Fizika

Szabó István PhD

PTE MIK

2019.

Az SI egységrendszer

alapmennyiségek:

$$
\begin{aligned}
\text{hosszúság } [\mathrm{l}] &= [\mathrm{m}] \\
\text{tömeg } [\mathrm{m}] &= [\mathrm{kg}] \\
\text{idő } [\mathrm{t}] &= [\mathrm{s}] \\
\text{elektromos áram } [\mathrm{I}] &= [\mathrm{A}] \\
\text{abszolút hőmérséklet } [\mathrm{T}] &= [\mathrm{K}] \\
\text{anyagmennyiség } [\mathrm{n}] &= [\mathrm{mol}] \\
\text{fényerősség } [\mathrm{I}_v] &= [\mathrm{cd}]
\end{aligned}
$$

kiegészítő mennyiségek: síkszög (radián), térszög (szteradián)
leszármaztatott mennyiségek: $[v] = [\mathrm{m}]/[\mathrm{s}]$, $[Q] = [\mathrm{A}][\mathrm{s}]$

A Newton-féle tér, idő fogalom

Newton: Az események az abszolút nyugvó térben és időben zajlanak.
A tér legfontosabb tulajdonsága, hogy: homogén és izotróp.
Az idő legfontosabb tulajdonsága, hogy: homogén és folytonos.
Egy test mozgása csak egy másik testhez viszonyítva írható le.

- Referencia test (RT)
- Vonatkoztatási rendszer (RT+koordinátarendszer)
- Inerciarendszer (lásd később)

Kinematika

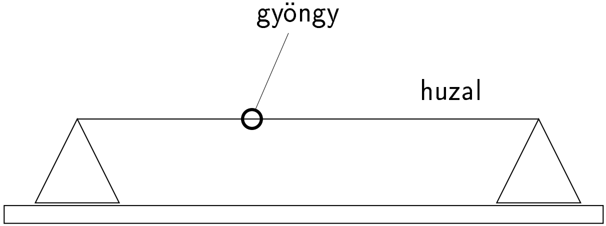
A kinematika alapkérdése a következő: Hol van a test és mekkora a sebessége? Ha ezt minden időpontban ismerjük, akkor írjuk le a test mechanikai állapotát!

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (x(t),\, y(t),\, z(t)) && \text{a pozíció} \\ \boldsymbol{v} &= (\dot{x}(t),\, \dot{y}(t),\, \dot{z}(t)) && \text{a pozíció változása} \end{aligned}$$

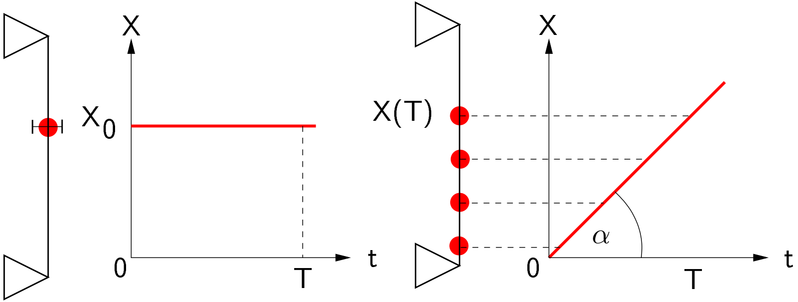
A kinematika alapfeladata az anyagi pont kezdeti pozíciójának és sebességének ismeretében minden lehetséges későbbi mechanikai állapotának meghatározása!

Egydimenziós világ

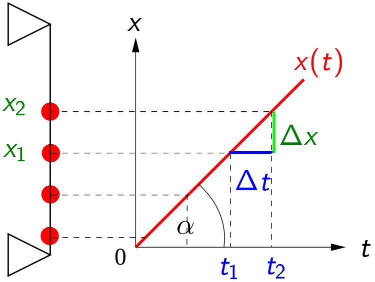
Rendszer: anyagi pont (kiterjedés nélküli, tömeggel rendelkező pont) Kényszer: a részecske csak egy egyenes mentén mozoghat! Az egydimenziós világ mechanikai állapota kétdimenziós (x, v)!



