bar{g}$ vektorok síkjába eső parabola lesz.

A mozgáspályára vonatkozó levezetésünk csak légüres térre érvényes, ha a légellenállást is figyelembe vennénk akkor ún. ballisztikus görbét kapunk.

A hajítási feladatok megoldásánál a következő kérdésekre kell válaszolunk.

Mennyi ideig tart a mozgás, milyen magasra emelkedik az anyagi pont és mekkora a megtett út vízszintes távolsága.

Először határozzuk meg az emelkedés $\underline{t_1}$ idejét és az emelkedés $\underline{H}$ magasságát.
A test addig emelkedik, amíg s függőleges irányú sebességkoordináta zérus nem lesz.

$$v_y = v_0 \cdot \sin a = g \cdot t_1 = 0$$

Az emelkedés ideje:

$$t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin a}{g}$$

A legnagyobb emelkedés magasságára írható az egyenesvonalú, egyenletes mozgás képlete alapján:

$$H = h_0 + v_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = h_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 a}{2g}$$

A $\underline{C}$ pontból a B pontba annyi idő alatt ér le az anyagi pont, mintha függőlegesen leesne.
Így az esés ideje:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

A mozgás ideje tehát

$$t = t_1 + t_2$$

A mozgás vízszintes távolsága ezek után meghatározható:

$$L = v_0 \cos a \cdot t$$

2. Példa

A vízszintes talaj fölött h_0 = 100 m magasságban lévő A pontból anyagi pontot hajítunk el a vízszintessel $\alpha = 30^0$-os szöget bezáró v_0 = 80 m/sec sebességgel (1.11 ábra). Határozza meg az emelkedés és az esés idejét. Milyen magasra (H) emelkedik az anyagi pont?
Mekkora a hajítás vízszintes távolsága (L)? A számításokban g = 10 m/s^2

Megoldás

A sebesség összetevők:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \sin a = 69{,}28\ m/s$$
$$v_{0y} = v_0 \sin a = 30\ m/s$$

Az emelkedés ideje:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = 4 \sec$$

A legnagyobb emelkedési magasság:

$$H = h_0 + v_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} 9 t_1^2 = 100 + 40 \cdot 4 - \frac{1}{2} 10 \cdot 4^2 = 180 \ m$$

Az esés ideje:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{360}{10} = 6 \sec}$$

A mozgás ideje:

$$t = t_1 + t_2 = 10 \sec$$

A hajítás vízszintes távolsága:

$$L = v_{0x} \cdot t = 69{,}28 \cdot 10 = 692{,}8 \ m$$

Sok esetben a mozgás sebesség idő függvénye ismert, nézzük meg egy egyenesvonalú mozgás esetén, hogyan határozható meg a megtett út.

1.1.6 A távolság vagy megtett út meghatározása.

Ha egyenletes mozgással van dolgunk, a tömegpont sebessége és az eltelt idő alapján a megtett út számolható

$$x = s = v_0 t$$

Nehezebb a feladat, ha a sebesség változik. Ha pl. egy gépkocsi által megtett utat akarjuk meghatározni, akkor percenként vagy félpercenként leolvassuk a sebességmérőt. Így a megtett út számolható:

$$s = \sum v(t_1) \Delta t$$

A számítás nem ad pontos eredményt, mert a ∇t idő alatt a sebesség változik egy kicsit.

A Δt csökkentése révén a pontosság fokozható, a pontos s érték

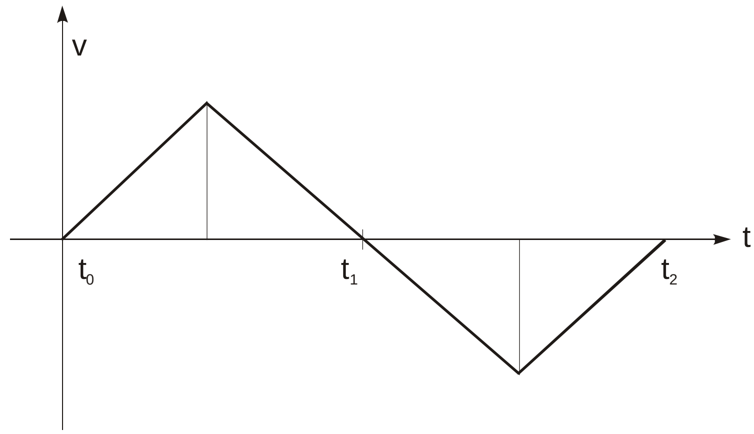
$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum v(t_1) \Delta t$$

A matematikus erre a határértékre – a differenciálhoz hasonlóan – egy szimbólumot vezettek be, ez pedig az integrál jel.

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

A fentiek azt is jelentik, hogy a v(t) diagram alatti terület a megtett úttal arányos, ha v(t) > 0. de pl. az 1.12. ábrának megfelelően

$$\int_{t_0}^{t_2} v(t)dt = 0$$



1.12 ábra

ami a kezdőponttól való elmozdulás, de a megtett út

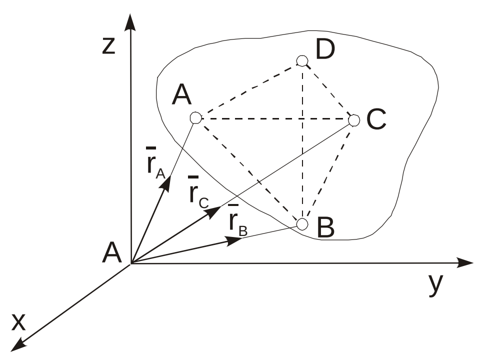
$$s = 2\int_{tt_0}^{t_1} v(t)dt$$

1.2 A merev test kinematikája

A merev test olyan képzelt test, amely alakját és méreteit a mozgás során nem változtatja.

A merev test kinematikájának feladata a merev test mozgásának, helyzet változásának leírása. Általános esetben a test mozgását három, nem egy egyenesbe eső pontjánakmozgása meghatározza. A három pont koordinátájának minden időpontban való ismerete ermészetesen em kilenc ismeretlen meghatározását feltételezi (kilenc koordináta) ui. a pontok távolsága a mozgás során állandó.

A merev test mozgását 6 független adat egyértelműen meghatározza, ezért mondjuk, hogy a merev test szabadságfoka: 6.



1.13 ábra

Az 1.13 ábrán látható három pont egy tetszőlegesen kijelölt D pont helyzetét egyértelműen meghatározza bármely időpontban ui. a pontok relatív távolsága nem változik. Gondoljunk arra, hogy a négy pont tetraédert határoz meg és ha egy lapját kijelölő háromszög ismert, a tetraéder negyedik pontja egyértelműen meghatározott. Mivel a merev test két pontjának távolsága nem változik a mozgás során, így a távolság négyzete sem.

$$\frac{d}{dt} r_{AB}^2 = 2\bar{r}_{AB}\bar{v}_{AB} = 2\bar{r}_{AB}\left(\bar{v}_B - \bar{v}_A\right) = 0$$

A fenti feltétel két esetben teljesül, ha $\bar{v}_B = \bar{v}_{A'}$ illetve ha $\bar{v}_A = 0 \quad \textit{és} \quad \bar{v}_B \perp \bar{v}_{AB} - \textit{re.}$

Ekkor legyen $\bar{v}_B = v \;\; x\, \bar{r}_{AB}$

Az első esetben haladó mozgásról beszélünk, a másik esetben tengely körüli forgó mozgásról.

1.2.1 Sebességállapot

A legáltalánosabb eset, ha a merev test egy adott $\bar{v}_A$ sebességgel mozgó tengely körül forog, vagyis:

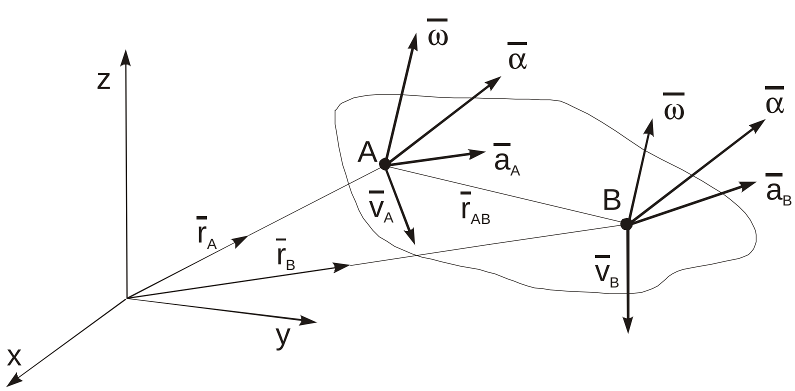
$\bar{v}_B = \bar{v}_A + v \;\; x\, \bar{r}_{AB}$

Ha ismerjük a merev test összes pontjának sebességét, akkor ismerjük a sebességállapotát.

A fenti képlet alapján a $\bar{v}_A \quad \textit{és} \quad v$ ismeretében bármely pont sebessége meghatározható, természetesen a merev test geometriáját ismertnek tételezzük fel.

1.2.2 Gyorsulás állapot

Ha az A pont mozgásjellemzőit ismerjük, abból B pont gyorsulását is meghatározhatjuk.



1.14 ábra

A B pont gyorsulása az alábbiak szerint írható (levezetés nélkül)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + a \;\; x\, \bar{r}_{AB} + v \;\; x\left(v \;\; x\, \bar{r}_{AB}\right)$$

A merev test elemi mozgásai. A merev test mozgása végtelen kis mozgások sorozata. Az ilyen rövid ideig tartó végtelen kis mozgást <u>elemi mozgásnak</u> nevezzük. A valóságban a testek véges mozgásokat végeznek.

A merev elemi mozgásai a haladó és a forgó mozgások.

A haladó mozgást szokás még transzlációnak is nevezni.

Ha egy merev test haladó mozgást végez, akkor a tetszőlegesen kiválasztott két pontja által meghatározott egyenes vonaldarab mozgás közben önmagával mindig párhuzamos marad.

A haladó mozgás végző test mozgásának leírásához elegendő egyetlen pontjának mozgását ismerni.

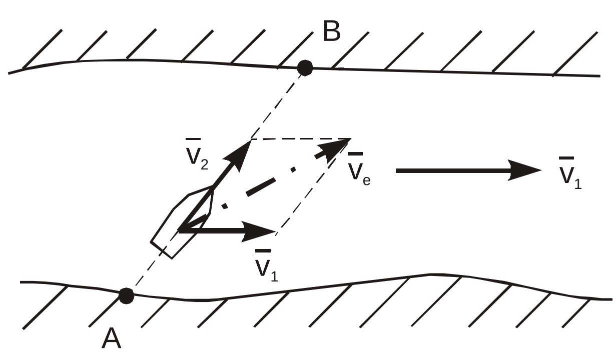
A merev testről akkor mondjuk, hogy helytálló (fix) tengely körül forgó mozgást végez, ha a két pontjának a mozgás során mindvégig nyugalomba marad.

