4. TENGELYEK

A tengely forgó gépalkatrészeket hord, amelynek feladata általában erőátadás és/vagy csavarónyomaték továbbítás tengelykapcsolón, szíjtárcsán fogaskeréken keresztül.
A tengely és a rászerelt gaprészek egymáshoz képesti mozgás szerint megkülönböztetünk:

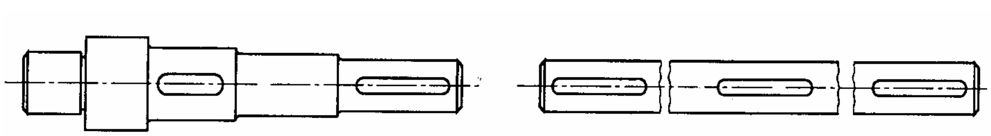
- ♦ forgó- vagy közlőtengelyt (a rászerelt alkatrészekkel együtt forog)
- ♦ álló- hordozótengelyt (a rászerelt forgó alkatrészekhez képest áll)

A tengelyek kialakításuk szerint lehetnek:

- ♦ egyenes tengelyek
  - sima (gyakorlatilag állandó keresztmetszetű)
  - vállas (lépcsős)
  - bütykös, excenteres
  - csőtengely
- ♦ görbített (könyökös) tengelyek
  - forgattyús
  - hajlékony (flexibilis)

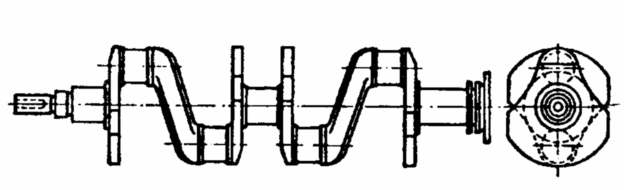
A tengelyek igénybevétele szerint lehetnek:

- ♦ csak hajlításra igénybevett (általában álló tengelyek)
- ♦ csak csavarásra igénybevett (gépkocsik kardán tengelye)
- ♦ hajlítás és csavarásra igénybevett (összetett igénybevétel)



a) b)

4-1. ábra. Egyenes tengelyek. a) vállas tengely, b) sima tengely



4-2. ábra. Forgattyús tengely

A tengelyek szerkezeti anyaga leggyakrabban acél (szénacél, ötvözött acél) vagy öntöttvas (pl. görbített forgattyús tengely vagy csőtengely).

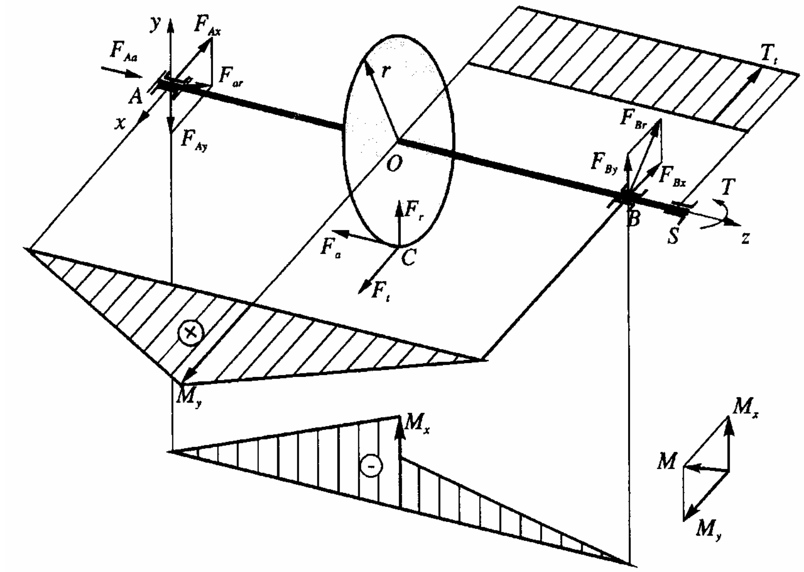
4.1. Egyenes tengelyek méretezése és ellenőrzése

