DÉR–RADNAI–SOÓS

Fizikai feladatok

I. kötet

Aktualizálva az új rendszerű közép- és emelt szintű érettségi követelményekhez

DÉR–RADNAI–SOÓS

Fizikai feladatok

I. kötet

Aktualizálva az új rendszerű közép- és emelt szintű érettségi követelményekhez

Holnap Kiadó

Szerzők:

DÉR JÁNOS
adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem
Fizikai Tanszék

RADNAI GYULA
adjunktus
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék

SOÓS KÁROLY
adjunktus

Szerkesztette:

DÉR JÁNOS

Lektorálták:

DR. SIMONYI KÁROLY
egyetemi tanár

KUNFALVY REZSŐ
középiskolai tanár

Az SI-mértékegységrendszert érvényesítette:

DR. GECSŐ ERVIN
Országos Pedagógiai Intézet főmunkatársa

Holnap Kiadó Kft., Budapest
A kiadásért dr. Milkovich Eszter, a Kft. ügyvezető igazgatója felel
1111 Budapest, Zenta u. 5.
Tel./Fax: 466-6928
e-mail: holnapkiado@holnapkiado.hu
www.holnapkiado.hu

Felelős szerkesztő Kovács Loránd
Műszaki szerkesztő, borító Csizi Renáta
Irodalmi szerkesztő Nagy Borbála Réka

ISBN 963 346 665 2

Nyomta és kötötte a Novum Nyomda Kft.
Felelős vezető Budincsevits József

Tartalom

Mottó: részlet egy óvodással készült rádióriportból, 2003 decemberéből.

– „A game over" mit jelent?
– Azt, hogy mindjárt meghalunk.
– És a valóságban mikor halunk meg?
– ...Mi az, hogy valóság?

Előszó a 2004. évi kiadáshoz

Ma, amikor világszerte válságos éveket él át az iskolai oktatás – s benne a fizikaoktatás különösen – jól esik kézbe venni egy-egy olyan régebbi kiadványt, amelyen generációk nőttek fel, amelyből nemzedékek tanultak, okosodtak annak idején. Nem véletlenül van reneszánszuk általános iskolában az Öveges-könyveknek, s bizonyára az se lehet véletlen, hogy a Holnap Kiadó (nomen est omen) éppen most határozta el ennek a kétkötetes fizikai feladatgyűjteménynek újbóli megjelentetését a mai középiskolás diákok és tanáraik számára.

Egész Közép-Európában, így Magyarországon is evidenciának számít, hogy a középiskola utolsó két évfolyamán lehet a legeredményesebben fizikát tanítani és tanulni. Addigra érik el a diákok azt az absztrakciós szintet és matematikai érettséget, ami a középiskolai fizika eredményes elsajátításához szükséges. Ha 12-14 éves korban, amikor a legnyitottabbak a gyerekek a külvilág jelenségeinek megismerésére, nem riasztják el őket a fizikától azzal, hogy számukra felfoghatatlan elméletek verbális reprodukálására kényszerítik őket, befogadók maradnak a fizika iránt 17-18 évesen is.

Ezt használta ki az a „békebeli" tanterv, amely a XIX. század végén és a XX. század elején a nyolcosztályos gimnázium III. osztályában írt elő jelenségközpontú (görög eredetű kifejezéssel: fenomenologikus) természettant (fizikát) – úgy, hogy ebben még némi fizikai földrajz és meteorológia is helyet kaphatott – majd a két utolsó évfolyamon: VII.-ben és VIII.-ban jelent meg újra a fizika, heti négy-négy (!) órában. Ilyen iskolában tanult Kármán Tódor, Hevesy György, Szent-Györgyi Albert, Öveges József, Bay Zoltán, de hát persze Babits Mihály, Kosztolányi Dezső, Márai Sándor, Sík Sándor és Szabó Lőrinc is. Egyikük se dicsekedett azzal, hogy nem érti a fizikát, vagy nem tudja a matematikát. Ezzel *dicsekedni* csak a XX. század második felében vált divattá...

Ugyancsak a XX. század második felében honosodott meg Magyarországon az egyetemi, főiskolai felvételi vizsga, amely politikai és szakmai szempontból szűrte a felsőfokú tanulmányokra jelentkező fiatalokat. A politikai szempontokra kár itt szót vesztegetni, szociológiai vizsgálatok dolga megmutatni, milyen egyéni sorsfordulókhoz és az értelmiség milyen átalakulásához vezetett a politikai szempontok erőteljes érvényesítése. Ugyanakkor a szakmai, tanulmányi szempontok figyelembevétele az érettséginél is fontosabbá tette a felvételi vizsgát. A felvételi presztízse egykettőre felülmúlta az érettségiét.

Beindultak a felvételi előkészítő tanfolyamok, éppen abból a felismerésből kiindulva, hogy az egyetemre való bekerülési versenyben a jó helyezéshez nem elegendő az alacsony hatásfokú középiskolai képzés. Fizikából azért lehettek különösen sikeresek a felvételi előkészítők, mert éppen a középiskola utolsó két évében folytak, újra csak bizonyítva, hogy ebben a két évben lehet a legeredményesebben tanítani és tanulni a fizikát.

Ezeken a felvételi előkészítő tanfolyamokon – és persze a magántanításban – lehetett jól használni a mi feladatgyűjteményünket. Ilyen céllal is készült: két tanévig tartó, kéthetenkénti négyszer 45 perces foglalkozásra terveztük az egészet. (Ez megfelel egy heti 2 órás tantárgynak az utolsó két tanévben. Kiegészítve a középiskolai tanórákkal körülbelül annyit ért, mint Kármánék és Babitsék heti 4 fizikaórája VII.-ben és VIII.-ban.) Igaz, könnyebb dolga volt az előkészítőt tartó tanárnak, mint az iskolai tanórát vezetőnek: már eleve csak érdeklődő, tanulni vágyó diákokkal foglalkozhatott, nem terhelték az iskolai munka egyéb kötöttségei, még kísérleteket se kellett bemutatnia, se új anyagot közlő órát tartania. Amikor persze kiderültek a középiskolai oktatás hiányosságai, főhetett a feje az előkészítőt vezető lelkiismeretes tanárnak. Ha tudott, demonstrált, ha kellett, magyarázott. Fő feladata mégis a fizikai problémák megoldásához vezető út megtanítása volt, és ezt a munkát akartuk mi is segíteni.

Szándékosan úgy állítottuk össze a könyv mindkét kötetét, hogy egy-egy fejezet *Bevezető* és *Gyakorló* feladatai a négyszer 45 perc alatt feldolgozhatók legyenek, rámutatva közben a fizikai fogalmak következetes és pontos használatának fontosságára. Provokatív kérdéseket is feltettünk, kiélezve a szokásos, tipikus fogalmi tisztázatlanságokat, félreértéseket. Ezeket a könyv terjedelmének több, mint kétharmadát kitevő *Megoldások* részben diszkutáltuk, olykor még részletesebben is, mint ahogy

...y tankönyvben szokás. A *Házi* feladatok témájukban a *Gyakorló* feladatokra ...ontek vissza, az *Ajánlott* feladatok pedig a jobb diákoknak szóltak.

Azok a fejezetek sikerültek igazán, amelyekből világosan látszott, hogy nem a for...ális, példamegoldó rutint, hanem a problémacentrikus fizikai gondolkodást akar...uk erősíteni. Megnyilvánult ez a feladatok kiválasztásában ugyanúgy, mint a meg...oldások bemutatásában, a hozzáfűzött megjegyzésekben. Ez is magyarázata lehet ...annak, hogy könyvünket az első kiadás megjelenése óta eltelt évtizedekben a tan...óraszámcsökkentő párthatározatok, elfogult és elhamarkodott minisztériumi intézke...dések, akadémiai utópiák, újra meg újra formált (vagyis reformált) tantervek dzsun...geleiben is megbízható, hasznos segítőtársnak tekintették a fizikából felvételizni ...szándékozó diákok és az őket felkészítő tanárok.

Most viszont megszűnt a felvételi.

Képes-e segíteni ez a feladatgyűjtemény az *új rendszerű érettségire* való felkészü...lést, illetve a tanárok felkészítő munkáját?

Azt gondoljuk, hogy képes, ehhez ad majd segítséget az *Útmutató*.

De mielőtt elmélyednénk az *Útmutató* részleteiben, két dolgot kell kritika tár...gyává tennünk: egyrészt magát a könyvet, másrészt az érettségi új követelményrend...szerét.

Úgy illik, hogy a könyv kritikájával kezdjük.

Ma már biztosan másképp írnánk meg ezt a könyvet: több helyen is máshová tennénk a hangsúlyokat. (Apropó hangsúly: hiányzanak a könyvből a kifejezetten hangtani témájú feladatok.) Kevesebb lejtős-csigás feladatot, kevesebb egyenáramú hálózati példát tennénk be, s bizonyára nem szánnánk egy teljes fejezetet az optikai lencsékre. Az így nyert helyen a félvezetőkre, tranziens jelenségekre, elektromágneses hullámokra vonatkozó feladatokat közölnénk, s az optikán belül is nagyobb hangsúlyt kapnának a fény hullámtulajdonságai. Nincsenek a feladatgyűjteményben igazi csillagászati feladatok, sem fizika- és kultúrtörténeti témájúak. Nem szerepelnek azok a problémák sem, amelyek azóta kerültek az érdeklődés homlokterébe, mint például a környezetszennyezés, a zajártalom, a légkört érő káros hatások vagy éppen a sugárvédelem. Egyszóval, ha ma írnánk a könyvet, kissé máshová kerülne a tárgyalt jelenségkör súlypontja. (Apropó súlypont: időközben ez a fogalom is kitörölhetett az iskolai fizikából, de persze tovább él a mindennapi nyelvben, s ez igazán nem baj.)

Amikor a könyvet írtuk, akkoriban lépett először ember a Holdra, s láthattunk is róla – igaz, csak fekete-fehér – televíziós közvetítést. Mit fejlődött azóta a világ? – kérdezhetné valaki. Nos, amikor a könyvet írtuk, híre-hamva se volt még például a zsebszámológépnek; mindent logarléccel számoltunk. Tudja egy mai diák, hogy mi volt az a logarléc? Az intelligens mérnöki munka szimbóluma, mely oly sokat sejtetően kandikált ki akár a fehér, akár a kék munkaköpeny felső zsebéből!

Bizony lenyűgöző az a technikai fejlődés, mely azóta végbement. Emlékszem, milyen örömmel ötlöttem ki egy feladatot az akkor még csak próbarepülését végző TU-144-es szuperszonikus gépre, amikor végre találtam valahol egy hiteles adatot a repüléséről. Hol van ma már a TU-144? Már a Concorde is múzeumban pihen. Amikor a könyvet írtuk, akkoriban jelent meg a legnagyobb európai repülőtereken az első óriásgép, a Boeing 747-es „Jumbo", amely mint tyúkanyó a csibék között, úgy sétált be a többi repülőgép között a számára átalakított (felmagasított) terminálba. Ma már a modernizált Ferihegyen állandó vendégek az ilyen több száz utast szállító óriásgépek. Amikor a könyvet írtuk, akkoriban jelentek meg az első „tranzisztoros zsebrádiók", miközben az otthoni rádió – és akinek volt: televízió – készülékek még elektroncsövekkel működtek. CD-ről, DVD-ről, mobiltelefonról azért nem hallottunk, mert még nem voltak feltalálva. Lézerek is csak a legnagyobb kutatóintézetekben működtek, a félvezető-fizika és az anyagtudományok akkor indultak fejlődésnek.

Ami a fizika oktatását illeti, még épphogy csak elkezdődtek azok a hazai – olykor elég szélsőséges – reformkísérletek, amelyek a modern atomfizikának és általában a XX. század legfontosabb fizikai elméleteinek a középiskolai oktatásba való bevitelét tűzték ki célul. A szokásos normál tankönyvekben az atomfizika körülbelül olyan súllyal szerepelt, mint manapság a csillagászat. A mi feladatgyűjteményünkben az atomfizika külön fejezetet kapott, benne hatvan feladattal, melyek sok különböző témát érintenek, de mégsem eleget. Nincs feladat a Rutherford-szórásra, az azóta már a felvételi feladatok között is visszatérően szereplő de Broglie-hullámokra, az elektron kettős természetére. Szerencsére ma már elég sok olyan példatár forog közkézen, melyekből ezek a hiányok pótolhatók, mégis, kritikusan el kell ismernünk, hogy ezek a témák erősen hiányoznak a feladatgyűjteményből.

Foglalkozzunk most az érettségi új követelményrendszerével.

Eddig még soha nem született olyan tanterv vagy követelményrendszer, amellyel mindenki meg lett volna elégedve. Ez a követelményrendszer sem ilyen, bizonyára változni is fog az elkövetkező években. Az mindenképp dicséretes, hogy reálisan és sokoldalúan akarja mérni a diákok felkészültségét. Súlyt helyez a kísérleti fizikára, az elméleti tudás mérésében pedig a megértés vizsgálatára.

Fizikai szakmai szempontból azonban meglehetősen elavult nézeteket tükröz, hogy a követelmények felsorolásában az erővel kapcsolatos ismeretek taglalása megelőzi a mozgásokét. Ugyancsak régimódi szemléletet sugall néhány, ma már igencsak túlhaladott elnevezés. („Egyszerű gépek működésének leírása" szerepel a pont-

[illegible] tárgyalása helyett, a kihagyott Kirchhoff-törvények helyett pedig a már [illegible] század végén is elavultnak számító „Ohm törvénye a teljes áramkörre" meg-[illegible] jelenik meg – ez utóbbi kifejezetten az emelt szinten érettségizni akarók [illegible]. Nem a telepek elektromotoros erejét és belső ellenállását definiáló össze-[illegible] ellen van kifogásunk, csupán annak ilyen szerencsétlen elnevezése ellen, hi-[illegible] semmi köze sincs az Ohm-törvényhez.) Teljesen kimaradt a követelmények [illegible] a folyadékok és a deformálható szilárdtestek mechanikája, valamint a forgó-[illegible] témaköre. Zavaró néhány szakkifejezés következetlen használata (például [illegible] gravitációs és a nehézségi gyorsulás esetében) és feltűnő, hogy a megadott minta-[illegible]tok és a 2004-es próbaérettségi feladatai között milyen sok a félreérthető, pon-[illegible] esetenként bizony hibás feladat ill. megoldás.

[illegible] szakdidaktikai szempontból megkérdőjelezhető az esszékérdések értékelési uta-[illegible], valamint a feleletválasztós kérdések eltérő pontozása közép- és emelt szinten. [illegible] emelt szinten 20 pontot, középszinten 45 pontot lehet szerezni ugyanolyan 20 kér-[illegible] teszt megoldásával.)

Nyitott kérdés, amire talán az elkövetkező évek gyakorlata adhatja meg a választ, hogy az érettségiző diák fizikatudásának felmérésére jobbak-e az itt alkalmazott pe-[illegible]ógiai mérési módszerek, mint a hagyományosak. A feleletválasztós teszt előnye, hogy könnyű a teszten elért eredményt kiértékelni. Hátránya, hogy jó tesztkérdése-[illegible] bizony nehéz összeállítani, kiváló felkészültségű, hozzáértő szakemberek körülte-[illegible]ntő és kritikus bizottsági munkája kell hozzá. Az esszékérdés előnye, hogy a diák [illegible]fejezőképességét méri. Hátránya ugyanez. Valamint az, hogy a diák teljesítményét [illegible]gyon nehéz egy esszé alapján objektíven és megbízhatóan értékelni, különösen ak-[illegible], ha nemcsak a lexikális tudásra vagyunk kíváncsiak.

A feladatmegoldás a fizikatudás mérésének hagyományos eszköze. Optimális eset-[illegible] azt a problémamegoldó készséget méri, amire leginkább szüksége van a fizikát [illegible] gyakorlatban alkalmazó illetőnek, akár otthon, akár a munkahelyén, akár például [illegible]utóvezetés közben kerül szembe fizikai felkészültséget igénylő problémával. Az új-[illegible]rű érettségin 100 elérhető pontból középszinten 45, emelt szinten 55 pontot le-[illegible] szerezni „nyílt végű" feladatok megoldásával. A minta és a próbaérettségi felada-[illegible]ok összeállítói azonban olykor kissé „magasra tették a lécet": a 2001-es központi [illegible]lvételi legnehezebb feladata szokásosan 20 pontot ért a 100-ból, itt pedig – igaz, [illegible]mi könnyítéssel – csupán 13 pontosként került be az emelt szintű mintafelada-[illegible]k közé.

Nem könnyű tehát a hivatalos érettségi követelményeket és a Dér–Radnai–Soós [illegible]le feladatgyűjteményt összehangolni egymással. Tökéletesen nem is lehet; csak az [illegible]ptimális megoldásra törekedhetünk. Tekintettel arra, hogy a gyűjteményben szereplő fizikai feladatok jelentős része jó feladat, tanulságos megoldással, másrészt a felsorolt követelmények nagy részével egyet lehet érteni, megpróbáltuk a kettőt egymáshoz illeszteni.

Az elkészült *Útmutató* kölcsönösen egymáshoz rendeli a hivatalos követelményeket és a könyvben szereplő feladatokat, ugyanakkor becsületesen rámutat azokra a helyekre is, ahol ilyen hozzárendelés nem lehetséges. Így segít az érettségire való felkészülésben a diáknak és segít a felkészítésben a tanárnak is.

Természetesen az *Útmutató* csak segítség lehet, egyáltalán nem ez az egyetlen lehetséges módja a könyv feldolgozásának. Ha valaki a könyv eredeti sorrendjében akarja megoldani a feladatokat, vagy éppen egy-egy kiválasztott fejezet példáival akar foglalkozni, tegye azt!

Fő, hogy minél többször érezze úgy, hogy nem hiába nyitotta ki valahol a könyvet.

Végül meg kell emlékeznünk e könyv egykori szerkesztőjéről és egyik szerzőjéről: Dér Jánosról, valamint a könyv lektorairól: Simonyi Károlyról és Kunfalvi Rezsőről. Dér János kezdeményezésére született meg a Dér–Radnai–Soós féle feladatgyűjtemény. Ő találta ki a fejezetek belső szerkezetét, a bevezető, gyakorló, házi és ajánlott feladatok rendszerét. Az általa kidolgozott fejezetek közül az Elektromágnesség volt a legkedvesebb gyereke, erre volt a legbüszkébb. Meg arra, hogy két olyan embert sikerült megnyernie a könyv lektorálására, mint Simonyi Károly professzort, aki ekkor már az Országos Felvételi Bizottság elnöke volt fizikából és Kunfalvi Rezső tanár urat, aki a Középiskolai Matematikai Lapok fizika rovatának szerkesztőjeként akkoriban találta ki és szervezte a nemzetközi fizikai diákolimpiát.

