

Rezgésdiagnosztika

1. Bevezetés

A rezgésdiagnosztika a műszaki diagnosztika egy meghatározott területe. A gépek állapotvizsgálatánál talán a legelterjedtebb vizsgálati módszer a rezgésmérés.

Ebben a jegyzetben először a rezgésmérés elméleti alapjait tekintjük át, majd bemutatjuk a rezgésmérés eszközeit. A diagnosztika a gépek, berendezések járművek megbontás nélküli ellenőrzését jelenti. A műszaki állapotvizsgálatot csak abban az esetben szabad alkalmazni, ha a mérési sorozat eredményeként a vizsgált berendezésről, annak műszaki állapotváltozásáról tudunk értékelhető adatokat beszerezni.

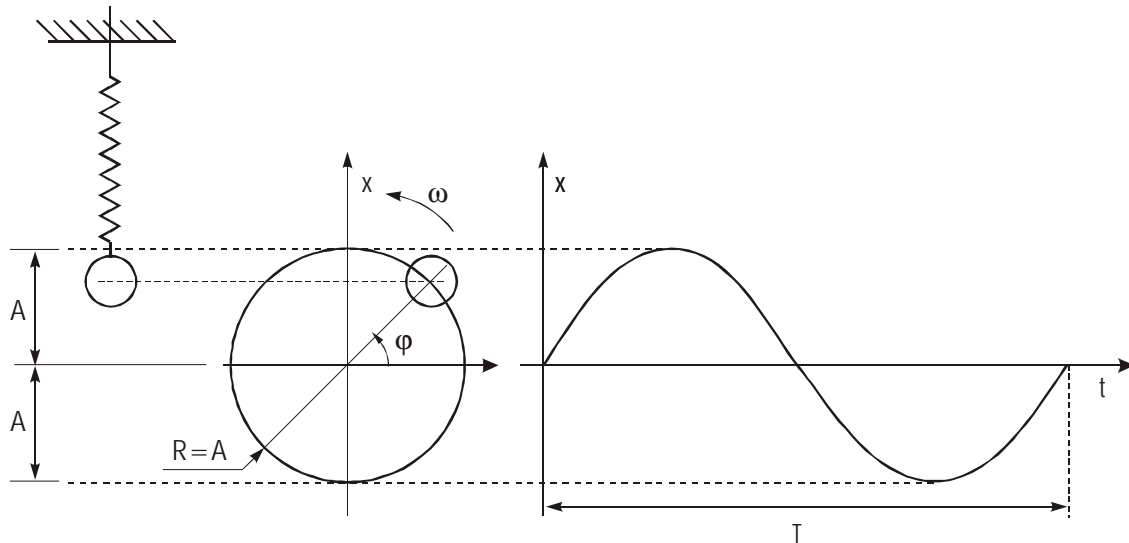
A jegyzetben esetenként keverednek a rezgésstan és lengésstan fogalmak, de mi minden esetben ugyanazt értjük a két fogalom alatt.

Az anyag elsajátítását, az egyes fejezetek végén található ellenőrző kérdések segítik.

2. Rezgéstani alapfogalmak

2.1. Harmonikus rezgőmozgás

Rezgésnek nevezünk általában minden olyan fizikai jelenséget, amely az időben periódikusan ismétlődik.



1. ábra

A rezgések felosztása többféle szempont szerint történhet:

a) A rezgést hordozó rugalmas közeg alapján:

a rezgések gázokban, folyadékokban, szilárd testekben jöhetnek létre.

b) A rezgőmozgást végző anyag alakja szempontjából:

- Húr rezgések (fonál, húr, drót)
- Sík rezgések (hártya, héj, lemez)
- Kontinuum rezgések (szilárd testek, víz, levegő) különböztethetők meg.

c) Periódikusan változó mennyiségek szerint:

Ezek általában fizikai vagy mechanikai mennyiségek. Pl. áram, feszültség, teljesítmény,

fordulatszám, nyomaték, nyomás, térfogatáram, út, sebesség.

d) Frekvencia szerinti felosztás egyes rezgések esetén:

- Elektromágneses hullámok (pl. rádió, infravörös, látható fény, ultraibolya, stb.)
- Hangrezgések (infrahang, hallgató hangok, ultrahang, hiperhang.)

e) Matematikai megfontolások, a rezgéseket leíró függvények jellege szerint.

A rezgések legegyszerűbb fajtája a harmonikus rezgés.

Igazolható, hogy a függőleges síkban megfelelő fordulatszámú, egyenletes körmozgást végző pontszerű test vetülete és egy rugóra függesztett tömegpont rezgése egyforma, tehát a vetületi mozgás is harmonikus rezgőmozgás.

A tömegpont kitérése az időnek szinuszos függvénye:

$$x = A \cdot \sin \omega t = A \cdot \sin \omega t$$

Itt A az amplitúdó, a rezgő testnek az egyensúlyi helyzetétől mért legnagyobb kitérése. T a rezgésidő (vagy periódus) egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (s)}$$

Az 1 s alatt végzett rezgések száma f

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

A harmonikus rezgő mozgás kitérését csak akkor adja meg az

$$x = A \sin \omega t \text{ függvény,}$$

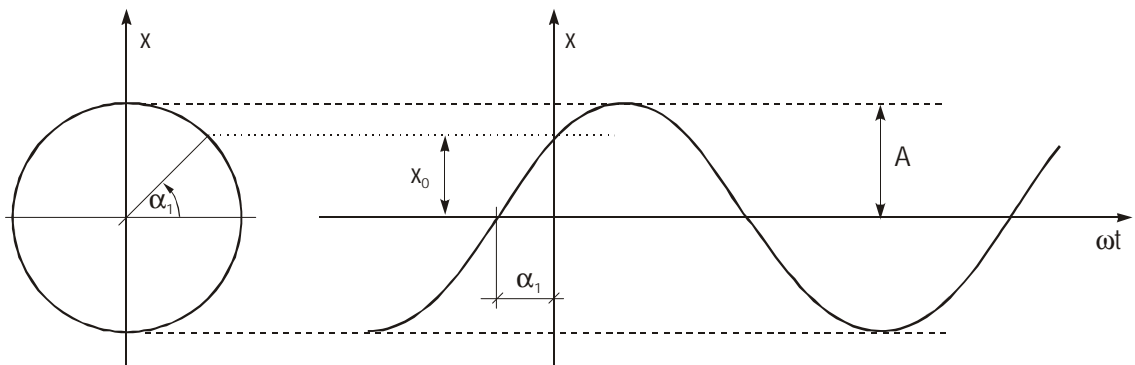
ha a t időt az egyensúlyi helyzettől számítjuk. Ha az időt tetszőleges helyzetből kiindulva mérjük, akkor t idő múlva a kitérés:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha_1)$$

A $t=0$ időpontban a kitérés:

$$x_0 = A \cdot \sin \alpha_1$$

E szerint α_1 , az ún. fázisállandó, megadja a rezgő test helyzetét a $t = 0$ időpontban.



2. ábra

A tömegpont sebessége:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cos(\omega t + \alpha_1)$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -Aw^2 \cdot \sin(\omega t + a_1)$$

írható továbbá

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 \cdot x$$

A harmonikus rezgőmozgás gyorsulása a kitéréssel arányos.

Az utóbbi egyenletből a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete is felírható:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 \cdot x = 0$$

A d . e – t csupán kinematikai megfontolásból írtuk fel.

2.2. Harmonikus rezgések összetevése

a) *Két egyirányú, egyenlő frekvenciájú rezgés eredője:*

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + a_1) \\x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + a_2)\end{aligned}$$

A_1 és A_2 az amplitúdók, ω a körfrekvencia a_1 és a_2 pedig a rezgés kezdő fázisai.

A két rezgés eredő kitérése:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + a_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + a_2)$$

Azonban a

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

összefüggés alapján:

$$x = A_1 \sin \omega t \cdot \cos a_1 + A_1 \cdot \cos \omega t \cdot \sin a_1 + A_2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos a_2 + A_2 \cdot \cos \omega t \cdot \sin a_2$$

Rendezve:

$$x = (A_1 \cdot \cos a_1 + A_2 \cdot \cos a_2) \sin \omega t + (A_1 \cdot \sin a_1 + A_2 \cdot \sin a_2) \cos \omega t$$

Legyen:

$$\begin{aligned}A_1 \cdot \cos a_1 + A_2 \cdot \cos a_2 &= A \cdot \cos a \\A_1 \cdot \sin a_1 + A_2 \cdot \sin a_2 &= A \cdot \sin a\end{aligned}$$

akkor

$$x = A \cos a \cdot \sin \omega t + A \cdot \sin a \cdot \cos \omega t = A \sin(\omega t + a)$$

Az eredő amplitúdó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(a_1 - a_2) + A_2^2}$$

Az eredő fázisszöge:

$$\operatorname{tg} a = \frac{A_1 \cdot \sin a_1 + A_2 \cdot \sin a_2}{A_1 \cdot \cos a_1 + A_2 \cdot \cos a_2}$$

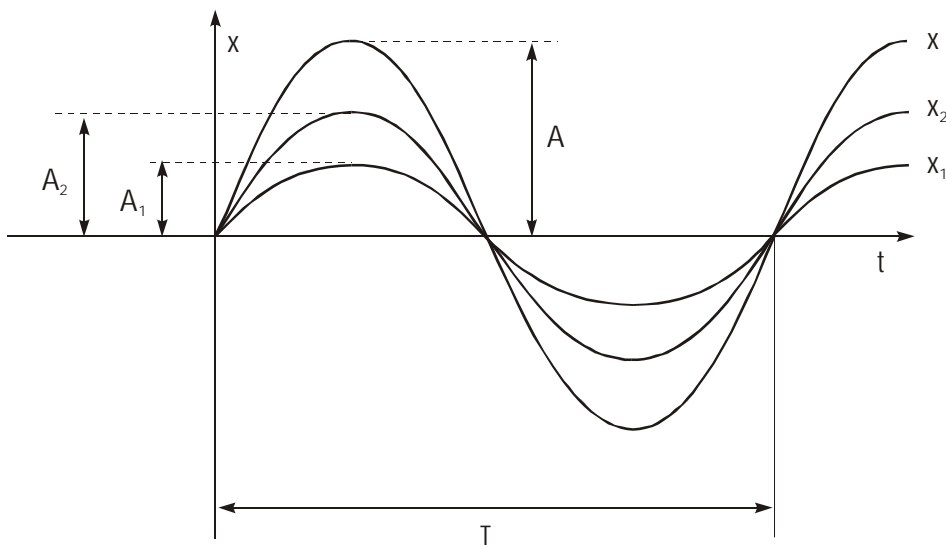
A rezgés amplitúdója a legnagyobb, ha

$$a = a_1 - a_2 = 2p \cdot n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Ebben az esetben ugyanis:

$$\cos(a_1 - a_2) = 1$$

$$A = A_1 + A_2$$



3.ábra

Ha a fáziskülönbség:

$$x = x_1 - x_2 = (2n + 1)p \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$A = A_1 - A_2$$

b) *Két egyirányú, különböző frekvenciájú rezgés eredője.*

Ez esetben az összetevő rezgések kitérései:

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + a_1)$$

$$x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + a_2)$$

Legyen:

$$A_1 = A_2 = A$$

$$a_1 = a_2 = 0$$

Az eredő rezgés:

$$x = x_1 + x_2 = A(\sin w_1 t + \sin w_2 t)$$

Azonban a

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}$$

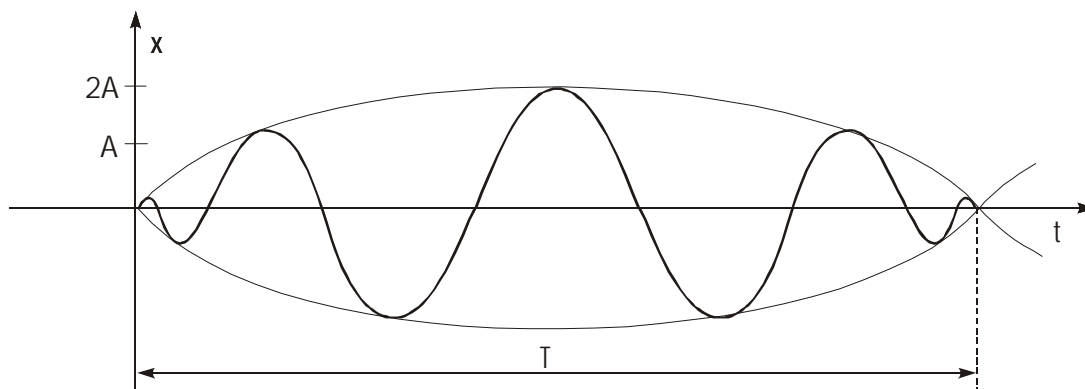
összefüggés felhasználásával az eredő rezgés kitérése:

$$x = \left(2A \cos \frac{w_1 - w_2}{2} t \right) \cdot \sin \frac{w_1 + w_2}{2} \cdot t$$

Látható, hogy az eredő nem harmonikus rezgés. Frekvenciája az összetevő rezgések frekvenciájának számtani közepe; amplitúdója azonban nem állandó, hanem az idő periodikus függvénye:

$$A'(t) = 2A \cdot \cos \frac{w_1 - w_2}{2} \cdot t$$

Ha azonban a frekvenciák közel egyenlők ($w_1 \approx w_2$) akkor az az eredő jó közelítésben olyan szinuszrezgésnek vehető, melynek körfrekvenciája $(w_1 + w_2)/2$ és amplitúdójának értéke 0 és $2A$ között viszonylag lassan változik.



4. ábra

A váltakozás (lebegés) frekvenciáját a következőképpen határozzuk meg.

$$\text{Mivel } \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Tehát az amplitúdó annyi idő alatt változik zérus értékről ismét zérus értékre, amennyi idő alatt az α szög π értékkel változik meg.

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_2 - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t_1 = p$$

Ebból a lebegés periódusa:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2p}{\omega_1 - \omega_2}$$

A lebegés frekvenciája: $f = \frac{1}{T}$

c) *Két egymásra merőleges, egyenlő frekvenciájú rezgés eredője.*

Vizsgáljuk meg az általános esetet, amikor a rezgések közötti fáziskülönbség $a \neq 0$.

