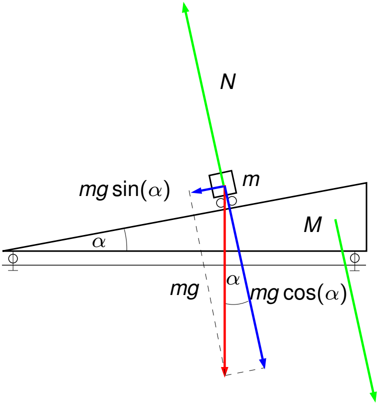
Fizika

Szabó István PhD

PTE MIK 2019.

A lejtő mint kényszer

A lejtő egy ún. egyszerű gép. A következő problémában először a lejtőt rögzítjük, és egy *m* tömegű test súrlódás nélkül lecsúszik rajta.



A lejtő mint kényszer

A mozgásegyenletek a következők:

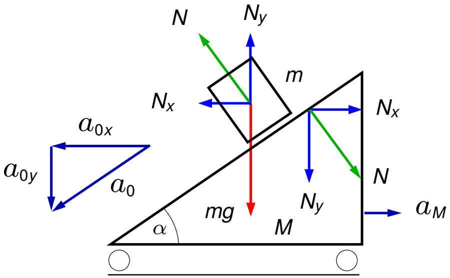
$$mg\sin(\alpha) = m\,a \quad (1)$$
$$mg\cos(\alpha) = N \quad (2)$$
$$\cancel{m}g\sin(\alpha) = \cancel{m}\,a$$

Ha súrlódó a lejtő felülete:

$$mg\sin(\alpha) - \mu\,N = m\,a \quad (1)$$
$$\cancel{m}g\sin(\alpha) - \mu\,\cancel{m}g\cos(\alpha) = \cancel{m}\,a \quad (2)$$
$$a = g\sin(\alpha) - \mu\,g\cos(\alpha)$$

A lejtő mint kényszer

Ha a lejtő rögzítését feloldjuk, előző meggondolásaink nem lesznek többé érvényesek: $a \neq g \sin(\alpha)$ és $N \neq mg \cos(\alpha)$!



A lejtő mint kényszer

A mozgó lejtőre és a lecsúszó testre vonatkozó mozgásegyenletek a következtők:

$$mg - N_y = m\,a_{0y} \tag{1}$$
$$-N_x = m\,(a_M - a_{0x}) \tag{2}$$
$$N_x = M\,a_M \tag{3}$$

$$mg - N\cos(\alpha) = m\,a_0\sin(\alpha) \tag{1}$$
$$-N\sin(\alpha) = m\,(a_M - a_0\cos(\alpha)) \tag{2}$$
$$N\sin(\alpha) = M\,a_M \tag{3}$$

A lejtő mint kényszer

Az egyenletrendszer megoldása alapján a következő eredményekre jutunk:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{g\sin(\alpha)\,(m+M)}{m\sin(\alpha)^2+M}, \\ a_M &= \frac{mg\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{m\sin(\alpha)^2+M}, \\ N &= \frac{Mmg\cos(\alpha)}{m\sin(\alpha)^2+M}. \end{aligned}$$

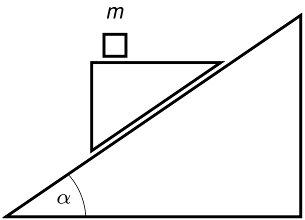
A lejtő mint kényszer

Diszkusszió: Ha az M tömegű lejtő tömege sokkal nagyobb mint m, határértékben vissza kell kapnunk a rögzített lejtőre érvényes eredményeket!

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{g\sin(\alpha)\left(\frac{m}{M}+1\right)}{\frac{m}{M}\sin(\alpha)^2+1} = g\sin(\alpha) \\
a_M &= \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{mg\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{m\sin(\alpha)^2+M} = 0 \\
N &= \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{mg\cos(\alpha)}{\frac{m}{M}\sin(\alpha)^2+1} = mg\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

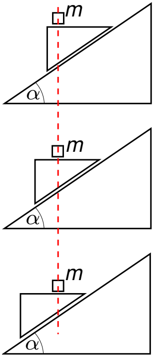
A lejtő mint kényszer

Tekintsük a következő két lejtőből összeállított rendszert. Hogy mozog a m tömegű test, ha a nagy lejtő rögzített és a felületek súrlódásmentesek?