A tengelyek méretezése több lépésben történik:

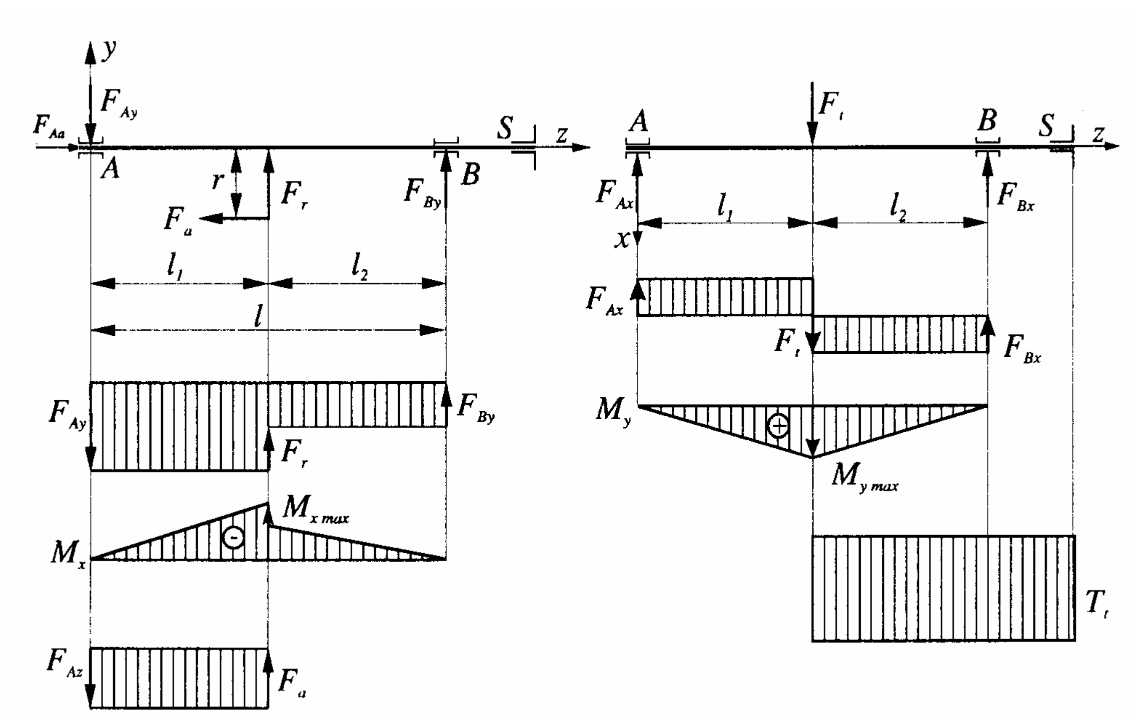
1. Vázlat készítés, hosszirányú méretek közelítő meghatározása.
2. Tengelyátmérők szakaszonkénti számítása vagy becslése
3. Tengely végleges kialakítása (hornyok, vállak stb.)
4. Tengely ellenőrzése kifáradásra, rugalmas alakváltozásra, kritikus fordulat-számra.
5. Az alkatrészrajz végleges elkészítése.

4.1.1. Tengelyek terhelése és igénybevétele

A tengelyek terhelései a rájuk szerelt forgó alkatrészektől származnak. Lehetnek erők, erőpárok (nyomatékok), a forgórészek súlya és a kiegyensúlyozatlanságból eredő tehetetlenségi erők. A terhelő (aktív) erők térbeli erőrendszert képeznek és a forgórészek és tengely érintkezési felületén („agy”) hatnak a tengelyre. A számítás egyszerűsítése végett ezeket koncentrált erőknek tekintjük, amelyek hatáspontja az agy, illetve a csapágy közepén helyezkedik el.



4-3. ábra. Tengely terhelése és az igénybevételi ábrák axonometrikus ábrázolása.



4-4. ábra. Tengely terhelése és az igénybevételi ábrák síkbeli modelljei.

