Fizika

Szabó István PhD

PTE MIK 2019.

A forgási energia

Egy ω szögsebességgel forgó test esetén a kinetikus energia megegyezik a forgási energiával. Ez lehetőséget ad a kétféle energia összehasonlítására.

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 = \frac{1}{2} m (r\omega)^2$$
$$E_f = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 .$$

Itt Θ a forgási tehetetlenség vagy tehetetlenségi nyomaték. Egyetlem m tömegű pontra, amely a forgástengelytől r távolságra van értéke $\Theta = m r^2$.

A tehetetlenségi nyomaték

Kiterjedt merev testek tehetetlenségi nyomatékát összegzési eljárások következetes alkalmazásával számíthatjuk ki.

$$\Theta = \int r^2 dm$$

A tehetetlenségi nyomaték a tömeghez hasonló, de annál sokkal bonyolultabb mennyiség. Általában egy tetszőleges test Θ-ja 9 db számadatot jelent.

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonalizáció, fő tehetetlenségi nyomatékok

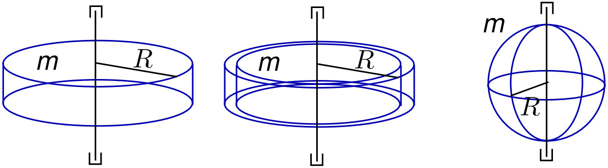
A forgástengelyek megfelelő megválasztásával (fő tehetetlenségi rendszer) elérhetjük, hogy a kilenc adat háromra csökkenjen!

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\mathrm{III}} \end{bmatrix}$$

Ha homogén tömegeloszlású, szimmetrikus testek a szimmetriatengelyük körül forognak Θ egyetlen adatot jelent.

Kiterjedt merev testek tehetetlenségi nyomatékai

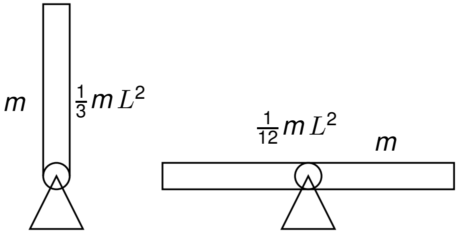
Mechanikai rendszerek gyakran tartalmaznak korongokat, abroncsokat és gömböket.



$\frac{1}{2} m R^2$ $m R^2$ $\frac{2}{5} m R^2$

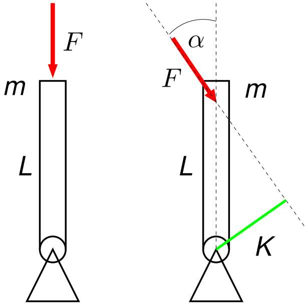
Rudak

A mechanikai rendszerekben a csuklósan felfüggesztett rudak foroghatnak.



A forgatónyomaték

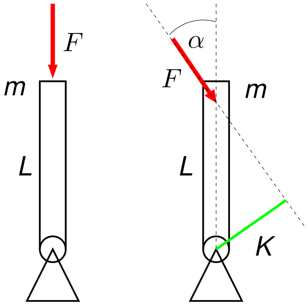
Az erő önmagában nem elég a szöggyorsításhoz. Az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága az erő karja. A szöggyorsulás feltétele $K > 0$.



A forgatónyomaték

Az ábra alapján $K = L\sin(\alpha)$. A forgatónyomaték nagysága pedig $M = FL\sin(\alpha)$. Vektoriálisan:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



A munkatétel forgásra

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

$$\underbrace{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi)d\varphi}_{W} = \underbrace{\frac{1}{2}\Theta\,{\omega_2}^2}_{E_{f2}} - \underbrace{\frac{1}{2}\Theta\,{\omega_1}^2}_{E_{f1}}$$

A dinamikai egyenlet forgásra

$$M\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \frac{1}{2}\Theta\left({\omega_2}^2 - {\omega_1}^2\right) \tag{1}$$

$${\omega_2}^2 = {\omega_1}^2 + 2\beta\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \tag{2}$$

$$\left({\omega_2}^2 - {\omega_1}^2\right) = 2\beta\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$M\cancel{(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{1}{\cancel{2}}\Theta\cancel{2}\beta\cancel{(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$M = \Theta\,\beta$$

A dinamikai egyenlet forgásra

A dinamikai egyenlet, csak szimmetrikus testek szimmetria -tengely körüli forgásakor igaz. A tengelynek rögzítettnek kell lennie, vagy önmagával párhuzamosan kell eltolódnia.