Ebben az esetben a rezgések egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cdot \sin \omega t \\ y &= A_2 \cdot \sin(\omega t + a) \end{aligned}$$

Az első egyenletből:

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t \quad ; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

A másodikból:

$$\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t + a) = \sin \omega t \cdot \cos a + \cos \omega t \cdot \sin a$$

Helyettesítsük ide az első egyenletből kifejezett szögfüggvény értékeket

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cdot \cos a + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin a$$

Rendezve:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \cdot \cos a = \sin^2 a$$

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cdot \cos a = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin a$$

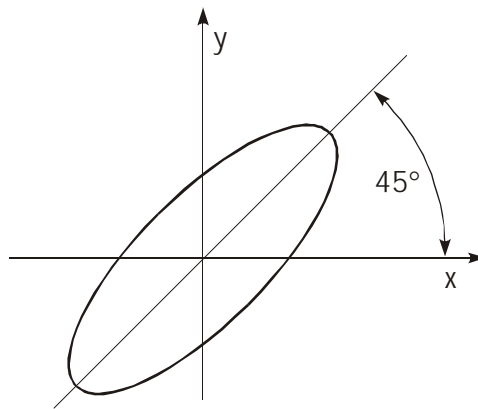
$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \cos a = \sin^2 a$$

Ha

$$a = \frac{p}{4}$$

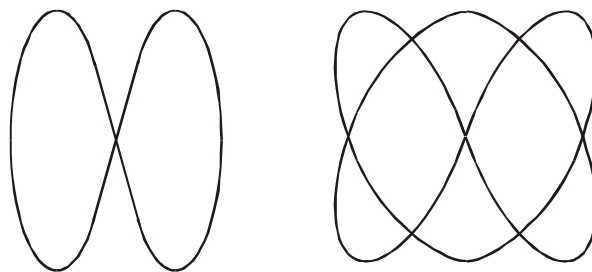
$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

A kapott eredmény egy ellipszis egyenlete, amelynek középpontja a koordináta rendszer középpontjában van és tengelye a vízszintessel 45° -os szöget zár be. (5. ábra)



5.ábra

Két egymásra merőleges és különböző frekvenciájú rezgés eredője az összetevők amplitúdójától, a frekvenciák viszonyától és a fáziskülönbségtől függ. Ezek az ún. Lissajous-görbék. (6. ábra)



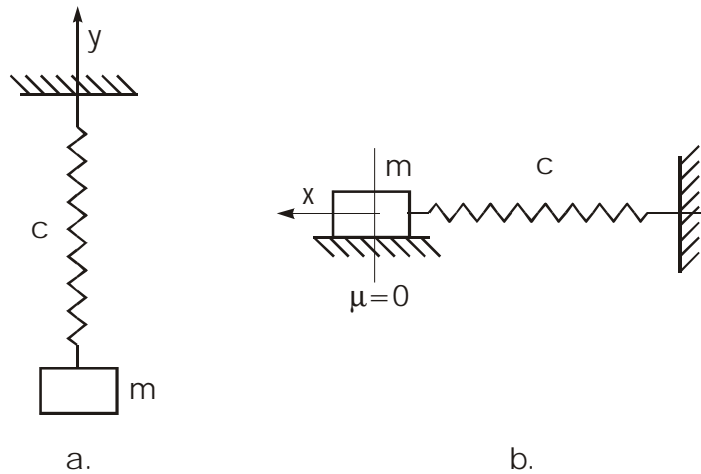
6.ábra

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2} ; a = 0$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3} ; a = 0$$

3. A rezgőtest dinamikája

A mechanikában a rezgésekkel a lengéstan foglalkozik. A valós szerkezetek rezgéstani (lengéstan) vizsgálatai összetett feladatot jelentenek. A legegyszerűbb lengéstan modell egy rugóból és egy tömegpontból áll. (7. ábra)



7.ábra

Ha a tömegpontot nyugalmi helyzetből kimozdítjuk, úgy a tömegpontra a kitéréssel ellentétes értelmű rugóerő hat.

Ha a rugó visszatérítő erején túl más erő nem befolyásolja a rezgést, akkor örökké tartó mozgás jön létre.

Az ilyen lengés a szabad lengés.

A rugóerő számítása:

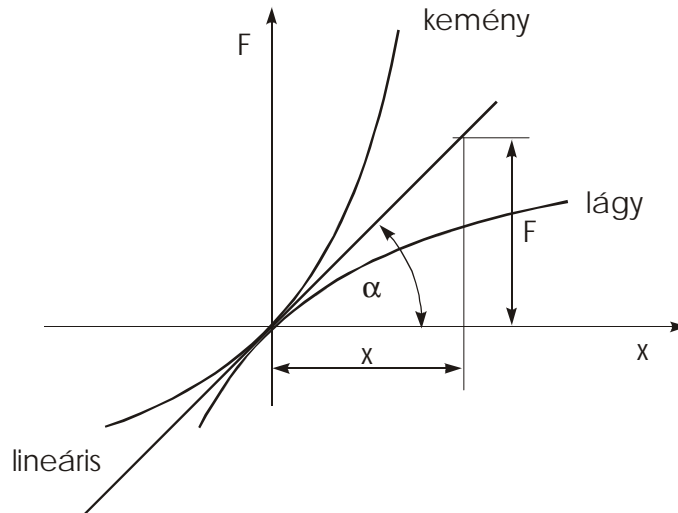
$$F = -D \cdot x = -\frac{x}{c}$$

D - a merevség, vagy direkciós állandó

c - az un. rugó állandó

$$c = \frac{1}{D} \text{ mm/N}$$

A tárgyalás során az un. lineáris karakterisztikájú esetet tárgyaljuk.



8. ábra

A 8. ábrán különböző karakterisztikákat tüntettünk fel.

Az impulzus tétel felhasználásával

$$F = m \cdot a = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F = -D \cdot x = -\frac{x}{c}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{m \cdot c} = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{m \cdot c}$$

A behelyettesítések elvégzésével a harmonikus rezgőmozgás differenciál egyenletét kapjuk.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 \cdot x = 0$$

A differenciál egyenlet általános megoldása:

$$x = A \cdot \sin(a \cdot t + a_1)$$

Hasonló megoldásra jutottunk tisztán kinematikai megfontolásokból is.

3.1. A harmonikus rezgések fajtái:

A rugózó elem eltérő tulajdonsága miatt különböző lengések lehetnek.

Így beszélhetünk:

egyenesvonalú lengésről

torziós lengésről

hajlító lengésről

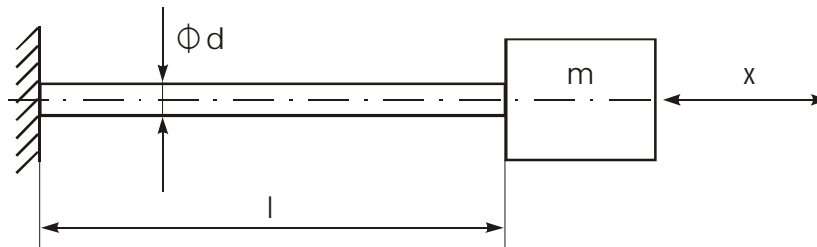
3.1.1. Egyenesvonalú lengés.

Ezt a lengést longitudinális lengésnek is nevezzük. A tömegre ható visszatérítő erő a rúd rugalmasságából ered és rugóállandója:

$$c = \frac{x}{F} = \frac{l}{AE}$$

A lengés körfrekvenciája:

$$a = \frac{1}{\sqrt{m \cdot c}} = \sqrt{\frac{A \cdot E}{m \cdot l}}$$



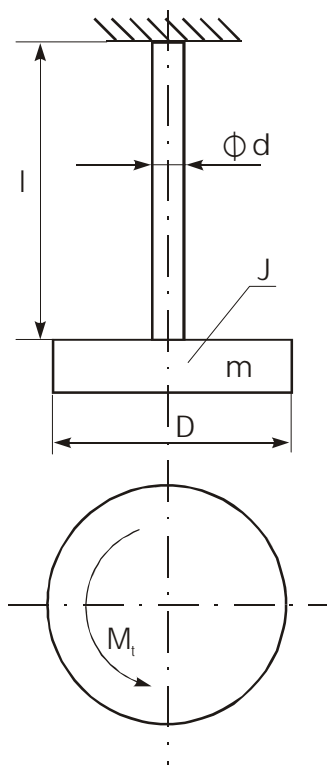
9.ábra

3.1.2. Torziós lengés.

Ezen lengésnél a lengő tömeg változó értelmű körmozgást végez. A rugózást a tengely valósítja meg.

A rugóállandó ebben az esetben az egységnyi nyomaték által okozott szögelfordulás lesz.

$$c_0 = \frac{l}{I_p \cdot G}$$



10.ábra

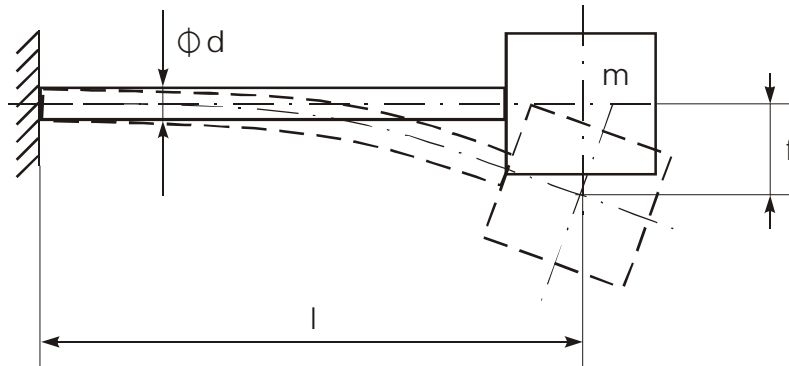
A körfrekvencia:
$$a = \frac{1}{\sqrt{J \cdot c_0}} = \sqrt{\frac{Jp \cdot G}{l \cdot c_0}}$$

3.1.3. Hajlítólengés.

Ha a lengő tömeg a rudat hajlításra veszi igénybe.

A rugóállandó ebben az esetben az egységnyi erő által okozott lehajlás.

$$c = \frac{l^3}{3I \cdot E}$$



11. ábra

A lengés körfrekvenciája:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot c}} = \sqrt{\frac{31E}{ml^3}}$$

3.2. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a lengési modellt.
2. Mi a rugókarakterisztika?
3. Hogy írhatjuk fel a harmonikus lengés differenciál egyenletét?
4. Ismertesse a harmonikus lengés foronómiai görbéit.
5. Hogyan határozza meg az azonos frekvenciájú két harmonikus lengés eredő amplitúdóját és fázis szögét?
6. Mikor jön létre a lebegés?
7. Mekkora a lebegési idő?
8. Ismertesse a harmonikus rezgés fajtáit.
9. Írja fel a különböző harmonikus lengésekre az α és T értékeit.

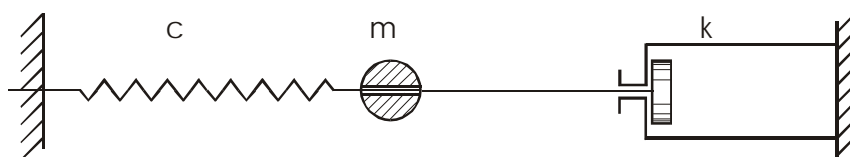
4. A harmonikus lengés csillapítása

4.1. Nedves csillapítás

A valóságban a rezgések amplitúdója egyre jobban csökken, ezt a jelenséget csillapodásnak nevezzük. A csillapodásnak az oka a belső súrlódás, a közegellenállás és egyéb veszteségek. A csillapító erő a kitéréssel ellentétes és a sebességgel arányos (ez un. nedves csillapítás).

$$F = -k \cdot \frac{dx}{dt}$$

A csillapított lengés modelljét a 12. ábra szerint válasszuk.



12. ábra

A csillapított lengés alapegyenlete:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D \cdot x - k \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{c} - k \frac{dx}{dt}$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\frac{D}{m} = \frac{1}{c \cdot m} = a^2 \quad ; \quad \frac{k}{2m} = b$$

b - a lengés csillapítási tényezője

A csillapodó rezgőmozgás differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \cdot \frac{dx}{dt} + a^2 \cdot x = 0$$

A differenciál egyenlet. egy partikuláris megoldása:

$$x = e^{lt}$$

$$\text{ekkor: } \dot{x} = l \cdot e^{lt} \quad ; \quad \ddot{x} = l^2 e^{lt}$$

Behelyettesítve a differenciál egyenletbe:

$$e^{I t}(I^2 + 2b \cdot I + a^2) = 0$$

$$I_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

A gyakorlat szempontjából fontos eset, ha:

$$b < a \quad \text{így} \quad a^2 - b^2 > 0$$

$$g = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Ezek után a partikuláris megoldás:

$$x_1 = e^{-bt} \cdot \cos gt$$

$$x_2 = e^{-bt} \cdot \sin gt$$

Az általános megoldás tehát:

$$x = e^{-bt} (C_1 \cdot \cos gt + C_2 \cdot \sin gt)$$

A premfeltételek:

$$x(0) = 0$$

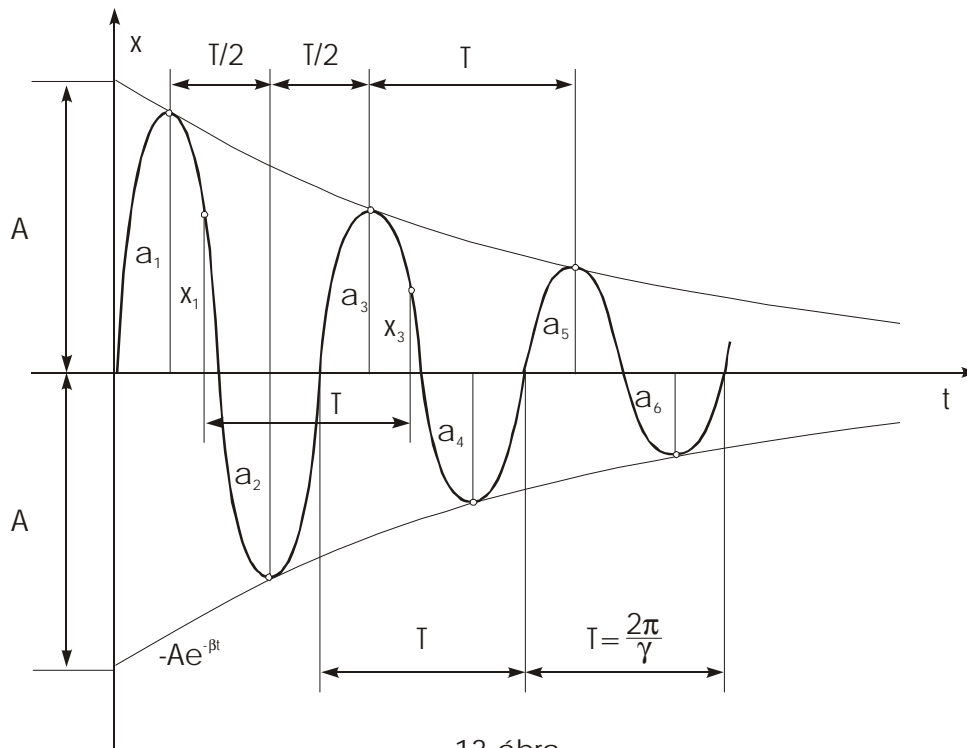
$$x'(0) = v_0$$

Ha: $x(0) = 0$ akkor $C_1 = 0$

$$x = -b \cdot e^{-bt} (C_2 \cdot \sin gt) + e^{-bt} \cdot (C_2 \cdot \cos gt \cdot g)$$

$$x(0) = v_0 \quad \text{akkor} \quad C_2 = \frac{v_0}{g}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{g} \cdot e^{-bt} \cdot \sin gt$$



13.ábra

$$T = \frac{2p}{g} = \frac{2p}{\sqrt{a - b^2}} \quad \text{áll}$$

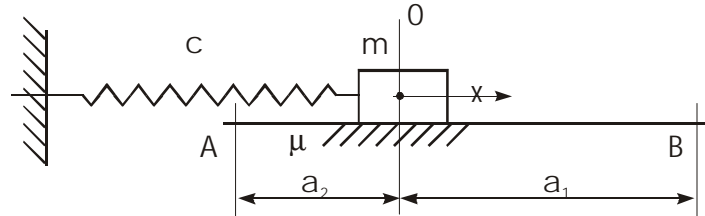
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_2 \cdot e^{-bt_1}}{C_2 e^{-b(t_1+T)}} = e^{bT}$$

A logaritmus dekramentum:

$$u = \ln \frac{a_1}{a_2} = bT$$

4.2. Száraz csillapítás

Ha a csillapítóerő iránya a mozgással ellentétes, nagysága állandó, akkor súrlódásos csillapításról beszélünk.