1.2.3 Elemi összetett mozgások.

Haladó mozgások összetétele.

Ha a test egyidejűen több haladó mozgást végez, akkor az eredő mozgás ismét haladó mozgás lesz, és az eredő mozgás sebességvektora a komponens mozgások sebességvektorainak eredője. Az elemi haladó mozgások összetételének problémája jelentkezik a folyón való átkelésnél is.

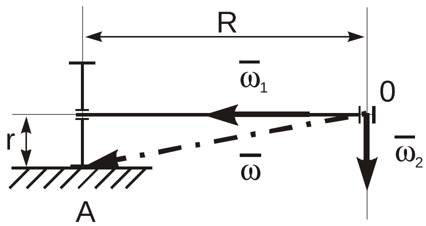
Az egyik elemi haladó mozgást a víz végzi, mely magával sodorja a hajót $\bar{v}_1$ sebességgel, a másik elemi haladó mozgást a hajó végzi, melynek sebessége $\bar{v}_2$



1.15 ábra

Elemi forgó mozgások összetétele. Két egymást metsző tengely körül végbemenő egyidejű forgás eredő mozgása forgás, a forgás szögsebességét és ezzel tengelyét is a vektor paralelogramma átlója adja.

A forgások összetételére az 1.16 ábrán mutatunk be példát.



1.16 ábra

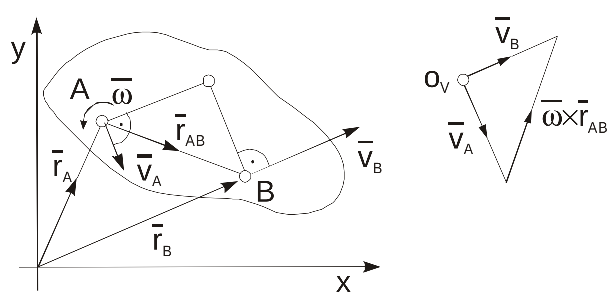
Az ábrán vázolt kerék a vízszintes tengely körül ω_1 szögsebességgel és ugyanakkor az $\underline{O}$ pont körül ω_2 szögsebességgel forog.

Az eredő szögsebességet a szögsebesség vektorok vektoriális összege adja. A következőkben tárgyalt síkmozgás az elemi haladó és forgó mozgások összetételéből származtatható le.

1.2.4 A merev test síkmozgása

Ha egy merev test úgy mozog, hogy minden pontja síkgörbét ír le és ezen görbék síkjai mind párhuzamosak az alapsíkkal, akkor a mozgást síkmozgásnak nevezzük. A síkmozgást végző merev testnek a mozgásállapota egyértelműen meghatározott, ha ismerjük két pontjának egymástól független mozgását. Mivel az v *és* $\bar{a}$ vektorok az alapsíkra merőlegesek, ezért elegendő ezeket skalár mennyiségként kezelni.

Az xy síkkal párhuzamos mozgás esetén $v = w\bar{k}$; $\bar{a} = a\bar{k}$



1.17 ábra

Egy tetszőleges B pont sebességvektora $\bar{v}_B = \bar{v}_A + v x \bar{r}_{AB}$

A fenti vektoregyenletet az 1.17 ábrán meg is szerkesztettük. Keressünk olyan P pontot, amely haladó mozgást nem végez, tehát $\bar{v}_P = \bar{0} = \bar{v}_A + v x \bar{r}_{AP}$

Ilyen pont mindig van, hiszen $\bar{r}_{AP} x v = \bar{v}_A$. A P pontot meghatározó helyvektor merőleges a $\bar{v}_A - ra$. A pillanatnyi forgástengely P döféspontját sebességpólusnak is nevezzük.

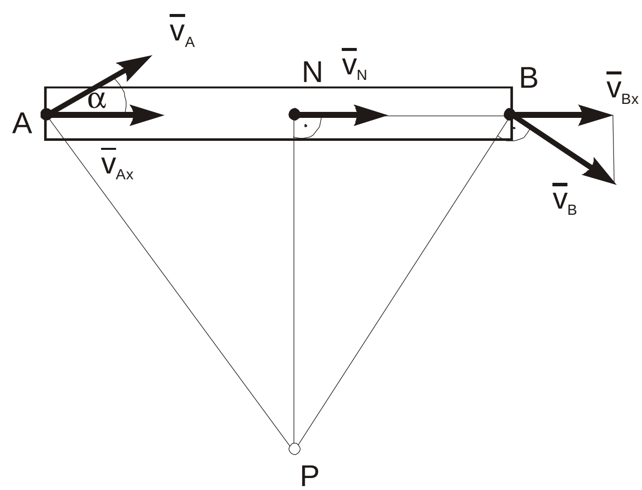
Skalár összefüggés alapján: $r_{AP} = \dfrac{v_A}{w}$

A síkbeli mozgás megadásához három adatra van szükség. A három adat a következő:

v_{Ax}	x_P	v_{Ax}
v_{Ay}	y_P	v_{Ay}
ω	ω	v_B hatásvonala

3. Példa

Adott az 1.18 ábrán lévő rúd alakú merev test. A pontjának sebessége $v_A = 2$ m/s és $\varphi=30^0$, valamint a szögsebesség $\omega = 1$/s. Határozzuk meg a pillanatnyi forgástengely helyzetét és a rúd B pontjának sebességét, ha $\overline{AB} = 2{,}5\ m$.



1.18 ábra

$$\overline{AP} = r_A = \frac{v_A}{w} = \frac{2}{1} = 2\ m$$

$$\overline{NP} = r_N = r_A \cos j$$

$$\overline{NB} = \overline{AB} - \overline{AN} = 1{,}5\ m$$

$$r_B = \frac{r_N}{\cos b} = \frac{1{,}73}{\cos 41^0} = 2{,}3\ m$$

$$tgb = \frac{\overline{NB}}{r_N} = 0{,}865$$

$$v_B = w r_B = 2{,}2\ m/s$$

A példa kapcsán megfigyelhető, hogy a rúd irányába eső sebesség-összetevők nagysága és iránya megegyezik. <u>Ez a rúdirányú sebességek tétele</u>.

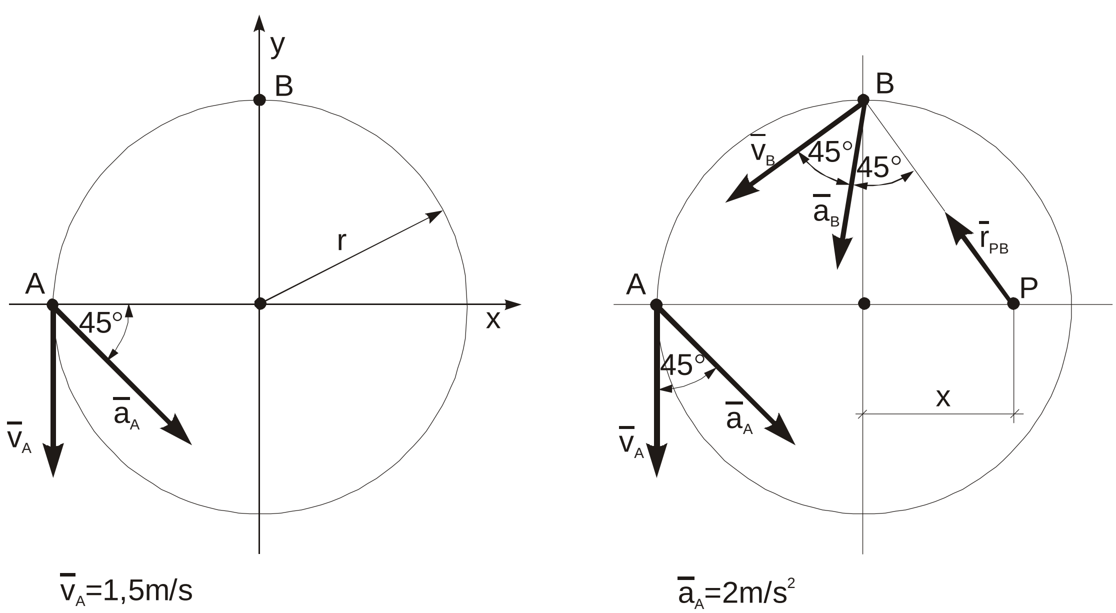
Egyszerű összefüggés írható fel a síkmozgást végző merev test pontjainak gyorsulása között is. Az előzőekben felírt összefüggés:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_a + a\ x\ \overline{r}_{Ab} - w^2 \overline{r}_{AB}$$

Gyorsuláspólusnak nevezzük a síkmozgást végző merev tst azon pontját, melynek a gyorsulása zérus.

4. Példa

Az 1.19. ábrán látható r = 1 m sugarú korong a síkjára merőleges tengely körül forog. A kerületén lévő A pontjának sebessége és gyorsulása ismert.



1.19 ábra

Határozzuk meg a forgáspontot (P), valamint a jelölt B pont sebességét és gyorsulását. Mivel a korong P pont körül forog a P pont a sebességpólus.

A sebességpólus helye:

$$r_{AP} = \frac{v_A}{w}$$

A gyorsulás két összetevője, a tangenciális és normális gyorsulások nagysága megegyezik:

$$a_t = a_n = a_A \sin 45^0 = 1 \cdot 414\, m/s^2$$

$$a_n = r_{AP} w^2$$

$$v_A = w r_{AP} = \frac{a_n}{w^2}$$

$$w = \frac{a_n}{v_A} = \frac{1{,}414}{1{,}5} = 0{,}94 \frac{1}{s}$$

A sebességpólus helye:

$$r_{AP} = 1{,}591\, m$$

A forgás szöggyorsulása:

$$a = \frac{a_t}{r_{AP}} = \frac{1{,}414}{1{,}591} = 0{,}889 \frac{1}{s^2}$$ B Pont gyorsulása:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + a x \bar{r}_{AB} - w^2 \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{r}_{AB} = l\bar{i} + l\bar{j}\ [m]$$

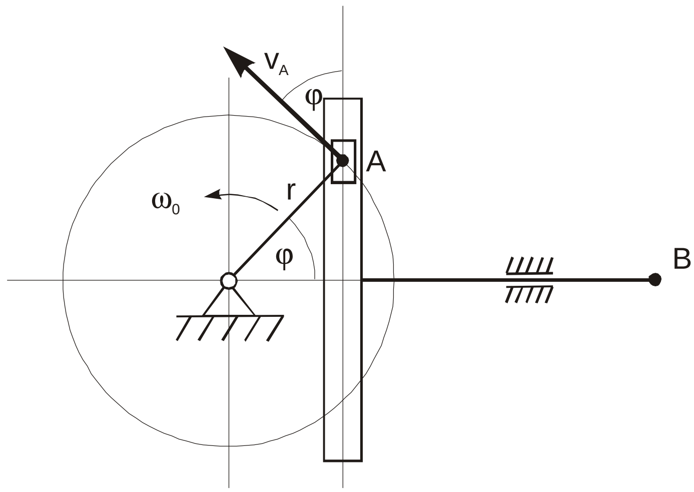
$$\bar{a}_B = (1{,}414\bar{i} - 1{,}414\bar{j}) + 0{,}889(\bar{i} + \bar{j}) = -0{,}364\bar{i} - 1{,}414\bar{j}\ \frac{m}{s^2}$$

$$|\bar{a}_B| = \sqrt{0{,}13 + 2} = 1{,}46\ \frac{m}{s^2}$$

1.2.5 Kulisszás hajtómű kinematikája

A szerkezetek kinematikai vizsgálata nagy fontosságú a gépészetben. A szerkezet definiciója: Kényszerekkel alkalmas módon egymáshoz és az álló környezethez kapcsolt testek összessége, amelyek erőfelvételre vagy erő továbbításra alkalmasak.

