Fizika

Szabó István PhD

PTE MIK

2019.

A mechanikai energia megmaradás törvénye

$$K(A) + V(A) = K(B) + V(B)$$
$$K_A + V_A = K_B + V_B$$

A mechanikai energia megmaradása rendkívül fontos. Csak olyan erőterekben érvényes melyekre:

$$\oint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Az ilyen erőterekben végzett munka független a pályagörbe alakjától. Az ilyen erőtereket konzervatív vagy potenciálos erőtereknek nevezzük.

A teljesítmény

A P teljesítmény a munkavégzés sebessége. Tudjuk, hogy egy emeletet felmenni a lépcsőn viszonylag könnyű, viszont felugrani a lépcső aljáról a tetejére általában lehetetlen. Pedig éppen ugyan azt a munkát kell elvégeznünk az ugrás során is csak a munkavégzésre ekkor sokkal kevesebb idő marad! Erre a teljesítményre az emberi test nem képes. Definíció szerint az átlagos és a pillanatnyi teljesítmény a következő:

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$
$$\dot{P} = \frac{dW}{dt}.$$

A teljesítmény mértékegysége a J/s=1W (watt)

Teljesítménygépek

Amíg az egyszerű gépek képesek az erőnket megsokszorozni, addig a teljesítménygépek a munkavégzés sebességét növelik. Ilyen az íj és a számszeríj, amellyel megsokszorozható az emberi teljesítmény. A gőzturbina pedig igen nagy folytonos teljesítmény leadására képes.

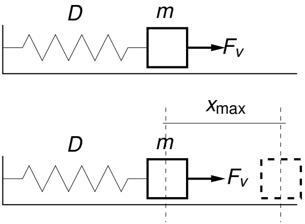
Teljesítménygépek

$$P_{\text{íj}} = 1 - 10 \text{ kW} \quad \text{pillanatnyi}$$
$$P_{\text{turbina}} = 120 - 1000 \text{ MW} \quad \text{folytonos}$$

Nagy teljesítményű lézer-rendszerekben ma már elérik a TW-os teljesítményt.

Az energiamegmaradás alakalmazására

Egy kezdetben nyújtatlan, D rugóállandójú rugóhoz egy m tömegű nyugvó testet helyezünk. Hasson a testre $F_v =$ állandó nagyságú vonóerő! Meddig jut el az m tömegű test a kiindulási pozícióhoz képest?

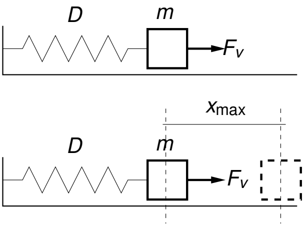


Oldjuk meg a feladatot a mechanikai energia megmaradás törvénye alapján!

Az energiamegmaradás alkalmazás

Az energiaegyenlet:

$$\underbrace{K_0}_{0} + \underbrace{V_0^{\text{rugó}}}_{0} + V_0^{\text{vonó}} = \underbrace{K_{(x_{\max})}}_{0} + V_{(x_{\max})}^{\text{rugó}} + \underbrace{V_{(x_{\max})}^{\text{vonó}}}_{0}$$



$$V_0^{\text{vonó}} = V_{(x_{\max})}^{\text{rugó}}$$

$$F_v \cancel{x_{\max}} = \frac{1}{2} D\, x_{\max}^{\cancel{2}}$$

$$x_{\max} = \frac{2F_v}{D}$$

Az energiamegmaradás

$$F_v\,x_{\max} = \frac{2\,{F_v}^2}{D}$$

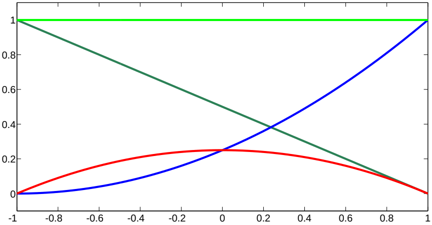
$$\frac{2\,{F_v}^2}{D} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\,x^2 - F_v\,x \quad \text{x=0-ban}$$

$$\frac{2\,{F_v}^2}{D} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\,x^2 + \frac{2\,{F_v}^2}{D} - F_v\,x \quad \text{x=0-ban}$$

$$\cancel{\frac{2\,{F_v}^2}{D}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\,x^2 + \cancel{\frac{2\,{F_v}^2}{D}} - F_v\,x$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_v\,x - \frac{1}{2}D\,x^2$$