Az aktív erőktől származó terhelés a támaszokon (csapágyakon) keresztül adódik át a gépágynak, illetve alapzatnak.

Az igénybevételi ábrák felrajzolásánál a tengelyt kéttámaszú tartónak tekintjük. A térbeli erőket három, egymásra merőleges összetevőre bontjuk. A hajlítónyomatékot először két egymásra merőleges síkban határozzuk meg, majd ezekből kiszámoljuk az eredő nyomatékot. Ezt illusztrálja a 4-3 és a 4-4 ábrákon látható példa.

A hajlítónyomaték eredője:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

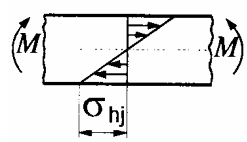
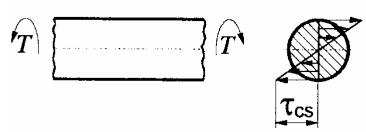
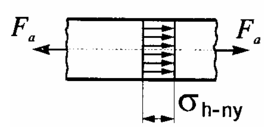
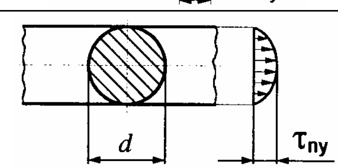
A megfelelő tranzverzális erők eredői:

$$F_r = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

A csavarónyomaték a teljesítményből és a tengely fordulatszámából, ill. szögsebességéből számítható: $T = \dfrac{P}{\omega}$

A legtöbb forgó tengely összetett igénybevételű (4-1. táblázat).

4-1. táblázat. Tengelyek igénybevétele

Igénybevétel	Feszültség	Feszültségeloszlás	A feszültség időbeni változása
Hajlítás	$\sigma_{hj} = \dfrac{M}{K}$		Forgó tengelyeknél mindig lengő.
Csavarás	$\tau_{cs} = \dfrac{T}{K_p}$		Legtöbb esetben lüktető, de kivételesen lengő is előfordulhat.
Húzás vagy nyomás	$\sigma_{h-ny} = \dfrac{F_a}{A}$		Lüktető, ritkán lengő.
Nyírás	$\tau_{ny} = \dfrac{F_T}{A}$		Lüktető, ritkán lengő.

A nyírófeszültség, valamint a húzó- vagy nyomófeszültség rendszerint elhanyagolható a hajlító- és csavarófeszültséghez viszonyítva.

4.1.2. Tengelyek méretezése

A hajlításból és csavarásból eredő összetett feszültséget redukált feszültséggel helyettesítve, fölírható:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{hj}^2 + \left(\frac{\sigma_{D(-1)}}{\tau_{D(0)}} \cdot \tau_{cs}\right)^2} \le \sigma_{meg}$$

A redukált feszültség kifejezhető a redukált nyomatékkal is:

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K} \le \sigma_{meg}$$

ahol a redukált nyomaték: $M_{red} = \sqrt{M_{hj}^2 + (\frac{\sigma_{D(-1)}}{2 \cdot \tau_{D(0)}} \cdot T_{cs})^2}$.

Ahol:

$\sigma_{D(-1)}$ a tengely anyagának próbapálcán mért kifáradási határa hajlításra, lengő terhelésnél (segédlet, 6. táblázat).

$\tau_{D(0)}$ a tengely anyagának próbapálcán mért kifáradási határa csavarásra, lüktető terhelésnél (segédlet, 6. táblázat).

A keresztmetszeti tényező kör keresztmetszetre: $K = \frac{d^3 \cdot \pi}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^3$

Ezt behelyettesítve, egy-egy tengelyszakasz átmérője kiszámítható:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{red}}{\sigma_{meg}}} .$$

A megengedett feszültség: $\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{D(-1)}}{s}$

Ahol:

s=3…5 biztonsági tényező (a viszonylag nagy értékkel a feszültséggyűjtő hatást vesszük figyelembe.