A most vizsgált szerkezet labilis és egy szabadságfokú.



1.20 ábra

A kulisszás hajtómű a forgó mozgást egyenes vonalúvá alakítja át. Határozzuk meg a B pont mozgásjellemzőit, ha a forgattyú kar állandó szögsebességgel forog.

A B pont sebessége:

$$v_B = v_A \cdot son\, j = r \cdot w_0 \cdot \sin w_0 t$$

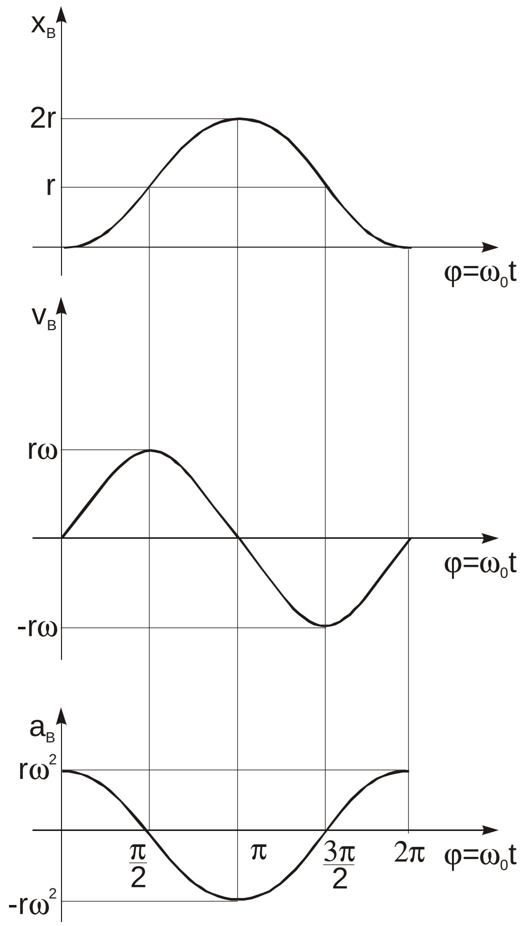
A B gyorsulása:

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = r \cdot w_0^2 \cdot \cos w_0 \cdot t$$

Az út idő függvény integrálással állítható elő:

$$x_B = \int_0^t b_B(t) dr = r \cdot w_0 \int_0^t \sin w_0 t \; dt = r \cdot w_0 \left[-\frac{1}{w_0} \cos w_0 t \right] = r(1 - \cos w_0 t)$$

A fentiek alapján rajzoljuk meg a kulisszamozgás kinematikai diagramjait (foronómiai görbé-it).



1.21 ábra

1.2.6 Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse az anyagi pont helyzetének megadási módjait.
2. Ismertesse a sebesség fogalmát.
3. Ismertesse a gyorsulás fogalmát.
4. Mi a hodográf görbe?
5. Milyen kapcsolat van a foronómiai görbék között?
6. Ismertesse a körmozgás jellemzőit.
7. Ismertesse a ferde hajlítást.
8. Mekkora a szabadságfoka a merev test általános mozgásának.
9. A merev test síkmozgása milyen adatokkal oldható meg egyértelműen.
10. Mi a sebességpólus?
11. Írja fel egy tetszőleges pont gyorsulását ha az egyik pont gyorsulása és a merev test szögsebessége és szöggyorsulása ismert.

2. KINETIKA

2.1. Tömegpont kinetikája

A kinetika (dinamika) mélyebben hatol a mozgások vizsgálatába, mint a kinematika, mert a mozgás okát is kutatja, és célja, hogy a mozgás okának ismeretében a mozgást meghatározza. A kinetikát néhány alaptételre építhetjük fel. Ezeket Newton foglalta egységes rendszerbe l687-ben, azóta Newton-törvények a szokásos megnevezésük.

I. Minden test megmarad nyugvó vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgó állapotában, amíg egy ráható erő mozgásállapotát meg nem változtatja.

II. A mozgás változása egyenesen arányos a mozgató erővel, és abban az egyenes vonalban történik, amelyben az erő hat.

III. Két testnek az egymásra gyakorolt hatásai mindig egyenlők és ellentétes értelműek.

A mozgásváltozást Newton az $\bar{I} = m \cdot \bar{v}$ szorzattal méri, a törvény a mozgásmennyiség változására vonatkozik. A mozgásmennyiséget szokás még <u>impulzusnak</u> vagy lendületnek is nevezni.

2.1.1 Impulzus tétel

A kinetika alaptörvénye tehát, ha m = állandó:

$$\bar{F} = \frac{\Delta \bar{I}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = m \cdot \bar{a}$$

A tömegpont az $\bar{F}_i = (i = 1,2......n)$ erők együttes hatására úgy mozog, mint egyetlen, az erőkkel egyenértékű erő hatására. Ezt az összefüggést impulzus-tételnek hívjuk.

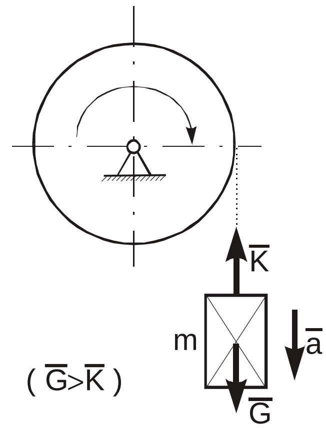
1. Példa

A G = 10,0 kN súlyú terhet kötéllel

a = 4 m/s^2 gyorsulással bocsátjuk le.

Mekkora erő ébred a kötélben?

g = 10 m/s^2



2.1 ábra

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{F_1} = \overline{G} + \overline{K} = m \cdot \overline{a}$$

Megoldás: $G - K = m \cdot a$

$$K = m \cdot g\left(1 - \frac{a}{g}\right) = 10 \cdot 0{,}6 = 6{,}0\ kN$$

Mérnöki gyakorlatban a kinetika alaptörvényét az alábbi alakban írjuk:

$$\overline{F} - m \cdot \overline{a} = \overline{0}$$

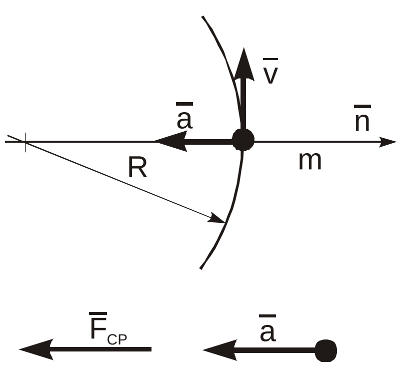
A $(- m \cdot \overline{a})$ kifejezést tehetetlenségi vagy inercia erőnek szokás nevezni.

Az inercia-erő fogalmának bevezetése után **D'Alambert** elve tehát:

A tömegponton a valóban működő erők eredője és a képzeletbeli inercia-erő egyensúlyt tart.

Például, ha egy m tömegű anyagi pontot fonalhoz rögzítünk és az körpályán mozog, a tömegpontra (ha a súlyt elhanyagoljuk) csak a fonalerő hat. Ezt centripetáliserőnek hívjuk.

$$\overline{F}_{cp} = m \cdot \overline{a}$$



2.2 ábra

A két erőrendszer eredője egyenértékű! D'Alambert elve értelmében:

$$\overline{F}_{cf} = m \cdot \overline{a} = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \overline{n}$$

ahol $\overline{n}$ sugárirányú, a kör középpontjából kifelé mutató egységvektor.

Az inercia-erőt itt centrifugális erőnek is hívjuk.

A kinetika alaptörvényének egy másik alakja:

$$\frac{\Delta(m \cdot \bar{v})}{\Delta t} = \sum_i \bar{F}_i$$

$$\Delta(m \cdot \bar{v}) = \sum_i \bar{F} \cdot \Delta t$$

$$m \cdot v_2 - m \cdot \bar{v}_1 = \sum_i \bar{F} \cdot \Delta t$$

2. Példa

200 tonna tömegű induló vonat K = 60 kN vonóerő hatására és E = 20 kN vonatra ható ellen-állás esetén mennyi idő alatt gyorsul fel v = 10 m/s = 36 km/h sebességre?

$$F_{gyorsító} = 40kN$$

$$F \cdot t_1 = m \cdot v_1$$

$$t_1 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 10}{40 \cdot 10^3} = 50 \sec$$

Ha a kinetika alapegyenletét $\bar{r}$ helyvektort 0 kezdőponttól mérjük, akkor az egyenlet jobb oldalán az 0 pontra számított nyomatékot kapjuk.

$$\bar{r} x \bar{F} = \bar{M}$$

Legyen impulzus nyomatéke $\overline{\Pi} = \bar{r} x m \cdot \bar{v}$, más néven perdület.

A perdület megváltozása:

$$\Delta \frac{(\bar{r}\ x\ m \cdot v)}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} - x\ m \cdot \bar{v} + \bar{r}\ x \frac{\Delta(m \cdot \bar{v})}{\Delta t}$$

az első tag 0, mert $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \| \bar{v}$

2.1.2 Perdület-tétel $\frac{\Delta \overline{\Pi}}{\Delta t} = \bar{M}$

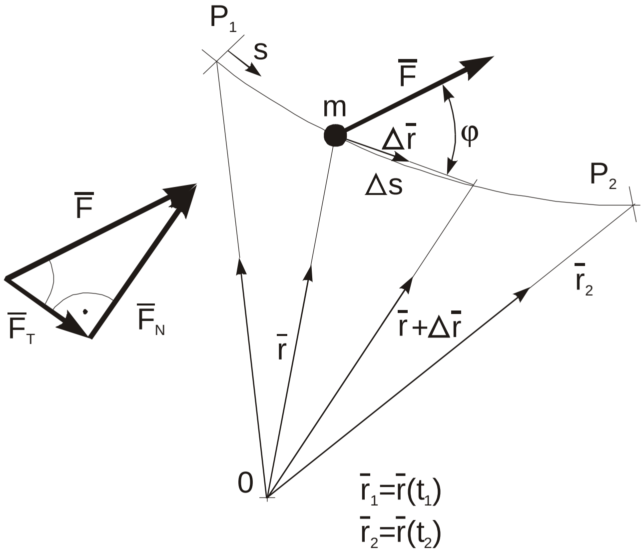
vagy $\bar{D} = \sum_1 \bar{M}_1$

$\bar{D}$ - a perdület derivált

vagy $\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1 = \sum_i \bar{M}_1 \cdot \Delta t$

A tömegpont tetszőleges pontra vett perdületének változása az időegység alatt a tömegpontra ható erőnek ugyanarra a pontra számított nyomatékával egyenlő.