A lejtő mint kényszer

A *m* tömegű test csak függőlegesen süllyed, mert vízszintes irányban nem hat rá erő!



A lejtő mint kényszer

A kényszerfeltételt matematikailag így fejezhetjük ki:

$$\sin(\alpha) = \frac{a_m}{a_M}$$

A tömeg

Newton második axiómájából kiindulva a tömeg a test gyorsítással szembeni ellenállásának mértéke. Ez azt jelenti, hogy két test közül annak a testnek nagyobb a tömege, amelyiket ugyan akkora erő, ugyan annyi idő alatt kisebb sebességre gyorsít fel. Másképpen fogalmazva két test közül annak nagyobb a tömege, amelynek azonos mértékű gyorsításához nagyobb erő szükséges.
Azonban a testeknek van egy jól ismert másik hatása a gravitációs vonzás. Két m_1 és m_2 tömegű test között fellépő gravitációs vonzást a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\boldsymbol{F}_{\text{grav}} = -\gamma \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \, \hat{\boldsymbol{r}}$$

A tömeg

ahol γ az ún. gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$. A mínusz előjel azt fejezi ki, hogy a kölcsönhatás mindig vonzásban nyilvánul meg.
A $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ az egyik test felől a másikba mutató egységnyi abszolút értékű vektor. Ha a Föld felületétől nem vagyunk túl távol, akkor az előző egyenletet a következő alakba írhatjuk:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{neh}} = \boldsymbol{G} = m_{\mathrm{grav}}\,\boldsymbol{g},$$

ahol

$$|\boldsymbol{g}| = \frac{\gamma\, M_{\mathrm{Föld}}}{R_{\mathrm{Föld}}} \approx 9,8\,\mathrm{N/kg}.$$

Itt $M_{\mathrm{Föld}}$ a Föld tömege, $R_{\mathrm{Föld}}$ a Föld sugara. Ez utóbbi egyenletben megjelent tömeget ún. gravitáló tömegnek nevezzük.

A tömeg

A Föld nehézségi erőterében mozgó testre vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\cancel{m_{\text{teh}}}\, a = \cancel{m_{\text{grav}}}\, g$$

A tapasztalat szerint – ha a közegellenállástól eltekintünk – a Föld gravitációs terében minden test azonos gyorsulással mozog $a = g$ amiből az következik, hogy $m_{\text{teh}} = m_{\text{grav}}$. Azaz a tehetetlen tömeg pontosan megegyezik a gravitáló tömeggel. Eötvös Loránd mutatta ki először, hogy ez az egyezés igen pontos.

A munka, ernergia, teljesítmény

Tegyük fel, hogy egy test, állandó erő hatására gyorsul! Írjuk fel a harmadik kinematikai egyenletet $v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$ a következő alakban:

$$
\begin{aligned}
{v_2}^2 &= {v_1}^2 + 2a(x_2 - x_1) \\
{v_2}^2 - {v_1}^2 &= 2\underbrace{\frac{F}{m}}_{a}\Delta x \qquad \left(\times\frac{m}{2}\right) \\
\underbrace{\frac{m{v_2}^2}{2}}_{E_2} - \underbrace{\frac{m{v_1}^2}{2}}_{E_1} &= \underbrace{F \cdot \Delta x}_{W}
\end{aligned}
$$

A munka, ernergia, teljesítmény

ahol E-t transzlációs kinetikus energiának (röviden kinetikus energiának), W-t pedig a munkának nevezzük. Az energia a test állapotára, míg a munka két állapt közötti folyamatra jellemző! Az előző egyenletünk tömör megfogalmazása pedig

$$\Delta E = W.$$

Ezt munkatételnek nevezzük! A munkatétel jelentősége abban rejlik, hogy segítségével bonyolult problémák egyszerűen kezelhetők.

A munka számítása

Ha egy test erőhatás következtében elmozdul munkavégzésről beszélünk. A munkavégzés során az egyik test által a másiknak átadott energiát munkának nevezzük:

$$W = F\Delta x.$$

Ez a képlet csak akkor alkalmazható, ha az erő a folyamat során végig állandó és az erő és az elmozdulás vektorok párhuzamosak egymással.
A munka előjeles skalár, mértékegysége Nm=1J.