$$\sum_i M_i = \Theta\,\ddot{\varphi}$$

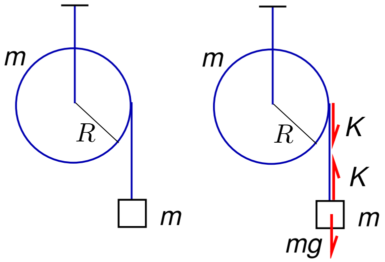
Általánosabb egyenlet

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \dot{\boldsymbol{p}} \quad \leftrightarrows \quad \sum_i \boldsymbol{M}_i = \dot{\boldsymbol{L}}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

ún. impulzusmomentum vektor.

Tekintsünk egy R sugarú, *m* tömegű korong rögzített tengely körüli forgását. A korong peremén átvetett fonálon *m* tömegű test függ. Analizáljuk a mozgást.



$$mg - K = m\,a \tag{1}$$

$$KR = \Theta\beta \tag{2}$$

$$a = R\beta \tag{3}$$

$$mg - K = ma \tag{1}$$
$$KR = \frac{1}{2} mR^2 \beta \tag{2}$$
$$a = R\beta \tag{3}$$

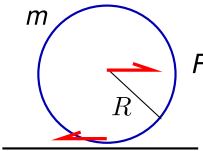
$$mg - K = ma \tag{1}$$
$$K\cancel{R} = \frac{1}{2} m\cancel{R^2} \frac{a}{\cancel{R}} \tag{2}$$

$$mg - K = m\,a \qquad (1)$$
$$K\,R = \frac{1}{2} m\,R^2 \beta \qquad (2)$$

$$mg - K = m\,a \qquad (1)$$
$$K = \frac{1}{2} m\,a \qquad (2)$$

$$\cancel{m}g = \frac{3}{2}\cancel{m}a \quad (1) + (2)$$
$$a = \frac{2g}{3}; \quad \beta = \frac{2g}{3R}; \quad K = \frac{mg}{3}$$

Vizsgáljuk meg egy R sugarú, m tömegű korong tiszta gördülését vízszintes síkon! A vonóerő támadáspontja a korong TKP-ja. Oldjuk meg a dinamikai egyenletek segítségével.



$$F_v - F_t = m\,a \quad (1)$$
$$F_t\,R = \Theta\beta \quad (2)$$
$$a = R\beta \quad (3)$$

$$F_v - F_t = m\,a \quad (1)$$
$$F_t\,\cancel{R} = \frac{1}{2}m\cancel{R^2}\frac{a}{\cancel{R}} \quad (2)$$

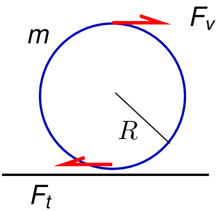
$$F_v - F_t = m\,a \quad (1)$$
$$F_t = \frac{1}{2}ma \quad (2)$$

$$F_v = \frac{3}{2} m a \quad (1) + (2)$$

$$a = \frac{2F_v}{3m} \quad \text{a gyorsulás}$$

$$F_t = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \frac{\cancel{2} F_v}{3\cancel{m}} = \frac{F_v}{3} \quad \text{a tapadási erő}$$

Vizsgáljuk meg egy R sugarú, *m* tömegű korong tiszta gördülését vízszintes síkon! Oldjuk meg a dinamikai egyenletek segítségével.A vonóerő támadáspontja a korong legfelső (pl. kötéllel érintkező) pontja.



$$F_v - F_t = m\,a \qquad (1)$$

$$F_v R + F_t R = \Theta \beta \qquad (2)$$

$$a = R\beta \qquad (3)$$

$$F_v - F_t = m\,a \qquad (1)$$

$$F_v \cancel{R} + F_t \cancel{R} = \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{a}{\cancel{R}} \qquad (2)$$

$$F_v - F_t = m\,a \qquad (1)$$

$$F_v + F_t = \frac{1}{2} m a \qquad (2)$$

$$2F_v = \frac{3}{2} m a \quad \text{(1)+(2)}$$

$$a = \frac{4F_v}{3m} \quad \text{a gyorsulás}$$

$$F_v - F_t - F_v - F_t = m a - \frac{1}{2} m a \quad \text{(1)-(2)}$$

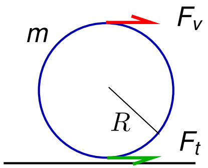
$$\cancel{F_v} - F_t - \cancel{F_v} - F_t = \frac{1}{2} m a$$

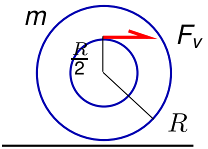
$$-2F_t = \frac{m a}{2}$$

$$-F_t = \frac{\cancel{m}}{\cancel{4}} \frac{\cancel{4} F_v}{3 \cancel{m}}$$

$$F_t = -\frac{F_v}{3} \quad \text{a tapadási erő}$$

Korong gördülése vízszintes síkon!