Dér János, Simonyi Károly, Kunfalvi Rezső emlékét is őrzi tehát a könyv.

Mindhárman a fizika oktatásának elkötelezett hívei voltak, mint ahogyan az az aktív tanítástól ma már visszavonult tankönyvszerző: Soós Károly és e könyv három szerzője közül a legfiatalabb, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok fizikai szerkesztőbizottságának mai vezetője, aki most értük és helyettük is vállalta, hogy segít a mai diákoknak az érettségire való felkészülésben, tanáraiknak pedig a felkészítésben.

Közös könyvünket fogadják bizalommal, használják jó kedvvel és járjanak sikerrel!

Dr. Radnai Gyula

Az Útmutató használata

[illegible] összefoglaljuk azokat a technikai megoldásokat, amelyek megkönnyítik az [illegible] használatát.

[illegible] betűvel írt címek, mondatok az új érettségi követelmények, abban a sor[illegible] ahogyan a hivatalos követelményrendszerben szerepelnek. Mivel a közép- [illegible] szintű követelmények megfogalmazásában sok a közös rész, ezért **álló vastag betűvel** szerepelnek a **közép- és emelt szinten egyaránt érvényes** követelmé[illegible] ***dőlt vastag betűvel*** pedig azok, amelyek ***csak emelt szintre*** vonatkoznak.

[illegible] egy cím alatt általában két sorban állnak azoknak a feladatoknak a számai, [illegible] feldolgozása segíti az adott téma vagy témakör megértését, az iskolában ta[illegible] alkalmazását. A felső, álló vastag betűvel írt feladatszámok (pl.: **1.8., 1.18.**) [illegible] koznak a közép- és emelt szintre egyaránt, az alsó, *dőlt betűvel* írt sor (pl.: ***1.32.,*** [illegible]) pedig csak az emelt szintre. Egy-egy soron belül se véletlen a sorrend: érde[illegible] azzal a feladattal kezdeni, amelyik a sorban elsőnek szerepel, és így haladni to[illegible] Megoldás után érdemes megnézni a könyvben közölt megoldást is, mert ez [illegible] műleg segít a továbbhaladásban. Ha négy vagy több, a feladatgyűjteményben [illegible] mást követő feladatot javasoltunk, akkor csak az első és az utolsó feladat számát [illegible] ki, közte három ponttal, s az egészet gömbölyű zárójelbe tettük. Pl.: [illegible] **16....2.20.)** vagy ***(2.22....2.40)***.

[illegible] megkönnyítendő az érettségire készülők dolgát, a hivatalosan közölt mintafel[illegible] ok és a 2004-ben írt próbaérettségi feladatok közül is kiválasztottunk néhányat [illegible] egy témakörhöz, és tájékoztatásul megadjuk a tesztkérdés vagy a nyílt végű – ha[illegible] mányos – feladat helyes megoldásáért járó pontszámot is. (A kérdések és feladatok [illegible] talos megoldásai az Oktatási Minisztérium internetes honlapján: **www.om.hu** [illegible] lhatók meg.) A könnyebb eligazodás kedvéért az *emelt szintű* kérdések és fel[illegible] tok vékony vonallal kiemelve, valamivel *beljebb* kezdődnek, így akit csak a kö[illegible] szint érdekel, ezeket könnyen átugorhatja. És még egy terminológiai változtatás: [illegible] feleletválasztós tesztfeladatokat itt az *Útmutató*ban kérdéseknek nevezzük, hogy [illegible] el is megkülönböztessük őket a hagyományos, nyílt végű, igazi feladatoktól.

ÚTMUTATÓ

Az új rendszerű közép- és emelt szintű érettségi követelmények szerinti előre haladáshoz

I. MECHANIKA

A DINAMIKA TÖRVÉNYEI

A testek mechanikai kölcsönhatása, az erő, az erő mérése, erők összegzése, *felbontása.*
3.17., 5.1., 5.2.
5.7., 5.8., 5.9., 5.17., 5.24., 5.25., 5.26.

Newton törvényeinek értelmezése. *Sztatikai tömegmérés.*
3.1., 3.2., 2.1., 2.2., 2.3., 2.6., 2.7., 2.8., 2.12., 2.13., 2.14., (2.16.... 2.20.), 3.10., 3.11.
(2.22.... 2.40.), 3.15., 3.16., 3.19., 22.40., 5.18., 5.19., 5.28.

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Mérlegen állva a mérleg mutatója 800 N értéket mutat. Mi történik abban a pillanatban, amikor a mérlegen álló személy hirtelen (gyorsulva) leguggol?

A. A mérleg többet mutat.
B. A mérleg kevesebbet mutat.
C. Nem változik a mutatott érték.

... [illegible] kapcsolatos (2 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

[illegible] mennyezetén rugóra akasztott test függ. Hogyan változik a rugó meg[illegible] amikor a lift elindul fölfelé?

[illegible]

[illegible] változik.

[illegible]

Szabaderők és kényszererők.
2.4., 2.5., 3.3., 3.5., 3.8., 3.12., 3.13.
(3.20.... 3.30.)

Az impulzus (lendület) megmaradása, felismerése és alkalmazása.
3.4., 3.6., 3.7., 3.9., 3.14., 3.18., 2.15.
(3.31.... 3.34.), 23.18., 23.52.

Az erőpár fogalma, a forgatónyomaték kiszámítása egyszerű esetekben.
5.3., 5.10., 5.14., 5.20., 5.27.

Tömegközéppont alkalmazása homogén, egyszerű alakú testek esetében.
5.4., 5.12., 5.13., 5.21., 5.22., 5.23.

Testek egyensúlyi helyzetének értelmezése.
Egyszerű gépek működésének leírása.
5.5., 5.6., 5.7., 5.11., 5.12., 5.16.
(5.29.... 5.42.)

MOZGÁSOK

A vonatkoztatási rendszer, pálya, út, idő, elmozdulás fogalmainak alkalmazása, a mozgás viszonylagossága.
1.1., 1.7., 1.16.
1.30., 1.31., 1.33., 1.34., 1.36.

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

A tavon 12 m/s sebességgel haladó hajón egy labda a hajó haladási irányával megegyező irányban 5 m/s sebességgel gurul. Mekkora a labda vízhez viszonyított sebessége?

A. 7 m/s
B. 8,5 m/s
C. 13 m/s
D. 17 m/s

A témával kapcsolatos (1 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Melyik a legnagyobb az alábbi sebességek közül?

A. 1 m/s
B. 1 km/h
C. 3,6 m/s
D. 3,6 km/h

Az egyenes vonalú, egyenletes mozgás leírása.
1.8., 1.18., 1.19.
1.32., 1.35.

Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás leírása, a sebesség, gyorsulás alkalmazása.
1.2., 1.3., 1.4., 1.9., 1.10., (1.20.... 1.24), 1.29.
(1.37.... 1.42.)

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Egy autó 50 km/h sebességről egy bizonyos fékút megtétele után tud megállni. Hogyan változik a fékút, ha az autónak 100 km/h sebességről kell lefékeznie, változatlan lassulást feltételezve?

A. A fékút $\sqrt{2}$-szeresére nő.
B. A fékút kétszeresére nő.
C. A fékút négyszeresére nő.

Az átlagsebesség és a pillanatnyi sebesség.
1.6., 1.17.
1.51.

A szabadesés, a függőleges *és a vízszintes* hajítás leírása.
1.5., 1.11., 1.12., 1.13., 1.25., 1.26., 1.27., 4.30.
1.14., 1.15., 1.28., (1.43.... 1.50.), 2.14., 2.19., 2.33., 4.39.

A mozgások grafikus jellemzése.
8.5., 8.16., 8.29.
8.45., 8.46.

A súrlódást leíró összefüggések alkalmazása.
2.3., 2.4., 2.8., 2.10., 2.11., 2.12., (2.18....2.26.), 7.12.
(2.35.... 2.40.), (3.28.... 3.31.)

Az egyenletes körmozgás leírása.
(6.1....6.4.), (6.14....6.18.), 7.5., 7.16.
6.25., 6.26., 7.38.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Van-e olyan mozgás, amelynél az állandó tömegű testre egyetlen, állandó nagyságú erő hat, és a test mozgási energiája a mozgás során állandó?

A. Nincs. A tehetetlenség törvénye szerint az állandó sebességű mozgáshoz nincs szükség erőre.
B. Van. Ilyen eset az, amikor egy szánkót állandó sebességgel húzunk.
C. Van. Példa erre az egyenletes körmozgás.
D. Nincs. Az erő mindig növeli a mozgási energiát.

A harmonikus rezgőmozgás jellemzői.
8.1., 8.2., 8.6., 8.7., 8.17., 8.18., 8.19.
8.27., 8.28., 8.30., 8.32., 8.33., 8.34., 8.44., 22.37.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

Egy részecske harmonikus rezgőmozgást végez. A következő állítások közül melyik helyes?

A. Ha a rezgés csillapodik, a frekvencia akkor is állandó marad.
B. A gyorsulás az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a legnagyobb.
C. Nagyobb sebességnél nagyobb a gyorsulás.
D. A gyorsulás mindig azonos irányú a sebességgel.

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltételének alkalmazása; a rezonancia jelensége, felismerése gyakorlati példákban.
(6.7....6.13.), (6.19....6.22.), 8.8., (8.10....8.13.), 8.20., 8.22., 8.23., 8.24.
(6.27....6.46.), (8.36....8.42.), 23.43.

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Milyen erő tartja körpályán a kanyarodó autót?

A. A kormánykerékre kifejtett forgatóerők, amelyek áttételeken keresztül hatnak a kerekekre.

B. A motor húzóereje.

C. A kerekek és a talaj között ható súrlódási erő.

A matematikai inga és az időmérés kapcsolata;
a matematikai inga periódusideje.
8.3.

A frekvencia, hullámhossz, terjedési sebesség fogalmának alkalmazása.
A longitudinális és transzverzális hullám leírása.
8.4., 8.49., 8.50.

A témával kapcsolatos (1 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Az alábbi állítások hullámjelenségekre vonatkoznak. Melyik *nem igaz* közülük?

A. A transzverzális és a longitudinális hullámok is polarizálhatóak.

B. Az interferencia jelensége hullámok találkozásakor jön létre.

C. Az elhajlás jelensége a hullámoknak a hullámhosszal összemérhető réseken, akadályokon történő áthaladásakor figyelhető meg.

Hullámjelenségek felismerése és leírása,
az interferencia létrejöttének feltétele.
Az állóhullámok felismerése,
az állóhullámok létrejöttének feltétele.
8.15., 8.26.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Két végén rögzített, 1 m hosszú húrt 200 Hz-es transzverzális rezgésben tartunk. A transzverzális hullámok terjedési sebessége a húron 100 m/s. Hány csomópont alakul ki (a rögzített végeken kívül)?

A. 1

B. 2

C. 3

D. Nem alakul ki állóhullám.

A hang tulajdonságainak (hangmagasság, hangerősség, hangszín) összekapcsolása fizikai jellemzőivel.
Az infra- és ultrahang jellemzői, a zajártalom.

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

MUNKA ÉS ENERGIA

A munka és a teljesítmény. A hatásfok.
(4.4....4.7.), 4.16., 4.17., 4.19., 4.22., 4.24.
4.31., 4.35., 4.36., 4.37.

A mozgási energia, *a munkatétel.*
4.2., 4.8., 4.9., 4.21., 4.30., 8.41
4.10., 4.18., 4.23., 4.26., 4.32., 4.34.

Az emelési munka, a helyzeti energia. *Konzervatív erők.*
4.1., 4.13., 4.14., 4.25., 4.29.
4.12.

A munka grafikus ábrázolása. *Lineárisan változó erő munkája.*
A rugalmas energia.
4.11., 8.9., 8.10., 8.11., 8.43.
4.35., 8.13., 8.23., 8.24., 8.38., 8.42

A mechanikai energia megmaradása, a törvény alkalmazása.
4.3., 4.15., 4.20., 4.27., 4.33., 4.38., 4.39.
4.28., 4.40., 8.39., 8.40., 8.45., 8.46.

A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET ALAPGONDOLATAI

A fénysebesség szerepe, az időtartam, a hosszúság, a tömeg relatívisztikus jellege, tapasztalati alátámasztások ismerete.
23.39., 23.40., 23.16., 23.4.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

A Földhöz képest 10 km/s sebességgel mozgó részecske szembe halad egy fotonnal. Mekkora a foton sebessége hozzá képest?

A. 10 km/s
B. 300 000 km/s – 10 km/s
C. 300 000 km/s
D. 300 000 km/s + 10 km/s

II. HŐTAN, TERMODINAMIKA

Hőtani témakörből *emelt szinten* mind a mintafeladatok között, mind a próbaérettségi feladatok között szerepelt egy-egy összetett feladat. Ezek a következők voltak:

Emelt szintű (16 pontos) mintafeladat volt:

Hőszigetelt, vízszintes hengerben 10 liter 27 °C-os oxigén van súrlódásmentes dugattyúval elzárva 100 kPa nyomáson. A henger belsejében lévő 5000 ohmos ellenállást 3 percig 220 V-ra kapcsoljuk.

a) Mekkora lesz a gáz térfogata a melegítés után?
b) Mennyit változott a gáz belső energiája?

Emelt szintű (17 pontos) próbaérettségi feladat volt:

Egy dugattyúval lezárt, hőszigetelt csőben 0,3 kg oxigéngáz van, melynek térfogata 0,1 m^3. A bezárt gáz nyomása 210 kPa. A csőbe egy elektromos fűtőszál nyúlik be, melynek teljesítménye 400 W. Ezt a melegítőt 15 percen keresztül működtetjük. Ez alatt az idő alatt a következő folyamat zajlik le: kezdetben a gáz állandó nyomáson 0,2 m^3 térfogatra tágul, majd itt a dugattyú megszorul, és ekkor a gáz nyomása emelkedni kezd.

Mekkora nyomása lesz a gáznak a folyamat végén?

(A szükséges állandókat a függvénytáblázatból keresse ki!)

ÁLLAPOTJELZŐK, TERMODINAMIKAI EGYENSÚLY

Az állapotjelzők ismerete, alkalmazások. Hőmérők és használatuk.
A Kelvin-skála.
22.11., 22.14., 15.8., 15.10., 15.16., 15.33., 15.34., 16.33.
Avogadro-törvény, anyagmennyiség. A termikus egyensúly értelmezése.
15.14., 15.35., 22.2., 22.3., 22.5., 22.6., (22.21....22.24.), 22.7., 22.29.
15.47., 15.48., 22.32., 22.33., 22.34.

HŐTÁGULÁS

Szilárd testek vonalas és térfogati hőtágulásának leírása.
15.1., 15.4., 15.7., 15.17., 15.18.
(15.26....15.30)

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Válassza ki a hamis állítást!

A. Régebben úgy rögzítették a vasúti síneket, hogy az egymás után következő sínszálak között tágulási közöket hagytak.

B. A vasbeton azért tehető ki hőingadozásnak, mert a vas és a beton hőtágulási együtthatója egyenlő.

C. A hőtágulás káros hatásának megelőzésére a hidakon az úttest egyes szakaszaiba fésűfogszerűen illeszkedő részeket iktatnak.

D. Ha egy üreges test hőmérsékletnövekedés hatására tágul, akkor az üreg mérete csökken.

Folyadékok hőtágulásának leírása. A hőtágulási jelenségek gyakorlati jelentősége.

15.5., 15.32, 15.31., 15.6.

15.26., 15.27., 15.28., 16.35.

ÖSSZEFÜGGÉS A GÁZOK ÁLLAPOTJELZŐI KÖZÖTT

Az ideális gáz speciális állapotváltozásainak leírása, *bemutatása.*

p-V diagramok értelmezése, *készítése.*

15.9., 22.4., 15.10., 15.12., 15.3., 16.12.

15.13., 15.22., 15.23., 16.14.,16.22., 16.24., 15.21., 15.41.

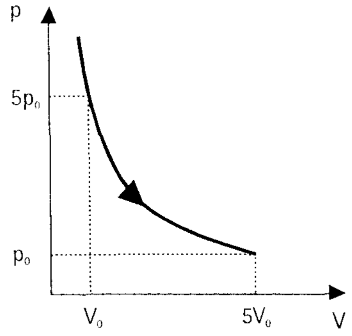
A témával kapcsolatos (1 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Adott mennyiségű ideális gáz izoterm állapotváltozását a nyíllal jelzett grafikon mutatja. Válassza ki a helyes állítást!

A. A gáz nyomása és térfogata egyenesen arányos.

B. Abban az állapotban, amikor a gáztérfogata $2V_0$, a gáz nyomása $3p_0$.

C. Abban az állapotban, amikor a gáztérfogata $2{,}5V_0$, a gáz nyomása $2p_0$.



A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

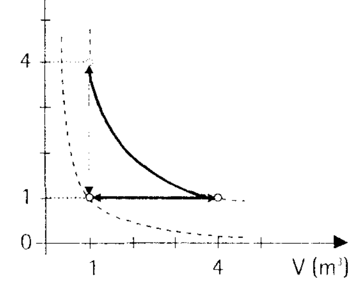
A grafikonon egy kezdetben (A állapot) 800 K hőmérsékletű nitrogéngáz állapotváltozásait ábrázoltuk. Válassza ki az alábbiak közül a helyes állítást!

A. A (C→A) folyamatban a gáz által végzett munka 3kJ.

B. A (C→A) folyamatban az állandó hőmérséklet miatt Q = 0.

C. A (B→C) folyamatban nem volt munkavégzés, tehát a gáz belső energiája nem változott.

D. Az (A→B) folyamatban a gázon végzett munka 300 kJ.



Az egyesített gáztörvény alkalmazása egyszerűbb problémákban.

Az állapotegyenlet ismerete, *alkalmazása.*

15.9., 22.4., 15.2., 15.14., 15.24., 15.15., 15.25.

15.11., 15.19., 15.20., (15.36....15.48.)

A KINETIKUS GÁZMODELL

A hőmozgás értelmezése.

Az állapotjelzők kvalitatív értelmezése a modell alapján.

22.7., 22.29., 22.8., 22.12., 22.4., 22.13., 22.14., 22.17., 22.11., 22.60.

22.16., 22.24., 22.30., (22.32....22.36.), (22.42....22.59.)

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

Egy zárt hengerben fallal elválasztva két különböző moláris tömegű gáz található. A falon nyílást nyitva, milyen folyamat játszódhat le?

A. A nagyobb moláris tömegű gáz átmegy a kisebb moláris tömegű gáz oldalára.

B. A folyamat során a két gáz nyomása kiegyenlítődik, ezért csak abból a térrészből megy át gáz a másik oldalra, ahol a nyomás nagyobb volt.

C. Nem dönthető el, mi történik, mert minden folyamat lejátszódhat, amit az energiamegmaradás törvénye nem tilt.

D. Visszafordíthatatlan események játszódnak le úgy, hogy a folyamat végén mindkét térrészben lesz mindkét gázból ugyanolyan arányban.