Az energiamegmaradás



$$E_{\text{összes}} = \frac{2\,F_v{}^2}{D}$$

$$V_{\text{rug}}(x) = \frac{1}{2} D\, x^2$$

$$V_{\text{vonó}}(x) = \frac{2\,F_v{}^2}{D} - F_v\, x$$

$$K(x) = F_v\, x - \frac{1}{2} D\, x^2$$

A test maximális sebessége a munkatétel alapján:

$$v = \frac{F_v}{\sqrt{mD}}$$

Számítsuk ki az energiamegmaradás alapján is! A sebesség maximuma az $x = F_v/D$ pozícióban van.

$$\frac{2\,F_v{}^2}{D} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\,x^2 + \frac{2\,F_v{}^2}{D} - F_v\,x$$

$$\cancel{\frac{2\,F_v{}^2}{D}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\,\frac{F_v{}^2}{D^2} + \cancel{\frac{2\,F_v{}^2}{D}} - F_v\,\frac{F_v}{D} \quad x = \frac{F_v}{D} - ben$$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cancel{D}\,\frac{F_v{}^2}{D^{\cancel{2}}} + -F_v\,\frac{F_v}{D}$$

$$0 = \frac{1}{\cancel{2}}mv^2 - \frac{F_v{}^2}{\cancel{2}D}$$

$$0 = \frac{1}{\cancel{2}} m v^2 - \frac{{F_v}^2}{\cancel{2} D}$$

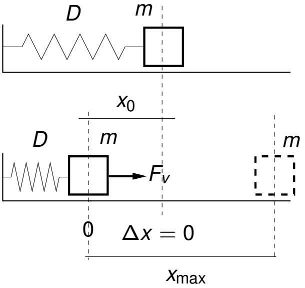
$$m v^2 = \frac{{F_v}^2}{D}$$

$$v = \frac{F_v}{\sqrt{mD}}$$

Tehát a maximális sebesség éppen akkora, mint amekkorát a munkatétel alapján számoltunk. Láthatjuk, hogy ebben a feladatban az energiamegmaradás alkalmazása bonyolultabb mint a munkatételé.

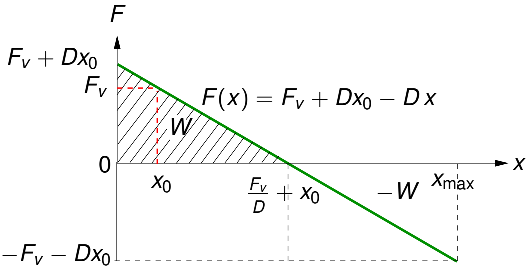
Összenyomott rugó

Egy kezdetben összenyomott, D rugóállandójú rugóhoz egy m tömegű nyugvó testet helyezünk. Hasson a testre $F_v =$ állandó nagyságú vonóerő!



Határozzuk meg a test maximális pozícióját a munkatétel alapján és a írjuk fel a mechanikai energia megmaradás törvénye alapján az energiaegyenletet!

A munkatétel



A két terület csak akkor egyenlő, ha $x_{\max} = \dfrac{2F_v}{D} + 2\,x_0$!

Az összenergia

Az összenergiát x_{max} ismeretében meghatározhatjuk, mert ebben a pozícióban ha az F_v erőtérhez tartozó potenciális energiát nullának választjuk a rendszernek csak rugalmas energiája van:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2} D \left(x_{\max} - x_0\right)^2 = \frac{D}{2} \left(\underbrace{\frac{2F_v}{D} + 2\,x_0}_{x_{\max}} - x_0 \right)^2$$

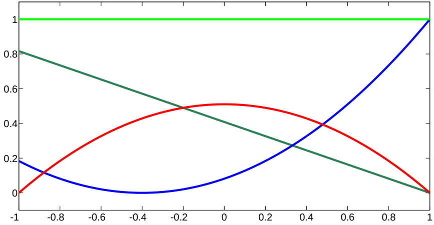
$$E_{\text{összes}} = \frac{D}{2} \left(\frac{4{F_v}^2}{D^2} + \frac{4F_v}{D} x_0 + {x_0}^2 \right) = \frac{2\,{F_v}^2}{D} + 2F_v\,x_0 + \frac{1}{2} D {x_0}^2$$