14.ábra

Ha a tömegpont A.-tól 0-n keresztül B-ig halad a súrlódó erő a – x irányba mutat.

Amíg a tömegpont B-től A-ig halad a súrlódó erő +x irányú.

A-tól – B-ig:

$$-\frac{x}{c} - F_s = m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

B-től A-ig:

$$-\frac{x}{c} + F_s - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$F_s = m \cdot m \cdot g$$

Vezessük be: $F_s = \frac{x_0}{c}$

$$x_0 = c \cdot m \cdot m \cdot g$$

A differenciál egyenletbe írható:

$$-\frac{x \pm x_0}{c} - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Vezessük be: $z = x \pm x_0$

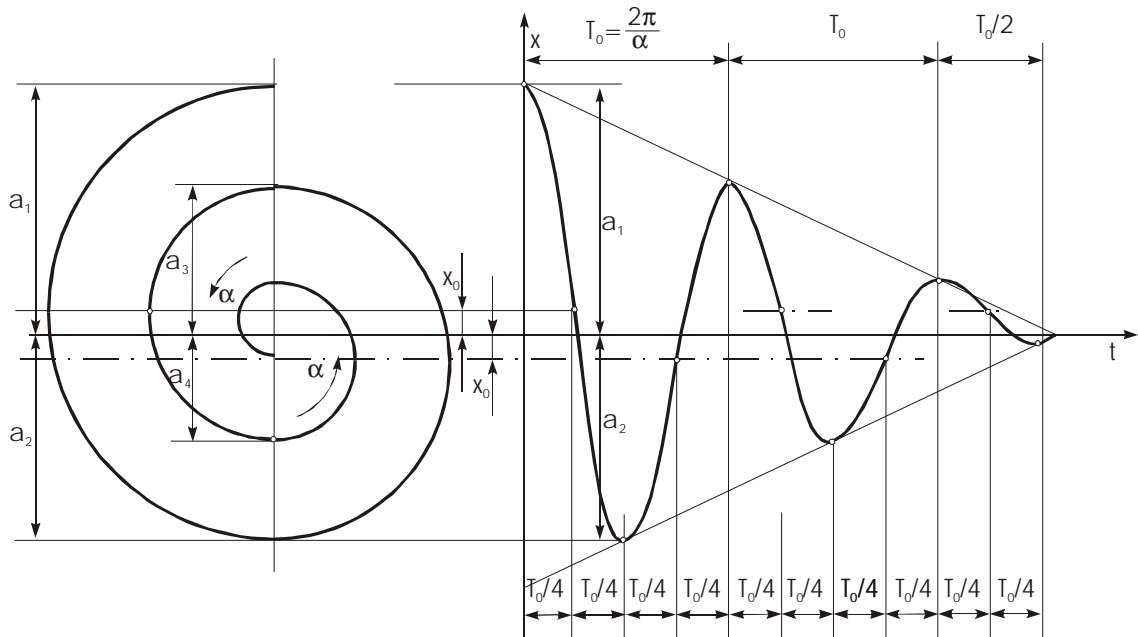
$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + z = 0$$

$$\ddot{z} + a^2 z = 0$$

A differenciál egyenlet megoldása:

$$z = a \cdot \sin(a \cdot t + a_1)$$

$$x = a \cdot \sin(at + a_1) \pm x_0$$



15.ábra

Az amplitúdók a munkatétellel határozhatók meg.

$$\frac{a_2^2}{2e} - \frac{a_1^2}{2c} = -F_s(a_1 + a_2)$$

$$(a_2 - a_1) \cdot (a_2 + a_1) = -2F_s \cdot c(a_1 + a_2)$$

$$a_2 = a_1 - 2 \cdot x_0$$

Példa 1.

A vízszintes érdes síkon $\mu = 0,05$, $G = m \cdot g = 50 \text{ N}$ súlyú testet $c = 1,5 \text{ mm/N}$ rugóállandójú rugóhoz kapcsolunk.

Hány teljes lengés után fog megállni, ha az első kitérés $a_1 = 30 \text{ cm}$?

Megoldás:

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g = 0,05 \cdot 50 = 2,5 \text{ N}$$

$$x_0 = F_s \cdot c = 3,75 \text{ mm}$$

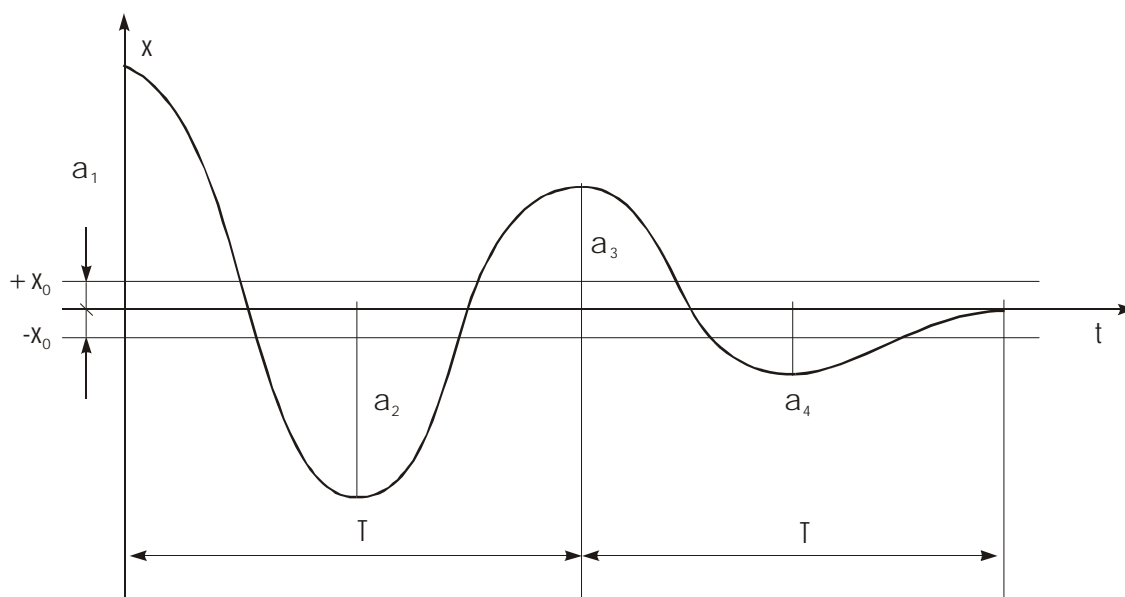
$$a_1 = 30 \text{ mm} \quad ; \quad a_2 = a_1 - 2x_0 = 22,5 \text{ mm}$$

$$a_3 = a_2 - 2x_0 = 15 \quad ; \quad a_4 = 7,5$$

$$a_5 = 7,5 - 2 \cdot 2,75 = 0$$

$$T = \frac{2p}{a} = 2p \sqrt{m \cdot c} = 2p \cdot \sqrt{5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = 0,545 \text{ sec}$$

A mozgás: $?T = 2T = 1,08 \text{ sec}$

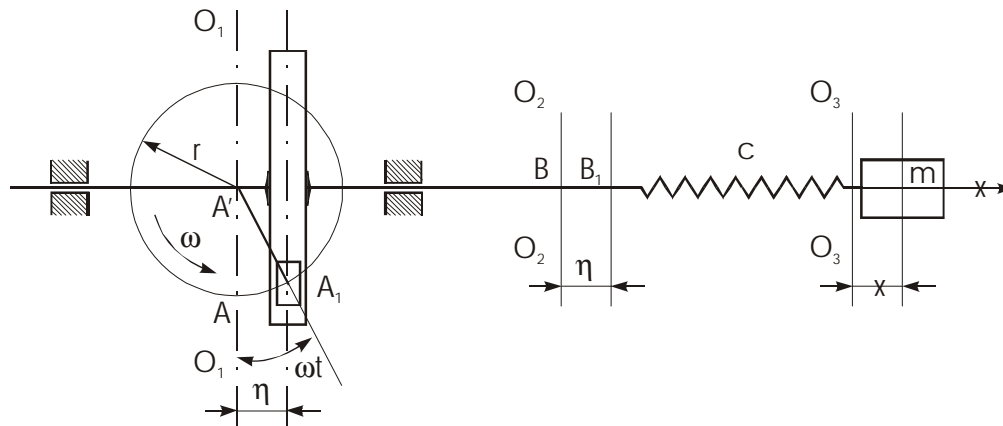


16. ábra

A tömeg az x_0 szélességű sávon belül leáll, ugyanis az $\frac{x}{c}$ visszatérítő erő már kisebb, mint a súrlódó erő.

5. A harmonikus lengés gerjesztése

(rugón keresztül történő gerjesztés)



17.ábra

A deformáció miatt $x \neq \eta$

$$h = r \cdot \sin(\omega t)$$

A rugóerő: $F = \frac{h - x}{c}$

$$\frac{h - x}{c} - m \cdot x = 0$$

$$\frac{r \cdot \sin(\omega t) - x}{c} - m \cdot x = 0$$

$$\frac{r \cdot \sin(\omega t)}{m \cdot c} - \frac{x}{m \cdot c} - x = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{m \cdot c}$$

$$\cancel{a} a^2 \cdot x = r \cdot a^2 \cdot \sin(\omega t)$$

A differenciál egyenlet megoldását keressük:

$$x = K \cdot \sin(\omega t)$$

$$\cancel{a} -K \cdot \omega^2 \sin(\omega t)$$

$$-K \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) + a^2 \cdot \sin(\omega t) = r a^2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$-K \cdot \omega^2 + a^2 \cdot K = r \cdot a^2$$

$$K = r \frac{a^2}{a^2 - \omega^2}$$

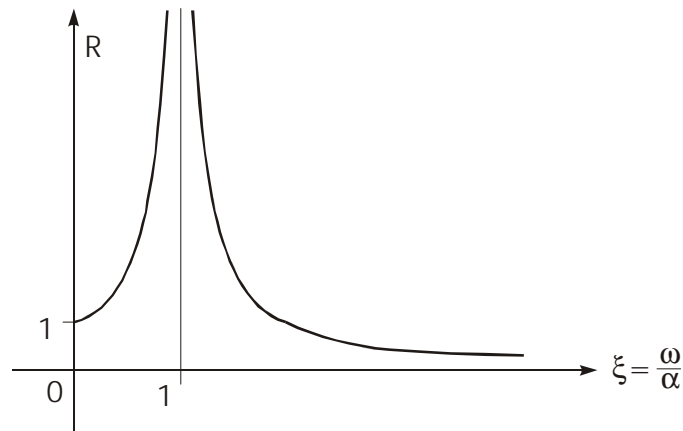
Az un. rezonancia függvény:

$$R = \frac{K}{r} = \frac{a^2}{a^2 - w^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2}$$

A differenciál egyenlet megoldása tehát

$$x = r \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2} \cdot \sin(wt - a_1)$$

$$R = \frac{K_2}{r} = \frac{1}{1 - \xi^2}$$



18.ábra

5.1 Hajlításra igénybevett tengely kritikus fordulatszáma:

$$F_{cF} = m \cdot (x + e) \cdot w^2$$

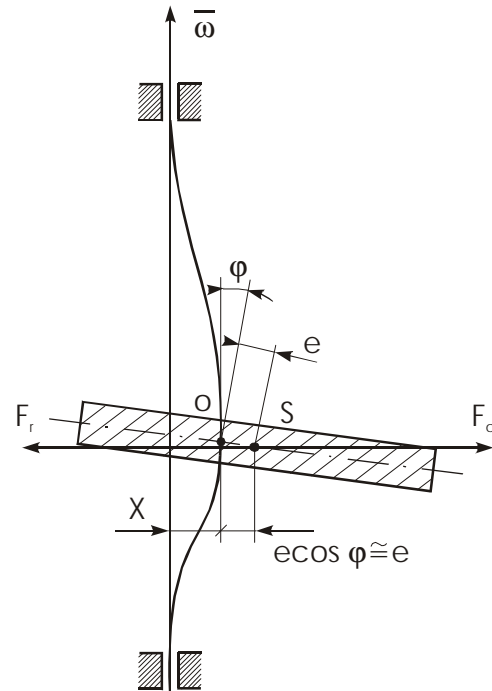
$$-\frac{x}{c} + m(x + e)w^2 = 0$$

$$xw^2 + e \cdot w^2 - \frac{x}{m \cdot c} = 0$$

$$xw^2 + ew^2 - x \cdot a^2 = 0$$

$$x(w^2 - a^2) + ew^2 = 0$$

$$x = e \frac{w^2}{a^2 - w^2} = e \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 1}$$



19.ábra

Rezonancia esetén:

$$w = a$$

$$n = \frac{2p \cdot n}{60} \approx \frac{n}{9,55}$$

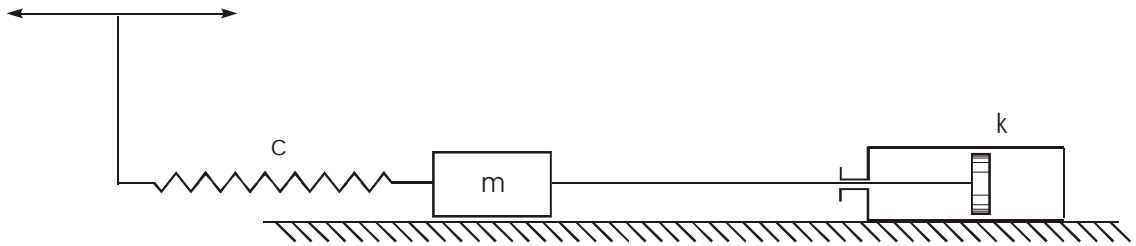
$$n_{kr} = 9,55 \cdot \frac{1}{\sqrt{m \cdot c}} = \frac{9,55}{\sqrt{m \cdot c}}$$

c – a tömeg középpontjába helyezett 1 N erő által okozott x elmozdulással egyenlő.