TERMIKUS ÉS MECHANIKAI KÖLCSÖNHATÁSOK

A hőközlés, hőmennyiség, fajhő fogalmainak ismerete, alkalmazása.
16.5., 22.10., 22.54., 16.9., 16.1., 16.2., 16.10., 16.11., 16.21., 16.25.
16.34., 16.36

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Egy nagy fajhőjű samott-tégla és egy kisebb fajhőjű „közönséges" tégla tömeg azonos. Melegítés közben mindkettő azonos hőmennyiséget vesz fel. Melyiknek n meg jobban a hőmérséklete?

A. A samott-téglának.
B. A „közönséges" téglának.
C. Egyformán.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Ha két egyenlő tömegű vas- és ólomdarabot egyforma munkabefektetéssel kalapálunk, az ólom jobban felmelegszik, mint a vas. Miért?

A. Mert magasabb az olvadáspontja, mint a vasé.
B. Mert alacsonyabb az olvadáspontja, mint a vasé.
C. Mert nagyobb a fajhője, mint a vasé.
D. Mert kisebb a fajhője, mint a vasé.

A belső energia értelmezése.
22.9.
(22.43....22.56.)
A térfogati munka értelmezése.
16.13., 16.14., 16.22., 16.23.
16.42., 16.43.

A termodinamika első főtétele, jelentősége, alkalmazása.
16.3., (16.5....16.9.) 16.11.
16.19., 16.20., 16.31.

Nyílt folyamatok ideális gázokkal: izoterm, izochor, izobár, adiabatikus folyamatok energetikai jellemzése.
15.12., 15.13., 15.22., 16.12., 16.22., 16.23.,
16.42., 16.43.

...l kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

...lbbi állítások gázok állapotváltozásaira vonatkoznak. Melyik állítás igaz?

...gázok állapotváltozásai közben valamelyik állapotjelző mindig állandó marad.
...Izoterm állapotváltozásnál a gázzal közölt hő teljes egészében a gáz tágulási munkáját fedezi.
...térfogat növekedésekor mindig nő a gáz energiája is.

...témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Adott mennyiségű normálállapotú gáz hőmérsékletét kétféleképpen változtatjuk meg: izobár, ill. izochor módon. A hőmérséklet-növekedés mindkét esetben ugyanakkora. Melyik esetben nagyobb a gáz belső energiájának változása?

A. Az izobár folyamatban.
B. Az izochor folyamatban.
C. Mindkét folyamatban ugyanakkora.
D. Nem dönthető el.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (14 pontos)* mintafeladat volt:

Egy mól ideálisnak tekinthető, kezdetben 300 K hőmérsékletű gázt 300 kPa értékű állandó nyomáson melegítettünk fel. Ezután a gázt állandó térfogaton lehűtöttük eredeti hőmérsékletére. Az állapotváltozások során a gáz összesen ... kJ hőt vett fel a környezetéből.

a) Mennyi tágulási munkát végzett a gáz a felmelegítés során?
b) Mekkorára nőtt a gáz térfogata?

Az általános gázállandó $R\ (= N_A k) = 8{,}31\ \mathrm{J/(mol.K)}$

A gázok állandó nyomáson és állandó térfogaton mért fajhőjének megkülönböztetése.
16.13., 16.23., 22.51., 22.52., 22.53.
16.42., 16.43.

Speciális körfolyamatok értelmezése.
Az elsőfajú perpetuum mobile lehetetlensége.
15.23., 16.3., 16.24., 16.30.

HALMAZÁLLAPOT-VÁLTOZÁSOK

A halmazállapotok tulajdonságainak ismerete.
22.20., 22.26., 22.27., 22.30., 22.34., 22.57.
(22.35....22.39.)

Olvadás és fagyás energetikai vizsgálata.
16.18., 16.26., 16.40.
16.45.

A témával kapcsolatos (13 pontos) középszintű mintafeladat volt:

Mennyi hő szabadul fel, ha a Balaton 0 °C hőmérsékletű vize befagy? Tegyük fel, hogy a jégtakaró átlagos vastagsága 5 cm. A Balaton területe 595 km². A jég olvadáshője 333 kJ/kg. A jég sűrűsége 920 kg/m³. Miért nem lehet ezt a hatalmas energiamennyiséget hasznosítani?

Párolgás és lecsapódás, forrás energetikai vizsgálata.
16.16., 16.27., 16.28.
22.18., 22.25., 16.39., 16.40., 16.44., 16.45.

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Mi van a régóta forrásban lévő vízben keletkező buborékokban?
A. Vákuum.
B. Levegő.
C. Vízgőz.

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Az arcszeszt hidegebbnek érezzük az arcunkon, mint a vizet. Miért?
A. Az arcszesznek alacsonyabb a fagyáspontja, mint a víznek.
B. Az arcszesz gyorsabban párolog, mint a víz. A párolgó arcszesz arcbőrünktől vonja el leginkább a párolgáshoz szükséges energiát.
C. Az arcszesz fajhője nagyobb, mint a vízé, így a bőr száradása több energiát igényel.

A nyomás szerepének kvalitatív leírása.
A gáz és a gőz különbsége, a telítetté válás kvalitatív leírása.
16.37., 16.38.
22.4., 22.1., 22.19., 16.41., 16.45.

[illegible]csolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible] gyorsabban az étel kuktában, mint közönséges fazékban?
A. [illegible] kialakuló nagy nyomás jobban megpuhítja az ételt, ezért kevesebb [illegible] a főzéshez.
B. [illegible] 100 °C-nál alacsonyabb hőmérsékleten forr fel a víz, így hama[illegible] fő meg az étel.
C. [illegible] nyomáson magasabb a forráspont, ezért a víz hőmérséklete 100 °C [illegible]

[illegible] kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

[illegible] hegymászók 2000 méteres magasságban pihenőt tartanak és bográcsban [illegible] főznek. Gyorsabban vagy lassabban fő meg a hús, mint a tengerszint[illegible]?
A. Gyorsabban.
B. Ugyanannyi idő alatt.
C. Lassabban.
D. Ezekből az adatokból nem állapítható meg.

A víz különleges tulajdonságainak ismerete, ezek jelentősége.
15.8., 16.1., 16.16., 16.21., 16.26., 16.28.,
16.40., 16.41., 16.44., 22.19.,22.18., 22.25., 22.59.

A levegő páratartalma.
A légkört érő káros behatások és következményeik.

[illegible]kre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE

A második főtétel szemléltetése mindennapi példákon.
A hőerőgépek hatásfokának korlátai.
Irreverzibilis és reverzibilis folyamatok megkülönböztetése.
Rendezettség, rendezetlenség kvalitatív értelmezése.
16.29.
22.9., 22.10.,22.15., 22.31., 22.38., 22.46., 22.58., 23.34.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Ha egy gázzal teli tartályt autóval szállítunk, mekkora lesz a gáz hőmérsé-lete a nyugvó tartályú gázéhoz képest?

A. Nagyobb lesz, mert a molekulák mozgási energiája is nagyobb.
B. Nem változik, mert a molekulák rendezetlen mozgása sem változik.
C. Gyakorlatilag nem változik, mert az autó sebessége nem összemérhető a molekulák sebességével.
D. Kisebb lesz, mert a mozgás lehűti a gázt.

A témával kapcsolatos alábbi mintakérdés közép- és *emelt szinten* is szerepelt:

(A helyes válasz középszinten 2 pontot, *emelt szinten 1 pontot* ért.)

A visszafelé lejátszott filmek sokszor azért mulatságosak, mert a látott folyamato-sohasem játszódnak le a valóságban (pl. az összetört pohár darabjai nem állnak össze-egésszé). Melyik általános törvény fogalmazza meg a folyamatoknak ezt a fontos je-lemzőjét?

A. Az energiamegmaradás törvénye.
B. A tömegmegmaradás törvénye.
C. A hőtan második főtétele.

A másodfajú perpetuum mobile lehetetlensége.
A hőerőgépek működésének leírása konkrét esetekre.
A hűtőgép működési elve.

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

III. ELEKTROMÁGNESSÉG

ELEKTROSZTATIKA

[illegible]ktrosztatikai alapjelenségek értelmezése, bemutatása.
A töltésmegmaradás törvénye.
17.12., 17.33., 17.9.
18.11., 18.14.

[illegible] kapcsolatos (4 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible] elektroszkópot egymástól függetlenül feltöltünk, majd egy vezető-[illegible]. Azt tapasztaljuk, hogy az egyik elektroszkóp lemezei az összekötés [illegible] jobban, a másiké kicsit kevésbé ágaznak szét, mint eredetileg. Mit álla-[illegible] meg az elektroszkópok eredeti töltéséről?

[illegible] előjelű és nagyságú volt.
[illegible] előjelű, de különböző nagyságú volt.
[illegible]tétes előjelű, de azonos nagyságú volt.
[illegible]ntétes előjelű és különböző nagyságú volt.

[illegible] kapcsolatos középszintű (15 pontos, választható) próbaérettségi feladat

[illegible]forma töltetlen elektroszkóp rézdróttal van összekötve. Az első esetben [illegible]söléssel elektromos állapotba hozott műanyag rúddal *közelítünk* az egyik [illegible]kóphoz, majd a fémes összeköttetést megszakítjuk. Ezután a rudat eltávo-[illegible]

[illegible]sodik esetben a töltött rudat az egyik elektroszkóphoz *érintjük*, majd a fé-[illegible]köttetést megszakítjuk. Ezután a rudat eltávolítjuk.

[illegible]gymáshoz képest mekkora és milyen előjelű töltése lesz az elektroszkópoknak [illegible] rúd eltávolítása után az első, illetve a második esetben? Miért?

Ha valaki nem tudja, hogyan töltöttük fel az elektroszkópokat, hogyan tudná [illegible]ldönteni, hogy azonos vagy ellentétes előjelű-e a töltésük?

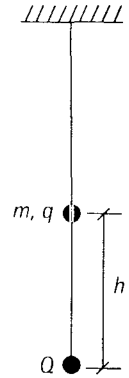
A Coulomb-törvény *alkalmazása.*
17.1., 17.4.
17.20., 17.21., 17.31., 17.32., 17.34.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (13 pontos)* mintafeladat volt:

Az ábrán látható vékony, függőleges szigetelő szál végére rögzített kisméretű test elektromos töltése $Q = 10^{-7}$ C. A szálon súrlódásmentesen mozoghat egy $m = 10^{-4}$ kg tömegű, $q = 10^{-8}$ C töltésű, kisméretű gyöngy.

a) Egyensúlyi helyzetben mekkora lesz a közöttük lévő h távolság?

b) Ha kezdetben a gyöngyöt a rögzített test felett h_0 = 27 cm távolságban tartjuk, majd elengedjük, akkor milyen irányban és mekkora gyorsulással indul el a gyöngy? $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2, g = 9,81 m/s^2.



Az elektrosztatikus tér jellemzése: térerősség, erővonalak, feszültség.
Potenciál, ekvipotenciális felületek.
17.2., 17.5., 17.6.,17.20., 17.23.
17.35., 17.37., 17.40., 17.41.
Többlettöltés fémen, alkalmazások.
17.11., 17.42.
17.10., 17.43.

A kapacitás fogalma, a kondenzátorok egy-két gyakorlati alkalmazásának ismerete.
A szigetelő hatása. A síkkondenzátor kapacitása.
17.3., 17.13., 17.14., (17.25....17.30.)
(17.16....17.19.), 17.38., 17.39., (17.44....17.50.)

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Egy fémgömb elektromos kapacitása kétszer akkora, mint egy kisebbé, elekt-romos töltésük pedig egyenlő. Összeérintésük, majd szétválasztásuk után mek-kora lesz a gömbök töltése?

A. A két gömb töltése egyenlő lesz.
B. A nagyobb gömb töltése fele akkora lesz, mint a kisebb gömb töltése.
C. A nagyobb gömb töltése kétszer akkora lesz, mint a kisebb gömb töltése.
D. A töltések aránya a felületek arányával egyenlő, mert a felületi töltéssűrűségek egyenlők.

[illegible] kapcsolatos, ugyancsak *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

[illegible] kondenzátor energiáját úgy növelni, hogy töltését nem változ-[illegible]

[illegible] megpedig úgy, hogy a lemezeket (fegyverzeteket) közelebb visz-[illegible] egymáshoz.

[illegible] mégpedig úgy, hogy a lemezeket távolabb visszük egymástól.

[illegible] lehet, mert a térerősség nem változhat.

[illegible] lehet, mert energiát csak töltéssel lehet a rendszerbe juttatni.

[illegible] kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

[illegible] csökken a feltöltés után a telepről lekapcsolt síkkondenzátor feszült-[illegible] a lemezek közé szigetelőanyagot juttatunk?

A. A rendszer energiája állandó, tehát a kapacitás növekedése feszültség-csökkenéssel jár.

B. A szigetelőanyag megváltoztatja a lemezeken a töltéseloszlást, ezért csökken a feszültség.

C. Nem csökkenhetett a feszültség, hiszen a kapacitásnövekedéssel együtt nőtt a kondenzátor energiája is.

D. Állandó marad a töltés, a kapacitás növekedett, így a feszültség csökken.

Töltések mozgása elektromos térben.
17.7., 17.8., 17.24., 23.14., (23.26....23.29.), 23.37.

AZ EGYENÁRAM

Az áramkör részei. Áram- és feszültségmérés.
19.22., 19.30., 19.32., 18.15., 18.16., 18.17., 18.29., 18.30., (18.47....18.52.)
18.11., 18.12., 18.13.

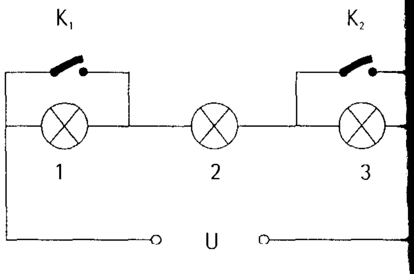
A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

Az alábbi kijelentések a mellékelt ábra szerinti kapcsolásra vonatkoznak. Köz-lük melyik az igaz?

A. Ha mindkét kapcsoló zárva van, akkor mindhárom izzólámpa világít.

B. Ha a K_1 kapcsoló nyitva van, a K_2 kapcsoló pedig zárva, akkor a 2. és a 3. izzólámpa világít.

C. Ha mindkét kapcsoló zárva van, akkor csak a 2. izzólámpa világít.



Ohm törvénye, *ellenállásmérés*. Vezetők ellenállása, fajlagos ellenállás.

18.1., 18.7., 18.8., 18.20., 18.34.

18.50., 19.17., 19.29.

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása, az eredő ellenállás meghatározása.

18.3., 18.4., 18.21., 18.22., 18.25., 19.1., (19.3....19.11.)

(18.40....18.43.), 19.20., 19.23., (19.33....19.37.), 19.39., 19.40.

A fémek ellenállásának hőmérsékletfüggése.

18.23., 18.31., 18.35.

Az egyenáram munkája és teljesítménye.

18.2., 18.9., 18.10., 18.18.

18.24., 18.27., 18.28., 19.21., 19.38., 19.44.

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Mekkora a fogyasztása a 300 W névleges teljesítményű elektromos készülékne 3 üzemóra alatt?

A. 100 Wh.

B. 900 Wh.

C. 10,8 kWh.

Az egyenáram hatásai, alkalmazások.

18.19., 18.26., 19.8., 19.19.

19.48., (18.36....18.39.)

A galvánelem és az akkumulátor.

19.2., 19.12., 19.13., 19.14., 19.26., 18.32., 18.33.

19.27., 19.28., 19.31., 19.41., 19.42., 19.43., 19.47.

Az érintésvédelmi szabályok ismerete és betartása.
Félvezetők tulajdonságai, alkalmazások

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

MAGNETOSZTATIKA. EGYENÁRAM MÁGNESES TERE

A Föld mágnessége, az iránytű használata.
A magnetosztatikus tér jellemzése: a mágneses indukcióvektor és a mágneses fluxus.

20.1., 20.9., 20.10., 20.27., 20.35.

20.7., 20.44., 20.47.

Speciális alakú áramvezetők mágneses tere.
Elektromágnes, gyakorlati alkalmazások.

20.17., 20.18., 20.35., 20.36., 21.11., 23.33.

(20.12....20.16.), (20.30....20.34.), (20.48....20.51.)

A Lorentz-erő és *alkalmazása.*

23.30.,23.38., (20.2....20.5.), 20.8., 20.28., 20.29.

23.11., 20.11., 20.38., 20.45., 20.46.

AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

A mozgási és a nyugalmi indukció jelenségének leírása, Lenz törvénye.

20.6., (20.20....20.26.), (20.39....20.43.)

(20.52....20.55.), (20.57....20.61.)

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Függőleges rézcsőbe beejtünk egy henger alakú, erős kis mágnest, majd eg vele azonos méretű alumíniumhengert. Melyik tárgy esik le rövidebb idő alatt

A. A mágnes, mert nehezebb az alumíniumnál.
B. Ugyanannyi idő alatt érnek le, mert mindkettő szabadesést végez.
C. Az alumíniumhenger, mert a mágnes mozgását fékezi az általa a rézcső ben keltett örvényáram.
D. Attól függ, hogy a mágnes melyik pólusa áll lefelé, mert a Föld mágne ses tere taszíthatja és vonzhatja is a mágnest.

Az elektrosztatikus tér és az indukált elektromos tér összehasonlítása.
Az önindukció jelensége az áram ki- és bekapcsolásánál.

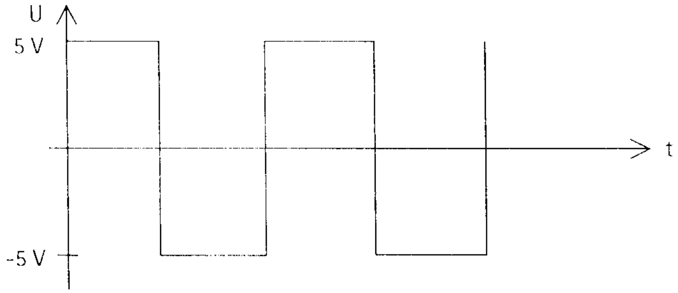
Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

A VÁLTAKOZÓ ÁRAM

A váltakozó áram jellemzése, *időbeli lefolyásának leírása,*
az effektív feszültség és áramerősség.
(21.1....21.5.), 21.8., 21.9., 21.10., (21.23....21.26.)
(21.38., 21.39., 21.40.)

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Mekkora az ábra szerinti feszültség effektív értéke?



A. 2,5 V B. $\frac{5}{\sqrt{2}}$ C. 5 V D. $5\sqrt{2}$ V

A váltakozó áram munkája, effektív teljesítménye.
21.7., 21.19.
21.47., 21.48., 21.49., 21.55.