A tapadási erő iránya pont ellentétes azzal, amit feltételeztünk!

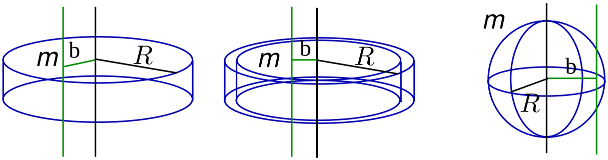
$$F_t = -\frac{F_v}{3} \quad \text{a tapadási erő}$$

Ha a vonóerő karja $K = \frac{R}{2}$ a tapadási erő nulla. Ekkor a tiszta gördüléshez nincs szükség tapadási erőre.

A Steiner tétel

Steiner tétel: Ha ismerjük egy test Θ-ját a szimmetriatengelyre vonatkoztatva, akkor bármely másik b távolságra lévő, a szimmetriatengellyel párhuzamos másik tengelyre is kiszámolhatjuk a következő módon:

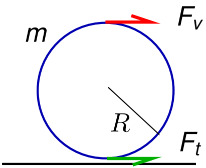
$$\Theta^* = \Theta + mb^2$$



$\frac{1}{2} m R^2 + mb^2$ $\quad$ $m R^2 + mb^2$ $\quad$ $\frac{2}{5} m R^2 + mb^2$

A Steiner tétel

Vizsgáljuk korong tiszta gördülését vízszintes síkon! Válasszuk forgástengelynek a korong legalsó, talajjal érintkező pontját!



$$F_v\, 2R = \Theta^* \beta$$

$$F_v\, 2R = \left(\frac{1}{2} mR^2 + mR^2\right) \beta$$

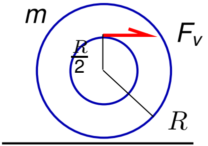
$$F_v\, 2R = \left(\frac{3}{2} mR^2\right) \beta$$

$$\beta = \frac{4F_v}{3mR}$$

$$a = \frac{4F_v}{3m} \checkmark$$

A Steiner tétel

Vizsgáljuk korong tiszta gördülését vízszintes síkon! Válasszuk forgástengelynek a korong legalsó, talajjal érintkező pontját!



$$F_v \frac{3}{2} R = \Theta^* \beta$$

$$F_v \frac{3}{2} R = \left(\frac{1}{2} m R^2 + m R^2 \right) \beta$$

$$F_v \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cancel{R} = \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} m R^{\cancel{2}} \right) \beta$$

$$\beta = \frac{F_v}{mR}$$

$$a = \frac{F_v}{m}$$

A forogva haladó test energiája

A szimmetria tengely körüli forgást tekintve egy tisztán gördülő testnek kétféle energiája van:

$$E = K + E_f = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Theta\omega^2}{2}$$

Tekintsük egy R sugarú, m tömegű korong gördülését sík felületen.

$$E = K + E_f = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{4}m\cancel{R^2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \frac{2mv^2}{4} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3mv^2}{4}$$

A forogva haladó test energiája

Ha a pillanatnyi forgástengelyt választjuk forgástengelynek a Steiner-tétel alapján az összenergia:

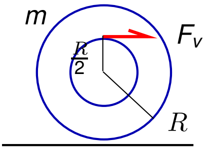
$$E = \frac{\Theta^* \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} m v^2$$

Kissé általánosabban:

$$E = \frac{\left(\Theta + m R^2\right) \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\Theta + m R^2\right) \frac{v^2}{R^2}$$

Korong gördülése síkon

Vizsgáljuk korong tiszta gördülését vízszintes síkon! Oldjuk meg munkatétellel és a mechanikai energia megmaradás alapján is!