A tiszta csavaró igénybevételnek kitett tengelyek, illetve tengelyszakaszok átmérői:

$$\tau_{cs} = \frac{T}{K_p} \le \tau_{meg} \qquad \text{ahol} \qquad K_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} \approx 0{,}2 \cdot d^3$$

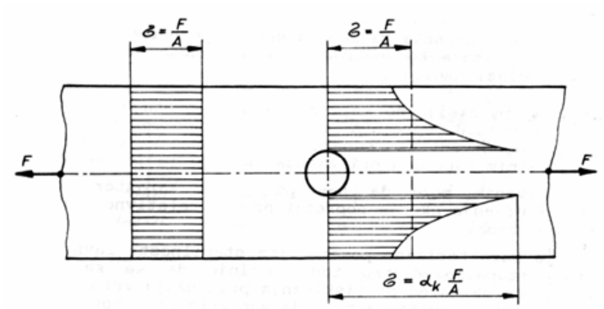
$$\tau_{meg} = \frac{T}{0{,}2 \cdot d^3} \qquad \text{innen} \qquad d = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot T}{\tau_{meg}}} .$$

A megengedett csavaró feszültség: $\tau_{meg} = \frac{\tau_D}{s}$

A biztonsági tényező értékére a számításoknak ebben a szakaszában viszonylag nagy értéket kell választani (s=10)

4.1.3. A tengely kialakítása és a feszültséggyűjtő hatás

A tengelyszakaszok átmérőinek meghatározása után kerül sor a tengely megszerkesztésére, minek után pontos értékeket kapunk az előzőleg csak megbecsült hosszméretekre, pontosítjuk a különböző átmérőjű szakaszok átmeneti formáit, a tengelyre szerelendő alkatrészek rögzítési módját (hornyok, furatok, bemetszések stb.). A tengelykeresztmetszet hirtelen változása minden esetben feszültséggyűjtő (növelő) hatást idéz elő. Az előzőekben adott képletek segítségével számított feszültségértékek a sima, állandó keresztmetszetű rudak esetében érvényesek.



4-5 ábra. Feszültséggyűjtő hatás

A valóságban viszont a tengelyek alakja legtöbbször összetett, több keresztmetszet változással (különböző váll kialakítások, furatok, hornyok stb.).
Az ilyen helyeken a feszültség nagysága és eloszlása jelentősen különbözik azoktól az értékektől, amelyek ott jelentkeznek, ahol semmilyen keresztmetszet-változás nincs.

A számított névleges feszültség σ , illetve τ értékéből kiindulva, a keresztmetszetben jelentkező legnagyobb feszültség értéke:

$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma$, illetve $\tau_{max} = \alpha_k \tau$,

ahol $\alpha_k = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma}$ - a feszültségtorlódás alaktényezője

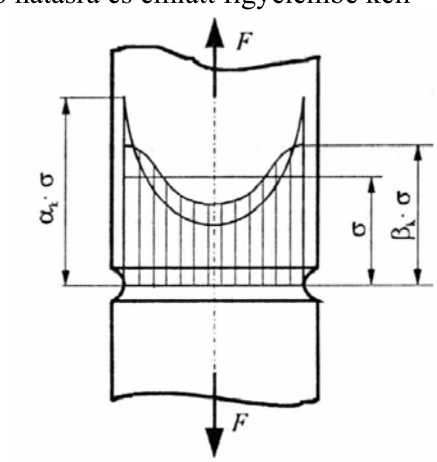
Az alaktényező értéke kizárólag az alkatrész geometriai jellemzőitől függ (a nagyobb és a kisebb keresztmetszet méretviszonya, az átmenet lekerekítési rádiusza stb.). Minél nagyobb a keresztmetszet hirtelen változása, a feszültségtorlódás annál kifejezettebb. A fokozatos keresztmetszet változás (átmenet) kisebb mértékű feszültségkoncentrációt eredményez (pl. nagyobb átmeneti sugár alkalmazása).
Az alaktényező számszerű értékeit diagramokból vagy táblázatokból kell kiolvasni egy-egy jellemző alakváltozáshoz és igénybevételhez (segédlet, 6. ábra). Megállapítható viszont, hogy nem minden anyag egyformán érzékeny a feszültséggyűjtő hatásra és emiatt figyelembe kell venni az anyagminőséget is. A gyakorlatban szilárdsági számításoknál az ún. **gátlástényező** β_k használatos, amely az anyag tulajdonságait is figyelembe veszi. Így a legnagyobb feszültség értéke (4-6. ábra):