A [illegible] kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible] a hálózati feszültség feleakkora, mint hazánkban. Ha merülőforralónk-[illegible] pohár vizet 5 perc alatt melegítünk fel a kívánt hőmérsékletre, akkor [illegible] művelet Japánban mennyi ideig tartana (megközelítőleg)?

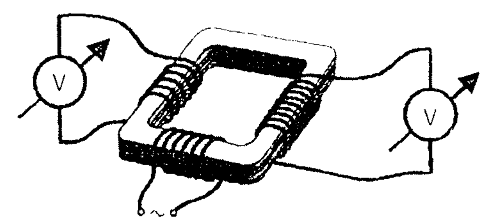
A. [illegible]
B. [illegible]
C. [illegible]
D. [illegible]

Az elektromos energia gyakorlati alkalmazásai
(generátor, motor, transzformátor).
20.56., 21.20., 21.21., 21.22., 21.37.
21.50., 21.51., 21.52.

A [illegible] kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

[illegible] vasmagon 3 egymástól független tekercset helyeztek el. A tekercsek me-[illegible] rendre 45, 60 és 90. Melyik tekercs végeit kapcsolták a 24 V-ot szolgálta-[illegible] feszültségű tápegységre, ha a másik két tekercsen 12 V, illetve 16 V fe-[illegible] mérhetünk?

A. [illegible]0 menetest.
B. [illegible]0 menetest.
C. [illegible]5 menetest.



A tekercs és a kondenzátor váltakozó árammal szembeni
viselkedésének magyarázata.
21.6., (21.13....21.18.), (21.27....21.36.),
(21.43....21.46.), 21.53....21.56.)

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

Sajnos erre a témakörre nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

A témakörre vonatkozó (1 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Milyen sebességgel terjednek a rádióhullámok a levegőben?

A. A rádióhullámok ugyanolyan gyorsan terjednek, mint a hang.

B. Attól függ, milyen hullámhosszú hullámról van szó.

C. Minden rádióhullám ugyanakkora sebességgel terjed. Ez a sebesség megegye zik a fény terjedési sebességével.

A témakörre vonatkozó *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

A következő állítások közül melyik hamis?

A. A röntgensugarak katódsugárzás alkalmával a katódsugárcső katódjáró indulnak ki.

B. A röntgensugárzás elektromágneses hullám.

C. A röntgensugarak sem elektromos, sem mágneses térben nem térülnek e

D. A röntgensugarak elhajlását kristályráccsal lehet kimutatni.

A FÉNY

Fényforrások, fénynyaláb, fénysugár, a fénysebesség mérése.
12.1., 12.28., 10.25., 12.35., 12.22., 12.4., 12.21., 12.13.

A fény visszaverődése, a visszaverődés törvénye.
10.1., 10.23., 10.24., 10.39., 12.2.

A fénytörés, a Snellius-Descartes-törvény, a teljes visszaverődés jelensége.
10.4., 10.8., 10.9., 10.16.
(10.26....10.31.)

Prizma, plánparalel lemez.
10.7., 10.6., (10.32....10.37.), 12.29.

...val kapcsolatos *emelt szintű (12 pontos)* mintafeladat volt:

... vízszintesen fekvő, üvegből készült plánparalel lemezen 0,3 ns alatt ha- ... egy fénysugár. Ez a fénysugár a lemezben a függőleges iránnyal 30°-os ... zár be.

... Milyen vastag a lemez?

... A lemezből kilépő fénysugár a lemezbe belépő fénysugárhoz képest mekkora eltolódással halad tovább?

... üveg törésmutatója 1,5. A fény sebessége levegőben $3 \cdot 10^8$ m/s.

Színfelbontás prizmával, homogén és összetett színek.
12.41., 12.43., 12.44.

A fény hullámjelenségeinek ismerete (interferencia, *elhajlás*, polarizáció).
A lézerfény sajátosságai.
10.4., 12.22.
12.41., 12.42.

A ...val kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

... ...ik felszínén úszó olajos szennyeződéseken gyakran látni színes foltokat. Mi ... jelenség magyarázata?

A vékony olajréteg, hasonlóan a prizmához, színekre bontja a fehér fényt.

... Az olajréteg aljáról, illetve a tetejéről visszaverődő fénynyalábok interferálnak, a különböző színű fények különböző helyeken oltják ki egymást.

... Az olajfolt torzítva tükrözi vissza a környezetet, ezért csak a színek ismerhetők fel, a tükrözött tárgyak alakja nem.

Képalkotás, valódi és látszólagos kép, nagyítás fogalmának ismerete, alkalmazása.
10.5., 10.10., 10.15., 10.21., 11.22., 12.6., 12.14., 12.23.
10.36., 12.17., 12.18.

A síktükör, a gömbtükrök és a leképezési törvény ismerete.
10.39., 10.19., 10.2., 10.3., (10.11....10.15.), 10.17., 10.18., 10.20., 10.22.
12.7., (10.40....10.43.), 10.38.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

Fényesre csiszolt, függőleges tengelyű acélhengert használunk tükörnek. Milyennek látjuk magunkat?

A. Valós magasságúnak és kövérebbnek.
B. Valós magasságúnak és soványabbnak.
C. Alacsonyabbnak és soványabbnak.
D. Magasabbnak és kövérebbnek.

Az optikai lencsék és a leképezési törvény ismerete, a dioptria fogalma.
(11.1....11.26.), 12.3., 12.5.
(11.27....11.39.), 12.12., 12.19., (12.24....12.27.), 12.37....12.40.)

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Egy 5 dioptriás gyűjtőlencse elé hova kell elhelyezni a pontszerű fényforrást, hogy párhuzamos sugárnyalábot állítson elő?

A. 5 cm-re.
B. 20 cm-re.
C. 2 m-re.
D. 5m-re.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Két vékony gyűjtőlencse fókusztávolsága egyenlő, $f = 5$ cm, tengelyük közös, egymástól való távolságuk is f. Melyik állítás igaz az egyik lencsétől 15 cm-re lévő tárgyról a lencserendszer által alkotott képre?

A. Kicsinyített, fordított állású.
B. Kicsinyített, egyenes állású.
C. Nagyított, fordított állású.
D. Nagyított, egyenes állású.

Optikai eszközök: a nagyító, a mikroszkóp, a távcső,
a szem, a szemüveg, a fényképezőgép működésének alapelvei.
11.9., 11.10., (12.8....12.11.), 12.16., 12.20., 12.15., (12.27....12.36.), 11.23.

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Diavetítőben a lencséhez képest hová kell tenni a diaképet?

A. A fókusztávolságon belülre.
B. Az egyszeres és kétszeres fókusztávolság közé.
C. A kétszeres fókusztávolságon kívülre.

IV. ATOMFIZIKA, MAGFIZIKA

AZ ANYAG SZERKEZETE

Az atom, molekula, ion, elem fogalma.
Az anyag atomos szerkezetének alátámasztása konkrét jelenségekkel.
23.6., 23.8., 22.17.
23.1., 23.21., 23.43., 22.58., 22.59.

A témával kapcsolatos, közép- és *emelt szinten* is feladott próbaérettségi kérdés volt:
(Helyes válasz középszinten 3, *emelt szinten 1 pontot* ért.)

Az alábbi jelenségek közül melyik támasztja alá azt, hogy az anyag atomos szer-[illegible]

A. A fény polarizálhatósága.
B. A folytonos színképek.
C. A Brown-mozgás.
D. Az általános tömegvonzás.

AZ ATOM SZERKEZETE

Az elektromosság atomos szerkezetének értelmezése az elektrolízis alapján.
23.6., 23.9., 23.10., 23.11.,
23.22., 23.23., 23.35., 23.36.
Az elektron töltése és tömege, az *ezzel kapcsolatos kísérletek értelmezése.*
Rutherford szórási kísérlete és atommodellje.
23.2., 23.7., 23.12., 23.34., 23.42.
23.13., 23.37., 23.39., 23.40., 23.27.

[illegible] kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible] kísérletek, jelenségek közül melyik igazolja az atommag létezését?

[illegible] Rutherford szórási kísérlete.
[illegible] fényelektromos jelenség.
[illegible] Minden anyag 1 mólnyi mennyiségében ugyanannyi részecske van.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Rutherford atommodellje szerint az atomban az elektronok a kis térészben koncentrálódó atommag körül keringenek. Mi volt ennek a modellnek a hiányossága?

A. Nem magyarázta meg, miért semleges az atom.
B. Az atommag körül mozgó, azaz gyorsuló elektronoknak állandóan elektromágneses hullámokat kellene kibocsátaniuk, ez azonban nincs így.
C. Nem magyarázta meg, hogy Rutherford szórási kísérletében miért hatol át a vékony fémfólián az alfa-sugárzás nagy része.
D. Nem adott magyarázatot az atomok különbözőségére.

A KVANTUMFIZIKA ELEMEI

Az energiaszintek kvantáltsága, Planck-formula. 23.5., 23,7., 23.16.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

A röntgenkészülékben a valamekkora feszültséggel felgyorsított elektronok a becsapódáskor lefékeződve röntgensugárzást hoznak létre. Hogyan változik a fékezési röntgensugárzásban észlelt legkisebb hullámhossz, ha a gyorsítófeszültséget növelik?

A. Nő, mert a legkisebb hullámhossz arányos az elektron energiájával.
B. Nincs legkisebb hullámhossz, mert folytonos a színkép.
C. Csökken, mert a legkisebb hullámhossz fordítottan arányos az elektronok sebességével.
D. Csökken, mert a legkisebb hullámhossz fordítottan arányos az elektronok energiájával.

A fotoeffektus és értelmezése. A foton tömege és energiája, *a kilépési munka meghatározása.* A fény kettős természete. 23.5., 23.31. *23.17., 23.45., 23.46., 23.47.*

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

A megvilágító fény melyik jellemzőjét kell növelni, ha azt akarjuk, hogy a fotokatódból kilépő elektronok sebessége növekedjen?

A. A frekvenciáját.
B. Az erősségét.
C. A megvilágítás idejét.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

A fotoeffektus során UV-fény hatására a fotokatódból elektronok lépnek ki. Mi történik, ha a fény intenzitását kétszeresére növeljük, miközben „színe" változatlan marad?

A. Kétszer annyi elektron lép ki, változatlan sebességgel.
B. Változatlan számú elektron lép ki, kétszer akkora mozgási energiával.
C. Változatlan számú elektron lép ki, kétszer akkora sebességgel.
D. A kilépő elektronok száma és sebessége is nőhet.

A témával kapcsolatos, ugyancsak *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

A fémezüstből az elektron kilépési munkája 0,757 aJ. Az elektromágneses spektrum melyik tartományába esik az a (nem feltétlenül látható) fény, amelynek hatására az elektronok még éppen kilépnek az ezüst felületéről?

A. A vörös fényhez közeli infravörös sugárzás.
B. Vörös fény.
C. Kék fény.
D. Ibolyántúli fény.

A kibocsátási és elnyelési színképek keletkezésének ismerete, a hullámhossz és az energia kapcsolata. 23.5., 23.44.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (13 pontos)* próbafelvételi feladat volt:

Egy 400 W-os Na-lámpa a felvett energia 5 %-át sugározza ki 589 nm hullámhosszú sárga fény formájában.

a) Hány olyan fotont bocsát ki a lámpa 1 s alatt, amelyhez 589 nm hullámhossz tartozik?
b) Mekkora a kibocsátott fény sebessége vízben?

(A fény terjedési sebessége vákuumban és levegőben is $3\cdot10^8$ m/s, a Planck-állandó értéke $h = 6{,}53\cdot10^{-34}$ Js, a víz levegőre vonatkozó törésmutatója 1,33.)

Az elektron kettős természete, a *de Broglie-hullámhossz*.
A Heisenberg-féle határozatlansági reláció ismerete.
A Bohr-modell sajátosságai, újszerűsége, *korlátai*.
Az elektronburok szerkezete: a fő- és mellékkvantumszám
és az elektronhéj fogalma, a Pauli-elv szerepe.
Az elektron „tartózkodási helyének" jelentése.

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

AZ ATOMMAGBAN LEJÁTSZÓDÓ JELENSÉGEK

Ezzel a témakörrel kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt a következő:

Válassza ki a helyes állítást!

A. Alfa-sugárzáskor az atom tömegszáma és rendszáma néggyel csökken.
B. A radioaktív bomlási sorozat bármely eleme képes kibocsátani alfa-, béta- és gamma-sugarakat.
C. A Wilson-ködkamrában a sugárforrásból kilépő részecskék pályájuk mentén ionizációt hoznak létre.
D. Az atommagot alkotó nukleonok közötti erős kölcsönhatás neutron-neutron párok között a legerősebb.

Az atommag összetétele.
23.32., 23.57., 23.28., 23.1.

Az erős kölcsönhatás, nukleonok, tömeghiány és kötési energia, tömeg-energia ekvivalencia fogalmainak használata az atommag leírásában.
23.19., 23.32., 23.3., 23.4., 23.56.

A természetes radioaktív sugárzás (alfa, béta, gamma) leírása, felezési idő, aktívitás, *bomlási törvény*.
Atommag-átalakulások leírása, izotópok, alkalmazások.
(23.50....23.54.)
23.20., 23.49.

[illegible] kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible]aktív szennyeződés sugárzásának erősségét (aktivitását) mérve megállapí[illegible] hogy 20 év alatt 20 %-kal csökkent. Az új érték mennyi idő alatt csökken [illegible]

[illegible] év.
[illegible] év.
[illegible] év.
[illegible] év.

[illegible] kapcsolatos ugyancsak (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

[illegible] rendszámú, 226-os tömegszámú Ra-atom α-sugarakat bocsát ki. Mek[illegible] tömegszámú és rendszámú új atommag marad vissza?

[illegible] es tömegszámú, 86-os rendszámú atommag.
[illegible] es tömegszámú, 84-es rendszámú atommag.
[illegible] es tömegszámú, 88-as rendszámú atommag.
[illegible] es tömegszámú, 84-es rendszámú atommag.

[illegible]mával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Egy valamilyen részecskesugárzást kibocsátó anyagtól 1 m-re lévő detektor [illegible]enként 100 kattanással jelez. (A sugárzás a tér minden irányába egyforma [illegible]nzitással terjed.) Percenként hányat kattan a detektor 2 m távolságban?

A. 25.
B. 50.
C. 100.
D. 200.

[illegible]mával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

Milyen részecske hatására történt az alábbi magátalakulás?

$$_{4}Be + ? = {}_{3}Li + \gamma$$

A. Pozitron.
B. Elektron.
C. Proton.
D. Neutron.

Az atomenergia felhasználásának ismerete: maghasadás, láncreakció, atomreaktor, atombomba. Az atomenergia jelentősége, előnyei, hátrányai, összehasonlítás más energiafelhasználási módokkal. 23.55., 23.58., 23.59.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:
Mi a moderátor szerepe az atomreaktorban?
A. A reaktor hűtése.
B. A moderátor akadályozza meg, hogy neutronok jussanak ki a reaktorból.
C. A hasadáskor keletkező neutronok lassítása.
D. A moderátor tartalmazza a hasadóanyagot.

Magfúzió, hidrogénbomba, a Nap energiája.

A témával kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:
Az alábbiak közül melyik folyamathoz hasonló a Nap energiatermelése?
A. A Napban a gázok belső energiája szabadul fel.
B. A Nap energiatermelése a hirosimai atombomba működéséhez hasonló.
C. A Napban fúziós folyamatok szolgáltatják az energiát.

SUGÁRVÉDELEM

A radioaktív sugárzás környezeti és biológiai hatásainak ismerete, a sugárterhelés fogalma, *mennyiségi jellemzés.* A sugárvédelem módszerei.

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

A témával kapcsolatos (1 pontos) középszintű mintakérdés volt:
A gyógyászatban széleskörűen használják a röntgensugárzást. Mik alkotják ezeket a sugarakat?
A. Nagyfrekvenciájú elektromágneses hullámok.
B. Elektronok.
C. He-atommagok.
D. Neutronok.

V. GRAVITÁCIÓ, CSILLAGÁSZAT

GRAVITÁCIÓ

Az általános tömegvonzási törvény és jelentősége, *a gravitációs állandó mérése.* 6.38., 6.40.

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:
Hányszor akkora a nehézségi gyorsulás egy olyan bolygó felszínén, amelynek a tömege megegyezik a Földével, de a sugara kétszer akkora, mint a Földé?
A. Negyede a földi g-nek.
B. Fele a földi g-nek.
C. Kétszerese a földi g-nek.
D. Négyszerese a földi g-nek.

A bolygók mozgásának leírása: Kepler törvényei. A mesterséges égitestek mozgása. 7.5., 6.13., 6.22., 6.24., 6.37., (6.43.…6.46.)

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:
Hányszor akkora a Nap körüli keringési ideje annak a testnek (bolygónak), amelyik négyszer akkora távolságra van a Naptól, mint a Föld?
A. [illegible] év.
B. [illegible] év.
C. 1[illegible] év.
D. 16 év.

A témával kapcsolatos (2 pontos) ugyancsak középszintű mintakérdés volt:
Hogyan változik a bolygók sebessége a Nap körüli keringés közben?
A. Napközelben lassabban, naptávolban gyorsabban mozognak.
B. Naptávolban lassabban, napközelben gyorsabban mozognak.
C. A bolygók sebessége nem változik.
D. Attól függ, melyik bolygóról van szó

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Kepler II. törvénye szerint a Föld, amikor a Naptól távolabb van, lassabban kering a pályáján. Hová lesz a mozgási energia csökkenése miatt felszabaduló energiamennyiség?

A. A Föld hő formájában kisugározza a világűrbe.
B. Megnő a Föld helyzeti energiája.
C. Erősebb lesz a földmágnesség.
D. A Föld egy kissé felmelegszik.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* próbaérettségi kérdés volt:

A Szaturnusz gyűrűi számtalan apró részecskéből állnak, amelyek különkülön körmozgást végeznek a Szaturnusz egyenlítői síkjában. A legbelső gyűrű belső oldala 70 000 km-re, a legkülső gyűrű külső oldala 140 000 km-re van a Szaturnusz középpontjától.

A legkülső pályán keringő részecskék periódusideje hányszorosa a legbelső pályán keringő részecskék periódusidejének?

A. Kepler III. törvényét alkalmazva ez az arány most $\sqrt{8}$.
B. Mivel a pálya kör alakúnak tekinthető, a szögsebességeik egyenlők, ezért a periódusidejük is azonos.
C. A periódusidők aránya egyenlő a sugarak arányával, tehát most 2.
D. A külső pályán lévők kerületi sebessége kétszer nagyobb, így a periódusidők egyenlők.

A nehézségi erő, a súly, a súlytalanság értelmezése. A gravitációs gyorsulás mérése. 6.12., 6.39., 6.16., 6.17.