2.1.3 A munkatétel:



2.2 ábra

Az m tömegpontra ható erőnek munkája ΔW .

$$\Delta W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r} = \left|\bar{F}\right| \cdot \cos j \cdot \Delta s$$

Az erőnek csak az elmozdulás irányába eső komponense végez munkát.

$$F_T = \left|\bar{F}\right| \cdot \cos j$$

$$F_T \cong m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = m \cdot v \cdot \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

$$F_T \cdot \Delta s = m \cdot v \cdot \Delta \bar{v} = \Delta \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Mert

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\Delta\left(v^2\right) = \frac{1}{2}m\left[(v+\Delta v)^2 - v^2\right] = \frac{1}{2}m\left[2v\Delta v + \Delta v^2\right] \approx \frac{1}{2}m \cdot 2v \cdot \Delta v$$

$$\bar{F} \cdot \Delta \bar{r} = F_T \cdot \Delta s$$

$$W = \sum_i \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

Az $\frac{m \cdot v^2}{2}$ mennyiség a mozgási vagy kinetikai energia. Jelölése: T

A munkatétel tehát:

a tömegpont kinetikus energiájának változása a tömegpontra ható erő munkájával egyenlő.

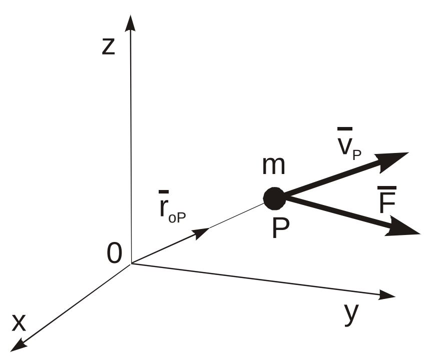
$$T_2 - T_1 = W_{1,2}$$

2.1.4 Teljesítmény:

A $\bar{v}_F$ sebességgel mozgó m tömegű pontra $\bar{F}$ erő hat.

A teljesítmény: $P = \bar{F} \cdot \bar{v}_P$

A munkatételt más alakban írva az Energiatételt kapjuk:



2.3 ábra

$$\frac{\Delta}{\Delta t} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{\Delta \bar{v}^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \cdot \bar{v} = m \cdot \bar{a} \cdot \bar{v} = P$$

A tömegpont mozgási energiájának az idő szerint deriváltja (azaz megváltozása) a tömegpontra ható erők teljesítményével egyenlő.

Az $\bar{F}$ erő $[t_1, t_2]$ időszakaszban végzett munkája:

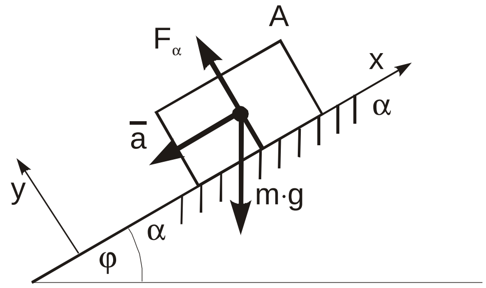
$$W_{1,2} = \sum_i P \cdot \Delta t$$

3. Példa

A tömegpont kényszerek hatására egyenes vonalú mozgást végez.

Adatok:	Kérdés:
M . g = 30 N	φ = ?
g = 10 m/s^2	F_a = ?
$\lvert\bar{a}\rvert = 3{,}4\ m/s^2$	F_a – támaszerő

Súrlódás nincs.



2.4 ábra

Megoldás. Impulzustétellel: $m \cdot \bar{a} = \bar{G} + \bar{F}_a$

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin j - S_a$$

ahol S_a a súrlódási erő, most $S_\alpha = 0$

$$0 = -m \cdot g \cdot \cos j + F_a$$

$$j = 19^0 50' \quad \textit{és} \quad F_a = 28{,}2\ N$$

4. Példa

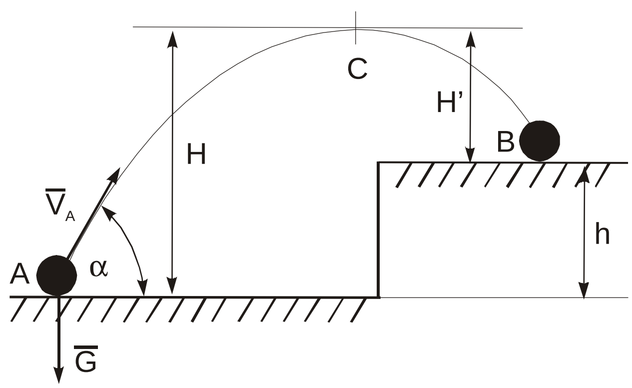
Szabadmozgás

Adatok: $v_A = 10\ m/s;\ a = 60^0;\ h = 1{,}8\ m;\ G = 4\ N;\ g = 10\ m/s^2$

Kérdések: becsapódási sebesség v_B = ? ; H = ?

A munkatételből:

$$T_B - T_A = W_{A,B}$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = -G \cdot h$$
$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gh} = \sqrt{100 - 36} = 8 m/s$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_c^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = -m \cdot g \cdot H$$
$$H = 3{,}75\, m$$



2.5 ábra

5. Példa

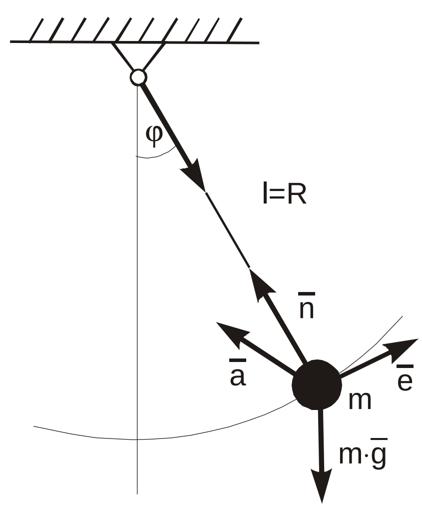
Matematikai inga

Az inga m tömegű tömegpontból és

Súlytalan rúdból áll.

a_t = ?

$$D_a = M_a$$
$$-R \cdot m \cdot a_t = R \cdot m \cdot g \cdot \sin j$$
$$a_t = -g \cdot \sin j$$



2.6 ábra

2.2. Az anyagi pontrendszer kinetikája

Az anyagi (tömeg) pontra megismert törvényszerűségek kissé általánosíthatók, ha egy időben több tömegpontot vizsgálunk.

A vizsgált pontrendszerek egyik csoportja a különálló (diszkrét) tömegpontok általános pontrendszere. A tömegpontok általában szabadon mozoghatnak, egymásra azonban valamiféle erőt fejtenek ki, és éppen ezek az erők fűzik a tömegpontokat pontrendszerré. A rendszernek állandóan ugyanazon pontokból kell állnia. Ilyen pontrendszer, például a Naprendszer bolygóival és holdjaival.

A pontrendszer másik csoportja az általános pontrendszer egyik egyszerű esete: a merev test. A merev testek esetében a képzeletbeli tömegpontok közé merev, de elhanyagolható tömegű rudakat kell képzelni.

Az n tömegpontból álló pontrendszer minden pontjára írható:

$$m\frac{\Delta^2\bar{r}}{\Delta t^2} = \bar{F}_k + \bar{F}_b$$

ahol a tetszőleges tömegpont tömege m, a külső erők eredője $\bar{F}_k$, a belsőké pedig $\bar{F}_B$.

Az egyenleteket összeadva:

$$\sum m\frac{\Delta^2\bar{r}}{\Delta t^2} = \sum F_{kt}$$

A belső erők $\sum \bar{F}_B$ eredője eltűnik, mert a belső erők egyensúlyban lévő erőrendszert alkotnak.

A pontrendszer mozgását a tömeg középpontjának mozgásával jellemezhetjük. A tömegközéppont, mint egy súlyozott átlag a következő képlettel számolható:

$$\bar{r}_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$\bar{r}_{TKP}$ -a tömegközéppont (súlypont) helyvektora.

A tömegpontra felírt impulzus-tétel alkalmazható tömegpontrenszerre is, ha az egyik oldalon a tömegpontrendszerre ható erők eredőjét vesszük, a másik oldalon pedig az össztömeget és a tömegközéppont (súlypont) gyorsulását.

$$\sum \bar{F}_{ki} = M\bar{a}_{TKP}$$
$$M = \sum m_i$$

A tömegpontra felírt perdület- és munkatétel is általánosítható pontrendszerre, de ezek a tételek a merev testre felírt tételekhez hasonlóak, ezért itt most nem tárgyaljuk.

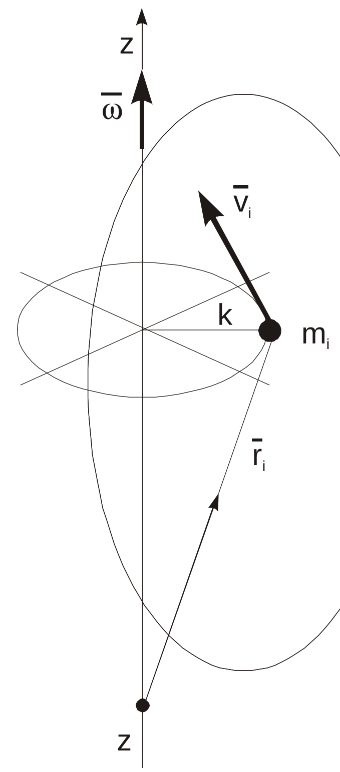
2.3. Merev testek kinetikája

A merev test mozgása mindig előállítható egy haladó és egy forgó mozgás eredőjeként. A haladó mozgás a test tömegközéppontjának mozgásával leírható és így vizsgálata megegyezik a tömegpont kinetikájával. Vizsgáljuk meg a merev test forgó mozgását (2.7 ábra)

$$\bar{v}_i = \bar{w} x \bar{r}_i$$

vagy skalárisan

$$v_i = k_i \cdot w_i$$



2.7 ábra

A kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \cdot k_i^2 \cdot w_i^2 = \frac{w^2}{2}\sum m_i \cdot k_i^2 = \frac{1}{2} I_z \cdot w^2$$

I_z – a z-tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

A tehetetlenségi nyomaték mértékegysége: $[I] = [M] \cdot [k^2] = kg \cdot m^2$.