$\sigma_{max} = \beta_k \sigma$

A gátlástényező β_k értéke kisebb mint a feszültséggyűjtő hatás alaktényező α_k értéke és a következő képlettel számítandó:

$\beta_k = (\alpha_k - 1)\, \eta_k + 1$

ahol : η_k –érzékenységi tényező (anyagfajtától függő). Ennek értékeit a segédletben található 5. ábrán lévő diagramról lehet leolvasni.

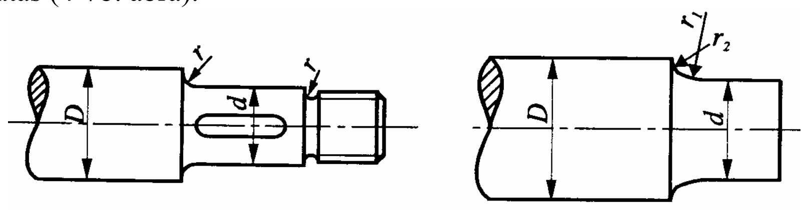


4-6 ábra. Gátlástényező

A fentiek értelmében a tengelyek kialakításánál ügyelni kell a következő irányelvek betartására:

- Kerülni kell a többszörös feszültséggyűjtő hatást a tengely azonos részén (pl. tengelyváll és reteszhorony)
- Lehetőség szerint törekedni kell, hogy a tengelyre szerelendő alkatrészek méretei és a támaszok (csapágyak) közötti távolság minél kisebb legyen.
- Lépcsős tengelyek esetében az átmérők viszonya D/d≅1,25...1,3 körül legyen és az átmenet lekerekítési sugara r≅d/20...d/16 legyen (4-7a. ábra).

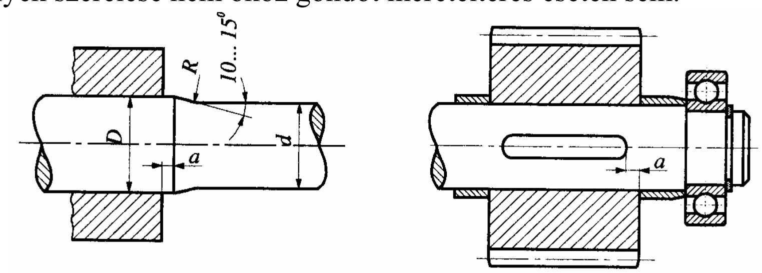
- Ha a lépcsőnek, ill. tengelyvállnak nincs axiális terhelése, akkor az átmenetet két sugárral alakítsuk ki ($r_1 \cong d/20$; $r_2 \cong d/5$), így jelentősen csökkenthető a feszültséggyűjtő hatás (4-7b. ábra).



a) b)

4-7. ábra. Lépcsős tengelyek átmenetei.

- A köszörült felületeknél az átmenetet korongkifutó-horonnyal kell ellátni. Legtöbbször csak a hengeres felületet kell köszörülni és ilyenkor a DIN 509 szerinti E alakú átmenetet alkalmazzuk. Amikor a vállat is köszörülni kell, akkor DIN 509 szerinti F alakot használjuk (lásd a segédlet 2. táblázatát).
- A vállnélküli átmérőváltozást kúpos és tóruszos átmenettel (R=d/5) alakítsuk ki, így a feszültséggyűjtő hatás jelentősen csökkenthető (4-8a. ábra).
- Tengelyirányú rögzítéshez csak a tengelyvégeken használjunk biztosító gyűrűt, mert a horony feszültséggyűjtő hatás forrása (4-8b. ábra).
- A reteszhorony mindig rövidebb legyen az agynál (4-8b. ábra). Ezáltal a távtartó perselyek szerelése nem okoz gondot méreteltérés esetén sem.



a) b)

4-8. ábra. Lépcsős tengelyek átmenetei.