kinematika



Egyensvonalú egyenletes mozgás



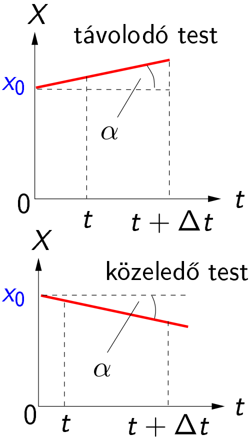
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan(\alpha)$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$x(t) = vt \text{ (origón átmenő egyenes)}$$

$$y(x) = ax + b$$

Egyenesvonalú egyenletes mozgás

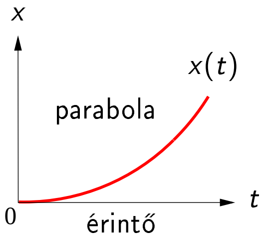


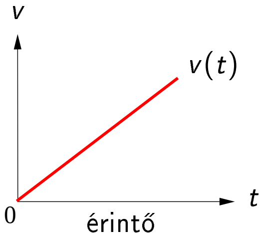
$$x(t)_+ = x_0 + vt$$
$$x(t)_- = x_0 - vt$$

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás az egyetlen, ahol az átlagos sebesség ($\langle v \rangle$) és a pillanatnyi sebesség (v) azonos! Az átlagos sebességet az
ún. differenciahányados határozza meg:

$$\langle v \rangle = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Szabadesés





A Galilei-féle négyzetes úttörvény

$$x(t) = \frac{g}{2} t^2$$

A mérések szerint a szabadon eső test sebessége lineárisan növekszik, ha a közegellenállás csekély!

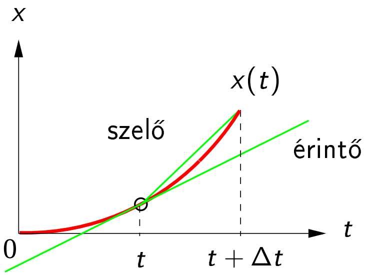
$$v(t) = g\, t$$

Változási gyorsaság

Newton és Leibnitz szerint a parabolához húzott érintő meredeksége adja meg a pillanatnyi sebességet! Egy $f(t)$ függvény adott t' pontbeli érintőjének meredekségét a függvény differenciálhányadosa szolgáltatja.

$$\left.\frac{d\,f(t)}{dt}\right|_{t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \left.\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right|_{t'}$$

Szabadesés



A pillanatnyi sebesség az átlagos sebesség határértékeként értelmezhető:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{g}{2}(t)^2}{\Delta t}$$

$$v = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{t^2} + 2t\cancel{\Delta t} + \Delta t^{\cancel{2}} - \cancel{t^2}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$v = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = g\,t$$

Szabadon eső test gyorsulása

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle &= \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\
v(t) &= g\,t \\
a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\
a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - gt}{\Delta t} = \frac{\cancel{gt} + g\cancel{\Delta} t - \cancel{gt}}{\cancel{\Delta} t} = g
\end{aligned}$$

A g nem más mint a sebesség változási gyorsasága: $g = \dot{v}$

Kinematikai egyenletek

A követkző egyenletek, egydimenziós, konstans gyorsulású mozgásokra vonatkoznak. A bennük szereplő x_0, v_0 mennyiségeket kezdeti feltételeknek nevezzük. A kezdeti feltételek ismeretében x és v bármilyen későbbi időpontban meghatározható!

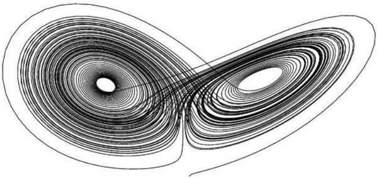
$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a\,t \\ x(t) &= x_0 + v_0\,t + \frac{a}{2}t^2 \\ v^2 &= {v_0}^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

Ha a gyorsulás változik az időben (pl. harmonikus rezgőmozgás) az egyenletek nem alkalmazhatók!

Determinizmus és kauzalitás

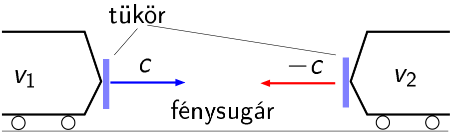
Laplace: „Adjátok ide az összes x_0-t, v_0-t megjósolom a világ jövőjét!" Tehát Laplace szerint a világ determinisztikus!