6. Gerjesztett és csillapított lengések

Vizsgáljunk egy szinuszfüggvény szerint változó erővel a rugón keresztül gerjesztett nedves csillapítású lengőrendszert.

$$F_0 \cdot \sin \omega t = \frac{r}{c} \sin \omega t$$



20.ábra

Írjuk fel a kinetikai alapegyenletet:

$$-m \cdot \ddot{x} - k\dot{x} - \frac{x}{c} + F_0 \cdot \sin \omega t = 0$$

Rendezve:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \frac{x}{c} = F_0 \sin \omega t$$

Bevezetve:

$$b = \frac{k}{2m} \quad ; \quad a^2 = \frac{1}{m \cdot c}$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2 \cdot x = r a^2 \cdot \sin \omega t$$

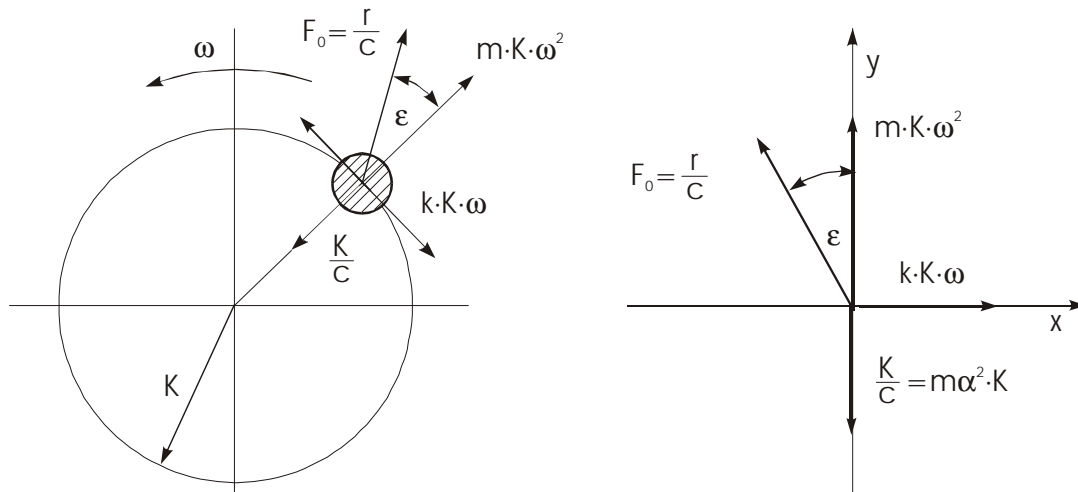
A differenciál egyenlet megoldása a homogén és partikuláris megoldások összegeként nyerhető:

$$x_h = C_2 \cdot e^{-bt} \cdot \sin g$$

$$x_p = K \cdot \sin(\omega t - e)$$

$$x = x_h + x_p$$

A K és az e meghatározható a Gumbel-féle forgó vektorokkal. (21. ábra)



21.ábra

A visszatérítő erővektor a \underline{K} amplitúdóval kifejezve: $\frac{K}{c} = K \cdot m \cdot a^2$

A tömeg tehetetlenségi erejének vektora:

$$K \cdot m \cdot \omega^2$$

A csillapító erő vektora:

$$K \cdot K \cdot \omega$$

A gerjesztő erő vektora a kitérés \underline{K} vektorával ϵ fázisszöget zár be és az $\frac{r}{c} \sin(\omega t)$ gerjesztő erőnek maximális értékével egyenlő,

Tehát: $\frac{r}{c}$

Most vizsgáljuk ezen erők egyensúlyának feltételeit:

$$\sum X_i = 0 \quad ; \quad kK \cdot \omega - \frac{r}{c} \sin e = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad ; \quad K \cdot m \omega^2 + \frac{r}{c} \cos e - K \cdot m a^2 = 0$$

E két egyenletből megfelelő rendezés után az ismeretlen ϵ és K értékei meghatározhatók.

$$\frac{r}{c} \sin e = K \cdot k \cdot \omega$$

$$\frac{r}{c} \cos e = K \cdot m (a^2 - \omega^2)$$

A két egyenlet osztásával:

$$\operatorname{tge} = \frac{k \cdot w}{m(a^2 - w^2)} = c \frac{x}{1 - x^2}$$

$$c = \frac{1}{ma} \quad ; \quad x = \frac{w}{a}$$

Emeljük a két egyenletet négyzetre és adjuk őket össze:

$$\left(\frac{r}{c} \sin e\right)^2 + \left(\frac{r}{c} \cos e\right)^2 = (k \cdot K \cdot w)^2 + [K \cdot m(a^2 - w^2)]^2$$

$$\left(\frac{r}{c}\right)^2 = K^2 [k^2 w^2 + m^2 (a^2 - w^2)^2]$$

és ebből

$$K = \frac{\frac{r}{c}}{\sqrt{k^2 w^2 + m^2 (a^2 - w^2)^2}} = \frac{r \cdot m \cdot a^2}{\sqrt{m^2 (a^2 - w^2)^2 + k^2 w^2}}$$

K – a gerjesztett és nedves csillapítású lengés amplitúdója.

K_2 – a csillapítás nélküli gerjesztett lengés amplitúdója.

$$K < K_2$$

Ugyanis

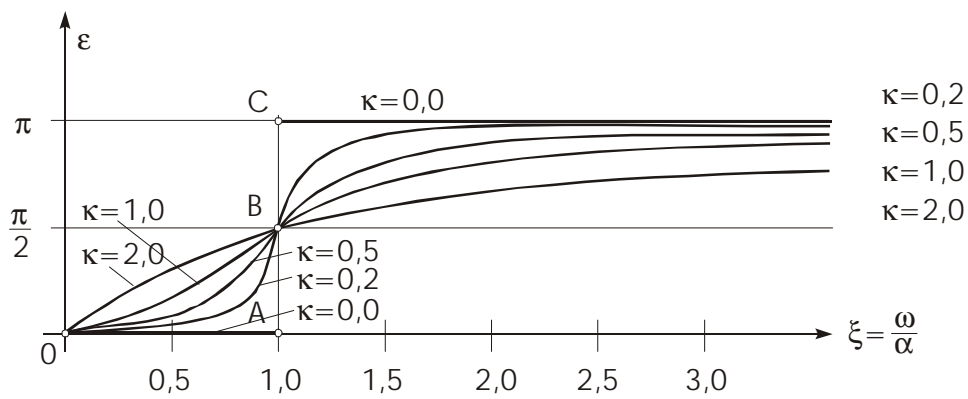
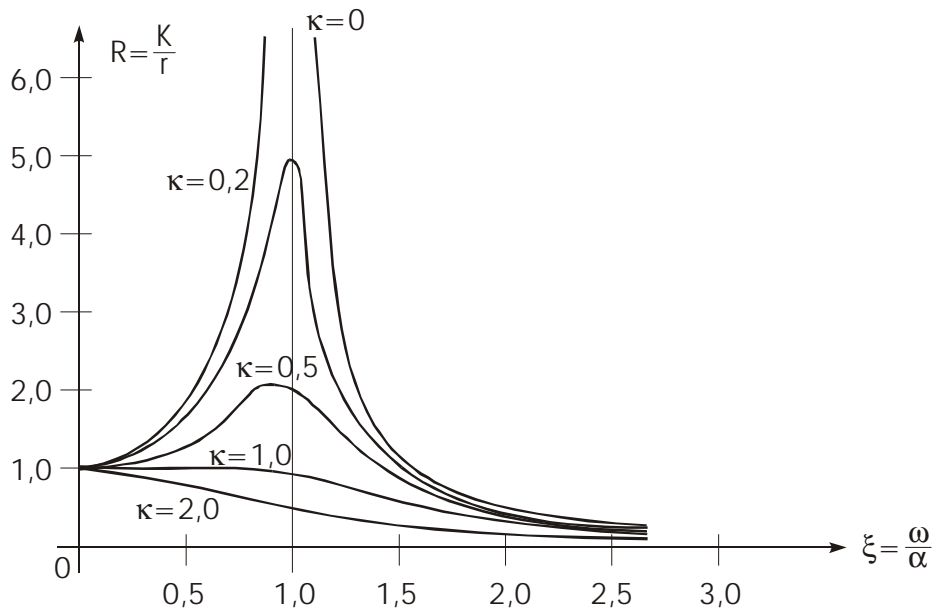
$$K = \frac{ra^2}{\sqrt{(a^2 - w^2)^2 + \left(\frac{kw}{m}\right)^2}} < K = \frac{a^2}{a^2 - w^2}$$

Ha $w = a$ - akkor rezonancia jön létre. Ekkor a K értéke maximális, de nem végtelen nagy.

$$K_{rez} = K_{max} = \frac{m \cdot r \cdot a^2}{k \cdot w}$$

A rezonancia függvény az előzőekből ismert (18. ábra):

$$R = \frac{K}{r} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + c^2 \cdot x^2}}$$



22.ábra

A rezonancia ábra alatt feltüntettük az

$$e = f(x) \text{ fázisfüggvényt is.}$$

Az ábrából is kitűnik, hogy a rezonanciának ($\xi = 1$) megfelelő fázis szög:

$$e = \frac{p}{2}$$

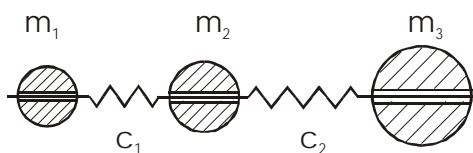
6.1. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a főbb csillapítási fajtákat.
2. Ismertesse a száraz csillapítást.
3. Írja fel a száraz csillapítás differenciál egyenletét.
4. Mekkora a száraz csillapítás lengésideje és csillapítás tényezője?
5. Írja fel a nedves csillapítás mozgás egyenletét.
6. Írja fel a nedves csillapítás körfrekvenciáját, lengésidejét.
7. Mi a logaritmus dekrementum?
8. Ismertesse a rezonancia függvényt.
9. A rugón keresztüli gerjesztésnél mutassa be a kinetikai egyensúly vektoros ábráit.
10. Ismertesse a hajlított tengely kritikus fordulatszámát.

7. Többtömegű lengőrendszer

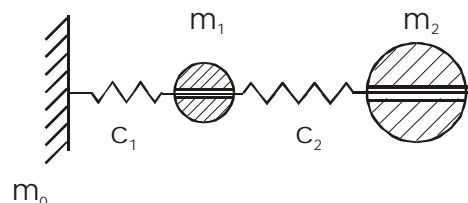
Ha nem egyetlen tömeg képez egy vagy több rugóval lengőrendszert, akkor többtömegű lengőrendszerről beszélünk. Az egyes tömegek szabad mozgásukat illetően többféleképpen lehetnek beépítve, így beszélhetünk szabad és kötött rendszerekről.

A **szabad rendszer** minden tömege a hozzákapcsolt rugó által korlátozottan bár, de mégis szabadon mozoghat. (23. ábra)



23.ábra

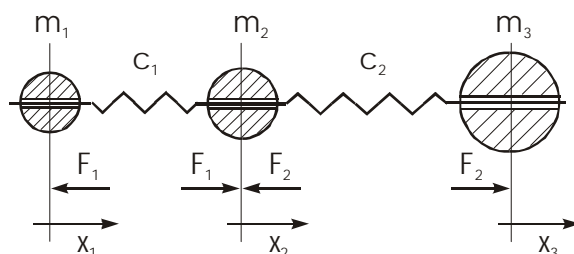
A **kötött rendszer** egy vagy több rugója egyik végének merev kapcsolata miatt szabad mozgásában gátolva van. (24. ábra)



24.ábra

7.1. Többtömegű szabad rendszer

A következőkben három tömegű szabad rendszert vizsgálunk és az így nyert eredményeket általánosítjuk. (25. ábra)



25.ábra

A c_1 rugó deformációja $(x_1 - x_2)$, a rugó erő pedig:

$$F_1 = \frac{x_1 - x_2}{c_1}$$

A c_2 rugó deformációja ($x_2 - x_3$), a rugóerő pedig:

$$F_2 = \frac{x_2 - x_3}{c_2}$$

Írjuk fel mindhárom tömegre külön-külön a kinetikai egyensúlyi egyenleteket:

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot \ddot{x}_1 - \frac{x_1 - x_2}{c_1} &= 0 \\ -m_2 \cdot \ddot{x}_2 - \left(\frac{x_2 - x_3}{c_2} - \frac{x_1 - x_2}{c_1} \right) &= 0 \\ -m_3 \cdot \ddot{x}_3 + \frac{x_2 - x_3}{c_2} &= 0 \end{aligned}$$

Az átalakítások után a következő egyenletet kapjuk ,melyet lengési főegyenletnek is nevezünk.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(m_1 + m_2 + m_3) + x^{(IV)}(m_2 \cdot m_3 \cdot c_2 + m_1 \cdot m_2 \cdot c_1 + m_1 \cdot m_3 \cdot c_1 + m_1 \cdot m_3 \cdot c_2) + \\ + x_1^{(VI)}(c_1 \cdot c_2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3) = 0 \\ \ddot{x}_1(m_1 + m_2 + m_3) + x^{IV} [m_1 \cdot m_2 \cdot c_1 + m_1 \cdot m_3 (c_1 + c_2) + m_2 \cdot m_3 \cdot c_2] + \\ + x^{VI} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot c_1 \cdot c_2 = 0 \end{aligned}$$

A megoldást keressük:

$$x = A \cdot \sin(at)$$

A behelyettesítések után az un. karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 - a^2 [m_1 \cdot m_2 \cdot c_1 + m_1 \cdot m_3 (c_1 + c_2) + m_2 \cdot m_3 \cdot c_2] + \\ + a^4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot c_1 \cdot c_2 = 0 \end{aligned}$$

Az egyenletben az ismeretlen α legmagasabb kitevője $2(n - 1)$, ahol n a lengő tömegek száma. A gyökök száma ugyancsak $(2n - 1)$.