4.1.4. Tengelyek szilárdsági ellenőrzése

A forgó tengely tipikus fárasztó igénybevételt szenved, ezért a biztonsági tényezőt (S_D) kifáradásra kell meghatározni a veszélyes keresztmetszetekben. A tengely részletes geometriai jellemzőinek ismeretében pontosan kiszámíthatók az egyes veszélyes keresztmetszetekben ébredő feszültségek. Ezt kell összehasonlítani a tengely kifáradási határértékével.
Arra az esetre, ha a tengely igénybevétele hajlítás (lengő) és csavarás (lüktető) a fáradásos töréssel szembeni biztonsági tényezők a következő képletekkel határozhatók meg:

- Hajlítás $$S_{Dhj} = \frac{\sigma_{D(-1)} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3}{\beta_{khj} \cdot \sigma_{hj}}$$
- Csavarás $$S_{Dcs} = \frac{\tau_{D(0)} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3}{\beta_{kcs} \cdot \tau_{cs}}$$

Ahol:

$\sigma_{D(-1)}$ a tengely anyagának próbapálcán mért kifáradási határa hajlításra, lengő terhelésnél

$\tau_{D(0)}$ a tengely anyagának próbapálcán mért kifáradási határa csavarásra, lüktető terhelésnél

$\xi_1<1$ mérettényező (értékei a segédletben találhatók),

$\xi_2<1$ megmunkálási tényező

ξ_3 felületi rétegállapot tényező ($\xi_3>1$ abban az esetben, ha valamilyen a felületi réteget javító kezelést alkalmaztunk, $\xi_3=1$, ha ilyen kezelés nem történt)

β_{khj} gátlástényező hajlításra

β_{kcs} gátlástényező csavarásra

Az összegzett biztonsági tényező:

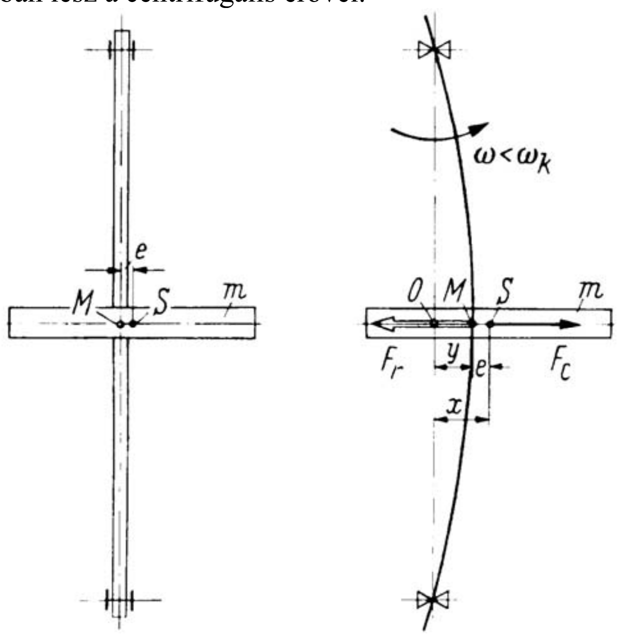
$$S_D = \frac{S_{Dhj} \cdot S_{Dcs}}{\sqrt{S_{Dhj}^2 + S_{Dcs}^2}}$$

A biztonsági tényező fárasztó igénybevételnél S_D=1,5…2 kell, hogy legyen.

4.1.5. Tengelyek kritikus fordulatszámai

A nagyfordulatszámú tengelyeknél (1500 min^{-1} felett) a tengely saját tömege és a tengelyre szerelt alkatrészek tömegei centrifugális erőt idéznek elő, ha a súlypontjuk nem esik pontosan a forgástengelyre. A gyakorlatban még gondos kiegyensúlyozás mellett sem lehet elérni azt, hogy a tengely súlypontja abszolút pontosan egybeessen a forgástengellyel. Ezért a legkisebb excentricitás is hajlító lengést idéz elő.