Az energiaegyenlet

$$\underbrace{\frac{2\,{F_v}^2}{D} + 2F_v\,x_0 + \frac{1}{2}D{x_0}^2}_{E_{\text{összes}}} = \overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{K} + \underbrace{\frac{1}{2}D\,(x_0 - x)^2}_{V_{\text{rugó}}} + \underbrace{\frac{2\,{F_v}^2}{D} + 2F_v\,x_0 - F_v\,x}_{V_{F_v}}$$

Az energiamegmaradás

Ábrázoljuk a különböző energiákat a pozíció függvényében!



$$E_{\text{összes}} = \frac{2\,F_v{}^2}{D} + 2F_v\,x_0 + \frac{1}{2}Dx_0{}^2$$

$$V_{\text{rug}}(x) = \frac{1}{2}D\,(x - x_0)^2$$

$$V_{\text{vonó}}(x) = \frac{2\,F_v{}^2}{D} + 2F_v\,x_0 - F_v\,x$$

$$K(x) = D\,x_0\,x + F_v\,x - \frac{1}{2}D\,x^2$$

Az impulzusmegmaradás tétele

Olyan mechanikai rendszerben, amelyben nem hatnak külső erők a testek m tömegének és $\boldsymbol{v}$ sebességeinek szorzata időben állandó.:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots m_n \boldsymbol{v}_n = \text{áll}$$

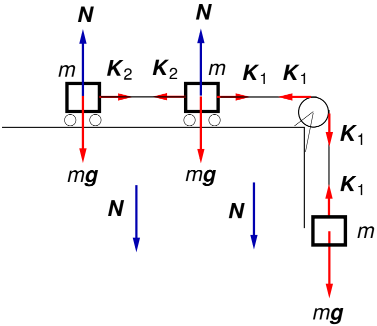
Ezt nevezzük az impulzusmegmaradás tételének. Ezzel magyarázható pl. az evezés, a rakétamozgás vagy a lőfegyverek visszalökődése.

Pontrendszerek mechanikája

Pontrendszer: Anyagi pontok tetszőleges halmaza. Röppályáján darabokra robbanó lövedék, Naprendszer, kényszerekkel összekapcsolt testek. A merev testek is a pontrendszer általánosításának tekinthetők. A merev testeket felépítő anyagi pontok egymáshoz viszonyított helyzete a mozgás során nem változik. A tömegközéppont (TKP) az a képzeletbeli pont amelybe a pontrendszer össztömegét, helyettesíthetjük. Érdekes, hogy egy abroncs TKP-ja nem része a testnek!

Pontrendszerek mechanikája

Egy pontrendszer úgy mozog mintha az összes tömeget a TKP-ba helyettesítenénk és a TKP-ra csak a külső erők eredője hatna. A belső erők pedig erő-ellenerő párokként kioltják egymás hatását. Korábbi példánkabn a külső erő az *mg*. A belső erők pedig $-K_1 + K_1 - K_2 + K_2$!



$$\left.\begin{cases} mg - \cancel{K_1} &= ma \\ \cancel{K_1} - \cancel{K_2} &= ma \\ \cancel{K_2} &= ma \end{cases}\right\} (+)$$

Münchausen báró esete a mocsárral

Münchausen báró történetében a belső erők nem oltják ki egymást! Innen tudjuk, hogy a báró nem mond igazat!

Ütközések

Merev testek közötti, rövid idejű, intenzív kölcsönhatást ütközésnek nevezzük. Példák: padló-sarok (járás), billiárdgolyók ütközése, baseball ütő-labda, tenisz ütő-labda, ökölvívás, dokkolás (űrkutatás), nehézion ütköztetések, lövedékek becsapódása (vadászat, hadtudomány).
Az ütközések elmélete meglehetősen bonyolult, ezért a továbbiakban csak a legegyszerűbb esetekkel (centrális, egyenes ütközésekkel) foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy a testek sebességvektorai egy egyenesbe esnek és átmennek a testek TKP-jain.

Ütközések

Az alapprobléma a kezdeti tömegek és sebességek ismeretében az ütközés után kialakuló sebességek meghatározása. Az ütköközések egyik határesete a tökéletesen rugalmatlan ütközés. Ekkor a rendszer mechanikai energiájának egy része hővé, maradandó deformációvá alakul. A tapasztalat szerint az ütköző testek közös sebességgel haladnak tovább. Pl. légpárnás asztalon két Hg-csepp ütközése nagyon jó közelítéssel rugalmatlan ütközésnek tekinthető.