A munka számítása

A munka kissé általánosabb kiszámítását teszi lehetővé a következő definíció:

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = |F| \cdot |\Delta r| \cdot \cos(\alpha) \, .$$

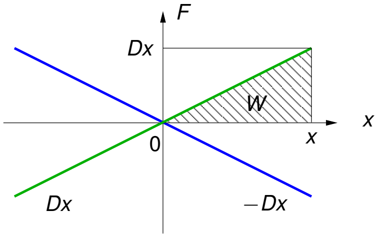
Ekkor a munkát az erő és az elmozdulás vektorok skaláris szorzataként értelmezzük. A képlet akkor alkalmazható, ha a vektorok α szöget zárnak be egymással de az erő nagysága a mozgás során nem változik. Ha az eredő erőt ábrázoljuk a pozíció függvényében, a grafikon alatti terület számértékileg megadja a végzett munkát!

A rugó megfeszítéséhez szükséges munka

Egy ideális rugó által kifejtett erő:

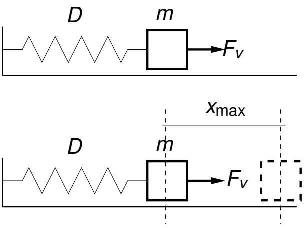
$$F(x) = -Dx$$

Ezt lineáris erőtörvénynek nevezzük. A rugó megfeszítéséhez szükséges erő $F(x) = Dx$, ellentétes a rugóerővel, a munka pedig $W = \frac{1}{2}Dx \cdot x = \frac{1}{2}Dx^2$.

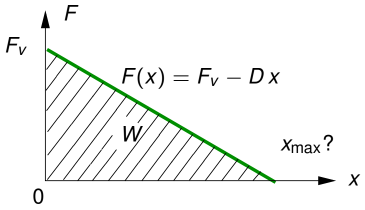


A munkatétel „ereje”

Egy kezdetben nyújtatlan, D rugóállandójú rugóhoz egy m tömegű nyugvó testet helyezünk. Hasson a testre $F_v =$ állandó nagyságú vonóerő! Meddig jut el az m tömegű test a kiindulási pozícióhoz képest?



Ábrázoljuk az eredő erőt a pozíció függvényében!



A munkatétel „ereje”

Nem lehet az a pozíció a mozgás vége, ahol a testre ható eredő erő nulla. Az eredő erőből csak a gyorsulásra következtethetünk, a sebességre nem! Igaz, hogy ebben a pozícióban a test gyorsulása nulla, de a sebessége maximális, mert idáig gyorsult.

A munkatétel „ereje”

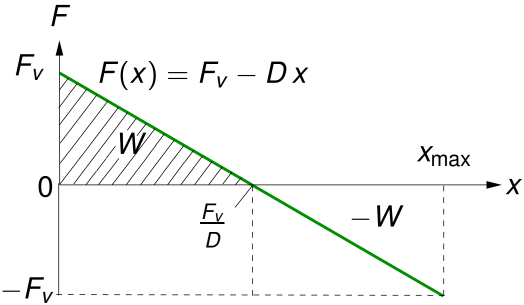
Mit olvashatunk ki a munkatétel-ből?

$$\underbrace{\frac{m{v_2}^2}{2}}_{0} - \underbrace{\frac{m{v_1}^2}{2}}_{0} = \underbrace{W}_{0}$$

Mivel a kezdeti (v_1) és a végállapoti (v_2) sebesség nulla, a munkatétel miatt az eredő erő munkája nulla kell legyen! A grafikon alatti terület nem lehet nulla, de ugyanakkora nagyságú, negatív előjelű munkát hozzáadva az összmunka zérussá válik:

$$W + (-W) = 0$$

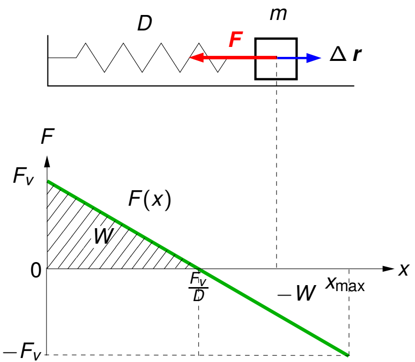
A munkatétel „ereje”



A két terület csak akkor egyenlő, ha $x_{\mathrm{max}} = \frac{2F_v}{D}$!