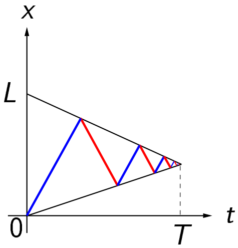
Pillangó effektus



Alapvető probléma ezzel az, hogy milyen pontossággal ismerjük a kezdeti feltételeket, és ez a bizonytalanság milyen hibát okoz. Évszázadokig úgy gondolták ez a hiba lineáris. 1960-as évektől kezdve egyre több olyan rendszert írtak le, ahol piciny hiba a kezdeti feltételekben óriási bizonytalanságot okoz a rendezer működésében. Ez az ún. pillangó effektus. Ezek a rendszerek determinisztikusak, mégis működésük a véletlenszerű működéshez hasonló.

Végtelen szakaszokból álló mozgás

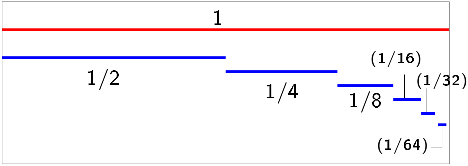




A mértani sorozat

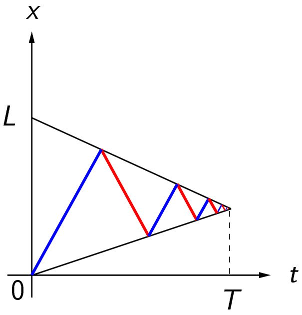
$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \quad \ldots \quad a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad\qquad q = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Végtelen szakaszokból álló mozgás



$$S_n^{\nearrow} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n^{\searrow} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = \frac{b_1}{1-q}$$

Végtelen szakaszokból álló mozgás

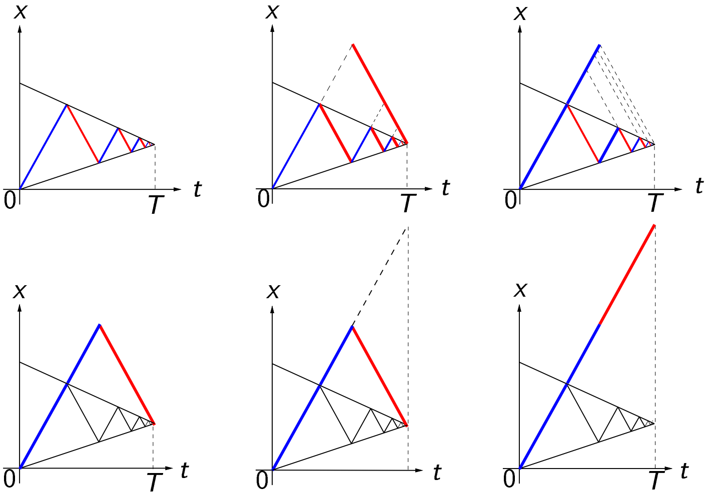
$$a_1 = \frac{L}{v_2 + c}\sqrt{1 + c^2} \quad b_1 = \frac{L}{v_2 + c}\frac{c - v_1}{c + v_1}\sqrt{1 + c^2}$$

$$q = \frac{(v_2 - c)(v_1 - c)}{(v_2 + c)(v_1 + c)}$$

$$s_k^{\nearrow} = q^{\frac{k-1}{2}} a_1 \quad k = 1, 3, 5, 7$$

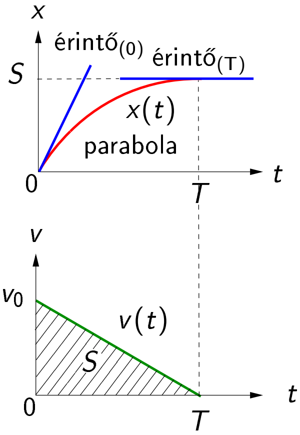
$$s_l^{\searrow} = q^{\frac{l-2}{2}} b_1 \quad l = 2, 4, 6, 8$$

Végtelen szakaszokból álló mozgás



Nullára fékezés állandó gyorsulással

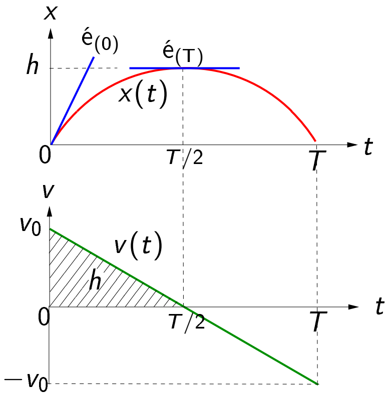
Adott a lassulás mértéke $(-a)$ és a kezdeti sebesség v_0. Célunk a kinematikai jellemzők T (fékezési idő) és S (fékút) meghatározása!