Két test centrális ütközése

A tökéletesen rugalmatlan ütközésre vonatkozó megmaradási tétel:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

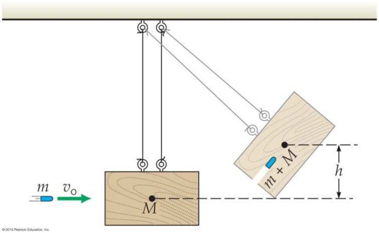
A mechanikai energiaveszteség:

$$W_{\text{vesz}} = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_2{}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, \boldsymbol{u}^2$$

$$W_{\text{vesz}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2$$

Ballisztikus inga

A rugalmatlan ütközésről tanultak alapján konstruálható olyan eszköz, amely a lőfegyverek torkolati sebességének meghatározása szolgál. Ez az ún. ballisztikus inga.



Ballisztikus inga

Az impulzus és a mechanikai energia megmaradásának alkalmazásával a lövedék sebessége a kilendülő nehezék *h* emelkedési magasságának mérésére vezethető vissza.

$$mv = (m + M)\,U$$

$$U = \frac{m}{m+M}\,v$$

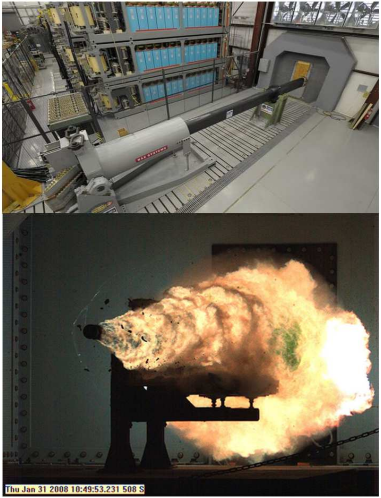
$$\frac{1}{2}(m + M)\,U^2 = (m + M)\,gh$$

$$v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

Lövedékek kezdősebessége

íjak/számszeríjak maximális sebessége kb. 125 m/s = 450 km/h
lövedékek: (AK 47-es) gépkarabély 715 m/s = 2574 km/h (8g),
Dragunov mesterlövész puska 810 m/s = 2916 km/h (11,98 g),
Gepárd M1 mesterlövész puska 840 m/s = 3024 km/h,
D-20 vontatott tarackágyú 650 m/s (20kg),
railgun 5900 m/s = 21 240 km/h.
A railgun nem kémiai úton, hanem elektromágneses mezővel gyorsítja a lövedéket elképesztő nagy sebességre.

Railgun



Két test centrális ütközése

A tökéletesen rugalmas ütközés során a mechanikai energia is megmarad.

http://www.popsci.com/science/article/2011-02/giant-granite-balls-help-scientists-study-asteroid-collisions-and-planet-formation

Két test centrális ütközése

A tökéletesen rugalmas ütközés

$$m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2 = m_1\,\boldsymbol{u}_1 + m_2\,\boldsymbol{u}_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_1\,\boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\,\boldsymbol{v}_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1\,\boldsymbol{u}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\,\boldsymbol{u}_2{}^2 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,\boldsymbol{v_1} + 2m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,\boldsymbol{v}_2 + 2m_1\boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Két test centrális ütközése

Gumilabda fallal ütközik:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_1$$

$$\lim_{m_2\to\infty}\boldsymbol{u}_1 = \lim_{m_2\to\infty}\frac{2}{\frac{m_1}{m_2}+1}\boldsymbol{v}_2 + \frac{\frac{m_1}{m_2}-1}{\frac{m_1}{m_2}+1}\boldsymbol{v}_1 = 2\underbrace{\boldsymbol{v}_2}_{0} - \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_1$$

Ha a fal is mozog a labda eredeti sebességével ellentétes irányban:

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{2m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_1$$

$$\lim_{m_2\to\infty}\boldsymbol{u}_1 = \lim_{m_2\to\infty}\left(-\frac{2}{\frac{m_1}{m_2}+1}\boldsymbol{v}_2 + \frac{\frac{m_1}{m_2}-1}{\frac{m_1}{m_2}+1}\boldsymbol{v}_1\right) = -2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$$

Két test centrális ütközése

$$\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$$

Tehát pl. egy pinpongütő sebességének a kétszerese adódik hozzá a labda visszapattanási sebességéhez!