A témával kapcsolatos (3 pontos) középszintű mintakérdés volt:

Melyik csoport tartalmaz csupa olyan eszközt, amelyik a súlytalanság körülményei között is működik?

A. Stopperóra, prizma, zsebtelep.
B. Ingaóra, kétkarú mérleg, rugós erőmérő.
C. Higanyos hőmérő, fecskendő, fonálinga.

...al kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

...súlytalanok a Föld körül kikapcsolt hajtóművel keringő űrhajóban az űr...

...ert nem hat rájuk gravitációs erő.
...ert semmilyen erő nem hat rájuk.
...ert a rájuk ható erők eredője nulla.
...ert csak gravitációs erő hat rájuk.

A témával kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:

Az alábbi megállapítások közül melyik a helyes állítás?

A. A nem gyorsuló űrhajó szükségképpen a súlytalanság állapotában van.
B. A tömeg és a súly lényegében azonos fogalmak, csak a súly közelítőleg tízszerese a tömegnek.
C. A gravitációs állandó értéke a Marson tizedrésze a Cavendish által a Földön mért értéknek, mert a Mars tömege a Föld tömegének tizedrésze.
D. A súlytalanság állapotában lévő űrhajóban nem lehet higanyos barométerrel nyomást mérni.

A CSILLAGÁSZAT ELEMEIBŐL

A Naprendszer és főbb részeinek jellemzése. 6.26., 6.40., 6.41.

...al kapcsolatos (2 pontos) középszintű mintakérdés volt:

...ogyatkozáskor a Hold, a Föld és a Nap egy egyenes mentén helyezkedik el. ...a helyes sorrend?

...ap – Föld – Hold.
...ap – Hold – Föld.
...öld – Nap – Hold.

...al kapcsolatos (3 pontos) középszintű próbaérettségi kérdés volt:

...oldnak mindig ugyanaz az oldala fordul a Föld felé. Milyen kapcsolat van ...apján a Hold Föld körüli keringésének és tengelyforgásának periódusideje

A. A Hold nem forog a tengelye körül.
B. A Hold annyi idő alatt fordul meg a tengelye körül, mint amennyi idő alatt megkerüli a Földet.
C. A Hold kétszer annyi idő alatt fordul meg a tengelye körül, mint amennyi idő alatt megkerüli a Földet.
D. A Hold fele annyi idő alatt fordul meg a tengelye körül, mint amennyi idő alatt megkerüli a Földet.

A csillag fogalma, összehasonlítás a Nappal.
A Tejútrendszer, galaxisok.
Az Univerzum tágulása. Ősrobbanás-elmélet.
A világűr megismerésének legfontosabb módszerei, eszközei.

Sajnos ezekre a témákra nincsenek példák a feladatgyűjteményben.

A fenti témák egyikével kapcsolatos *emelt szintű (1 pontos)* mintakérdés volt:
A felsorolt jelenségek közül melyik támasztja alá az Ősrobbanás-elméletet?
A. A csillagokban zajló fúziós folyamatok.
B. A szupernóva-robbanások.
C. Az Univerzum tágulása.
D. A fekete lyukak létezése.

VI. FIZIKA- ÉS KULTÚRTÖRTÉNETI ISMERETEK

Sajnos ezzel kapcsolatos példák sincsenek a feladatgyűjteményben.

Természetesen lehet történeti jellegű tesztkérdést is feladni, ilyen volt a középszintű érettségi egyik (1 pontos) kérdése:
Az alábbi tudósok – egy kivételével – jelentős szerepet játszottak a heliocentrikus világkép kialakításában. Ki a kivétel?
A. Arkhimédész.
B. Kepler.
C. Kopernikusz.
D. Galilei.

Zárszó helyett

Aki az érettségire való készülés során becsületes munkával idáig eljutott, jóleső érzéssel teheti le a tollat vagy a ceruzát, csukhatja be agyonfirkált füzetét. És miközben visszateszi könyvespolcára könyveit és jegyzeteit, köztük a „Dér–Radnai–Soós"-t is, ígérje meg saját magának, hogy bárhogy is alakul az élete, soha nem fogja hagyni magát tudománytalan nézetek által félrevezetni.

Fogadja meg, hogy kritikával olvas minden, a kezébe kerülő kiadványt, bármilyen hangzatos címe is legyen (pl.: *Harmadik évezred*). Nem dől be semmilyen pivízről, misztikus földsugárzásról, a vákuum-energiát hasznosító, a fizika törvényeit semmibe vevő csodagépről szóló áltudományos szövegnek. Nem hagyja, hogy becsapják „e világi", behízelgő könyvismertetések, különösen akkor, ha ilyeneket olvashat bennük: „...A kvantumfizika mélyvalósága mellé X. Y. 1990-ben megjelent könyvében a »kvantumpszichológiát« is odasorakoztatta. Könyvének matematikai szürrealizmust súroló nézeteivel nem szeretnék foglalkozni... A csúcs a *Helyhez nem kötött kvantumrendszer*. Ebben rejlik a legmagasabb, térhez, időhöz nem kötött Énünk, ami már nem is nevezhető különváltan énnek, s ami hat alacsonyabb énjeinkre. (A bal agyféltekei gondolkodás erősen akadályozza ebben.) Paranormális, transzcendens állapotok válnak általa megmagyarázhatóvá..."

Higgye el és örüljön neki, hogy a fizika, amit most már valamilyen szinten ért és művelni is tud, saját énjének, az ő műveltségének szerves része lett.

A reális problémák megoldásának készsége, amihez a fizikai problémák megoldásában szerzett gyakorlat adja a legbiztosabb támaszt, segít majd eligazodni az élet nehezebb kérdéseiben.

Képzeletét is megmozgató, érdekes fizikai feladatok megoldása során erősödtek fel benne olyan értékes jellemvonások és tulajdonságok, mint az egészséges önbizalom a problémákkal való birkózás vállalására, különleges érzék a lényeg megragadására, és a távoli összefüggések felismerésére.

Ez a fizika igazi haszna az ő számára.

Azok az elméletek, amelyek egyszerűsített alakjával megismerkedett és bánni is tud már velük, analógiásan az élet sok más területére kivetíthetők. De azért ne bízza el magát; ne felejtse el az alábbi nevezetes Murphy-törvényt sem:

Minden bonyolult kérdésre létezik valamilyen egyszerű, könnyen érthető, hibás válasz.

Legyen ez az útravaló.

Dr. R. Gy.

FELADATOK

1. Kinematika

Bevezető feladatok

1.1. Egyenletesen mozgó gyalogos sebessége 4,5 km/h. Mekkora utat tesz meg 1,25 óra alatt?

1.2. Gépkocsi sebessége 5 s alatt 15 m/s-ról egyenletesen 25 m/s-ra növekszik. Mennyi a gyorsulása?

1.3. Milyen irányú a felvonófülke gyorsulása a következő esetekben:
a) a felvonó a földszintről az I. emelet felé indul,
b) a felvonó megérkezik az I. emeletre,
c) a felvonó az I. emeletről a földszint felé indul,
d) a felvonó megérkezik a földszintre?

1.4. Egy autó 1,2 m/s^2 gyorsulással indul. Mekkora sebességet ér el, és milyen messzire jut 2,5 másodperc alatt?

1.5. Mennyi ideig esik le egy tárgy 10 cm magasról, és mekkora lesz a végsebessége? ($g \approx 10$ m/s^2)

Gyakorló feladatok

1.6. Két helyiség közötti autóbuszjáraton a kocsik átlagsebessége egyik irányban 40 km/h, a másik irányban 60 km/h. Mekkora az átlagsebesség, egy teljes fordulót figyelembe véve?

1.7. Gyalogos sebessége az úttesthez viszonyítva 8 km/h. Mekkora és milyen irányú a sebessége a vele
a) egy irányban,
b) ellentétes irányban 30 km/h sebességgel mozgó villamoshoz képest?

1.8. Egy test 1 m/s sebességgel egyenletesen mozog északkeleti irányban. Mennyi sebességének

a) északi,

b) keleti irányú komponense?

1.9. Egy gépkocsi sebességét 54 km/h-ról 90 km/h-ra növelte állandó 1,6 m/s^2 gyorsulással. Mennyi ideig tartott ez, és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

1.10. 2 m/s^2 gyorsulással induló gépkocsi elérve a 6 m/s sebességet egyenletesen mozog tovább. Milyen messzire jut az indulástól számított 8 másodperc alatt?

1.11. Mekkora távolságot tesz meg a nyugalmi helyzetből induló, és szabadon eső test a $t_1 = 6$ s és $t_2 = 8$ s közötti időközben?

1.12. 20 m/s kezdősebességgel függőlegesen lefelé dobunk egy tárgyat. Milyen messze van az elhajítás helyétől, és mekkora a sebesség 1 másodperc, 2 másodperc, 3 másodperc múlva? ($g \approx 10$ m/s^2)

1.13. A talaj fölött 30 méter magasságból 20 m/s kezdősebességgel kavicsot dobunk függőlegesen fölfelé. Mekkora a kavics sebessége és az elhajítás helyétől mért távolsága $t_1 = 1$ s; $t_2 = 2$ s; $t_3 = 3$ s; $t_4 = 4$ s; $t_5 = 5$ s múlva? Mekkora a kavics által megtett út ugyanezen időtartamok alatt? ($g \approx 10$ m/s^2)

1.14. 200 méter magasságban 360 km/h sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kellene kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora lenne a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában? ($g \approx 10$ m/s^2)

1.15. Határozzuk meg a 120 m/s kezdősebességgel 30°-os szögben elhajított test helyzetét az elhajítás után 3 másodperccel! ($g \approx 10$ m/s^2)

Házi feladatok

1.16. Egy céllövőversenyben egy sorozatban 6 lövést kell leadni. Az első és az utolsó lövés között legfeljebb 30 másodperc idő telhet el. Ha a versenyző egyenletesen lő és kihasználja a teljes 30 másodpercet, mennyi idő telik el két lövés között?

1.17. Egy gépkocsi a céljához vezető út felén 40 km/h állandó sebességgel halad. Mekkora legyen a sebessége az út másik felén, hogy az egész utat figyelembe véve az átlagsebessége 50 km/h legyen?

1.18. Hajó sebessége 10 m/s. A hajón gyerekek labdáznak. A labda egyik gyerektől a másik felé 4 m/s sebességgel gurul a hajó mozgásának irányára merőlegesen. Mekkora, és milyen irányú a labda sebessége?

1.19. Az esőcseppek függőleges irányban esnek, 6 m/s sebességgel. Az esőcseppek nyomai a vonatablakon a vízszintessel 30°-os szöget bezáró csíkok. Milyen gyorsan megy a vonat?

1.20. Egy személyautóval három különböző gyorsaságpróbát végeztek.

a) Az autó álló helyzetből indulva 19,3 s alatt érte el a 80 km/h sebességet.

b) Álló helyzetből indulva 24,5 s alatt tett meg 400 m távolságot.

c) 15 s alatt növelte sebességét 60 km/h-ról 90 km/h-ra. Mennyi volt az átlagos gyorsulás egy-egy kísérletben?

1.21. Egy gépkocsi 2,8 m/s^2 állandó gyorsulással indul, majd egyenletesen halad tovább, és 5 másodperc alatt 29,4 méter messzire jut. Határozzuk meg a gyorsítás időtartamát!

1.22. Egy 54 m/s sebességgel mozgó versenyautó 1,8 másodpercig fékez. Mekkora a sebessége fékezés után, és mekkora utat tett meg a fékezés alatt, ha a fékezés közben —6 m/s^2 a gyorsulása?

1.23. Egymástól 10 km távol levő állomások között az utat egy vonat 10 perc 30 másodperc alatt teszi meg. Induláskor 90 másodpercig gyorsít állandó gyorsulással, fékezéskor 70 másodpercig lassít, szintén állandó gyorsulással. Mekkora a vonat sebessége nyílt pályán?

1.24. Nyugalomból induló egyenletesen gyorsuló test mozgásának nyolcadik másodpercében 60 centiméter utat tesz meg. Mekkora utat fut be a kilencedik másodperc alatt?

1.25. Szabadon eső test sebessége egy pontban 2 m/s, egy másik pontban 4 m/s. Mekkora a két pont közötti távolság?

1.26. A felvonófülke egyenletesen emelkedik 2 m/s sebességgel. A fülkében tartózkodó ember véletlenül elejti a kezében tartott kulcsot. Az elejtés pillanatában a kulcs 1 m-re volt a felvonó padlójától. Mennyi idő után ért a padlóra? ($g \approx 10\ m/s^2$)

1.27. A Föld felszínétől 20 méter magasságban 50 m/s kezdősebességgel fölfelé hajítunk egy testet. Milyen magasan lenne a Föld felszínétől, mekkora lenne az elmozdulása a $t = 8$ s időpontban, ha nem lenne közegellenállás? Mekkora lenne a befutott út ezen időpontig? ($g \approx 10\ m/s^2$)

1.28. 20 m magas ház tetejéről 12 m/s kezdősebességgel ferdén felfelé elhajítunk egy testet. A vízszintessel bezárt szög 30°. Mennyi idő múlva, és a háztól mekkora távolságban érne a talajra, ha nem lenne közegellenállás? ($g \approx 10\ m/s^2$)

1.29. Egy labdarúgó büntetőt rúg a 11-es pontról. Határozzuk meg, mekkora sebességgel kell elrúgnia valamelyik sarok felé a labdát, hogy a kapus ne érhesse el! A kapu szélessége 7,3 m. A kapus reakciójához és vetődéséhez szükséges idő legalább 0,5 másodperc. A légellenállást durván úgy vesszük figyelembe, hogy a labda útja során elveszti kezdeti sebességének 5%-át. Tételezzük fel, hogy a labda állandó lassulással mozog.

Ajánlott feladatok

1.30. Folyón két motorcsónak közül az egyik a folyón lefelé, a másik felfelé halad. Vízhez viszonyított sebességük különböző. Mozgásuk közben egyszerre haladnak el egy, a folyón úszó bólya mellett. A bólyát elhagyva, mindkét csónak azonos ideig távolodik attól, majd visszafordulnak. Melyik ér előbb a bólyához?

1.31. Ha lassan mozgó vasúti kocsi mellett a kocsival egyirányban haladunk, a kocsit 17 lépés, ellentétes irányban haladva 12 lépés hosszúnak találjuk. Hány lépés a kocsi hossza? A kocsi és a mérő személy sebessége állandó, s az utóbbi a nagyobb.

1.32. Két helységet egymás mellett húzódó folyó és csatorna köt össze. Egyik helységből egyszerre indul két hajó a másik felé és vissza, egyik az álló vízben, a másik a folyóban. Melyik hajó menetideje rövidebb, ha a vízhez viszonyított sebességük megegyezik?

1.33. Folyó szélessége 200 m, sebessége 3,6 km/h. Hol köt ki a túlsó parton az átkelő csónak, ha a vízhez viszonyított sebességének nagysága 3 m/s, iránya a víz folyásának irányára merőleges?

1.34. Hol köt ki az előző feladatban szereplő csónak, ha a vízhez viszonyított sebességének nagysága változatlan, iránya azonban 120°-os szöget zár be a víz folyásának irányával?

1.35. Az evezős sebessége állóvízben 4 m/s, a folyó sodra pedig 3 m/s. A víz folyási irányával milyen szöget bezárva kell eveznie a folyón, ha

a) a legrövidebb idő alatt,
b) a legrövidebb úton,
c) a szárazföldhöz képest legkisebb sebességgel akar átjutni a folyó egyik partjáról a másikra?

1.36. Egy széles folyón északi irányban, a Földhöz képest 5 m/s sebességgel halad egy hajó. A hajó a vízhez képest 6 m/s sebességgel halad, a víz a Földhöz képest 4 m/s sebességgel.

a) Milyen irányban folyik a folyó?
b) Milyen irányban halad a hajó a vízhez képest?

1.37. 72 km/h sebességgel haladó vonaton egy utas a vonat mozgásával megegyező irányban elindul a vonathoz viszonyított $0{,}8\ m/s^2$ gyorsulással. Három másodperc alatt mekkora a pályatesthez viszonyított elmozdulása, sebessége?

1.38. Egy test sebessége most –20 m/s, 100 másodperc múlva pedig 20 m/s lesz. Mennyi a test átlagos gyorsulása?

1.39. Egy test sebessége most –20 m/s, míg 100 másodperccel ezelőtt 20 m/s volt. Mennyi volt a test átlagos gyorsulása?

1.40. Egy test sebessége most 20 m/s, 100 másodperccel ezelőtt –20 m/s volt. Mennyi volt a test átlagos gyorsulása?

1.41. Egy test sebessége most 20 m/s, 100 másodperc múlva –20 m/s. Mennyi a 100 mp alatti átlagos gyorsulása?

1.42. Bizonyítsuk be, hogy helyes Galilei 1683-ban megfogalmazott, következő állítása: „a nyugalmi helyzetből induló szabadon eső test által egyenlő időközönként megtett távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok, 1-től kezdődően.”

1.43. Egy ötödik emeleti lakás ablaka előtt virágcserép zuhan lefelé. Az 1,2 m magas ablak előtt 0,12 s idő alatt halad el. Feltéve, hogy egy emelet magassága 3 m, és a közegellenállás szerepe nem jelentős, hányadik emeleti ablakból eshetett ki a cserép? ($g \approx 10$ m/s^2)

1.44. Egy 7,5 m hosszú zsineg egyik végére, s ettől a végétől 3 m-re egy-egy követ erősítettünk. A zsineg másik végét megfogva majd elengedve, a köveket egy hídról a folyóba ejtjük. A két kő csobbanása között 0,15 s időt mérünk. Milyen magasan van a híd a víz felett? (A levegő ellenállását ne vegyük figyelembe, és $g \approx 10$ m/s^2)

1.45. Egy ejtőernyős kiugrik az 1500 m magasan repülő gépből. 10 másodpercig szabadon esik, ekkor meghúzza a kioldózsinórt, s az ejtőernyő kinyílik. Egészen addig, amíg el nem éri az 5 m/s sebességet, 18 m/s^2 állandó lassulással esik. Innen kezdve 5 m/s sebességgel egyenletesen süllyed a föld felé. Mennyi idő telik el a kiugrás és a földet érés között?
Ábrázoljuk az utat, a sebességet és a gyorsulást az idő függvényében! ($g \approx 10$ m/s^2)

1.46. Helyes-e a következő állítás: Ha egy test v_0 kezdősebességgel függőlegesen felhajítva t idő alatt h magasra jut, akkor $2v_0$ kezdősebességgel indítva $2t$ idő alatt $2h$ magasra emelkedik.

1.47. A 2,4 m magas felvonófülke 3 m/s egyenletes sebességgel ereszkedik lefelé. Közben a fülke mennyezetéről leválik a rosszul becsavart villanykörte, és leesik a padlóra. Közvetlenül azt megelőzően, hogy a körte a padlón összetörik, mennyi a sebessége és a gyorsulása
a) a felvonóban álló megfigyelőhöz képest,
b) a Földhöz képest?