A merev test általános mozgását a súlypont sebességével haladó és egy a súlyponti tengely körül forgó mozgás eredőjeként tekintjük.

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} \cdot I_s \cdot w^2$$

Háromféle tehetetlenségi nyomatékot szoktak Megkülönböztetni.

a. síkra számított: $I_{xy} = \sum m \cdot z^2$

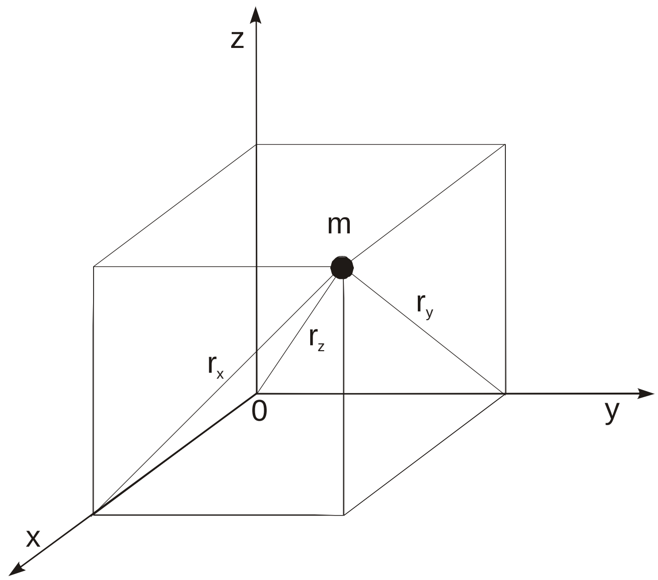
b. tengelyre számított: $I_x = \sum m \cdot r_x^2$

$$I_0 = \sum m \cdot r^2$$

c. pontra számított :

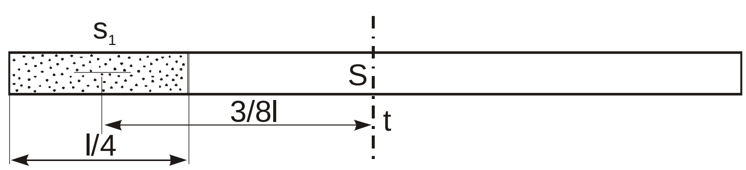
$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

d.



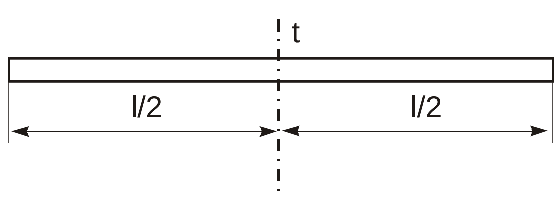
2.8 ábra

Néhány egyszerű test tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyekre:



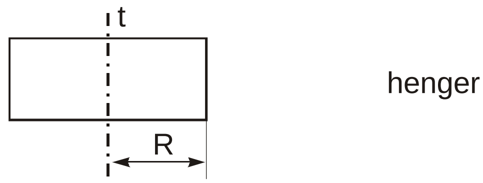
$$m_i = p \cdot A \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot k_i^2 = p \cdot A \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\left[\left(\frac{3}{8} \cdot l\right)^2 + \left(\frac{1}{8} \cdot l\right)^2\right] = m \cdot \frac{10 \cdot l^2}{128} = \frac{m \cdot l^2}{12{,}8}$$

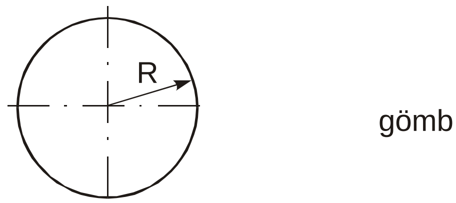


rúd

$$I_t = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$$

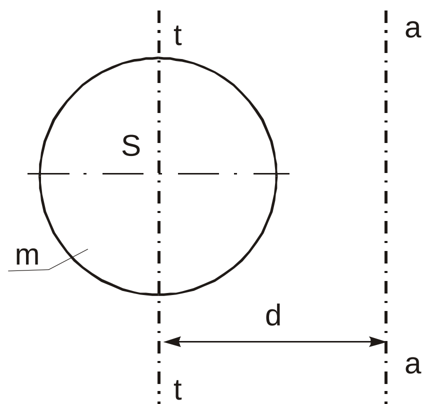


$$I_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$



$$I_t = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$$

Steiner- tétel:



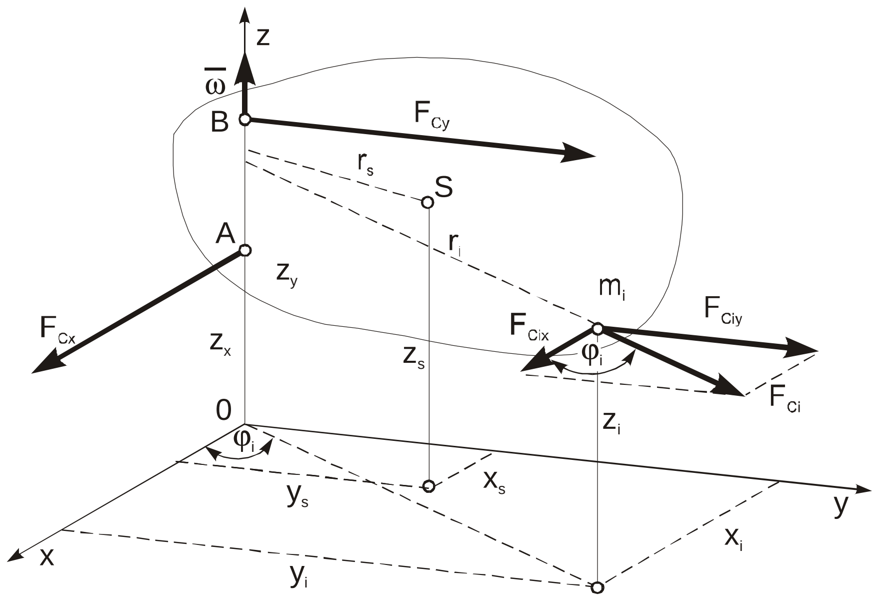
$$I_a = I_t + m \cdot d^2$$

2.3.1 A szabad tengely

A tetszőleges álló tengely körül forgó merev test tengelyére különböző erők hatnak. Ezek az erők részben a testre ható külső erőkből, részben a test tömegének tehetetlenségének révén, mint tömegerők hatnak. Magas fordulatszámnál, különösen ha a test tömege is jelentős, ezek a tömegerők igen nagyok lehetnek.

A következőkben vizsgált merev test esetében hanyagoljuk el az aktív erőket (még a súlyerőt is) és a passzív erőktől is eltekinthetünk, ha a csapágyazást surlódásmentesnek tekintjük. A tengelyre ilyen körülmények között csak a tömeg forgásából származó tömegerők hatnak. Minden merev test esetén található olyan tengely (összesen három), amely körül forgatva a testre semmiféle erő nem hat. Az ilyen tengelyt szabad tengelynek nevezzük.

A 2.9 ábrán feltüntetett merev test egy önkényesen választott x, y, z derékszögű koordináta rendszerben a z tengely körül forog.



2.9 ábra

Az m_i tömegpont forgásából a tömegpontra ható tömegerő:

$$F_{ci} = m_i \cdot r_i \cdot w^2$$

Ennek komponensei:

$$F_{cix} = m_i \cdot r_i w^2 \cdot \cos j_i = m_i x_i w^2$$
$$F_{ciy} = m \cdot r_i w^2 \cdot \sin j_i = m_i y_i w^2$$

Az elemi erők nyomatékai az x, y tengelyekre:

$$m_{ix} = -F_{ciy} \cdot z_i = m_i y_i z_i w^2$$
$$m_{íy} = -F_{cix} \cdot z_i = m_i x_i z_i w^2$$

A fentiekben meghatároztuk az m_i tömegpont hatását a tengelyre, most nézzük meg az egész tömeg hatását.

$$F_{cx} = \sum F_{cix} = \sum m_i x_i w^2 = m \cdot x_s \cdot w^2$$
$$F_{cy} = \sum F_{ciy} = \sum m_i y_i w^2 = m \cdot y_s w^2$$

Az eredő erő pedig:

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = m \cdot w^2 \sqrt{x_x^2 + y_s^2} = m r_s w^2$$

Az eredő centrifugális erő nagyságban akkora, mintha a teljes tömeg pontszerűen a súlypontban hatna.

Nézzük meg most a nyomatékok összegét:

$$M_x = \sum m_{miy} = -w^2 \sum m_i y_i z_i = -w^2 J_{yz}$$

J_{yz} - itt az un. síkpályára számított tehetetlenségi nyomaték.

$$M_y = \sum m_{iy} = -w^2 \cdot \sum m_i x_i z_i = w^2 J_{xz}$$

Ezek után meghatározhatjuk a centrifugális erő hatásvonalát. A centrifugális erők eredője un. erőkereszt.

Az F_{cy} esetében:

$$z_y = \frac{-w^2 J_{yz}}{F_{cy}}$$

Az F_{cx} esetében:

$$z_x = \frac{w^2 \cdot J_{xz}}{F_{cx}}$$

A tárgyalt eset a legáltalánosabb, azonban segít megérteni azt a tényt, hogy egy forgó test kiegyensúlyozása két síkban történhet.

Általában egy forgó test esetében azt szeretnénk elérni, hogy a forgás tengely un. szabad tengely vagy más néven tehetetlenségi főtengely legyen. A probléma tömeg hozzáadással, vagy elvétellel lehetséges. Az eljárást <u>tömeg kiegyensúlyozásnak</u> nevezzük.

A gépkocsi kerekek kiegyensúlyozása tömeg hozzáadásával az un. felni két oldalán lehetséges.

