Hatodik előadás (Fizika)

Egy ω szögsebességgel forgó test esetén a kinetikus energia megegyezik a forgási energiával. Ez lehetőséget ad a kétféle energia összehasonlítására.

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, (r\omega)^2$$
$$E_f = \frac{1}{2}\, m\, r^2\, \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta\, \omega^2.$$

Itt Θ a forgási tehetetlenség vagy tehetetlenségi nyomaték. Egyetlen m tömegű pontra, amely a forgástengelytől r távolságra van értéke $\Theta = m\, r^2$. Kiterjedt merev testek tehetetlenségi nyomatékát összegzési eljárások következetes alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$\Theta = \int r^2 dm,$$

amely általában integrálás. A tehetetlenségi nyomaték a tömeghez hasonló, de annál sokkal bonyolultabb mennyiség. Általában egy tetszőleges test Θ-ja 9 db számadatot jelent.

Az erő önmagában nem elég a szöggyorsításhoz, ugyanis ha az erővektor meghosszabbítása átmegy a forgástengelyen nem okoz szöggyorsulást. Másképp fogalmazva ebben az esetben az erő karja nulla. Az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságát nevezzük az erő karjának. A szöggyorsulás feltétele $K > 0$.Az erő karja $K = L\, \sin(\alpha)$. A forgatónyomaték nagysága pedig $M = F L \sin(\alpha)$. Vektoriálisan:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

A munkatétel forgásra

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \Theta\, {\omega_2}^2 - \frac{1}{2} \Theta\, {\omega_1}^2$$

A dinamikai egyenlet

Az előadáson levezetett dinamikai egyenlet, csak szimmetrikus testek szimmetriatengely körüli forgásakor igaz. A tengelynek rögzítettnek kell lennie, vagy önmagával párhuzamosan kell eltolódnia. Ekkor a dinamikai egyenlet alakja a következő:

$$\sum_i M_i = \Theta\, \ddot{\varphi}$$

Az impulzus változás analógiájaként általánosabb egyenletet kapunk, melynek alakja a következő:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \dot{\boldsymbol{p}} \quad \leftrightarrows \quad \sum_i \boldsymbol{M}_i = \dot{\boldsymbol{L}}.$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p},$$

melyben $\boldsymbol{L}$ ún. impulzusmomentum vektor.

A Steiner tétel

Steiner tétel: Ha ismerjük egy test Θ-ját a szimmetriatengelyre vonatkoztatva, akkor bármely másik b távolságra lévő, a szimmetriatengellyel párhuzamos másik tengelyre is kiszámolhatjuk a következő módon:

$$\Theta^* = \Theta + mb^2$$

A forogva haladó test energiája

Ha a pillanatnyi forgástengelyt választjuk forgástengelynek a Steiner-tétel alapján egy forogva haladó korong összenergiája:

$$E = \frac{\Theta^* \omega^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,m\,R^2\,\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}\,m\,v^2$$

Kissé általánosabban:

$$E = \frac{(\Theta + m\,R^2)\,\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\Theta + m\,R^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

Az impulzusmomentum megmaradás törvénye

Zárt rendszerben a külső erők forgatónyomatéka zérus, ezért:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \rightarrow \boldsymbol{L} = \text{áll}$$

Zárt mechanikai rendszer impulzusmomentuma időben állandó! Homogén tömegeloszlású, szimmetrikus testek szimmetriatengely körüli forgásakor:

$$|\boldsymbol{L}| = \Theta\omega,$$

Ezért bizonyos esetekben a megmaradási tétel matematikai alakja a következő:

$$\Theta_1\omega_1 + \Theta_2\omega_2 \ldots \Theta_i\omega_i = \Theta_1\Omega_1 + \Theta_2\Omega_2 \ldots \Theta_i\Omega_i$$

A megmaradási tétel megjelenése a mindennapi életben:

- Tigrisbukfenc, szaltó
- Jégtáncos tengely körüli forgása
- Helikopter hátsó rotorja
- Örvény