A hajlító lengések keletkezésének jelenségét vizsgáljuk meg egy sima tengely esetére amelyen m tömegű tárcsa helyezkedik el (4-8. ábra), ennek S súlypontja az e excentricitásnak megfelelő távolságra helyezkedik el a forgástengelytől. A tengely saját tömegét elhanyagoljuk. A tengely ω szögsebességgel történő forgásánál, az F_c centrifugális erő hatására a tengely y nagyságú rugalmas behajlása lép fel. Ez a rugalmas behajlás egy F_r visszahúzó rugóerőt idéz elő, amely egyensúlyban lesz a centrifugális erővel.



a) b)

4-8. ábra. A tengely hajlító lengése. a) nyugalmi állapot; b) forgás közben

A centrifugális erő értéke felírható, mint

$$F_c = m \cdot (e + y) \cdot \omega^2$$

A rugóerő pedig

$$F_r = c_{hj} \cdot y$$

ahol c_{hj} a rugómerevség (egységnyi behajlást létrehozó erő) N/mm –ben.

Az $F_r = F_c$ egyenletből következik:

$$c_{hj} \cdot y = m \cdot (e + y) \cdot \omega^2 , \qquad \text{illetve} \qquad y = \frac{m \cdot \omega^2}{c_{hj} - m \cdot \omega^2} \cdot e$$

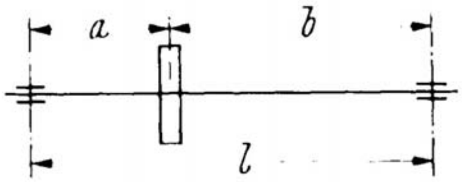
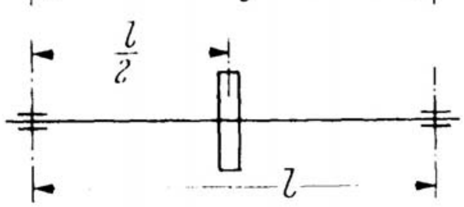
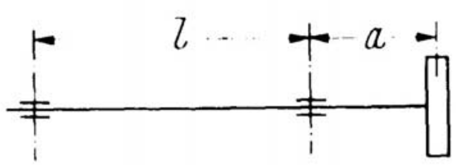
Látható, hogy az y behajlás értéke az e excentricitás mellett az ω szögsebességtől függ. Elméletileg y értéke végtelenül nagy lesz, amikor a nevezőben szereplő kifejezés értéke nulla lesz. Azt az ω_k szögsebesség értéket, amelynél a nevezőben szereplő kifejezés értéke nulla, kritikus szögsebességnek-, ill. az annak megfelelő fordulatszámot kritikus fordulatszámnak nevezzük.

$$c_{hj} - m \cdot \omega_k^2 = 0 \qquad \text{illetve} \qquad \omega_k = \sqrt{\frac{c_{hj}}{m}}$$

Nem szorul bővebb magyarázatra, hogy az $n_ü$ üzemi fordulatszám nem közelítheti meg az n_k kritikus fordulatszámot, mert ez a csapágyak és a tengely időelőtti tönkremeneteléhez vezet. Az is könnyen belátható, hogy a kritikusnál nagyobb fordulatszám a lengések megszűnéséhez vezet, viszont ügyelni kell arra, hogy a kritikus tartományon történő áthaladás megfelelő gyorsasággal történjen, ui. a nagy lengés amplitúdók kialakulása bizonyos időt igényel. Célszerű az $1{,}3 \cdot n_k > n_ü > 0{,}7 \cdot n_k$ megtartása.

A c_{hj} hajlító rugómerevség értéke annál nagyobb minél merevebb a tengely, azaz növelhető az átmérő növelésével és a hosszméretek csökkentésével ill. a csapágyazás helyének célszerű megválasztásával. A jellemző elrendezések és a számításhoz használatos képletek a 4-2. táblázatban találhatók.