$$
\begin{aligned}
é_0 &= v_0\, t & é_T &= S \\
x(t) &= v_0\, t - \frac{a}{2}\, t^2 \\
v(t) &= v_0 - a\, t \\
0 &= v_0 - a\, t \\
T &= \frac{v_0}{a} \\
S &= \frac{v_0\, T}{2} = \frac{v_0^2}{2a}
\end{aligned}
$$

Függőleges hajítás

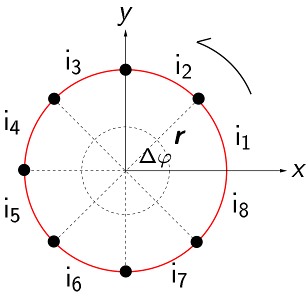
Adott a gyorsulás mértéke ($g \approx 9,81$ m/s^2) és a kezdeti sebesség v_0. Célunk a kinematikai jellemzők T (fékezési idő) és h (emelkedés) meghatározása!



$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0\, t - \frac{g}{2}\, t^2 \\
v(t) &= v_0 - g\, t \\
0 &= v_0 - g\, t \\
T/2 &= \frac{v_0}{g} \\
h &= \frac{v_0\, T}{2} = \frac{v_0^2}{2g}
\end{aligned}
$$

Egyenletes körmozgás

Az egyenletes körmozgást végző anyagi pont egyenlő idők alatt egyenlő ívhosszakat fut be: $i_1 = i_2 = i_3 \ldots i_8$ ha $t_1 = t_2 = t_3 \ldots t_8$. Egy teljes körülfordulás idejét T periódusidőnek nevezzük. A periódusidő reciproka a frekvencia $f = \frac{1}{T}$. Mindkettő mennyiség a mozgás során állandó.



a

$$\varphi = \frac{\text{ívhossz}}{\text{sugár}} = \frac{\mathrm{i}}{r}\ [\mathrm{rad}]$$

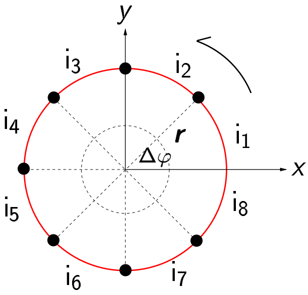
$$\frac{\varphi}{t} = \text{állandó} = \langle\omega\rangle,\ \frac{[\mathrm{rad}]}{[s]}$$

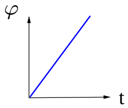
$$\langle\omega\rangle = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Egyenletes körmozgás

Az egyenletes körmozgást végző anyagi pont szögelfordulása az eltelt idővel egyenesen arányos: $\varphi \sim t$, így szögsebessége állandó.





$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \\
\omega &= \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt} \\
\ddot{\varphi}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \\
\beta = \ddot{\varphi}(t) &= \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}
\end{aligned}
$$

Egyenletes körmozgás

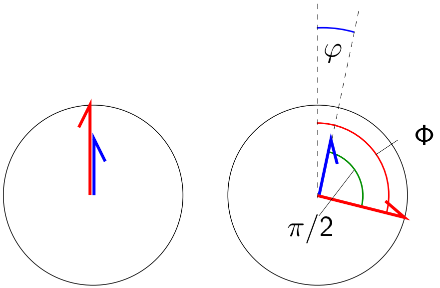
$$\begin{array}{rcl} & \varphi & \text{szögkoordináta [rad]} \\ \dot{\varphi}(t) & = & \omega \qquad \text{szögsebesség} \quad [\text{rad}]/[\text{s}] \\ \ddot{\varphi}(t) & = & \dot{\omega} = \beta \qquad \text{szöggyorsulás} \quad [\text{rad}]/[\text{s}]^2 \end{array}$$

Analógia az egydimenziós mozgás és a körmozgás között:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & \rightleftarrows & \varphi(t) \\ v = \dot{x}(t) & \rightleftarrows & \dot{\varphi}(t) = \omega \\ a = \ddot{x}(t) & \rightleftarrows & \ddot{\varphi}(t) = \beta \\ \dot{v} & \rightleftarrows & \dot{\omega} \end{array}$$