Rögzített tengely körüli forgás:

$$\left|\bar{r}_i x \bar{v}_i\right| = r_i \cdot v_i$$

$$\Pi = \sum r_i \cdot I_i = \sum r_i \cdot m_i \cdot v_i = w \cdot \sum m_i \cdot r_i^2$$

$$v_i = r_i \cdot w$$

$$\Pi = I_z \cdot w$$

A Δt időegység alatti perdület változás:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Delta t} I_z \cdot$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \textit{ szöggyorsulás}$$

Másrészről:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Delta t} = \sum_i r_i \cdot \frac{\Delta I_i}{\Delta t} = \sum_i r_i \cdot F_i = M_z$$

2.3.2 A perület-tétel:

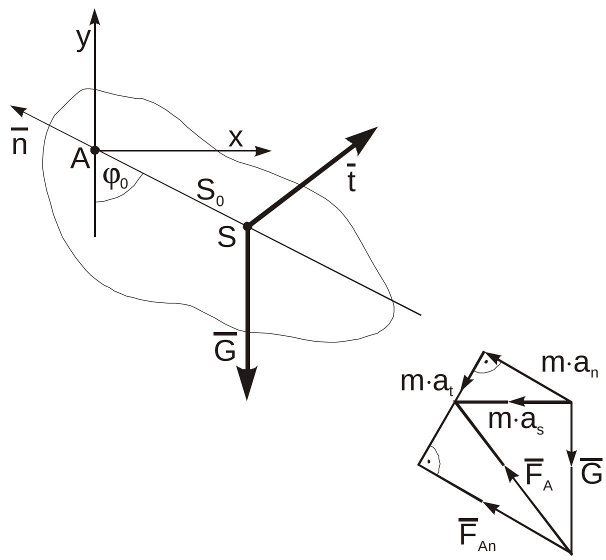
$$I_z \cdot a = M_z$$

A fenti összefüggés a dinamika alaptörvényét kifejező $F = m \cdot a$ képlethez hasonlítható.

6. Példa

Fizikai inga (2.10 ábra)

A vízszintes tengely körül lengő, súlypontja felett felfüggesztett merev test adatai:



2.10 ábra

G = 100 N

g = 10 m/s^2

S$_0$ = 0,2 m

$\varphi_0 = 60^0$

ω_0 = 4 l/s

I$_s$ = 0,15 kgm^2

Határozza meg:

$\bar{a}_s = ?$

$F_A = ?$

Az impulzus-tétel alkalmazásával:

$$m \cdot \bar{a}_s = \sum \bar{F} = \bar{G} + \bar{F}_A \quad | \cdot \bar{n}$$

$$m \cdot a_{sn} = G \cos j_0 + F_{AN}$$

$$a_{sn} = s_0 \cdot w^2 (0{,}2 \cdot 16 = 3{,}2\ m/s^2$$

$$F_{AN} = 82\ N$$

A perület-tétel alkalmazásával:

$$D_A = M_A$$

$$I_A = I_s + s_0^2 \cdot m = 0{,}15 + 0{,}04 \cdot 10 = 0{,}55\ kgm^2$$

$$I_A \cdot a = M_A$$

$$a = \frac{G \cdot s_0 \cdot \sin j_0}{I_A} \frac{100 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}55} = 31{,}45 \frac{1}{s^2}$$

$$a_{st} = a \cdot 0{,}2 = 6{,}3\ m/s^2$$

Újra az impulzus-tételt alkalmazhatjuk:

$$m \cdot a_s = G + F_A \quad \Big| \cdot \bar{t}$$

$$-m \cdot a_{st} = -G \cdot \sin j_0 + F_{AT}$$

$$F_{AT} = -10 \cdot 6.3 + 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 23{,}6\ N$$

$$\bar{F}_A = 23{,}6 \cdot \bar{t} + 82 \cdot \bar{n}\ N$$

$$\bar{a}_s = 6{,}3\bar{t} + 3{,}2\bar{n}\ \frac{m}{s^2}$$

7. Példa

A közös tengely körül forgó hengerek együttes tehetetlenségi nyomatéka: I = 1 Nms² = 1 kgm²

Határozza meg a szöggyorsulást és a kötélerőket!

G_1 = 300 N

G_2 = 400 N

$$K_1 = G_1 + m_1 \cdot a_1$$

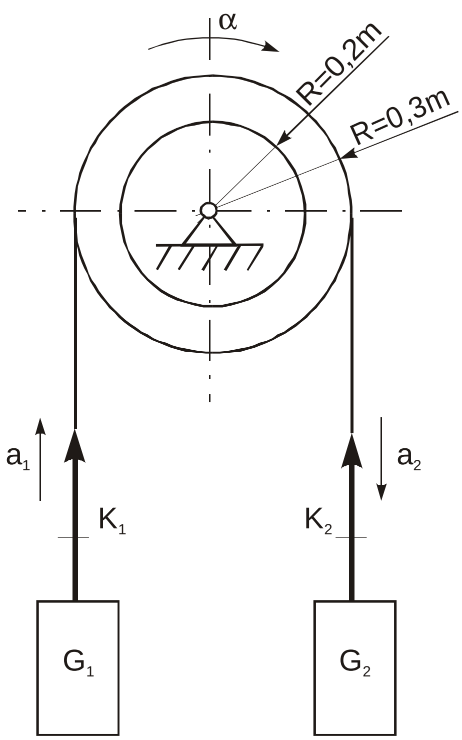
$$K_2 = G_2 - m_2 \cdot a_2$$

$$M = K_2 \cdot R - K_1 \cdot r = I \cdot a$$

$$a_1 = r \cdot a \quad , \quad a_2 = R \cdot a$$

$$a = \frac{R \cdot G_2 - r \cdot G_1}{I + \frac{G_1}{g} \cdot r^2 + \frac{G_2}{g} \cdot R^2} = 10{,}18\ s^{-2}$$

$$K_1 = 362 \quad , \quad K_2 = 275\ N$$



2.11 ábra

8. Példa

A z tengely körül forog egy henger. Határozza meg a szöggyorsulást !

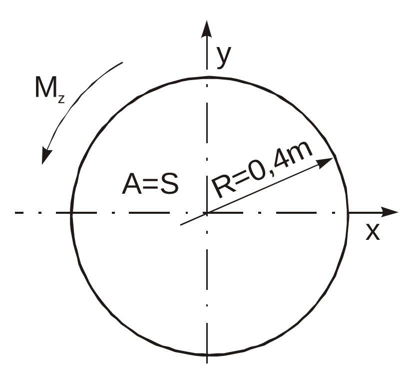
R = 0,4 m

g = 10 m/s²

M = 80 Nm

m = 500 kg

α = ?



2.11 ábra

A perdület-tétel felírásával:

$$M = I_z \cdot a \rightarrow a = \frac{M_z}{I_z}$$

$$I_z = \frac{1}{2} \cdot mR^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0{,}4^2 = 40\ kgm^2$$

$$a = \frac{80}{40} = 2\frac{1}{s^2}$$

9. Példa Határozza meg a rendszer szöggyorsulását !

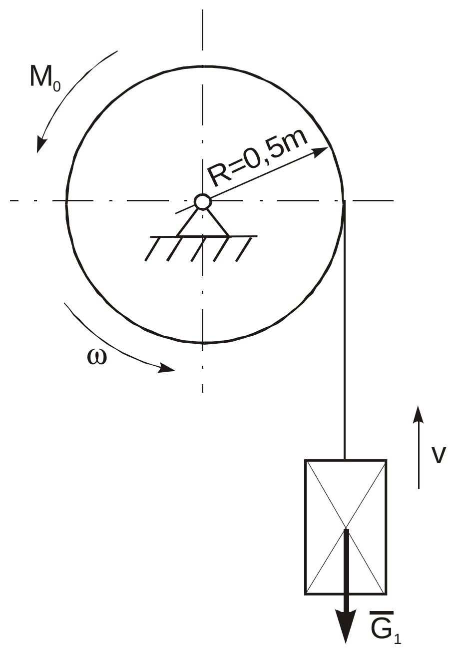
M_0 = 1,5 kNm

G_1= 0,5 kN

I_0 = 300 kgm^2

R = 0,5 m

t = 0 időpillanatban, v_0= 2 m/s



2.12 ábra

A munkatétel az alábbiak szerint átalakítható:

$$\Delta T = W_{1,2} \quad \left| \frac{1}{\Delta t} \right.$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t} = P$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot v \cdot a$$

$$m \cdot v \cdot a = P$$

$$m_0 \cdot v \cdot a = M_0 \cdot w - G_1 \cdot v$$

$$m_0 = m_1 + \frac{I_a}{R^2}$$

$$a = \frac{\frac{M_0}{R} - G_1}{m_0} = 2\ ms^{-2} \qquad\qquad a = \frac{a}{R} = 4\ s^{-2}$$

2.3.3 Merev testek esetén:

Impulzus (vagy súlypont)-tétel

$$m \cdot \bar{a}_s = \bar{F}(s)$$

Azt jelenti, hogy a test úgy mozog külső erőrendszer hatására, mintha az egész test a súlypontjába koncentrálódna.

Perdület-tétel:

$$\frac{\Delta \bar{\Pi}}{\Delta t} = \bar{M}_s$$

2.3.4 A testre vonatkozó munkatétel:

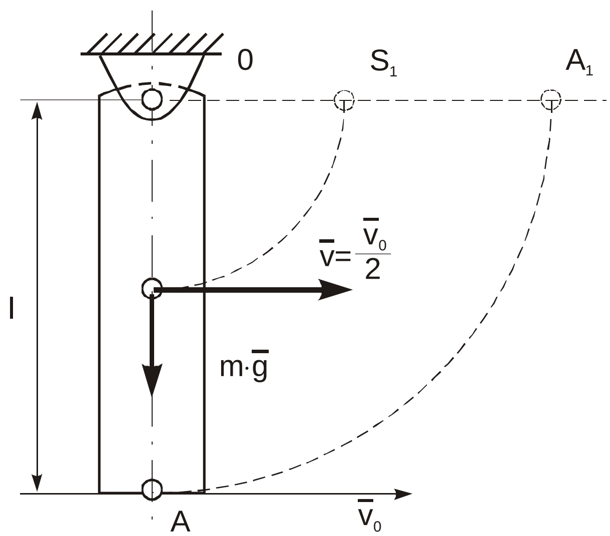
$$T = \frac{m \cdot v_s^2}{2} + \frac{I_s \cdot w^2}{2}$$

$$T_2 - T_1 = W_k$$

A merev test mozgási energiájának változása a külső erők munkájával egyenlő.

10. Példa

Az egyenletes tömegeloszlású súlyos rúd az egyik végén lévő 0 vízszintes tengely körül foroghat. Határozza meg a végpont v_0 sebességét, ha az az A-ból A_1-be lendül!