$$F_v \frac{3}{2} R \varphi = \frac{1}{2} \Theta^* \omega^2 \qquad (1)$$

$$\varphi = \frac{x}{R} \qquad (2)$$

$$F_v \frac{3}{2} R \frac{x}{R} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m R^2 \omega^2 \qquad (1)$$

$$\omega^2 = 2\beta\varphi \qquad (2')$$

$$F_v \cancel{\frac{3}{2}} \cancel{R} \frac{x}{\cancel{R}} = \frac{1}{2} \cancel{\frac{3}{2}} m R^2 \omega^2 \qquad (1)$$

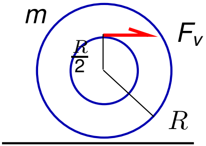
$$\omega^2 = 2\beta \frac{x}{R} \qquad (2')$$

A munkatétel alkalmazása

Munkatétel!

$$\left(M\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Theta{\omega_2}^2 - \frac{1}{2}\Theta{\omega_1}^2 \right)$$

$$\left({\omega_2}^2 = {\omega_1}^2 + 2\beta\,\varphi \right)$$



$$F_v\,x = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \quad (1)$$

$$\omega^2 = 2\beta\frac{x}{R} \quad (2)$$

$$\omega^2 = \frac{2F_v x}{mR^2} \quad (1)$$

$$\omega^2 = 2\beta\frac{x}{R} \quad (2)$$

$$\frac{2F_v x}{mR^2} = 2\beta\frac{x}{R}$$

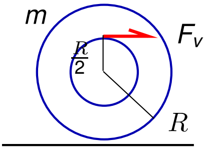
$$\frac{\cancel{2}F_v\cancel{x}}{mR^{\cancel{2}}} = \cancel{2}\beta\frac{\cancel{x}}{\cancel{R}}$$

A munkatétel alkalmazása

Munkatétel!

$$\left(M\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Theta{\omega_2}^2 - \frac{1}{2}\Theta{\omega_1}^2\right)$$

$$\left({\omega_2}^2 = {\omega_1}^2 + 2\beta\,\varphi\right)$$



$$\frac{\cancel{2}F_v\cancel{x}}{mR^{\cancel{2}}} = \cancel{2}\beta\frac{\cancel{x}}{\cancel{R}}$$

$$\beta = \frac{F_v}{mR}$$

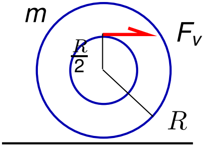
$$\frac{a}{\cancel{R}} = \frac{F_v}{m\cancel{R}}$$

$$a = \frac{F_v}{m} \quad \checkmark$$

Energetikai megoldás!

$$(K + E_f + V = \text{áll})$$

$$\left(v_2{}^2 = v_1{}^2 + 2a\,x\right)$$



Az energiaegyenlet:

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}m\,\underbrace{R^2\omega^2}_{v^2} = F_v\,\frac{3}{2}\underbrace{R\varphi}_{x}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\frac{3}{2}}m\,v^2 = F_v\,\cancel{\frac{3}{2}}\,x$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = F_v\,x$$

$$v^2 = \frac{2F_v\,x}{m} \qquad (1)$$

$$v^2 = 2a\,x \qquad (2)$$

$$v^2 = \frac{2F_v x}{m} \tag{1}$$

$$v^2 = 2a\, x \tag{2}$$

$$\frac{\cancel{2}F_v \cancel{x}}{m} = \cancel{2}a\cancel{x}$$

$$a = \frac{F_v}{m} \checkmark$$

Az impulzusmomentum megmaradás törvénye

Zárt rendszerben a külső erők forgatónyomatéka zérus, ezért:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \rightarrow \boldsymbol{L} = \text{áll}$$

Zárt mechanikai rendszer impulzusmomentuma időben állandó! Homogén tömegeloszlású, szimmetrikus testek szimmetriatengely körüli forgásakor:

$$|\boldsymbol{L}| = \Theta\omega,$$

Ezért bizonyos esetekben a megmaradási tétel matematikai alakja a következő:

$$\Theta_1\omega_1 + \Theta_2\omega_2 \ldots \Theta_i\omega_i = \Theta_1\Omega_1 + \Theta_2\Omega_2 \ldots \Theta_i\Omega_i$$

Az impulzusmomentum megmaradás törvénye

A impulzusmomentum megmaradás a mindennapi életben:

- Tigrisbukfenc, szaltó
- Jégtáncos tengely körüli forgása
- Helikopter hátsó rotorja
- Örvény

Az impulzusmomentum megmaradás megnyilvánulása

Az impulzusmomentum megmaradás megnyilvánulása

Az impulzusmomentum megmaradás megnyilvánulása


Az impulzusmomentum megmaradás megnyilvánulása