Egyenletes körmozgás

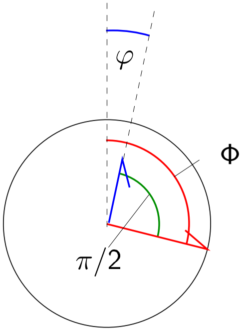
Hagyományos (analóg) óránk delet mutat. Mennyi idő múlva lesznek a mutatók éppen merőlegesek egymásra?



$$\Phi - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega\, t - \omega\, t = \frac{\pi}{2}$$

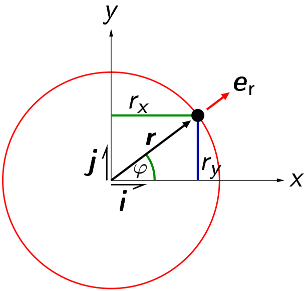
Egyenletes körmozgás



$$\begin{aligned}
\Phi - \varphi &= \frac{\pi}{2} \\
\Omega\, t - \omega\, t &= \frac{\pi}{2} \\
\frac{2\cancel{\pi}}{T_{\mathrm{N}}}\, t - \frac{2\cancel{\pi}}{T_{\mathrm{k}}}\, t &= \frac{\cancel{\pi}}{2} \\
t = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{T_{\mathrm{N}}} - \frac{2}{T_{\mathrm{k}}}} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{60 \cdot 60} - \frac{2}{12 \cdot 60 \cdot 60}} \\
t = \frac{1}{\frac{1}{15 \cdot 60} - \frac{1}{3 \cdot 60 \cdot 60}} &= \frac{10800}{12 - 1} \\
t = \frac{10800}{11} &= 981,8181\,\mathrm{s} \\
t &\approx 16,36\,\mathrm{perc}
\end{aligned}$$

A kerületi sebességvektor

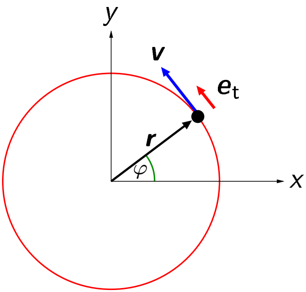
A szögelfordulás, a szögsebesség nem jellemzi maradéktalanul a körmozgást. Meg kell határoznunk a körmozgást végző test kerületi sebességvektorát. Ennek komponenseit felírhatjuk Descartes-féle koordinátarendszerben, melynek ortogonális bázisvektorai: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ egységvektorok.



$$
\begin{aligned}
r_x &= r\cos(\varphi)\ ;\ r_y = r\sin(\varphi) \\
\boldsymbol{r} &= r\cos(\varphi)\,\boldsymbol{i} + r\sin(\varphi)\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{r} &= r\,\underbrace{\{\cos(\varphi)\,\boldsymbol{i} + \sin(\varphi)\,\boldsymbol{j}\}}_{\boldsymbol{e}_r} \\
\boldsymbol{r} &= r\,\boldsymbol{e}_r \\
\sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} &= \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = 1
\end{aligned}
$$

A kerületi sebességvektor

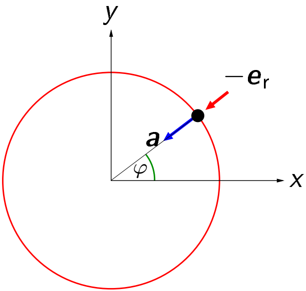
A kerületi sebességvektor nagysága $r\omega$, iránya pedig a pályagörbe érintőjének az irányába mutat.



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\,\cos(\omega\, t)\,\boldsymbol{i} + r\,\sin(\omega\, t)\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{r} &= r\,\{\cos(\omega\, t)\,\boldsymbol{i} + \sin(\omega\, t)\,\boldsymbol{j}\} \\
\boldsymbol{r} &= r\,\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} = r\omega\,\underbrace{\{-\sin(\omega\, t)\,\boldsymbol{i} + \cos(\omega)\,\boldsymbol{j}\}}_{\boldsymbol{e}_t} \\
\boldsymbol{v} &= r\omega\,\boldsymbol{e}_t \\
v &= r\,\omega
\end{aligned}
$$

A kerületi sebességvektor

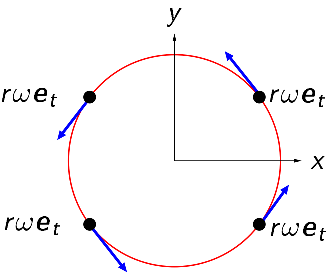
Bár a kerületi sebességvektor nagysága állandó, iránya minden pillanatban más és más: $\boldsymbol{e}_t(t)$. A kerületi sebességvektor változása miatt az egyenletes körmozgás gyorsuló mozgás. A gyorsulásvektor a pályagörbe középpontja felé mutat.