1.48. Milyen magasra lehet lőni azzal a puskával, mely vízszintes terepen legfeljebb 1000 m-re „hord"?

1.49. Milyen szögben kell elhajítani egy testet, hogy ugyanolyan magasra emelkedjék, mint amilyen távol ér vissza az elhajítás szintjére?

1.50. A gravitációs gyorsulás értéke a Holdon a földi érték egyhatod része.

a) Hányszor magasabbra,
b) hányszor messzebbre száll az azonos kezdősebességgel ferdén elhajított kő a Holdon, mint a Földön?
c) Mennyi ideig repül a Holdon a földi repülési időhöz képest?

1.51. Folyó szélessége 200 m. A folyó vizének sebessége a parttól mért távolsággal arányosan növekszik 0-ról 5 m/s-ra. Az indulás helyéhez viszonyítva hol köt ki a túlsó parton az a csónak, melynek a vízhez viszonyított sebessége a folyás irányára merőleges, és 8 m/s nagyságú?

2. Dinamika I.

Bevezető feladatok

2.1. Mekkora erő mozgatja az 5 kg tömegű testet 1,5 m/s^2 gyorsulással?

2.2. Állandó erő hatására egy 25 gramm tömegű test mozgásának első másodpercében 25 centimétert tesz meg. Mekkora az erő?

2.3. A 9 m/s sebességgel elütött korong a jégen 36 m út megtétele után áll meg. Mekkora a súrlódási együttható a korong és a jég között?

2.4. Milyen erők hatnak a lejtőn nyugvó testre? (Készíts ábrát, amelyen nagyság és irány szerint is feltünteted a t e s t r e ható erőket!)

Gyakorló feladatok

2.5. A lejtőn súrlódás nélkül csúszik le egy test. Milyen erők hatnak a testre?

2.6. Egy test kelet felé mozog, és nyugat felé gyorsul. Lehetséges ez? Milyen irányú erő hatására?

2.7. Mekkora az emelődaru kötelében fellépő húzóerő egy 100 kg tömegű gépalkatrész süllyesztésekor, illetőleg emelésekor, ha a gyorsulás nagysága minden esetben 2 m/s^2? A kötél és a végén levő horogszerkezet súlya elhanyagolható.

2.8. A folyosón levő hosszú futószőnyeg súlya 80 N. Egyik végénél fogva, valaki megrántja a szőnyeget 60 N erővel. A szőnyeg és a folyosó követe közötti súrlódási együttható 0,5. Milyen gyorsulással rándul meg a szőnyeg?

2.9. 10 kg tömegű testre 120 N erő hat nyugati, és 50 N erő hat déli irányban. Ebben a pillanatban a test sebessége északnyugati irányú, nagysága 14 m/s. Számítsuk ki

a) a test sebességének,
b) a test gyorsulásának,
c) a testre ható erők eredőjének
keleti és északi irányú összetevőjét!

2.10. Milyen irányú

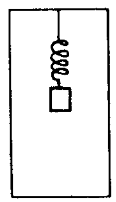
a) a mozgási súrlódási erő,
b) a tapadási súrlódási erő?

2.11. 50 N súlyú tégla alakú testet satuba fogunk. A satupofák 150 N nagyságú vízszintes erővel nyomják a testet. Az érintkező felületek között 0,5 a súrlódási tényező. Mekkora erővel lehet a testet felfelé kihúzni?

2.12. 10 méter magas, 60°-os lejtő tetejéről csúszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér a lejtő aljára, ha

a) a lejtő súrlódásmentes,
b) a lejtő és a test közötti csúszási súrlódási együttható 0,5?

2.13. Egy liftben az m tömegű testet rugó közbeiktatásával felfüggesztjük. Mekkora erő feszíti a rugót, ha a lift



a) nyugalomban van;
b) függőlegesen felfelé, illetve lefelé állandó v sebességgel mozog;
c) függőlegesen felfelé a gyorsulással emelkedik;
d) függőlegesen lefelé a gyorsulással süllyed?
e) szabadeséssel zuhan?
(Legyen pl. $m = 50$ kg; $a = 5$ m/s^2). ($g \approx 10$ m/s^2)

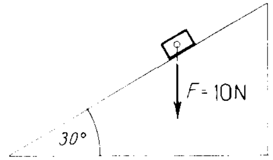
2.14. Milyen erő hat az eldobott kőre?

2.15. 50 N nagyságú, állandó erő hat egy testre 10 másodpercig. A test erő irányú sebessége közben 5 m/s-mal növekszik. Mekkora a test tömege? A feladatot az impulzustétel segítségével oldjuk meg!

2.16. Hogyan mérhetjük meg egy test tömegét dinamikai módszerrel?

Házi feladatok

2.17. Egy test adott pillanatban kelet felé mozog, s közben észak felé gyorsul. Milyen irányú a rá ható erők eredője?

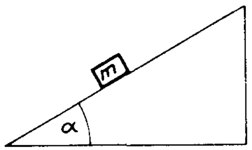
2.18. 

5 kg tömegű testet 30°-os lejtőre helyezünk, és függőleges, 10 N nagyságú erővel lefelé húzzuk. Mekkora a test gyorsulása, ha a lejtő és a test között a súrlódási tényező 0,2? ($g \approx 10$ m/s²)

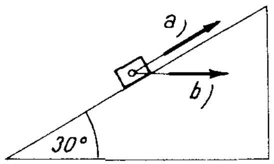
2.19. Ha a Hold felszínén 10 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobunk egy testet, az 30 m magasra emelkedik. Határozzuk meg a testre ható erőt
a) emelkedés közben,
b) 30 m magasan,
c) esés közben
abban az esetben, ha a test tömege 3 kg.

2.20. Növelheti-e a testre ható súrlódási erő a test sebességét?

2.21. Lehet-e a súrlódási együttható értéke 1-nél nagyobb szám?

2.22. 

A lejtőn levő test és a lejtő között a tapadó súrlódási együttható μ_0.
a) Legfeljebb mekkora lehet a lejtő hajlásszöge ahhoz, hogy a test a lejtőn nyugalomban maradjon?
b) Hogyan mozog a test, ha ekkor oldalról kissé megmozdítjuk? (A csúszó súrlódási együttható $\mu < \mu_0$.)

2.23. 

Egy 30°-hajlásszögű lejtőre fel akarunk húzni egy 400 N súlyú testet. Mekkora erőt kell alkalmazni
a) ha a lejtővel párhuzamos irányba húzzuk?
b) ha a vízszintes irányba húzzuk?
(A súrlódás elhanyagolható.)

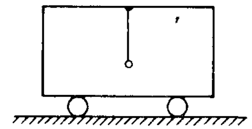
2.24. 30°-os lejtőn egy 100 N súlyú ládát húzunk felfelé egyenletesen, a lejtő síkjával párhuzamos erővel. Mekkora ez az erő, ha a láda és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,1?

2.25. 30°-os lejtőn egy 100 N súlyú ládát egyenletesen eresztünk lefelé. Mekkora, a lejtő síkjával párhuzamos „visszatartó" erőt fejtünk ki, ha a láda és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,1?

2.26. 30°-os lejtőn egy 100 N súlyú ládára a lejtő síkjával párhuzamos, felfelé mutató 50 N nagyságú erő hat. Milyen mozgást végez a láda
a) ha nincs súrlódás,
b) ha van súrlódás?

2.27. Felvonó gyorsulása induláskor és fékezéskor egyaránt 2 m/s² nagyságú. Mekkora erővel hat a felvonószekrény aljára a 700 N súlyú ember
a) felfelé induláskor,
b) lefelé induláskor,
c) fékezéskor lefelé menetben,
d) fékezéskor fölfelé menetben? ($g \approx 10$ m/s²)

Ajánlott feladatok

2.28. 

Könnyen gördülő kiskocsira szerelt állványon fonálinga függ. Milyen irányú a fonál, ha a kocsi vízszintes síkon
a) egyenletesen halad,
b) *a* gyorsulással mozog?
Ábrázoljuk a hajlásszöget a gyorsulás függvényében! ($g \approx 10$ m/s²)

2.29. 150 N terhet egyenletesen gyorsítva függőlegesen emelünk. Mekkora erő szükséges az emeléshez, ha az álló helyzetből induló teher sebessége 9 méter magasan 6 m/s? ($g \approx 10$ m/s²)

2.30. Egy rugó megfeszítetlen állapotban 10 cm hosszú, míg $2 \cdot 10^{-2}$ N erő hatására 12 cm-re nyúlik meg. Tizenöt ilyen rugót kapcsoltunk sorba egymás után. A rugósorozat egyik végét egy testhez erősítettük, másik végét bizonyos erővel meghúztuk. A rugósorozat teljes hossza ekkor 165 cm lett.
a) Mennyi a rugók által a testre ható erő?
b) Mekkora erőt fejtene ki a tizenöt rugó a testre, ha párhuzamosan kapcsoltuk volna össze őket, és valamennyi rugó nyúlása ugyanannyi lenne, mint az előző esetben?

2.31. Egy 0,25 kg tömegű test vízszintes lapon súrlódás nélkül mozog kelet felé 5 m/s sebességgel, egyenletesen. Milyen irányú és milyen nagyságú lesz a gyorsulása, ha 20 N nagyságú állandó erő hat rá
a) **keleti,**
b) **nyugati,**
c) **déli irányban?** ($g \approx$ 10 m/s^2)

2.32. **Egy 0,1 kg tömegű testre 4 N erő hat északi és 3 N erő hat keleti irányban.**
a) **Mekkora, és milyen irányú a test gyorsulása?**
b) **Mekkora, és milyen irányú harmadik erő hat még a testre, ha a test állandó sebességgel mozog (pl. déli irányban)?**

2.33. Nyugalmi helyzetből induló m tömegű test szabadon esik a Föld felé. Írjuk fel a pillanatnyi mozgásmennyiségét, mint az idő függvényét.

2.34. A súrlódás nélküli lejtőre helyezett ládát akár a lejtővel párhuzamos F_1 erő, akár a vízszintes F_2 erő egyensúlyban tartja. Mekkora a láda súlya?

2.35. Egy α hajlásszögű lejtőn felfelé elindítunk egy tárgyat v_0 kezdősebességgel. A tárgy s út megtétele után megáll, majd visszacsúszik a lejtő aljára. Mekkora sebességgel ér vissza a tárgy?

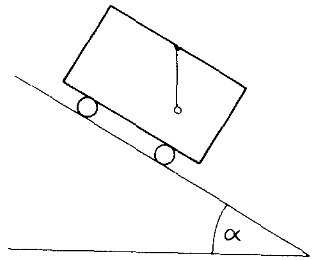
2.36. 30°-os lejtő tetejéről lecsúszó test a lejtő aljára feleakkora sebességgel érkezik, mintha súrlódás nélkül csúszott volna. Mekkora a test és a lejtő közötti súrlódási együttható?

2.37. 45° hajlásszögű, 5 m hosszú játékcsúszda a medence szélénél végződik. A víz szintje 2 méterrel mélyebben van. A medence oldalfalától milyen távolságban ér a vízbe az a gyerek, aki a csúszda tetejéről kezdősebesség nélkül csúszott le? A csúszda és gyerek közötti súrlódási együttható 0,2. ($g \approx$ 10 m/s^2)

2.38. Mekkora vízszintes irányú erővel mozgathatunk a lejtőn fölfelé a = 1 m/s^2 gyorsulással egy m = 1 kg tömegű testet, ha a súrlódási együttható értéke μ = 1 és $g \approx$ 10 m/s^2;
a) a lejtő hajlásszöge 30°;
b) a lejtő hajlásszöge 45°;
c) a lejtő hajlásszöge 60°?

2.39. Deszkalapra hasábszerű testet helyezünk. A deszka egyik végét lassan emelve azt tapasztaljuk, hogy a hasáb akkor kezd lefelé csúszni, amikor a deszkának vízszintessel bezárt szöge elérte a 30°-ot. Majd ugyanezen szög esetén a deszkán 4 m utat 4 másodperc alatt tesz meg. Határozzuk meg ezen megfigyelt adatok alapján a deszka és a hasáb közötti tapadási és csúszási súrlódási együtthatókat. ($g \approx$ 10 m/s^2)

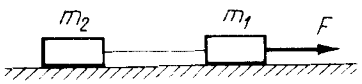
2.40. Kiskocsira szerelt állványon fonálinga függ. Milyen irányú a fonál, amikor a kocsi az α = 30° hajlásszögű lejtőn gyorsul lefelé
a) súrlódásmentesen,
b) μ = 0,2 súrlódást feltételezve?



3. Dinamika II.

Bevezető feladatok

3.1. Ha az erő és az ellenerő egyenlő nagyságú és ellenkező irányú erők, miért nem „semmisítik meg" egymást?

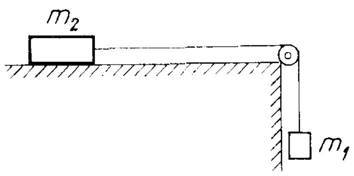
3.2. 

Vízszintes irányú, $F = 8$ N nagyságú erővel hatunk az $m_1 = 2$ kg tömegű testre, amely egy fonállal az $m_2 = 3$ kg tömegű testhez van kötve, az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk? ($g \approx 10$ m/s^2)

Gyakorló feladatok

3.3. Állócsigán átvetett fonal végein m_1 illetve m_2 tömegű test van. Mekkora gyorsulással mozog az egyik illetve a másik test, és mekkora erő hat a mennyezetre, ahová a csigát felfüggesztették? (A fonál és a csiga tömege elhanyagolható; a fonál nem nyúlik meg; a tengely nem súrlódik; a közegellenállás és a levegőben a felhajtó erő elhanyagolható.)

3.4. Játékvonat 30 g tömegű vagonja 4 cm/s sebességgel gördül a sínen. A következő, 40 g tömegű kocsi 5 cm/s sebességgel halad utána, és az első kocsihoz ütközik. Mekkora sebességgel halad tovább együtt a két kocsi, ha az ütközéskor összekapcsolódnak?

3.5. 

Mekkora az ábra szerint fonállal egymáshoz kötött m_1 illetve m_2 tömegű testek gyorsulása és a fonalat feszítő erő, ha

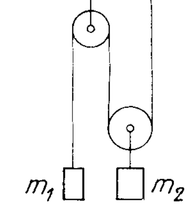
a) az m_2 tömegű test a vízszintes síkon súrlódás nélkül csúszhat;

b) az m_2 tömegű test és a sík között a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$? (A feltételek ugyanazok, mint a 3.3. feladatnál. Legyen $m_1 = 0{,}5$ kg; $m_2 = 2$ kg; $g \approx 10$ m/s^2.)

3.6. A rakománnyal együtt 1 tonna tömegű vasúti pályakocsi vízszintes pályán 10 m/s sebességgel halad. Mozgás közben a kocsin ülő emberek lelöknek egy 100 kg tömegű síndarabot, amely függőlegesen esik a talpfákra. Mekkora sebességgel halad tovább a pályakocsi, ha a súrlódástól eltekinthetünk?

3.7. Az l hosszúságú, m tömegű, a vízhez képest nyugvó csónak egyik végén m_2 tömegű ember áll. Mennyit mozdul el a csónak a vízhez viszonyítva, miközben az ember átmegy a csónak másik végébe? (A víz ellenállása elhanyagolható.)

3.8. Az ábrán látható elrendezésben a csigák és a kötelek tömege elhanyagolható. Mekkora az egyes tömegek gyorsulása és az egyes fonaldarabokat feszítő erő, ha $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 3{,}5$ kg? (A feltételek a 3.3. feladatéval azonosak; $g \approx 10$ m/s^2.)

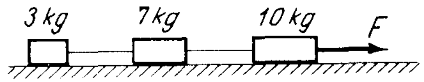


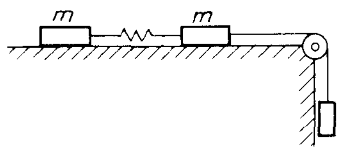
3.9. Állóvízben két csónak halad egymás felé. A vízhez viszonyított sebessége mindkét csónaknak ugyanakkora, 0,6 m/s. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra 60 kg tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak eredeti irányában 0,4 m/s sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege? (A víz ellenállását elhanyagoljuk.)

3.10. Egy 0,2 kg tömegű labdát 4 m magasról leejtünk. A labda 4 másodpercig pattog a padlón, míg végül nyugalomban marad. Mennyi a labda által a padlóra kifejtett erő átlaga ezen 4 másodperc idő alatt? (A légellenállás elhanyagolható.)

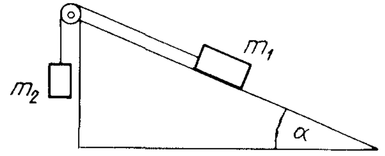
Házi feladatok

3.11. Az ábrán látható rendszert $F = 100$ N állandó erővel húzzuk. Mekkora a gyorsulás, és mekkora erők feszítik az összekötő fonalakat, ha a súrlódástól eltekintünk?



3.12. 

Mennyivel nyúlik meg az ábra szerinti elrendezésben a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? (A csiga, a rugó és a fonál tömegét ne vegyük figyelembe. Legyen $m = 1$ kg; a súrlódási együttható 0,2; a rugóállandó 0,4 kp/cm; $g \approx 10$ m/s^2.)

3.13. 

Határozzuk meg az ábrán látható rendszer gyorsulását, ha
a) a súrlódástól eltekintünk;
b) az m_1 tömegű test és a lejtő között a súrlódási együttható μ. (A lejtő rögzített helyzetű; az egyéb feltételek a 3.3. feladatnál közöltekkel azonosak.)

3.14. A 120 g tömegű, 40 cm/s sebességű és a 80 g tömegű, 100 cm/s sebességű két test egymással szembe mozog egy egyenes mentén. Teljesen rugalmatlan ütközés után mekkora és milyen irányú sebességgel mozognak tovább?

3.15. A 72 km/h sebességgel vízszintes pályán haladó, 500 tonna tömegű vasúti szerelvényről leszakad a szerelvény 100 tonna tömegű része. A mozdony a szétszakadás után ugyanakkora húzóerőt fejt ki, mint azelőtt. Mekkora távolságban lesz egymástól a szerelvény két része a leszakadt rész megállása pillanatában, ha a súrlódási tényező 0,01?