4-2. táblázat. Tengelyek hajlító rugómerevsége

Elrendezés	Képlet
	$c_{hj} = \dfrac{3 \cdot E \cdot I \cdot l}{a^2 \cdot b^2}$
	$c_{hj} = \dfrac{48 \cdot E \cdot I}{l^3}$
	$c_{hj} = \dfrac{3 \cdot E \cdot I}{a^2 \cdot (a + l)}$

Példa:
Egy sima, d=40 mm átmérőjű, képzeletben tömegnélküli tengelyen egy m=29,6 kg tömegű tárcsa (D=400 mm, b=30mm) helyezkedik el szimmetrikusan a csapágyak között. A csapágyak távolsága l=600 mm. A tengely anyagának rugalmassági modulusa E=2,05·10^5 N/mm^2.

A másodrendű nyomaték

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 40^4}{64} = 12{,}57 \cdot 10^4\, mm^4$$

A 4-2. táblázat szerint

$$c_{hj} = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3} = \frac{48 \cdot 2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 12{,}57 \cdot 10^4}{600^3} = 5730 \text{ N/mm},$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c_{hj}}{m}} = \sqrt{\frac{5730}{29{,}6 \cdot 10^{-3}}} = 440 \text{ s}^{-1},$$

$$n_k = \frac{60}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_k = 4200 \text{ min}^{-1}$$

Ha a tengely saját tömegét is figyelembe vesszük, a probléma összetettebbé válik. Egy sima, saját súlyával terhelt tengely lengésvizsgálatából kiderül, hogy több kritikus fordulatszáma is van. Így beszélhetünk elsőrendű kritikus fordulatszámról, amelynek legkisebb az értéke, majd másodrendű-, harmadrendű-, stb. kritikus fordulatszámokról. Mivel a másodrendű kritikus fordulatszám értéke többszöröse az elsőrendű kritikus fordulatszám értékének, a gyakorlatban legtöbbször elegendő az elsőrendű kritikus fordulatszámot meghatározni. A lengéstanban alkalmazott parciális differenciálegyenletek megoldásával az elsőrendű kritikus szögsebességet adó képlethez jutunk

$$\omega_{k1} = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} \quad ,$$

ha behelyettesítjük a

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad , \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\omega_{k1} = \frac{d}{l^2}\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \; .$$

Példa:
Meg kell határozni egy sima acéltengely elsőrendű kritikus fordulatszámát.
Ismertek a következő adatok: d=40 mm, l=600 mm, E=2,05·10^5 N/mm^2 és az anyagsűrűség ρ=7,85 kg/dm^3 =7,85·10^{-9} Ns^2/mm^4.

A fenti képlet alkalmazásával

$$\omega_{k1} = \frac{d}{l^2}\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{40}{600^2}\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{2{,}05 \cdot 10^5}{7{,}85 \cdot 10^{-9}}} = 1400 \text{ s}^{-1}$$

$$n_{k1} = \frac{60}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{k1} = 13400 \text{ min}^{-1}.$$

A gyakorlatban a tengely saját tömegét is és a ráhelyezett alkatrészek tömegét is figyelembe kell venni. Ebben az esetben az előző két eset egybevetéséből kell meghatározni a kritikus fordulatszámokat. A feladat viszonylag jó közelítéssel megoldható Dunkerley empirikus képletével:

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_{k1}^2} + \frac{1}{\omega_{kA}^2} + \frac{1}{\omega_{kB}^2} + \frac{1}{\omega_{kC}^2} + \cdots$$

ahol ω_{k1} a sima tengely kritikus szögsebessége (sajátértéke)

ω_{kA}, ω_{kB}, ω_{kC} a tengelyre szerelt alkatrészek egyenkénti kritikus szögsebessége.

A Dunkerley képlettel kapott sajátértékek körülbelül 4 %-kal alacsonyabbak az egzakt módszerekkel kapott értékeknél.