2.13 ábra

$$T_2 - T_1 = -m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$$

$$w = \frac{v_0}{l}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \cdot \frac{v_0^2}{l^2} = -m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$$

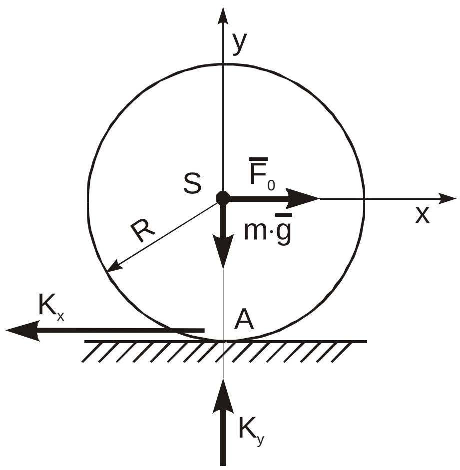
$$v_0 = \sqrt{3 \cdot g \cdot l}$$

A rúd kezdeti energiája kifejezhető még:

$$T_1 = \frac{m \cdot v_s^2}{2} + \frac{I_s \cdot w^2}{2} \qquad \text{alakban is.}$$

11. Példa

Gördülés súrlódásos pályán.



2.14 ábra

$$F_0 - K_x = m \cdot a_s$$

$$K_x = m \cdot m \cdot g$$

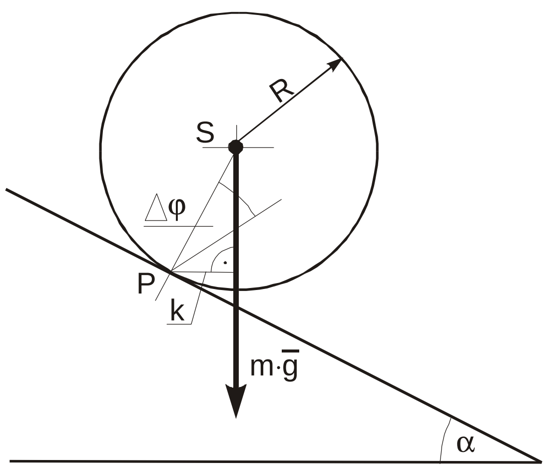
$$m \cdot g = K_y$$

$$\sum M_1 = 0 = K_x \cdot R - I_s \cdot a = 0$$

$$a = \frac{K_x \cdot R}{I_s}$$

Ha $a_s = r \cdot a$ csúszásmentes gördülésről beszélünk.

Henger és golyó gördülése lejtőn.



2.15 ábra

$$k = R \cdot \sin a$$

$$I_p \cdot a = M_{pz}$$

$$a = R \cdot a$$

$$I_p \cdot \frac{a}{R} = m \cdot g \cdot R \cdot \sin a$$

$$a = \frac{m \cdot R^2}{I_p} \cdot g \cdot \sin a$$

A Steiner-tétel alkalmazásával

$$a = \frac{m \cdot R^2}{m \cdot R^2 + I_s} \cdot g \cdot \sin a$$

Így homogén gömbnél $a = \frac{5}{7} \cdot h \cdot \sin a$

és tömör hengernél $a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin a$

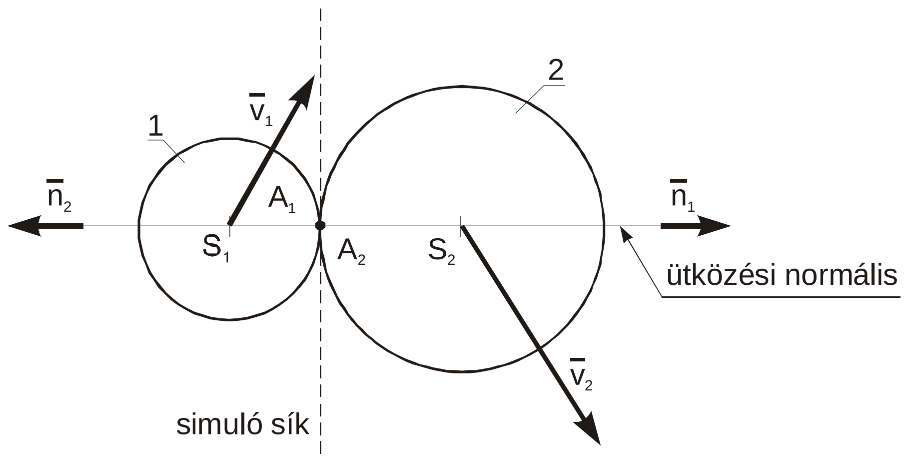
Egy üres hengernél (csőnél) $a \approx \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin a$

A cső lassabban gördül a tömör hengernél.

3. Ütközés

3.1 Az ütközés jelensége, egyszerűsítések.

Azt feltételezzük, hogy az ütközésben résztvevő testek merev testek, amelyek az ütközés folyamán csak az érintkező A_1 és A_2 pontok környezetében szenvednek alakváltozást. Az ütközésben résztvevő merev testek az ütközés előtt egyenletes haladó mozgást végeznek.



3.1 ábra

Az ütköző testek érintkezési pontjában értelmezett simuló sík érintkezési ponton átmenő normálisát ütközési normálisnak nevezzük. Értelme pozitív, ha testből kifelé mutat.

Ütközés akkor jön létre, ha a két test érintkezési pontjai sebességeire fennáll a

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1 \quad \rangle \quad \bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2$$

Az ütközés folyamatát két szakaszra bontjuk: összenyomódási szakasz
tágulási szakasz

Összenyomódási (kompressziós) szakasz

Ütközéskor a két test mechanikai kölcsönhatásba kerül, az érintkezési pontban erők lépnek fel. A két test a fellépő erők hatására deformálódik, és ugyanakkor az érintkező pontok sebessége is változik. Az l. test sebessége csökken, a 2. testé nő, ez a folyamat addig tart, amíg a sebességek normálisba eső komponense megegyezik. Ha a testek képlékenyek, azaz tökéletesen rugalmatlanok, az ütközési folyamat befejeződik.

Tágulási (expanziós) szakasz

A valóságos anyagú testek az erőhatás megszünte után többé-kevésbé visszanyerik eredeti alakjukat. Ennek eredményeként a két test az érintkezési pontban még mindig kölcsönhatásban marad, közöttük létezik továbbra is erőhatás. Ezért az 1. test érintkezési pontbeli sebességének normál irányú összetevője tovább csökken, a 2. testé tovább nő. Ez addig folytatódik, amíg az alakváltozás rugalmas része meg nem szűnik, azaz amíg a testek érintkeznek.

3.2 Az ütközések osztályozása

A két test egymáshoz való viszonya alapján beszélünk centrikus és excentrikus ütközésről. Centrikus ütközés akkor jön létre, ha az ütközési normális hatásvonala illeszkedik mindkét test súlypontjára.

A jegyzet csak ezt az esetet tárgyalja.

Továbbá beszélhetünk még: egyenes és
ferde ütközésről.

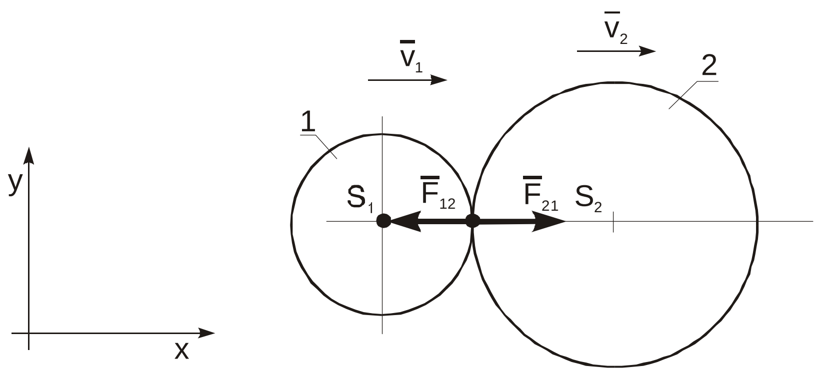
<u>Egyenes ütközéskor a</u> $\bar{v}_1$ *és* $\bar{v}_2$ sebességek az $\bar{n}_1$ normálisba esnek.

<u>Ferde ütközéskor</u> a $\bar{v}_1$ *és* $\bar{v}_2$ sebességek nem esnek a normálisba, lásd ..ábra.

3.3 Az ütközési folyamat mechanikai vizsgálata.

Először az ütközés legegyszerűbb változatát az egyenes centrális ütközést tárgyaljuk.

Az ütközés pillanatát ábrázolja a 3.2 ábra



3.2 ábra

Az ütközés 1. szakasza t_1 ideig tart. Az m_1 tömegű test $\bar{v}_1$ sebességgel ütközik az m_2 tömegű testnek, amely $\bar{v}_2$ sebességgel halad. Az első szakasz végén a két testnek közös $\bar{u}$ sebessége van.

Az ütközésben résztvevő testek anyagi pontrendszert alkotnak, ezek mozgásmennyiségének összege nem változhat.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_1 \bar{v}_i = \bar{0}$$

$$\sum m_i \bar{v}_i = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u + m_2 \cdot u$$

Az első szakasz végén a közös sebesség:

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az impulzus tételt alkalmazzuk. Az m_1 tömegre alkalmazva a tételt

$$-\int_0^{t_1} \overline{F}_{12} dt = m_1 \overline{u} - m_1 \overline{v}_1$$

Az m_2 – re alkalmazva a tételt

$$\int_0^{t_1} \overline{F}_{21} = m_2 \overline{u} - m_2 \overline{v}_2$$

A két egyenletet összeadva és figyelembe véve, hogy $\overline{F}_{1,2} = \overline{F}_{2,1}$

$$-(m_1 \cdot u - m_1 \cdot v_1) = m_2 u - m_2 \cdot v_2$$

Ha az egész ütközési folyamat t_2 ideig tart, a második periódus hossza: $(t_2 - t_1)$

A második szakasz azzal kezdődik, hogy a két test u sebességgel halad, majd a két test deformációja teljesen (k = 1), vagy csak részben (k < 1) szűnik meg.

Az ütközési tényező: k melynek értéke: $0 < k < 1$

Alkalmazzuk az impulzus tételt a 2. szakaszra.

Az ütközés utáni sebességek u_1 ill. u_2.

$$-\int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_{1,2} dt = m_1 \cdot \overline{u}_1 - m_1 \cdot \overline{u}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_{2,1} dt = m_2 \cdot \overline{u}_2 - m_2 \cdot \overline{u}$$

A két egyenletet összeadva

$$-(m_2 \cdot u_1 - m_2 \cdot u) = m_2 \cdot u_2 - m_2 \cdot u$$

$$u_2 - u = u - u_1$$

Az 1. szakaszra kapott eredmények alapján:

$$u_1 - u = u - v_1$$

$$u_2 - u = u - v_2$$

$$u_1 = 2u - v_1$$

$$u_2 = 2u - v_2$$

A relatív sebesség különbségek ugyanakkorák ütközés előtt és után.

$$u_2 - u_1 = v_1 - v_2$$

3.4 Részben rugalmas ütközés

A 2. periódusban az impulzus az 1. periódusban számolt k szorosa.