3.16. Géppuskából percenként 240 db 20 gramm tömegű lövedéket lőnek ki 1000 m/s kezdősebességgel vízszintes irányban egy céltárgyra. A golyók becsapódnak és lefékeződnek a céltárgyban.
a) Mennyi a golyók által a céltárgyra kifejtett átlagos erő?
b) Mennyi a géppuskára ható átlagos (visszalökő) erő?
($g \approx 10$ m/s^2)

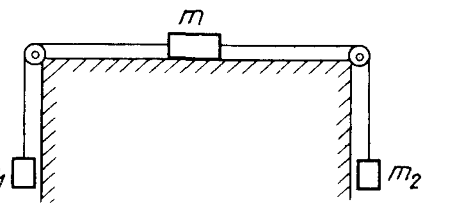
Ajánlott feladatok

3.17. Egy rendszer n darab részecskéből áll. Mindegyik részecske az összes többire erőt gyakorol.
Mutassuk meg, hogy a rendszerben $n(n-1)$ darab erő lép fel!

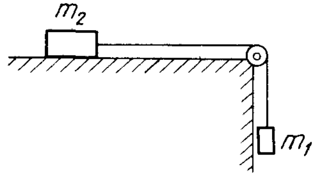
3.18. Egy 0,46 kg tömegű labdát 2 m magasról a padlóra ejtünk, ahonnan 1,5 m magasra pattan vissza. Mekkora mozgásmennyiséget „adott át" ütközés közben a labda a padlónak? (A légellenállástól eltekinthetünk.)

3.19. A 0,2 kg tömegű labdát 1,2 m magasról a padlóra ejtjük. A labda 0,9 m magasra pattan vissza. Ütközés közben 0,015 s ideig ért a padlóhoz.
a) Mekkora az az átlagos erő, amit ütközés közben a padló a labdára kifejt?
b) Mi a labdára ható erőnek a mozgás teljes idejére vonatkozó átlaga? ($g \approx 10$ m/s^2)

3.20. Mekkora az ábrán látható rendszer gyorsulása és az egyes fonaldarabokat feszítő erő? (A feltételek ugyanazok, mint a 3.3. feladatnál. Legyen $m = 7$ kg; $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 4$ kg; $g \approx 10$ m/s^2.)

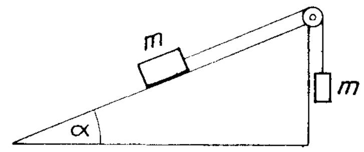


3.21. Az ábrán látható elrendezésben a két testet gumizsinór köti öszsze. Mennyivel nyúlik meg a zsinór, ha
a) az m_2 tömegű testet az asztalhoz rögzítjük;
b) a rendszer súrlódás nélkül mozoghat?

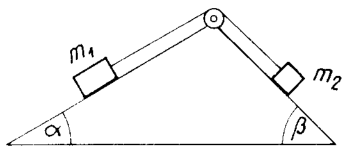


(A gumizsinór 10 N erő hatására 1 centiméterrel nyúlik meg; az egyéb feltételek ugyanazok, mint a 3.3. feladatnál; $m_1 = 2$kg, $m_2 = 10$ kg; $g \approx 10$ m/s^2)

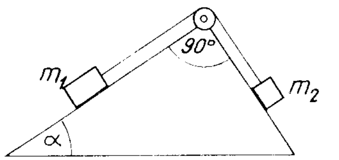
3.22. Az ábra szerinti elrendezés esetén
a) mekkora a súrlódási együttható a lejtő és a rajta csúszó test között, ha a rendszer megmozdítás után egyenletesen mozog?



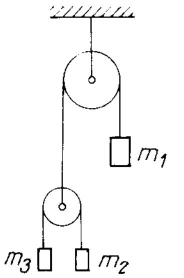
b) legalább mekkorának kell lennie a lejtőn tapadó súrlódási együtthatónak ahhoz, hogy a rendszer nyugalomban maradjon?

3.23. 

Határozzuk meg az ábrán látható rendszer gyorsulását! (A feltételek ugyanazok, mint a 3.3. feladatnál; $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 1$ kg; $g \approx 10$ m/s^2.)

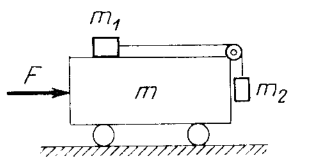
3.24. 

Az ábrán látható kettős lejtőn elhanyagolható súrlódással mozoghatnak a fonállal összekapcsolt m_1 és m_2 tömegek. Mekkora α szög esetén van egyensúly?

3.25. 

Mekkora gyorsulással mozognak az ábrán látható elrendezésben a fonalak végén levő testek, ha a csigák és a fonalak tömegétől, valamint a súrlódástól eltekinthetünk? ($m_1 = 3$ kg; $m_2 = 1$ kg; $m_3 = 2$ kg; $g \approx 10$ m/s^2.)

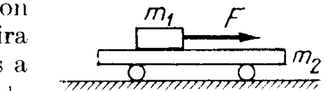
3.26. A 30° hajlásszögű, 4 kg tömegű lejtő vízszintes síkon súrlódás nélkül elmozdulhat. A lejtőre 1 kg tömegű testet helyezünk, amely a lejtőn súrlódásmentesen csúszhat. Mekkora gyorsulással mozog a lejtő, miközben a test lecsúszik rajta? ($g \approx 10$ m/s^2)

3.27. 

Mekkora állandó F erővel kell tolni az ábrán látható m tömegű kocsit, hogy az m_1 és m_2 tömegű testek a kocsihoz viszonyítva ne mozogjanak? (A feltételek ugyanazok, mint a 3.3. feladatnál.)

3.28. Vízszintes síkon fekvő deszkalapot a gyorsulással mozgatunk. Legfeljebb mekkora lehet a deszka gyorsulása, hogy a ráhelyezett hasáb alakú test ne csússzon meg rajta, ha a deszka és a hasáb között a tapadó súrlódási együttható 0,4? Mekkora a deszka és a hasáb között a súrlódási erő, ha a deszka 1,5 m/s^2 gyorsulással mozog, a hasáb 2 kg tömegű, és nem csúszik meg a deszkán? ($g \approx 10$ m/s^2)

3.29. A 2 kg tömegű kiskocsi vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A kocsira 0,5 kg tömegű hasábot helyezünk, és a hasábot 1 N vízszintes irányú erővel húzzuk. Mekkora a hasáb, illetve a kocsi gyorsulása, ha közöttük a tapadó súrlódási együttható 0,25, csúszó súrlódási együttható pedig 0,01? Mekkora a gyorsulás 10 N-os húzóerő esetén? ($g \approx 10$ m/s^2)



3.30. A 45° hajlásszögű lejtőre 5 kg tömegű deszkát, és a deszkára 2 kg tömegű hasábot helyezünk. Mekkora az egyes testek gyorsulása a lejtőn, ha a deszka és a lejtő között a csúszó súrlódási együttható 0,4; a hasáb és a deszka között pedig 0,3? ($g \approx 10$ m/s^2)

3.31. A 10 kg tömegű lövedék a vízszintessel 30°-os szöget bezáró irányban 240 m/s sebességgel hagyja el az ágyú torkolatát. Pályájának legmagasabb pontján a lövedék két részre robban szét. Az egyik, egy 4 kg-os darab, éppen a robbanás helye alatt, függőlegesen zuhan le a földre. A másik, 6 kg-os darab sebességének iránya robbanás közben nem változik meg. Hol csapódna be ez a másik darab, ha nem lenne légellenállás? ($g \approx 10$ m/s^2)

3.32. Az 1000 m magasan lebegő léggömbről 80 kg tömegű bombát ejtenek le. A bomba 600 m esés után két részre robban szét. Az egyik, 30 kg tömegű rész, a robbanás pillanatában vízszintes irányban 200 m/s sebességet kap. Hol éri el a talajt a másik rész? (A légellenállástól tekintsünk el.)

3.33. Kísérleti, rakétahajtású kiskocsi súrlódás nélkül gördülhet. A hajtómű szakaszosan működik. Egy pillanatban m tömegű égésterméket lövell ki; a fúvókához viszonyítva u sebességgel. A kocsi kezdeti tömege m_0. Mekkora lesz a kocsi sebessége az első kilövellés után? Mekkora lesz a kocsi sebessége az első másodperc végén, ha a másodpercenkénti kilövellések száma 20?

3.34. A 30° hajlásszögű lejtőn 2 kg tömegű hasáb, ütközőnek támaszkodva, nyugalomban van. A hasábba, a lejtővel párhuzamosan, 5 dkg tömegű lövedéket lövünk, 600 m/s sebességgel. Mennyi idő múlva ér vissza a hasáb az ütközőig, ha a súrlódási együttható 0,2? (A lövedék becsapódásának idejét a hasáb mozgásidejéhez viszonyítva elhanyagolhatjuk; $g \approx 10$ m/s^2.)

4. Munka, energia, teljesítmény

Bevezető feladatok

4.1. 800 N súlyú testet 15 méter magasra emelünk egyenletesen. Mekkora az emelőerő munkája? Mekkora a nehézségi erő munkája?

4.2. Mekkora sebességet ér el a nyugalmi helyzetből induló 2 kg tömegű test 4 joule munka árán?

4.3. 120 g tömegű, 40 cm/s sebességű és 80 g tömegű 60 cm/s sebességű golyók szembe haladnak, majd rugalmasan ütköznek. Mekkorák az ütközés utáni sebességek?

4.4. Mekkora az emelőerő teljesítménye a 4.1. feladatban, ha az emelés időtartama 15 másodperc?

4.5. A fonálinga mozgása közben végez-e munkát a fonálban ható feszítőerő?

Gyakorló feladatok

4.6. Bizonyítsuk be a munka definíciójának felhasználásával a következő állításokat:
a) Súrlódás nélkül lecsúszó testen a lejtő nem végez munkát.
b) Vízszintesen elhajított testen a nehézségi erő mindig pozitív munkát végez.

4.7. 30°-os lejtőn valaki egy 20 kilogrammos bőröndöt tol fel vízszintes irányú erővel 2 méter magasra. A mozgási súrlódási együttható 0,2. A bőrönd mozgása egyenletes. Mennyi munkát végez:
a) az ember,
b) a súrlódási erő,
c) a bőröndre ható nehézségi erő,
d) a lejtő nyomóereje,
e) a bőröndre ható erők eredője? ($g \approx 10$ m/s^2)

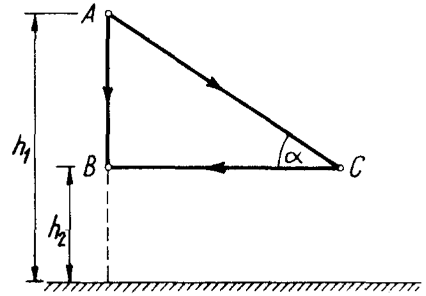
4.8. Egy m tömegű test egyenletesen gyorsulva mozog a ráható erő irányába eső egyenes mentén. Mekkora az erő munkája, miközben a test sebessége v_1-ről v_2-re változik?

4.9. Mekkora munkavégzéssel jár egy 4 kg tömegű test felgyorsítása vízszintes talajon 3 m/s sebességre 2 méter úton, ha a talaj és a test közötti súrlódás együtthatója 0,3? ($g \approx 10$ m/s^2)

4.10. Egy l hosszúságú, α hajlásszögű lejtő vízszintes útba torkollik. A súrlódási együttható mind a lejtőn, mind a vízszintes úton ugyanannyi. A lejtő tetejéről v_1 sebességgel elindul egy test.
a) Mekkora sebességgel éri el a test a lejtő alját?
b) Mekkora távolságot tesz meg a test a vízszintes úton?
A feladatot a munkatétel segítségével oldjuk meg!

4.11. Rugós erőmérőt 10 cm-rel kihúztunk. Mekkora munkát végeztünk a megnyújtáskor, ha a mutató 50 N nagyságú erőt jelez?

4.12. Határozzuk meg a nehézségi erő munkáját, miközben az m tömegű tömegpont a h_1 magasan levő A pontból h_2 magasságban levő B pontba jut
a) a függőleges egyenes mentén,
b) az ACB úton!



4.13. Az 5 kg tömegű testet, kötél segítségével, 100 N erővel 2 m-es úton húzzuk függőlegesen felfelé. Mennyi munkát végeztünk, és mennyivel változott meg a test helyzeti energiája?

4.14. Lehet-e negatív egy test mozgási energiája? És helyzeti energiája?

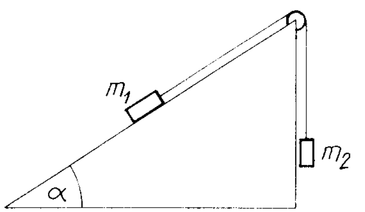
4.15. Mint ismeretes, a potenciális energia számszerű értéke attól függ, hogy hogyan választják meg a nullszintet. Így célszerűen, a Föld felszínén álló ember potenciális energiáját zérusnak vehetjük. Ehhez viszonyítva az emeleten lakók potenciális energiája pozitív. Az emeleten lakók saját potenciális energiájukat tekintik zérusnak, az ő számukra a földszinten lakók potenciális energiája negatív.
Hasonló problémával találkozhatunk a mozgási energia esetében

is: a vonaton utazó ember mozgási energiája a szomszéd fülkében utazókéhoz képest zérus, az állomás peronján állók szerint pedig pozitív.
Az energia nagysága mindig a vonatkoztatási rendszer megválasztásától is függ.
Hogyan egyeztethető össze mindez a mechanikai energia megmaradásának törvényével?

4.16. Mekkora átlagos teljesítménnyel lehet egy 1000 kg tömegű személyautót 10 másodperc alatt, álló helyzetből 100 km/h sebességre gyorsítani?

4.17. 1 tonna tömegű felvonó álló helyzetből indulva 1,2 m/s^2 gyorsulással emelkedik 4 másodpercig.
a) Mekkora átlagos teljesítmény szükséges ehhez?
b) Mennyi a pillanatnyi teljesítmény $t = 1$ s időpillanatban?
c) Mennyi a pillanatnyi teljesítmény $t = 4$ s időpillanatban?

4.18.



Az ábrán látható elrendezésben m_1 tömeg súrlódás nélkül mozoghat a lejtőn. Mekkora lesz a testek sebessége 2 méter út befutása után, ha nyugalomból indultak? ($m_1 = 4$ kg; $m_2 = 1,5$ kg; $\alpha = 30°$; a kötél és a csiga tömege elhanyagolható.)

Házi feladatok

4.19. Egy úszó a 100 m-es távot 1 perc alatt teszi meg. A víz fékező ereje 60 N. Becsléssel állapítsuk meg azt az átlagos teljesítményt, melyet az úszó kifejt. Figyelembe kell-e venni azt a mozgási energiát, amelyet az úszó teste nyer?

4.20. Mekkora vízszintes kezdősebesség esetén lendül ki egyensúlyi helyzetéből α szöggel az l hosszúságú fonálinga?

4.21. A és B testek mozgásmennyisége egyenlő, azonban A-nak kétszer akkora a mozgási energiája, mint B-nek. Mi a két test tömegének aránya?

4.22. 1000 kg tömegű gépkocsi kiiktatott motorral 15 m/s sebességgel

ereszkedik le egy 20° hajlásszögű lejtőn. Mekkora teljesítmény mellett tudna a lejtőn felfelé menni ugyanilyen sebességgel?

4.23. Egy ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasságban szálló repülőgépből. (A gép vízszintesen repül, sebessége 100 m/s.) Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Tömege az ernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

4.24. 100 N súlyú testet 120 N nagyságú erővel emelünk. Mekkora a teljesítmény az indulás után 2 másodperccel? Mekkora az átlagteljesítmény az első 2 másodperc alatt?

4.25. Mekkora a sebessége a 14 méter hosszú, 30°-os hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőn lecsúszó tárgynak a lejtő alján?

4.26. 20 N erő gyorsít egy eredetileg nyugalomban volt 2 kg tömegű testet 2 másodpercen keresztül.
a) Mekkora erőlökést (impulzust) kapott a test?
b) Mekkora munkavégzés történt a testen?
c) Hogyan válaszolna az *a)* illetve *b)* kérdésre az a megfigyelő, aki 15 m/s állandó sebességgel egyenletesen mozog az erő irányában?

4.27. 1 kg tömegű, 2 m/s sebességű golyót utolért egy 2 kg tömegű, 4 m/s sebességű golyó. Határozzuk meg a golyók rugalmas ütközés utáni sebességeit!

4.28. A ferdén eldobott 0,5 kg tömegű kő kezdeti mozgási energiája 87 joule. A kő 30 m messze esik le a vízszintes talajra. Milyen szög alatt hajítottuk el? (A légellenállást ne vegyük figyelembe!)

4.29. 10 méter mély kútból, méterenként 10 N súlyú lánccal vizet húzunk fel. A vödör súlya vízzel együtt 120 N. Mekkora munka árán tudunk egy vödör vizet felhúzni?

4.30. 5 m/s kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk egy követ. Mennyi idő alatt négyszereződik meg a mozgási energiája?

Ajánlott feladatok

4.31. Egy ládát állandó sebességgel húzunk vízszintes talajon. Mozgás közben 250 N a fellépő súrlódási erő. Milyen messzire húzhatjuk el a ládát 0,001 kWh munka árán?

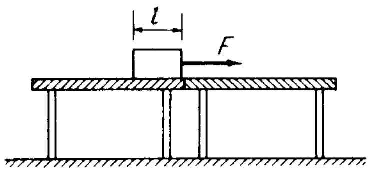
4.32. Oldjuk meg a munkatétellel a következő feladatot: 500 m/s sebességű puskagolyó 5 cm mélyen hatolt be a fába. Mekkora volt a sebessége 2 cm mélységben? Tételezzük fel, hogy a fa fékező ereje állandó.

4.33. A 0,5 m/s állandó sebességgel emelkedő liftben elejtünk egy 0,2 kg tömegű golyót. Mennyi lesz a golyó mozgási energiája 0,01 másodperc múlva

a) a lifthez viszonyítva,
b) a Földhöz viszonyítva?
($g \approx 10$ m/s^2)

4.34. Egy 30° hajlásszögű lejtőn kezdősebesség nélkül kezd csúszni egy test. A lejtő felső, l_1 hosszúságú szakaszán a súrlódási együttható 0,2, az ehhez csatlakozó l_2 hosszú szakaszon 0,6. l_1 és l_2 milyen arányánál áll meg a test a lejtő alján?

4.35.



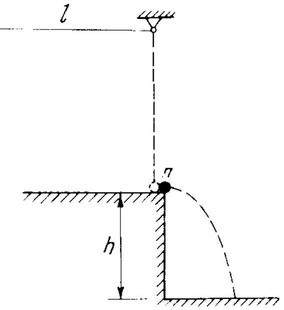
Két asztal áll egymás mellett szorosan, amint az ábra mutatja. Mennyi munkát végez az a személy, aki az egyik asztalon levő csomagot a másikra egyenletesen áthúzza? Az asztallapok különböző anyaggal burkoltak, tehát a csomag és az asztalok lapjai közötti súrlódási együtthatók különbözők. ($G = 200$ N; $l = 0,5$ m; $\mu_1 = 0,1$; $\mu_2 = 0,4$.)