A karakterisztikus egyenlet n lengőtömeg esetében a fenti példa mintájára mindenkor könnyen felírhatjuk. Az egyenlet felépítése ugyanis a következő:

Az első tag a lengő tömegek összegéből áll, és pozitív előjelű.

A második tag negatív előjelű és az α^2 -tel szorozzuk a tömegek és a közöttük lévő rugóállandó szorzatának összegét.

A harmadik tag ismét pozitív előjelű és α^4 szorozva a tömegekkel és a köztük lévő rugóállandókkal.

A gyökök közül a legkisebb α a rendszer alap lengésének körfrekvenciája.

Ha a megfigyelés kezdetén már volt a tömegeknek kilengése, akkor

$$x = K \cdot \sin(a \cdot t + a_1)$$

A tömegek kilengésének amplitúdói:

K_1 , K_2 és K_3 a kitérésekre a következő függvényeket kapjuk:

$$x_1 = K_1 \cdot \sin(at + a_1)$$

$$x_2 = K_2 \cdot \sin(at + a_1)$$

$$x_3 = K_3 \cdot \sin(at + a_1)$$

Behelyettesítve a kinetikai egyenletekbe, majd rendezve az egyenleteket, valamint az egyenletek összeadása után kapjuk:

$$-a^2(m_1 \cdot K_1 + m_2 \cdot K_2 + m_3 \cdot K_3) = 0$$

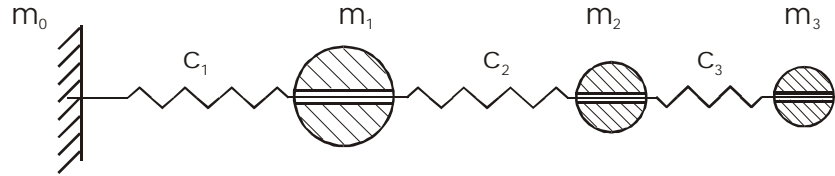
Tetszőleges több tömeg esetére is fennáll:

$$\sum m_i \cdot K_i = 0$$

Ez a súlyponttétel azt mutatja, hogy szabad lengés esetén a lengőrendszer súlypontja helyben marad.

7.2. A többtömegű kötött rendszer

A kötött rendszer a szabad rendszerből úgy származtatható, hogy a megfogás helyén lévő tömeget végtelen nagynak tekintjük (26. ábra)



26. ábra

Az ennek figyelembevételével felírt karakterisztikus egyenletből a körfrekvenciák meghatározhatók.

A számítások igazolják, hogy a karakterisztikus egyenlet α -nak kettőnél magasabb kitevőjű hatványai az alaplegés numerikus értékét alig befolyásolják.

Így, ha az α^2 -nél magasabb hatványú tagokat elhanyagoljuk, akkor 5 – 10 %-nál nagyobb hibát az $\alpha_1 = \alpha_{\min}$ meghatározásában nem követünk el.

A karakterisztikus egyenlet az elhanyagolásokkal:

$$(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) - a^2 [m_0 \cdot m_1 \cdot c_1 + m_0 \cdot m_2 (c_1 + c_2) + m_0 \cdot m_3 (c_1 + c_2 + c_3) + m_1 \cdot m_2 c_2 + m_1 \cdot m_3 (c_2 + c_3) + m_2 \cdot m_3 \cdot c_3] = 0$$

Az egyenletet m_0 -val osztva, kapjuk:

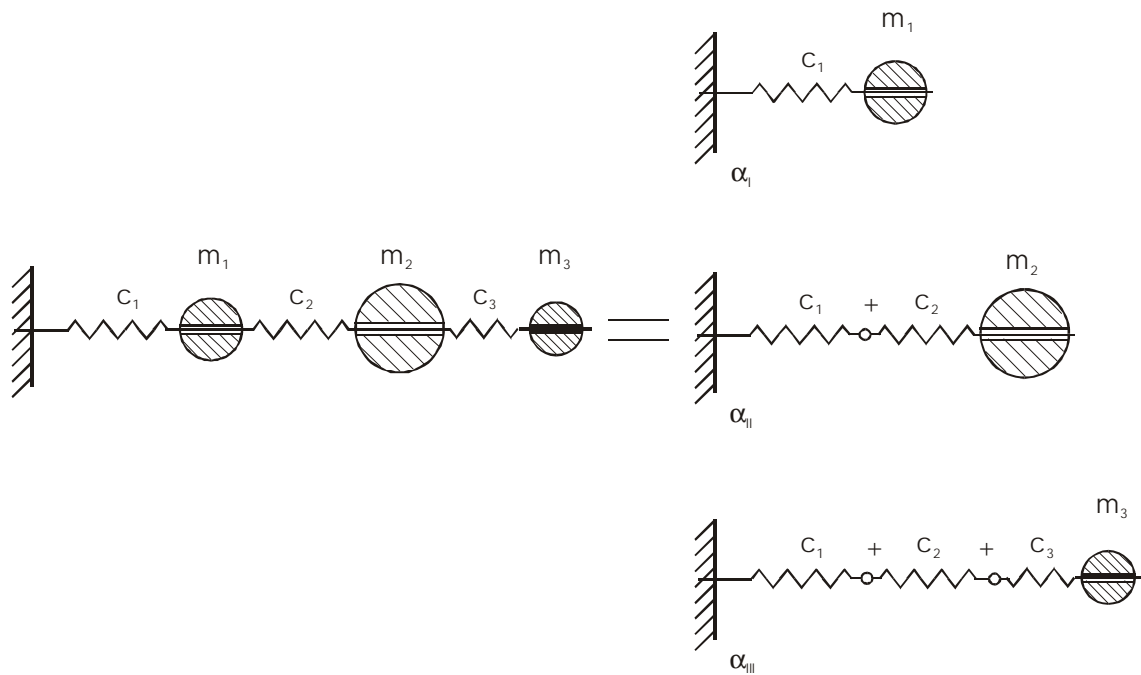
$$1 - a^2 [m_1 \cdot c_1 + m_2 (c_1 + c_2) + m_3 (c_1 + c_2 + c_3)] = 0$$

Az $m_0 = \infty$, hiszen így vettük figyelembe a rendszer kötöttségét.

Dunkerley formulája

A kötött rendszer legkisebb körfrekvenciájának meghatározására alkalmas.

A 27. ábra szerint a háromtömegű kötött rendszert három egytömegű lengőrendszerre bontjuk.



27. ábra

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{a_I^2} + \frac{1}{a_{II}^2} + \frac{1}{a_{III}^2} = m_1 \cdot c_1 + m_2(c_1 + c_2) + m_3(c_1 + c_2 + c_3)$$

Érdemes megfigyelni, hogy a karakterisztikus egyenletből is ezt az eredményt kapjuk.

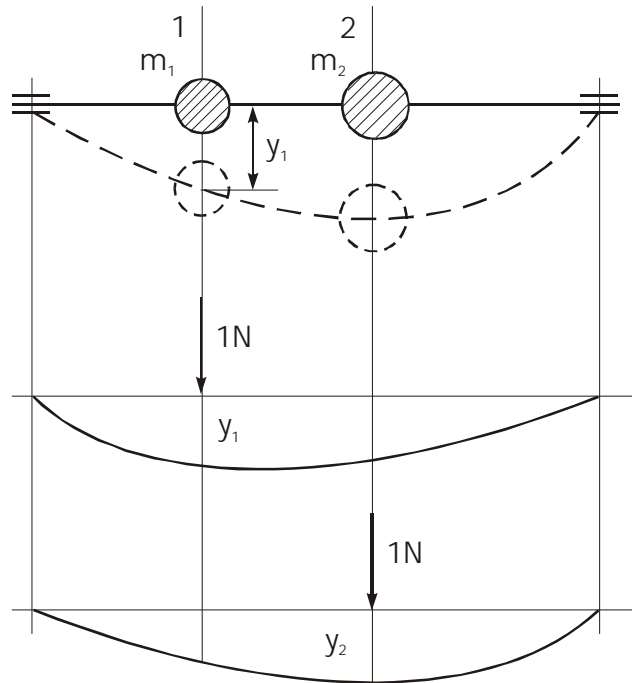
7.2.1. Többtömegű rendszer hajlító és torziós lengése.

A többtömegű rendszerben a hajlító és torziós lengést vizsgáljuk. A gyakorlatban azonban mindkettő egyszeri fellépése is megtörténhet. Az egyszerűsítés érdekében azonban csak a hajlító, illetve a torziós lengés viszonyait tárgyaljuk.

7.2.2. Hajlító lengés

A 28. ábrán feltüntetett modell két tömege hajlító lengést végez. Az m_1 tömeg $m_1 \cdot g$ súlyereje a saját függőlegesében y_1 lehajlást okoz, tehát a rugóállandó:

$$c_1 = \frac{y_1}{m_1 \cdot g}$$



28.ábra

Az $m_2 \cdot g$ súlyerő a 2-es függőlegesben y_2 lehajlást okoz, tehát a rugóállandó e helyen:

$$c_2 = \frac{y_2}{m_2 \cdot g}$$

Írjuk fel a két tömegekre a Dunkerley formulát:

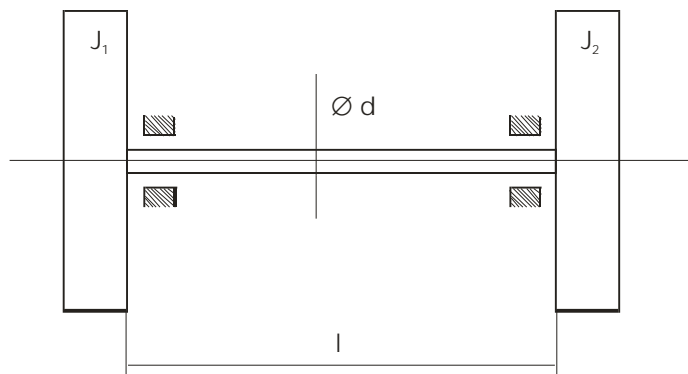
$$\frac{1}{a_I^2} = \frac{1}{a_I^2} + \frac{1}{a_{II}^2} = m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2$$

és ebből a rendszer legkisebb körfrekvenciája:

$$a_1 = a_{\min} = \frac{1}{\sqrt{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}}$$

7.2.3. Torziós lengés

A 29. ábrán feltüntetett kéttömegű torziós lengési modell megoldásához használjuk fel, a szabad rendszert.



29.ábra

Példa 2.

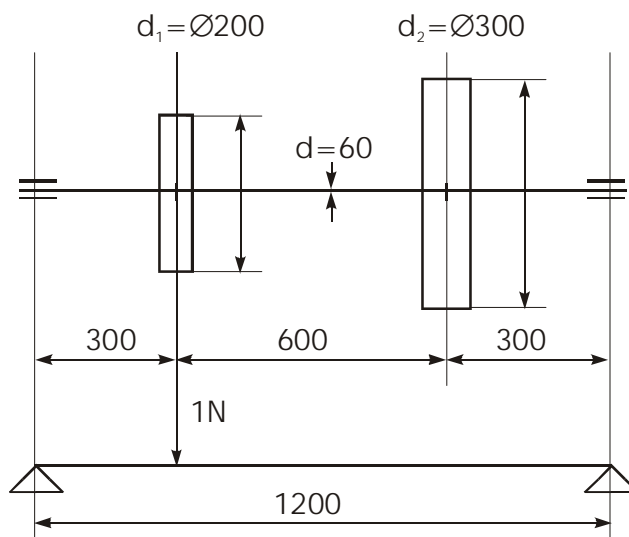
Határozza meg a vázolt tengely legkisebb saját frekvenciáit hajlító és torziós lengések esetére.

$$m_1 = 6 \text{ kg}$$

$$m_2 = 9 \text{ kg}$$

$$J_1 = 0,03 \text{ kgm}^2$$

$$J_2 = 0,045 \text{ kgm}^2$$



30.ábra

A tengely statikai adatai:

$$I = \frac{d^4 p}{64} = 63,6 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_p = 2I = 127,2 \text{ cm}^4$$

$$E = 210 \text{ GPa} \quad ; \quad G = 81 \text{ GPa}$$

$$IE \cdot y_1 = \frac{93}{6} (4 \cdot 0,1125^2 + 0,225^2) + \frac{0,9}{6} (0,225^2 + 4 \cdot 0,1125^2)$$

$$c_1 = y_1 = \frac{0,2025}{63,6 \cdot 10^{-8} \cdot 210 \cdot 10^9} = 0,0015 \text{ mm/N}$$

$$a_1 = a_{\min} = \frac{1}{\sqrt{15 \cdot 0,0015 \cdot 10^{-3}}} = 210,91 / \text{s}$$

$$c_0 = \frac{0,6}{127,2 \cdot 810} = 0,0045 \cdot 10^{-3} \text{ 1/Nm}$$

$$a_1 = a_{\min} = \sqrt{\frac{0,075}{0,03 \cdot 0,045 \cdot 0,0045 \cdot 10^{-3}}} = 3513,61 / \text{s}$$

Egyenesvonalú lengésre nyert karakterisztikus egyenletét, mely szerint:

$$(m_1 + m_2) - a^2 (m_1 \cdot m_2 \cdot c_1) = 0$$

A felírt egyenletben a tömeg helyett a tehetetlenségi nyomatékokat, a rugóállandó ebben az esetben az egységnyi nyomatékhoz tartozó szögelfordulást kell helyettesíteni.

$$c_0 = \frac{l}{I_p \cdot G} = \frac{32 \cdot l}{d^4 p \cdot G}$$

a legkisebb körfrekvencia:

$$a_1 = a_{\min} = \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2 \cdot c_0}}$$