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{1,2}\,dt = k\int_{0}^{t_1} F_{1,2}\,dt$$

Az impulzusok értékeinek helyettesítésével

$$m_1 \cdot u_1 - m_1 \cdot u = k(m_1 \cdot u - m_1 \cdot v_1)$$
$$m_2 \cdot u_2 - m_2 \cdot u = k(m_2 \cdot u - m_2 \cdot v_2)$$

A tömegek sebessége a 2. periódus végén:

$$u_1 = (1+k)u - k \cdot v_1$$
$$u_2 = (1+k)u - k \cdot v_2$$

Az utóbbi két egyenlet kivonásából következik:

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2)$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{\text{ütközés utáni sebesség különbség}}{\text{ütközés előlőtsebesség különbség}}$$

A kapott eredmények könnyen általánosíthatók ferde ütközésre is, ha meggondoljuk, hogy az ütközés előtti sebességek normálisba eső összetevője fog csak változni.

Az ütközés utáni sebességek szerkesztéssel is meghatározhatók a Maxwell-féle ütközési diagram segítségével. A diagram szerkesztését a következők segítik.

A két testből álló rendszerre vonatkozó impulzustétel szerint a külső erő hiánya miatt írható:

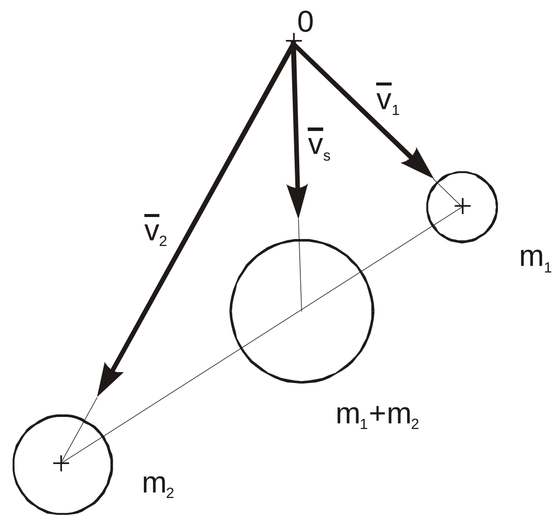
$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{0} \quad vagyis \quad \bar{I} = m \cdot \bar{v}_s = áll$$

ahol m = m_1 + m_2 a rendszer tömege, $\bar{v}_s$ pedig a rendszer S súlypontjának sebessége, amely nem változik az ütközés folyamán.

t= 0 idő pillanatban:

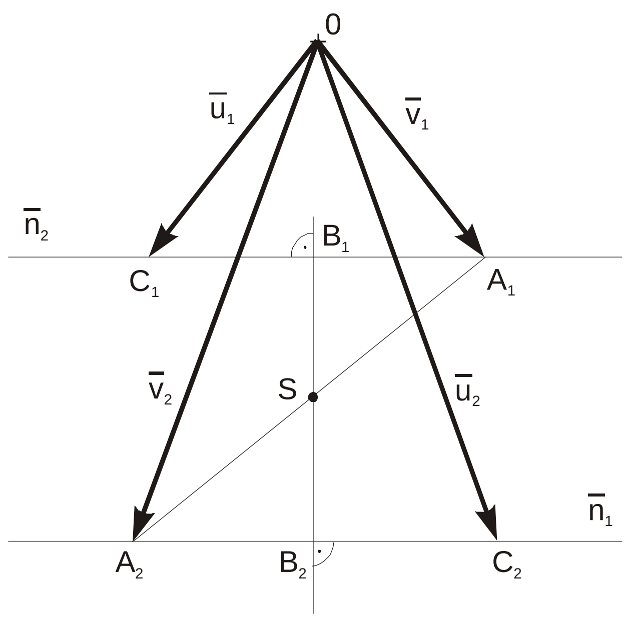
$$m \cdot \bar{v}_s = m_1 \cdot \bar{v}_1 + m_2 \cdot \bar{v}_2$$

A $\bar{v}_s$ sebesség a következő módon szerkeszthető meg, mérjük fel egy pontból a $\bar{v}_1$ *és* $\bar{v}_2$ sebességvektorokat és a vektorok végpontjában helyezzük a tömegeket. A tömegek súlypontja megadja a $\bar{v}_s$ sebességet.



3.3 ábra

A sebességek változása az ütközés normálisában történik.



3.4 ábra

A $\bar{v}_1$ sebesség változása az $\bar{n}_2$ irányában történik.

$$k = \frac{\overline{B_1} \cdot \overline{C_1}}{A_1 \cdot B_1}$$

Hasonlóképpen a 2. test sebességváltozása az $\bar{n}_1$ irányában történik.

$$k = \frac{\overline{B_2} \cdot \overline{C_2}}{A_2 \cdot B_2}$$

Az ütközés utáni sebességek vektorainak végpontja a C_1 ill. C_2 pont.

11. Példa

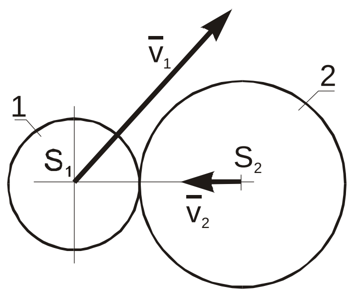
Az m_1 = 3 kg és m_2 = 1 kg tömegű golyók centrikusan egymásba ütköznek az ütközés előtti sebességek:

$$\bar{v}_1 = 12\bar{i} + 9\bar{i}\ m/s \quad ; \quad |\bar{v}_1| = 15\ m/s$$

$$\bar{v}_2 = 8\bar{i}\ m/s$$

Az ütközési tényező: k = 0,6

Határozzuk meg a golyók ütközés utáni sebességét szerkesztéssel és számítással. 3.5 ábra



3.5 ábra

Megoldás.

Határozzuk meg először a közös sebességet.

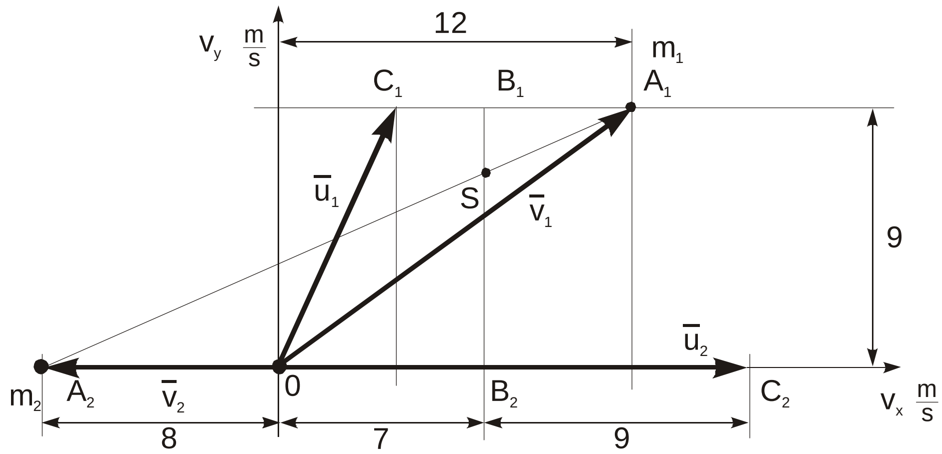
$$u = \frac{3\cdot 12 - 1\cdot 8}{4} = \frac{36-8}{4} = 7\ m/s$$

$$u_{1n} = 1{,}6\cdot 7 - 0{,}6\cdot 12 = 4\ m/s$$
$$u_2 = 1{,}6\cdot 7 + 0{,}6\cdot 8 = 16{,}0\ m = m/s$$

Az ütközés utáni sebességek tehát:

$$\bar{u}_1 = 4\bar{i} + \bar{9}\ m/s$$
$$\bar{u}_2 = 6{,}4\bar{i}\ m/s$$

<u>Szerkesztéssel:</u>



3.6 ábra

Következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy az ütközésben részt vevő testek összenergiája miként alakul.

Az első szakaszban a deformációs munka:

$$W_{d1} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

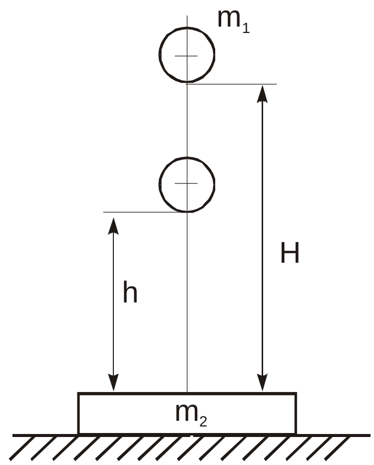
A teljes deformációs munka:

$$W_d = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \, \frac{1}{2} \left(m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2\right) = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \left(v_1 - v_2^2\right)\left(1 - k^2\right)$$

- ha a testek teljesen rugalmasak k = l, akkor $W_d = \varnothing$, vagyis az első szakaszban a deformáció ra fordított energia visszatérül, a testek visszanyerik eredeti alakjukat.
- Ha a testek tökéletesen rugalmatlanok (k = ∅) akkor $W_d = W_{d1}$, vagyis az 1. szakaszban a deformációra fordított energia változatlan marad, a testek is megmaradtak deformált alakjukban.

3.5 A k ütközési tényező kísérleti meghatározása.

Ha az m_1 tömegű golyót H magasságból az $m_2 = \infty$ tömegű nyugvó testre ejtjük, akkor az ütközés után h magasságra pattan vissza. 3.7 ábra.



3.7 ábra

A hajítás elméletéből ismert, hogy a golyó $v_1 = \sqrt{2gH}$ sebességre tesz szert.

A k tényezőre korábban felírt összefüggés:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{-u_1}{v_1}$$

$$|u_1| = k \cdot v_1$$

A negatív előjel azért adódik, mert a sebességek különböző irányúak.

$$u_1 = \sqrt{2g \cdot h}$$

A k tényező tehát:

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

Ellenőrző kérdések

1. Mi a mozgásmennyiség, az impulzus, a perdület?
2. Ismertesse az impulzus, és a perdülettételt.
3. Ismertesse a D'Alambert elvet.
4. Ismertesse a munkatételt.
5. Ismertesse a tehetetlenségi nyomatékokat.
6. Ismertesse a Steiner tételt.
7. Ismertesse az impulzus és perdülettételt merev testre.
8. Ismertesse a munkatételt merev testre.
9. Mi a szabad tengely?
10. Ismertesse a két test ütközésének lefolyását.
11. Milyen ütközéseket ismer?
12. Hogyan határozható meg kisérletileg az ütközési tényező(k) értéke?

Irodalom jegyzék

Dr Silbersdorff László: Mechanika III.

Tankönyv Kiadó Budapest l967.

Muttnyánszky Ádám: Kinematika és Kinetika.

Tankönyv Kiadó Budapest l965.

M. Csizmadia Béla, Nádori Ernő: Mechanika mérnököknek

Nemzeti Tankönyv Kiadó Budapest, l997.