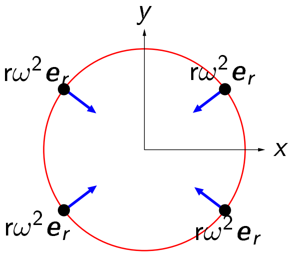


$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\,\{\cos(\omega\,t)\,\boldsymbol{i} + \sin(\omega\,t)\,\boldsymbol{j}\} \\
\boldsymbol{r} &= r\,\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} = r\omega\,\underbrace{\{-\sin(\omega\,t)\,\boldsymbol{i} + \cos(\omega)\,\boldsymbol{j}\}}_{\boldsymbol{e}_t} \\
\boldsymbol{v} &= r\omega\,\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}} = r\omega^2\,\underbrace{\{-\cos(\omega\,t)\,\boldsymbol{i} - \sin(\omega)\,\boldsymbol{j}\}}_{(-\boldsymbol{e}_r)} \\
\boldsymbol{v} &= -r\omega^2\,\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}
$$

A kerületi sebességvektor

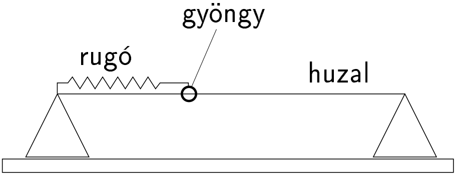
Az eredményeink összefoglalása két ábrán:





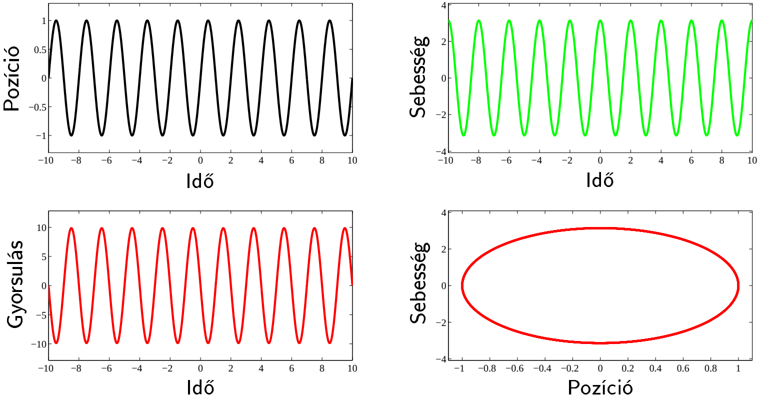
Harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgást végző test pozíciója az időnek színuszos vagy koszínuszos függvénye: $x(t) = A\sin(\omega\, t)$ vagy $x(t) = A\cos(\omega\, t)$. $A = x_{\mathrm{max}}$ és $\omega = 2\pi f$ mennyiségek a mozgás során állandók.



Harmonikus rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgás jellemző függvényei:



Harmonikus rezgőmozgás

Az egyenletes körmozgást végző anyagi pont a kör átmérőjére vetítve harmonikus rezgőmozgást végez. A sebesség- és gyorsulásvektorok vetületei megadják a harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényeit:

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{A}_{x_{max}} \sin(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{fázisszög}}) \\ v(t) &= \underbrace{A\omega}_{v_{max}} \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= -\underbrace{A\omega^2}_{a_{max}} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

A tiszta gördülés

Tapasztalat szerint homokban vagy földúton a motor vagy kerékpár abroncsa éles mintázatot hagy maga után. Ebből arra következtethetünk, hogy az abroncs és a talaj között relatív sebességkülönbség nincs. Ezt tiszta gördülésnek nevezzük.

A tiszta gördülés

Egy henger tiszta gördülése síkon leírható két mozgás eredőjeként:
Az első mozgás a középpont transzlációja a talajjal párhuzamosan.
A második mozgás a szimmetriatengely körüli forgás.