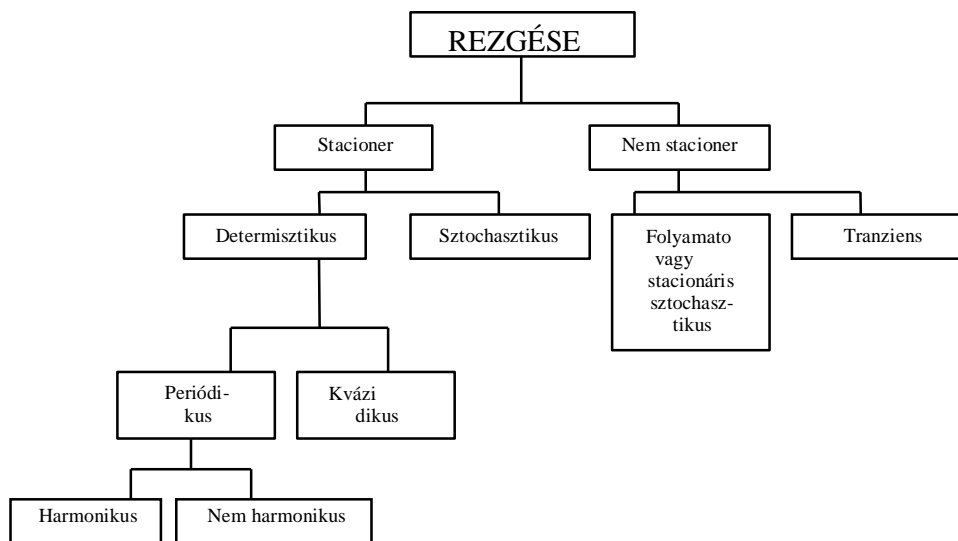
7.3. Ellenőrző kérdések

1. Hogyan osztályozzuk a mechanikai lengéseket (rezgéseket)?
2. Írja fel egy háromtömegű szabad rendszer karakterisztikus egyenletét.
3. Írja fel a kötött rendszer karakterisztikus egyenletét.
4. Ismertesse a Dunkerley formulát.
5. Ismertesse a többtömegű szabad rendszer hajlító tengését.
6. Ismertesse a többtömegű szabad rendszer torziós lengését.

8. Rezgések csoportosítása

A rezgőmozgások felosztását a 31. ábra szerinti csoportosításban vizsgáljuk.

A stacionárius (időben állandósult) rezgések és a nem stacionárius rezgések közötti különbség elsősorban abban van, hogy a stacionárius rezgés esetén az átlagos jellemzők (pl. négyzetes középérték...stb.) állandó. A nem stacionárius rezgések esetén, különböző időpillanatokban mérve a jeleket, átlagos jellemzőik különbözőek lesznek.



31. ábra
Rezgések felosztása

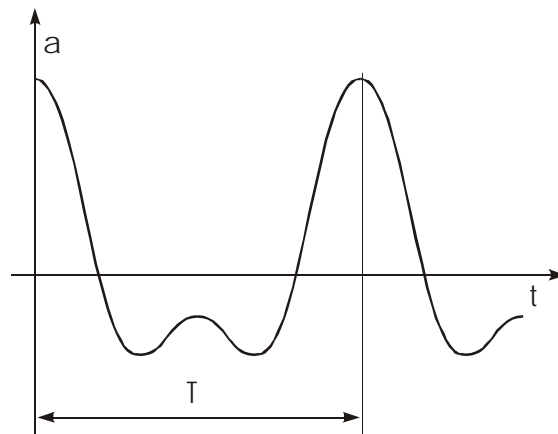
A stacionárius determinisztikus rezgések esetén a jelek pillanatnyi értéke előre megadható, míg a stacionárius sztochasztikus rezgések esetén csak a statisztikai jellemzők (átlagos érték, négyzetes középérték...stb.) adhatók meg előre.

Periodikus rezgésről akkor beszélünk, ha egy test mozgásciklusa T időnként ismétlődik. Jellegetes példája a 31. ábrán látható test mozgása, mely harmonikus rezgőmozgás. A gyakorlatban azonban a rezgések csak rendkívül ritkán tiszta harmonikus mozgások. Egy tipikusan nem harmonikus, periodikus rezgés például egy olyan szinuszos összetevőkből eredő rezgés, mely a belső égésű motor hengerfedelén gyorsulás-idő függvény értékeként mérhető

(32. ábra).

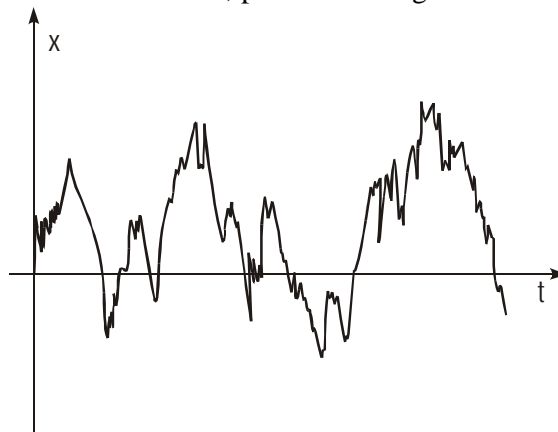
Kváziperiodikus rezgés jellemzője, hogy minden esetben összetett rezgésként adódik, de az alaprezgések egymásnak nem harmonikusai, így az eredő rezgés T periódus szerint nem ismétlődik. Ilyen rezgés adódik, ha két egyébként harmonikus alaprezgést összegzünk, de ω_1/ω_2 hányados nem racionális szám.

A gyakorlatban rendszerint olyan véletlenszerű (sztochasztikus) rezgések lépnek fel, ahol a szabálytalan mozgásciklusok sohasem ismétlik meg tökéletesen önmagukat (33. ábra). Ilyen rezgés egzakt leírásához elméletileg hosszú megfigyelési időre lenne szükség, ami felesleges, mivel más, például a statisztikai jellemzők állandósága miatt már viszonylag rövid idő alatt is megfelelő pontossággal mérhető a rezgés erőssége.



32.ábra

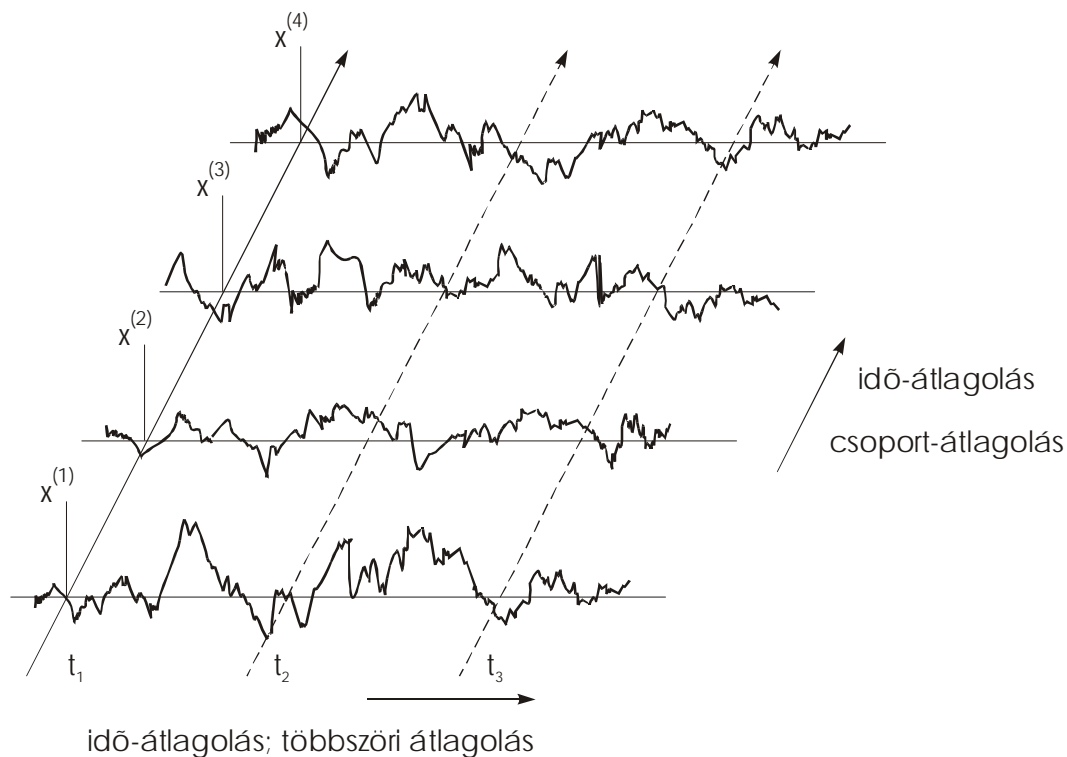
Nem harmonikus, periodikus rezgés



33.ábra

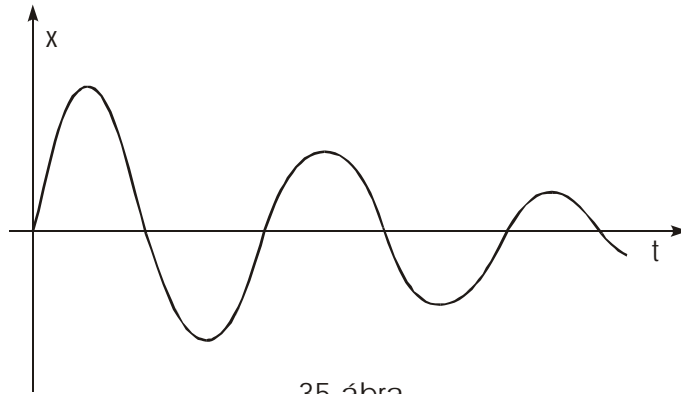
A nem stacionárius sztochasztikus rezgések jellemzésére az egyszerű átlagolás nem alkalmas, mivel ezek statisztikai peremétere is változnak. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy ugyanazt a mérést bizonyos idő után (1-2 óra) megismételjük, más átlagos értéket kapunk. Tipikus példa rá egy útkereszteződésnél mérhető rezgésszint, mely időjárástól, évszaktól, forgalomtól függően változik. Ezért a méréseket meghatározott időszakonként meg kell ismételni és a mérési eredményeket egy újabb átlagolásnak kell alávetni (34. ábra).

A tranziens rezgések (35. ábra) szintén gyakran előfordulnak a mindennapi életben. Ezek olyan ütésszerű, rövid időtartalmú rezgések, melyek jellemzésére, időben bonyolult lefutásuk miatt, a környezetükre kifejtett hatásuk szolgál. Ezt időbeli lefutásuk mellett elsősorban energiataralmuk határozza meg.

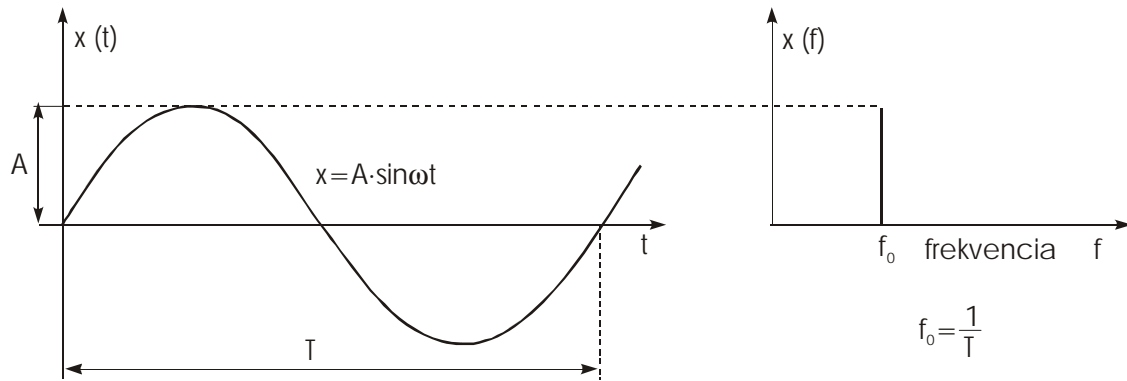


34. ábra

Nem stacionárius sztochasztikus rezgések



35. ábra
Tranziens rezgés



36. ábra

Frekvenciaspektrum $x(f)$ függvénye harmonikus rezgőmozgás esetén.

8.1. Rezgések jellemzése

A rezgések leírása időbeli alakjuk mellett egyéb jellemzőik is használatosak. Ilyen jellemző a rezgés frekvencia tartomány szerinti ábrázolása. Ez az ábrázolás sokkal egyszerűbb és mégsem tartalmaz információvesztést. Ez különösen bonyolultabb rezgések elemzésénél hasznos, ahol több összetett függvény együttes értelmezése már áttekinthetetlen, a frekvenciaspektrum szerinti ábrázolás viszont jól kiemeli az egyes komponenseket.

A frekvenciaspektrum $x(f)$ függvénye matematikailag az $x(t)$ időfüggvény Fourier-transzformáltjaként számítható.

Nézzük meg ezt egy harmonikus rezgőmozgás esetén (36. ábra). Ennek matematikai alakja:

$$x(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(f) = F\{A \cdot \sin \omega t\} \begin{cases} = A, & \text{ha } f = f_0 \\ = 0, & \text{ha } f \neq f_0 \end{cases}$$

Természetesen ez nemcsak kitérés esetére alkalmazható, a sebesség és a gyorsulás is ábrázolható frekvenciatartomány szerint

A harmonikus rezgőmozgás a kitérés, a sebesség, vagy a gyorsulás legnagyobb értékével és a körfrekvenciával, a rezgés számmal vagy egy rezgés idejével egyértelműen megadható, ezért álszerű a csúcsertékek mérése. (A, v_0, a_0)

Ha viszont a rezgés nem tiszta szinuszos, akkor nem jellemezhető a csúcsertékekkel, mert ez semmit sem mond arról, hogy milyen a mozgás jellege a két csúcserték között. Ilyenkor valamivel többet mond a számtani, illetve a négyzetes középérték (az effektívérték). A számtani középértéket a gyakorlatban kevésbé használják. Mind két értéket későbbiekben tárgyaljuk. Rezgésnél alapvető követelmény, hogy a magas szintértékek kijelzése mellett, az alacsony szintek közötti finom különbség is kimutatható legyen. Ezért logaritmikus skálát szokás alkalmazni az ún. decibelszámítás szerint:

$$dB = 20 \cdot \lg \frac{a_{\text{mért}}}{a_{\text{ref.}}}$$

ahol:

$a_{\text{mért}}$ a rezgés jellemző mért értéke;

a_{ref} a referencia vagy vonatkoztatási szint.