A munkatétel „ereje”

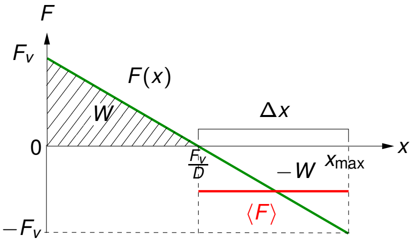
Miért lesz a végzett munka negatív? Azért mert az eredő erő iránya és az elmozdulás a mozgás második szakaszán ellentétes. Másként fogalmazva az elmozdulás és az eredő erő között bezárt szög π (radián), így $F\Delta r\cos(\pi) = F\Delta r(-1)$!



A munkatétel „ereje”

Mivel az erővektor változása lineáris, ebben az esetben számolhatunk $F/2$ átlagos, állandó nagyságú erővel!

$$W_2 = \underbrace{\langle F \rangle}_{\frac{F_v}{2}} \cdot \Delta x \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{(-1)} = -\langle F \rangle \cdot \Delta x = -\frac{F_v}{2}\frac{F_v}{D}.$$



A munkatétel „ereje”

$$W = \frac{(F_v)^2}{2\,D} - \frac{(F_v)^2}{2\,D} = 0.$$

Tehát a munkatétellel csak akkor vagyunk összhangban, ha a test maximális elmozdulsása

$$x_{\max} = \frac{2F_v}{D}!$$

A munkatétel „ereje”

Melyik pozícióban lesz maximális a test sebessége, és mekkora ez a maximális érték? A sebesség akkor lesz maximális, amikor a testre ható eredő erő nulla! Azért mert addig a pozícióig a test gyorsult. A test kinetikus eneriája a munkatétel alapján:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_v\frac{Fv}{D} &= \frac{mv^2}{2} \\
\frac{{F_v}^2}{\cancel{2}D} &= \frac{mv^2}{\cancel{2}} \\
v &= \frac{F}{\sqrt{mD}}
\end{aligned}$$

Végezetül a test maximális gyorsulása $a = \pm\frac{F_v}{m}$

A munkatétel „ereje”

Mire jutnánk munkatétel nélkül? A következő differenciálegyenletet kell megoldani:

$$
\begin{aligned}
F_v - D\,x &= m\,\ddot{x} \\
\ddot{x} + \frac{D}{m}x - \frac{F_v}{m} &= 0
\end{aligned}
$$

Ez természetesen megoldható, később a rezgéseknél visszatérük rá!

A mechanikai energia megmaradás törvénye

$$
\begin{aligned}
\frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{m{v_A}^2}{2} &= \int_A^B F(x)\,d\,x \\
\frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{m{v_A}^2}{2} &= G(x)\Big|_A^B \\
\frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{m{v_A}^2}{2} &= G(B) - G(A) \\
\frac{m{v_A}^2}{2} - G(A) &= \frac{m{v_B}^2}{2} - G(B) \\
\frac{m{v_A}^2}{2} + \underbrace{V(A)}_{\text{potenciális e.}} &= \frac{m{v_B}^2}{2} + \underbrace{V(B)}_{\text{potenciális e.}}
\end{aligned}
$$

A mechanikai energia megmaradás törvénye

$$K(A) + V(A) = K(B) + V(B)$$
$$K_A + V_A = K_B + V_B$$

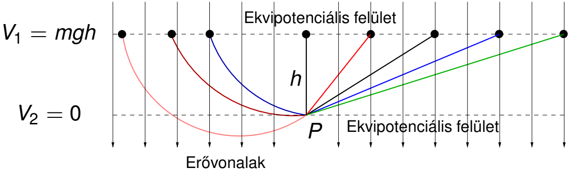
A mechanikai energia megmaradása rendkívül fontos. Csak olyan erőterekben érvényes melyekre:

$$\oint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Az ilyen erőterekben végzett munka független a pályagörbe alakjától. Az ilyen erőtereket konzervatív vagy potenciálos erőtereknek nevezzük.

A mechanikai energia megmaradás törvénye

A Föld nehézségi erőtere konzevatív, így érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele.



A potenciális energia most azzal a munkával egyenlő, amely egy m tömegű test h magasságba emeléséhez kell.

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

A mechanikai energia megmaradás törvénye

A mechankia energia megmaradás törvénye miatt mindegyik test kinetikus energiája, így sebessége is a P pontban azonos lesz. Amiről semmit nem tudunk az energiamegmaradás alapján az az, hogy az egyes testek mennyi idő alatt jutnak el a P pontba.