Természetesen itt is tetszőleges jellemzőt használhatunk. A 0 dB érték nem rezgéstelen állapotot jelent, hanem azt, hogy a mért szint és a referenciaszint megegyezik.

A decibelskála legnagyobb előnye a széles tartomány (nagy dinamika) átfogása úgy, hogy az alacsony szintértékeknel is megmarad a megfelelő felbontás. A decibelskáláról leolvasott szintek abszolút értékei csak a referenciaértékek ismeretében határozhatók meg. A referenciaértékekre léteznek szabványos ajánlatok (2.1. táblázat), de ezt a megfelelő dinamika érdekében nem mindig tartják be.

2. táblázat

A referenciamennyiségek használatos értéke néhány országban

	v_r	a_r
	m/s	m/s ²
Magyarország	$5 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Franciaország	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-5}$
Németország	$5 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Oroszország	$4,18 \cdot 10^{-8}$	$3,102 \cdot 10^{-4}$

A csillapítás kifejezésére is szokás használni a decibelszámítást. Ebben az esetben azonban nem egy meghatározott referenciaszinthez viszonyítunk, hanem a bemenő és a kimenő rezgéseket vizsgáljuk, pl.:

$$\text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{a_{\text{bemenő}}}{a_{\text{kimenő}}}$$

Ezek után nézzünk néhány példát a különféle rezgések frekvenciatartomány szerinti ábrázolására. A nem harmonikus periodikus rezgés képe látható a 2.15. ábrán.

A kváziperiodikus rezgés esetén a frekvencianövekmény nem állandó, mert a rezgések nem egymás harmonikusai (38.ábra), A sztochasztikus rezgések esetén a rezgés frekvencia spektruma folytonos, mivel mindenféle rezgésösszetevő előfordul benne (39. ábra)

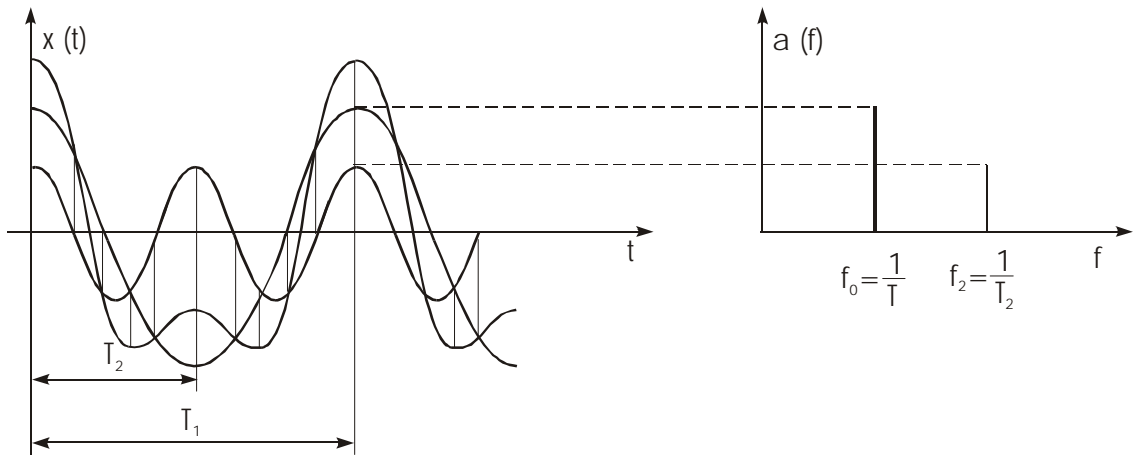
A rezgések elemzése esetén a csúcserkékek (amplitúdó maximum) mellett célszerű átlagos szintek definiálása is.

Ez elsősorban - a nem tiszta szinuszos rezgések leírásakor pontosabb értelmezést jelent.

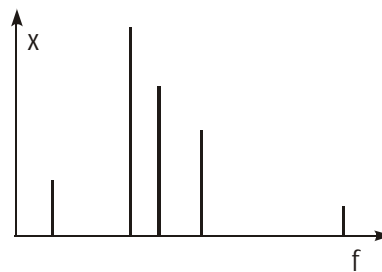
Átlagos rezgésérték (számtani középérték):

$$x_{\text{átl}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

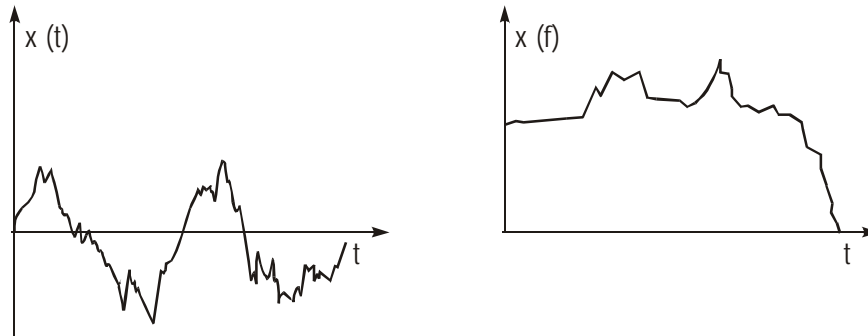
ahol: $x_{\text{átl}}$ számtani középérték;
 $x(t)$ a rezgésre jellemző függvény



37.ábra



38.ábra
 Kváziperiodikus rezgés frekvencia-
 spektruma



39. ábra

Négyzetes középérték (effektív középérték):

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$$

ahol:

x_{RMS} Root Mean Square = RMS, négyzetes középértéket jelent.

$x(t)$ a rezgésre jellemző függvény.

A függvények jellemzésére használjuk még az alak- és a sisaktényezőt is.

Az alaktényező (form):

$$F_f = \frac{x_{\text{RMS}}}{x_{\text{átl}}}$$

ahol:

x_{RMS} négyzetes középérték;

$x_{\text{átl}}$ számtani középérték.

A sisaktényező (crest):

$$F_c = \frac{x_{\text{csúcs}}}{x_{\text{RMS}}}$$

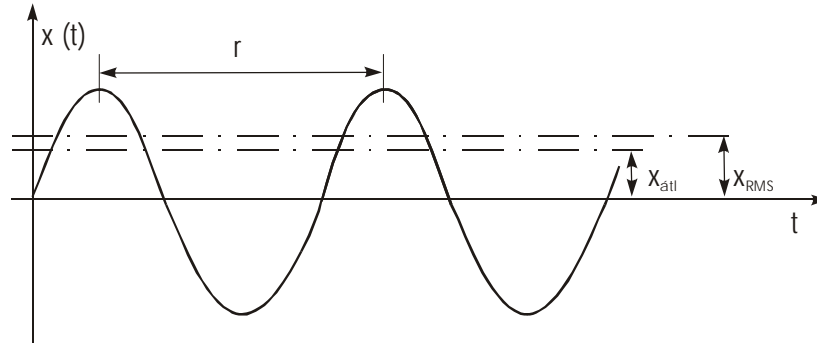
ahol:

$x_{\text{csúcs}}$ az amplitúdó maximális értéke;

x_{RS} négyzetes középérték.

Természetesen itt is értelmezhető a sebesség és a gyorsulás értékekre az átlagolás, az alak- és a sisaktényező meghatározása.

Határozzuk meg ezeket az értékeket egy harmonikus rezgés esetén (40. ábra)



40. ábra
Átlagos rezgésértékek értelmezése harmonikus
rezgés esetén

A kitérés függvény:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

ahol:

$A = x_{csúcs}$ amplitúdó maximum;

$\alpha = 0$

Számtani középérték:

$$x_{\text{átl}} = 4 \cdot \frac{1}{2p} x_{\text{csúcs}} \int_0^{p/2} \sin \omega t dt = \frac{2}{p} \cdot x_{\text{csúcs}}$$

Négyzetes középérték:

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{2}{p} x_{\text{csúcs}}^2 \cdot \int_0^{p/2} \sin^2 \omega t dt} = \frac{x_{\text{csúcs}}}{\sqrt{2}}$$

Az alaktényező:

$$F_f = \frac{x_{\text{RMS}}}{x_{\text{átl}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

ahol: x_{RMS} = négyzetes középérték

$x_{\text{átl}}$ = számtani középérték

A sisaktényező:

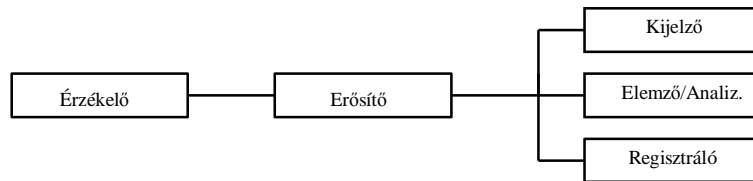
$$F_c = \frac{x_{\text{csúcs}}}{x_{\text{RMS}}} = \sqrt{2}$$

ahol: $x_{\text{csúcs}}$ az amplitúdó max. értéke

x_{RMS} négyzetes középérték

9. A rezgésmérés eszközei

A rezgésméréshez a 41. ábrán látható eszközök szükségesek. Az érzékelők általában rendelkeznek egy ún. szeizmikus tömeggel, melynek rezgéseit maga az érzékelő alakítja elektromos jellé.

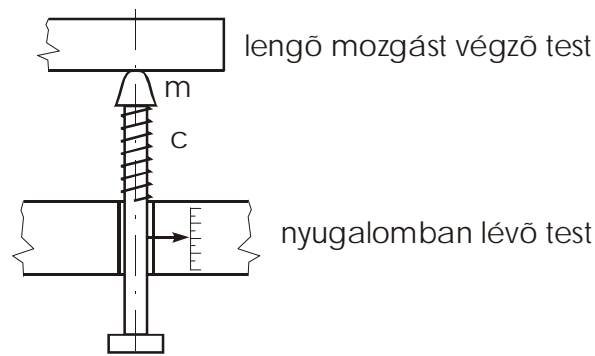


41.ábra

Természetesen vannak mechanikus elven működő műszerek is, de ezek pontatlanok. Célszerűbb a gépek mechanikai rezgéseit villamos jellé átalakítani és a villamos jelet mérni és elemezni.

9.1. Relatív rezgésmérők

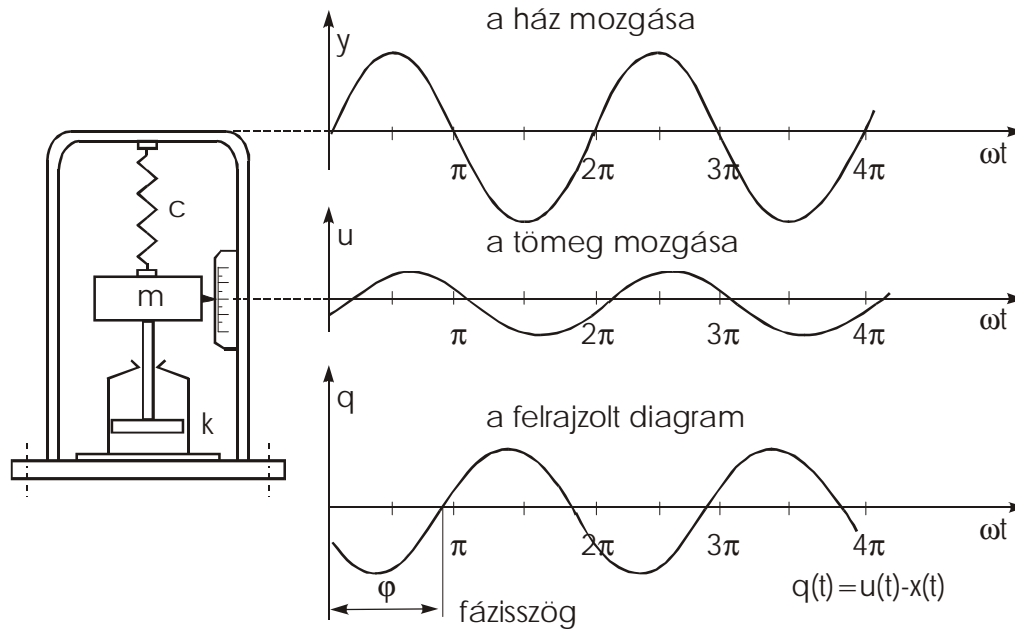
A relatív rezgésmérés lényege, hogy a mérőeszközt egy – a tárgy rezgésétől független – ún. fix ponthoz rögzítjük. Ilyenkor azt vizsgáljuk, hogy a lengő mozgást végző tárgy hogy mozdul el a fix ponthoz képest. (42. ábra).



42.ábra

9.2. Abszolút rezgésmérők

Ha fix pontunk nincs, abszolút rezgésmérőt választunk. Ilyen mérések esetén a mérendő tárgyhoz egy egyszabadságfokú lengőrendszert csatlakoztatunk, melynek tömege a vizsgált tárgy lengőmozgása a következtében gerjesztett lengést végez. (43. ábra)



43.ábra

A mérendő lengés:

$$x = A \cdot \sin \omega t$$

Tekintettel arra, hogy a ház is elmozdul a műszer tömege ahhoz képest csak relatív elmozdulást végez, melynek bizonyos ? fáziskésése van.

A felrajzolt diagram tehát a

$$q(t) = Q \cdot \sin(\omega t - j)$$

φ - a műszer fázisszög hibája.

Ezen felírásnál feltételezzük, hogy a műszernek a mérés kezdetekor jelentkező saját lengése már lecsillapodott.

A műszer által észlelt lengés amplitúdó (Q) és a mérendő lengés amplitúdójának (A) viszonya, az út – nagyítás függvény

$$N_u = \frac{Q}{A} = \frac{I^2}{(1 - I^2)^2 + 4 \cdot C^2 \cdot I^2}$$

c – a rendszer csillapítására jellemző un. Lehr-féle szám

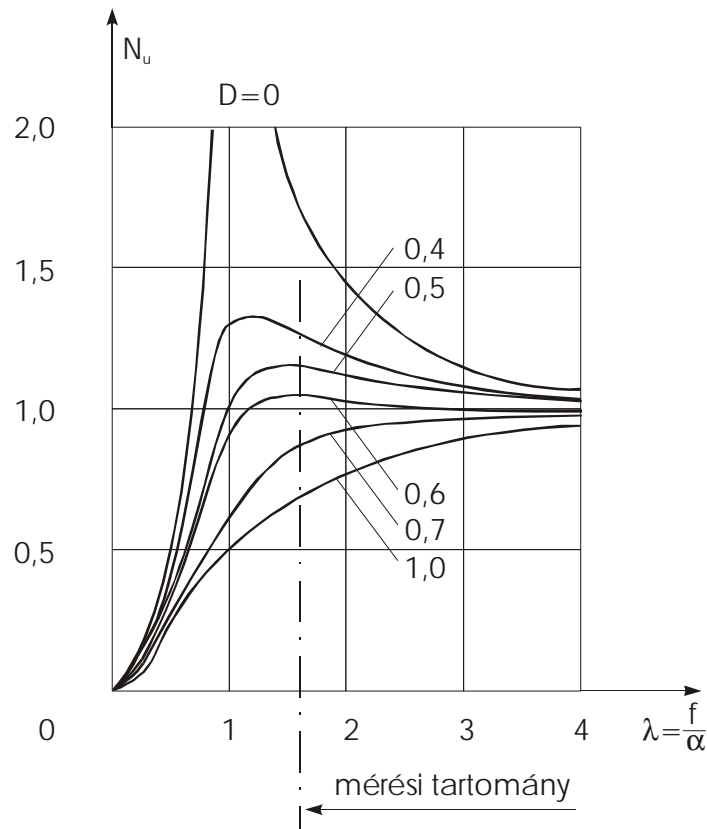
$$C = \frac{k}{2m \cdot a}$$

$$I = \frac{f}{f_m} = \frac{\omega}{a} \quad ; \quad \text{az un. frekvencia viszony.}$$

A műszer frekvenciája:

$$f_m = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{m \cdot c}}$$

Az út – nagyítás függvényből (44. ábra) látható, hogy útérzékelés csak nagy λ értékek esetében lehetséges.



44.ábra

Ha a mérés pontatlansága nem lehet nagyobb mint $\pm 5 \%$, akkor a csillapítás mértékét 0,6...0,7 között kell választani és a mérendő frekvencia a műszer saját frekvenciájának 1,6-szorosánál kisebb nem lehet. Mivel a csillapítást nehéz a kívánt határok közé beszabályozni, ezért a műszer mérési tartományát úgy választják meg, hogy λ nagyobb legyen mint 2,5 – 3.

Az útérzékelő műszereket tehát nagy λ ill. kis α vagyis nagy m tömeg jellemzi. Ipari viszonylatban legfeljebb nagyon nagy vizsgált frekvenciák esetében adódnak elfogadható műszertömegek. Ezért az ipar csaknem kizárólag gyorsulásérzékelőket alkalmaz, melyek kisméretű tömegeket igényelnek.

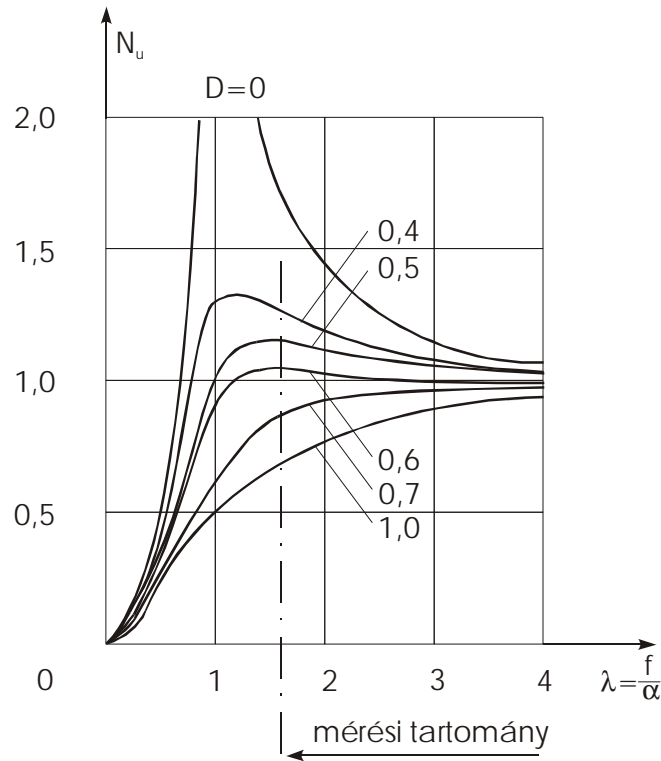
A mérendő lengésgyorsulás amplitúdója:

$$a_0 = A \cdot w^2$$

A gyorsulás – nagyítás függvénye:

$$N_{gy} = \frac{Q \cdot a^2}{A \cdot w^2} = \frac{1}{(1 - I^2)^2 + 4 \cdot c^2 \cdot I^2}$$

Ez a függvény grafikusán (45. ábrán) látható.



44. ábra

Ha a gyorsulásérzékelő műszer pontatlanságát $\pm 5\%$ -on belül akarjuk tartani, akkor a csillapítási tényező $c = 0,6 - 0,7$ határok között kívánatos tartani. A gyorsulás mérése a saját frekvencia $0,7$ -szereséig végezhető.

9.3. A gyorsulásérzékelők gyakorlati kivitele

A gyakorlatban az alábbi típusokat különböztetik meg:

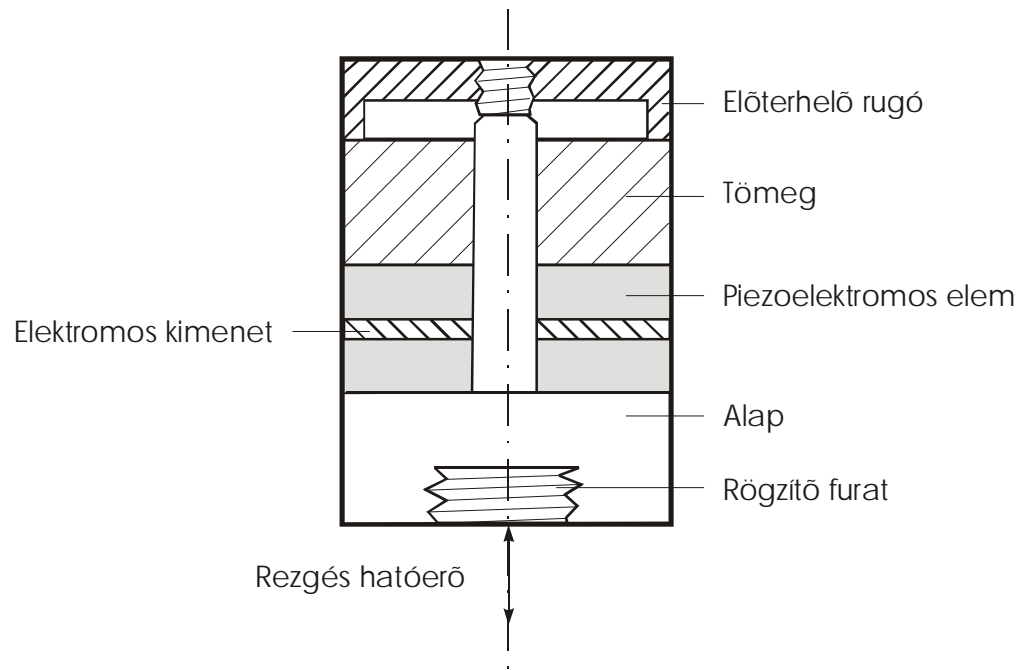
- piezoelektromos, amely tovább osztható ún. kompressziós és nyírásra alapuló típusra.
- nyúlásmérő bélyeges,
- szénoszlopos,
- elektrodinamikus

Részletesebb jellemzőik a következők:

a) Piezoelektromos

A mérés fizikai alapja a következő, a piezokristályokra ható erő hatására a kristályokra felvitt fegyverzetek között villamos töltés keletkezik, melyet ellenálláson levezetve feszültség keletkezik.

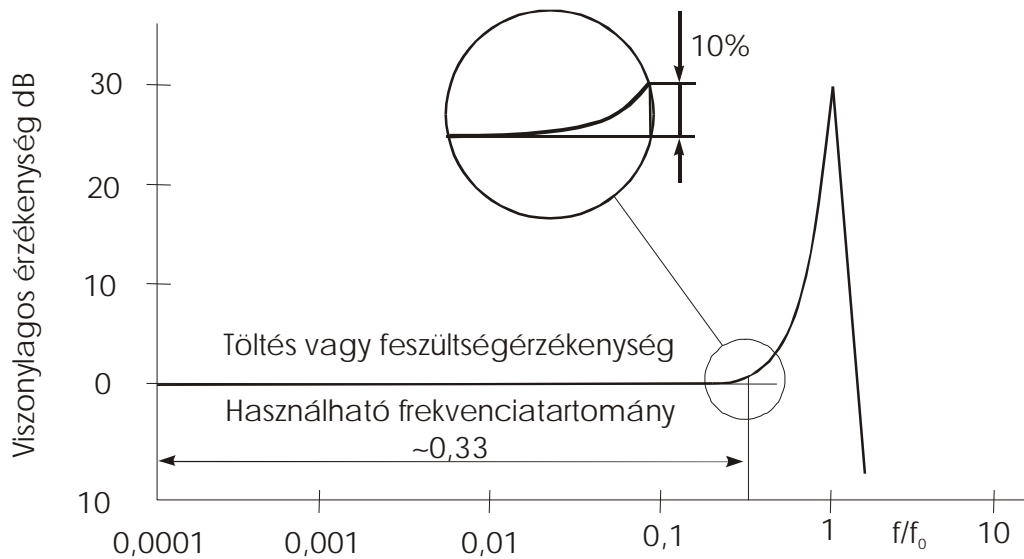
A gyakorlatban két fajta típus terjedt el az ún. kompressziós és a nyírásán alapuló típus (46. ábra)



46. ábra

A piezoelektromos megoldás a gyorsulások mérésére igen alkalmas, rendkívül kis tömege miatt saját frekvenciája nagy, ezért rendkívül kis méretei miatt szinte minden ipari igényt kielégít.

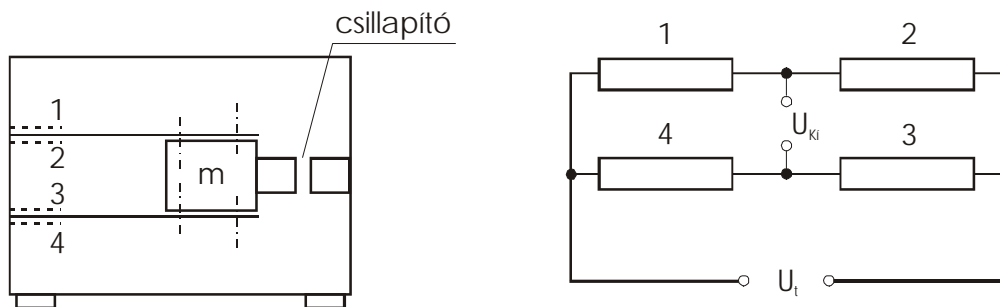
A gyorsulás érzékelő tömege legfeljebb egytizede annak a tömegnek, melyet mérünk.



47.ábra

b) Nyúlásmérő bélyeges

A berendezés elvi vázlata 47. ábrán látható. Lényege egy házban laprugókra felerősített m tömeg. Ha a ház a rezgő berendezésre történt felhelyezés, vagy a felerősítés után a berendezéssel együtt rezeg, az m tömeg a tehetetlenség miatt a gyorsulás irányával ellentétesen, de a gyorsulás nagyságával arányosan kitér a laprugók deformációját okozva. A laprugók legjobban igénybevett részén felragasztott 1, 2, 3 és 4 jelű nyúlásmérő bélyegek a lehajlással arányos villamos jelet szolgáltatnak. (48. ábra)

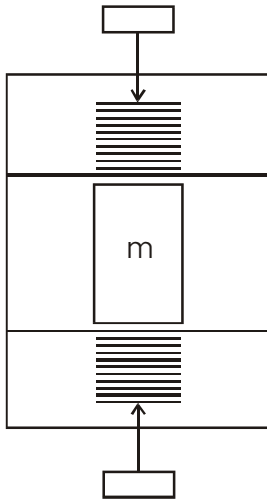


48.ábra

c) Szénoszlopok

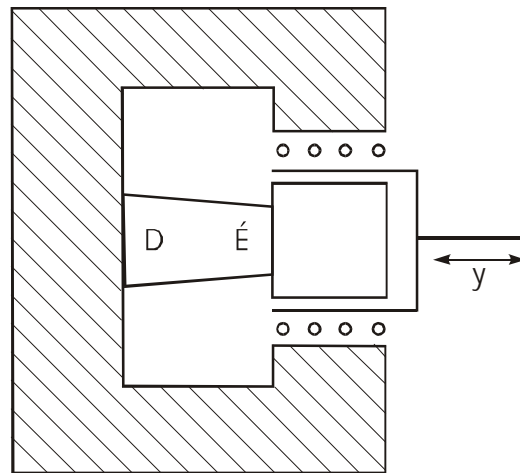
Ismeretes, hogy az egymással érintkező szénlapok vezetőképessége összenyomásuk esetén az átmeneti ellenállás csökkenése miatt nő. A 49. ábrán látható megoldásnál a tömeget lemezrugók tartják, amelyeknek másik oldala csavarokkal előfeszített kb $6 \times 0,2$ mm méretű szén-

pasztillákra támaszkodik. Csillapítás érdekében a ház és a tömeg közötti részben olaj van. A műszert csak úgy, mint a nyúlásmérőbélyeges mérés esetén Wheatstone – hídba kapcsolják.



49.ábra

Széneszlopos gyorsulás érzékelő



50.ábra

Elektrodinamikus rezgésérzékelő

d) Elektrodinamikus

Az elektrodinamikus rezgésérzékelő fő eleme egy mágneses térben mozgó tekercs (50.ábra), amelyben a mozgás következtében feszültség indukálódik. Az indukált feszültség \underline{U} lengésindukáció \underline{D} tekercs átmérő és \underline{n} menetszám esetén:

$$U_i = -n \cdot B \cdot D \cdot p \cdot v$$

Az elektrodinamikus rezgésmérők kimeneti feszültsége csakis a rezgés \underline{y} sebességétől függ.

9.4. Ellenőrző kérdések:

1. Hogyan osztályozhatjuk a rezgéseket?
2. Hogyan jellemezhetők a rezgések?
3. Ismertesse a rezgésmérés elvét.
4. Ismertesse az abszolút rezgésmérés elvét.
5. Milyen frekvencia tartományban használhatók a gyorsulásérzékelők.
6. Ismertesse a gyorsulásérzékelők gyakorlati kivitelét.