4.36. Mennyi idő alatt tudná a 10^4 N súlyú személyautó 73,55 kW teljesítményű motorja az autó sebességét vízszintes talajon 70 km/h-ról 100 km/h-ra növelni, ha nem lenne közegellenállás? Legalább mekkorának kell lennie a tapadási súrlódási együtthatónak ahhoz, hogy az autó közben ne csússzék meg? ($g \approx 10$ m/s^2)

4.37. Légcsavaros szán $v_1 = 6$ m/s sebességgel halad kis hajlásszögű lejtőn felfelé. Ugyanezen a lejtőn lefelé $v_2 = 8$ m/s a sebessége, változatlan teljesítmény mellett. Mekkora lesz a sebessége az ugyanolyan súrlódási együtthatójú vízszintes úton, ha motorjának teljesítménye továbbra is változatlan?

4.38. Miért nehéz a partra kiugrani egy könnyű csónakból, és miért könnyű a parttól ugyanolyan távol álló hajóról ezt megtenni?

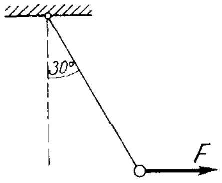
4.39. Az ábrán látható ingát 90°-kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval teljesen rugalmasan ütközik. Határozzuk meg, hogy az asztaltól milyen távol ér a padlóra a meglökött golyó!



4.40. 10 kg tömegű homokzsák 2 m hosszú fonálon függ. Egy 10 g tömegű puskagolyó behatol a homokzsákba, és ennek hatására a fonál 10°-os szöggel kitér. Mekkora volt a golyó sebessége? ($g \approx 10$ m/s^2)

5. Statika

Bevezető feladatok

5.1. 

Fonálra függesztett 20 N súlyú golyót vízszintes irányban oldalt húzunk. Mekkora erővel húzza a fonál a testet, ha az a függőlegessel 30°-os szöget zár be?

5.2. 20 méter hosszú híd egyik hídfője gyenge. Ez a hídfő a híd súlyán kívül csupán 9000 N terhelést bír el. Mennyire jut a hídon áthajtó 3000 kg tömegű tehergépkocsi, mielőtt a híd összeroskad? ($g \approx 10$ m/s²)

5.3. Aki zászlót vagy táblát visz, úgy fogja a függőleges rudat, hogy két keze ne legyen túl közel egymáshoz. Miért „könnyebb" így vinni?

5.4. Egy négyzet három csúcsába 1, 1, 1 darab egyforintost, a negyedik csúcsba öt darab egyforintost teszünk. Hol van a nyolc darab egyforintosból álló rendszer súlypontja?

5.5. Mit nevezünk *a)* stabilis; *b)* labilis egyensúlyi helyzetnek? Van-e olyan egyensúlyi helyzet, amely sem stabilisnak, sem labilisnak nem mondható?

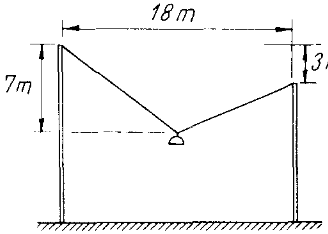
Gyakorló feladatok

5.6. *a)* Mozoghat-e egy egyensúlyban levő rendszer?
b) Foroghat-e egy egyensúlyban levő rendszer?

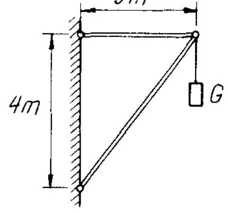
5.7. Egy merev testre ható három erő nagysága, iránya és támadáspontjának koordinátái az x tengelyével kelet felé, y tengelyével észak felé mutató koordinátarendszerben a következők:
$F_1 = 4$N; észak felé; $x_1 = 1{,}5$ m és $y_1 = 2$ m;

$F_2 = 5$N; délnyugat felé; $x_2 = 4$ m és $y_2 = 0$ m;
$F_3 = 6$N; kelettől 30°-kal délre; $x_3 = 5$ m és $y_3 = -4$ m.
Milyen nagyságú, irányú és támadáspontú F_4 erőnek kell hatnia a merev testre ahhoz, hogy a test *egyensúlyban* legyen?

5.8. Egymástól 18 méter távolságra levő, különböző magasságú lámpaoszlopok között kifeszített huzalon 150 N súlyú lámpa függ, az oszlopoktól egyenlő távolságra. Mekkora erő feszíti a huzal két ágát, ha a lámpa a bal oldali horog alatt 7 méterre van, és a jobb oldali horog 3 méterrel lejjebb van a bal oldalinál?



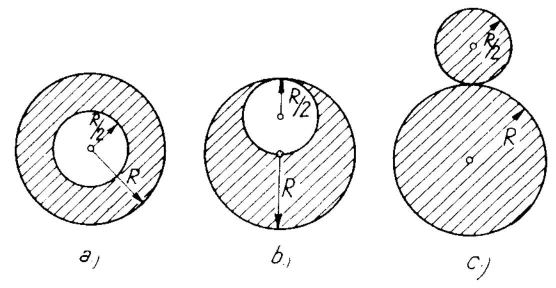
5.9. Az ábrán látható tartón $G = 800$ N súlyú teher függ. Mekkora erők hatnak a rudakban?



5.10. Mérleghinta két oldalán egy-egy 450 N súlyú gyerek ül. Egyikük 3 m, a másikuk 1,5 m távolságra van a forgástengelytől.
a) Hová üljön még egy 650 N súlyú gyerek ahhoz, hogy a hinta egyensúlyban legyen?
b) Mekkora ebben az esetben az alátámasztási pontra ható erő? (Tekintsük a hintát súlytalannak!)

5.11. Egy m tömegű és l hosszúságú rúd végére l_1 illetve l_2 hosszúságú (elhanyagolható tömegű) fonalakkal ugyancsak m tömegű testeket függesztünk.
a) Mely pontjában kell a rudat alátámasztani vagy felfüggeszteni ahhoz, hogy egyensúlyban legyen?
b) Milyen típusú egyensúly alakul ki?
c) Hol lesz a rendszer súlypontja?

5.12. Egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban 20 kg, 30 kg, 30 kg nagyságú pontszerű tömegek vannak. Hol van ezen tömegekből álló rendszer súlypontja?

5.13. 

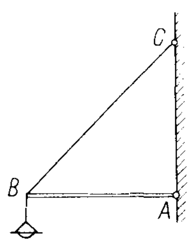
Határozzuk meg az ábrán látható lemezidomok súlypontját!

5.14. A széket előre, vagy hátra könnyebb feldönteni? Miért?

5.15. Egy golyó egyik fele vasból, másik fele alumíniumból készült.
a) Ejtsük a golyót a padlóra, s várjuk meg, míg valamilyen helyzetben megállapodik. Hogyan helyezkedik el a golyó?
b) Elképzelhető-e, hogy ezt a golyót bizonyos helyzetben egy nem túl meredek lejtőre helyezve, a golyó nem gurul, hanem csúszni fog lefelé a lejtőn? Miért?

Házi feladatok

5.16. Gyorsulhat-e az egyensúlyban levő test?

5.17. 

Egy lámpa felfüggesztését az ábra mutatja. A lámpa súlya 50 N. Határozzuk meg az AB rúdra és a CB huzalra ható erőket!
($AB = AC = 0{,}5$ m)

5.18. Nem egyenlő karú mérlegen mérjük le egy test súlyát. Ha a testet a bal serpenyőbe tesszük, akkor a jobb serpenyőbe 12 N súlyt kell tenni ahhoz, hogy a mérleg egyensúlyban legyen. Ha a testet a jobb serpenyőbe tesszük, akkor a bal serpenyőbe tett 3 N súly egyensúlyozza ki a mérleget.
a) Mennyi a test súlya?
b) Mi a mérlegkarok hosszának aránya?

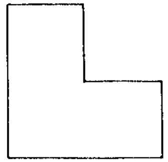
5.19. Egy gépkocsi első és hátsó tengelyének távolsága 2,8 méter. Ha ez a kocsi első kerekeivel áll fel az autómérlegre, akkor a mérleg

6500 N súlyt jelez. Ha a hátsó kerekeivel áll rá a mérlegre, a mérleg 6000 N súlyt jelez.
a) Mennyi a gépkocsi súlya?
b) Milyen messze van a gépkocsi súlypontja az első tengelytől?

5.20. Egy munkás 400 N súlyú, homogén tömegeloszlású deszkát egyik végénél fogva a vízszinteshez képest 30°-os szögben tart. A deszka másik vége a földön fekszik. Mekkora erő szükséges ehhez, ha az általa kifejtett erő iránya merőleges a deszka egyenesére?

5.21. Tíz darab egyforintost kell elhelyezni egy lerajzolt téglalap négy sarkába úgy, hogy a rendszer súlypontja a téglalap középpontjába essék. Játékszabályok:
Minden pénzdarabot le kell tenni valahová,
pénzdarab csak valamelyik csúcspontban lehet.
Természetesen egy csúcsba több pénzdarab is tehető.
Hány lényegesen különböző megoldás lehetséges?
Melyek ezek?

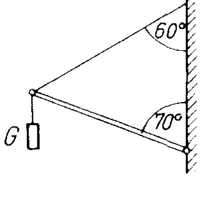
5.22. Vékony lemezből készült négyzet egyik negyede hiányzik. Hol van a súlypont?

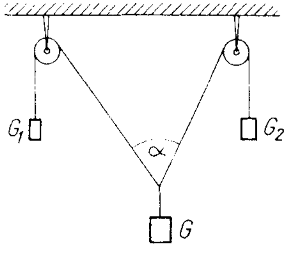


5.23. 0,4 méter hosszú, állandó keresztmetszetű rúd egyik fele 11,3 kg/dm³ sűrűségű ólomból, a másik fele 7,8 kg/dm³ sűrűségű vasból készült. Hol van a rúd súlypontja?

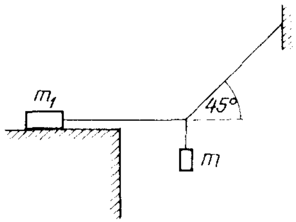
Ajánlott feladatok

5.24. Súlytalan rudat, amely vízszintes tengely körül foroghat, kötéllel az ábrán látható módon felfüggesztünk. Mekkorák a rúdban és a kötélben ható erők, ha a rúd végére $G = 500$ N súlyú testet függesztünk?



5.25. 

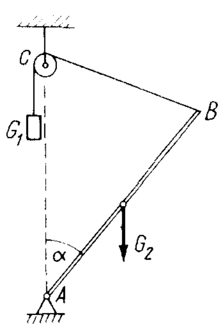
Az ábrán látható szerkezetre mekkora G súlyú testet kell függeszteni, hogy a rendszer egyensúlyban legyen? ($G_1 = 20$ N; $G_2 = 30$ N; $\alpha = 60°$)

5.26. 

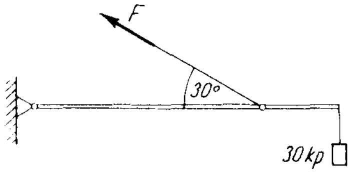
Az m tömegű testet két fonál segítségével, az ábrán látható módon függesztünk fel. Az asztallapon fekvő test tömege $m_1 = 72$ kg, az asztal és közötte a súrlódási együttható 0,25. Mekkora m tömeg esetén van egyensúly?

5.27. 1200 N súlyú terhet egy elhanyagolható súlyú rúddal ketten emelnek. Mekkora erőket kell a rúd végére kifejteni, ha a teher a rúd harmadában van felfüggesztve?

5.28. A talajon fekvő 4 méter hosszú egyenes rúd egyik végét 60 N másik végét 90 N erővel lehet megemelni. Mekkora a rúd súlya, és hol van a súlypontja?

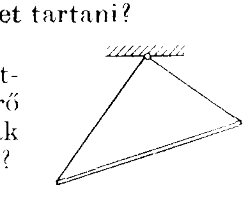
5.29. 

Az ábrán látható elrendezésben az AB rúd súlya 100 N, és alsó végéhez erősített vízszintes tengely körül foroghat. A rúd felső végéhez erősített, csigán átvetett fonálon 25 N súlyú teher függ. A csiga tengelye és a rúd tengelye ugyanazon függőleges egyenesre esik, úgy, hogy $AC = AB$. Mekkora α szög esetén van a rendszer egyensúlyban, és mekkora erővel hat a rúd a tengelyre ebben az esetben?

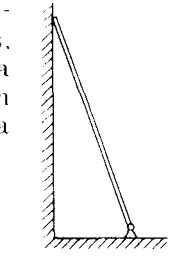
5.30. 

Az 500 N súlyú, 8 méter hosszú rúd egyik végén levő vízszintes tengely körül foroghat. A rúd másik végén 300 N súlyú teher lóg. A rudat vízszintes helyzetében a rúd 3/4 részében megerősített, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró kötéllel tartjuk egyensúlyban. Mekkora erővel kell a kötelet tartani?

5.31. 30 N súlyú rudat két fonállal az ábrán látható módon függesztünk fel. Mekkora erő feszíti a fonalakat, ha 90°-os szöget zárnak be egymással, és hosszúságaik aránya 3:4?



5.32. Az 50 N súlyú, 1,48 méter hosszú rúd alsó vége vízszintes tengely körül foroghat, felső vége függőleges, tökéletesen sima falnak támaszkodik. A tengely a faltól 0,5 m távolságra van. Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a tengely a rúdra, és mekkora erővel nyomja a rúd a falat?

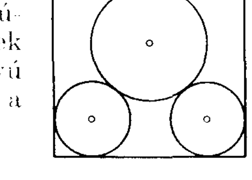


5.33. Egy 3 m hosszú és 150 N súlyú létrát teljesen sima falhoz támasztunk úgy, hogy alsó vége a földön 1,8 m-re legyen a faltól. Legalább mekkorának kell lennie a talaj és a létra közötti tapadási súrlódási együttható értékének ahhoz, hogy egy 800 N súlyú ember még felállhasson a létra legmagasabb pontjára, a lecsúszás veszélye nélkül?

5.34. Egy homogén rudat teljesen sima falhoz támasztunk. Mutassuk meg, hogy ha a rúdnak a fallal bezárt szöge β, akkor a padló és a rúd vége közötti tapadási súrlódási együttható értéke legalább 0,5 tg β abban az esetben, ha a rúd nyugalomban van.

5.35. A szétnyitható létra tetején egy ember áll. Mekkora súrlódásra van szükség a padlón, hogy a létra ne nyíljon szét? (Jelöljük a létra két ágának egymással bezárt szögét 2φ-vel.)

5.36. 50 cm széles, téglalap keresztmetszetű vályúban 10 cm sugarú 200 N súlyú fémhengerek fekszenek. Ezeken 15 cm sugarú, 600 N súlyú harmadik henger. Mekkora erők hatnak a vályú falaira?



5.37. Hosszú pálcát vízszintes helyzetben tartunk úgy, hogy kezünket kitárva ujjainkkal alátámasztjuk a pálca két végét. Most két kezünket fokozatosan közelítjük egymáshoz, de vigyázunk arra, hogy a pálca továbbra is vízszintes helyzetben maradjon. Azt fogjuk tapasztalni, hogy kétoldalt a pálca egyenletesen csúszik el, és ujjaink végül is a pálca súlypontja alatt találkoznak egymással. Miért?

5.38. Egy 90 cm széles és 210 cm magas ajtó két „sarokpánttal" csatlakozik az ajtófélfához. A felső az ajtó tetejétől számítva 30 cm-rel van lejjebb. Hol kell az alsót elhelyezni, ha azt akarjuk, hogy mindkét sarokpántra ható erő vízszintes összetevője ugyanolyan nagyságú legyen?

5.39. Legalább mekkorának kell lennie a kockalap és a vízszintes sík közötti tapadó súrlódási együtthatónak, hogy a kockát a felső lapjára ható vízszintes erővel felboríthassuk?

5.40. Az alább felsorolt esetekben válaszoljunk a következő két kérdésre:
1. Lehet-e a test egyensúlyban?
2. Lehet-e a test stabilis egyensúlyban?
   a) A test egy pontban van alátámasztva.
   b) A test egy pontban van felfüggesztve.
   c) A test két pontban van alátámasztva.
   d) A test két pontban van felfüggesztve.
   e) A test három pontban van alátámasztva.
   f) A test három pontban van felfüggesztve.

5.41. Mutassuk meg, hogy a lejtőn nyugvó testre ható nyomóerő hatásvonala nem mehet át a test súlypontján!

5.42. Az elsőkerék-meghajtású személygépkocsik a meredeken emelkedő utakat „nem szeretik". A hátsókerék-meghajtású autó vidáman szalad fel azon a csúszós emelkedőn is, ahol az elsőkerék-meghajtású autó első kerekei csak a sarat ássák ki maguk alól. Forognak, s az autó mégsem mozdul. Miért?

6. Körmozgás

Bevezető feladatok

6.1. A lemezjátszó korongját a következő fordulatszámokra lehet beállítani:
a) 78 min^{-1};
b) 45 min^{-1};
c) $33\frac{1}{3}\,\mathrm{min}^{-1}$.

Adjuk meg mindhárom esetben a korong szögsebességét radián/másodperc egységben!

6.2. Forgó kerék két ugyanazon sugáron levő pontjának sebessége 13 m/s, illetve 7 m/s. Mekkora a kerék szögsebessége, ha a két pont egymástól való távolsága 30 cm?

6.3. Egy kerék 10 fordulatot tesz meg percenként. Mennyi a kerületi sebessége és mennyi a gyorsulása a kerék azon pontjának, amely a forgástengelytől
a) 0,1 m-re,
b) 0,2 m-re van?

6.4. Egy testre egyetlenegy, állandó nagyságú, de változó irányú erő hat. Tíz másodperc elteltével a test sebességének nagysága ugyanannyi, mint a kezdősebesség volt. Milyen pályán mozog a test?

Gyakorló feladatok

6.5. Mekkora a TU-144 utasszállító repülőgép centripetális gyorsulása, ha 2400 km/h sebességgel 80 km sugarú körívben halad fordulás közben? Ily módon mennyi időbe telik, amíg északi irányból kelet felé fordul? Mennyi utat tesz meg e fordulás közben?

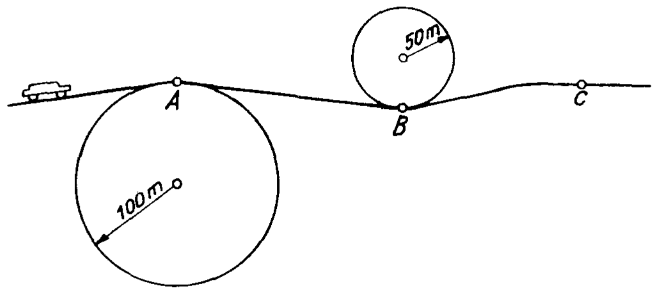
6.6. Egy motor 25 s^{-2} szöggyorsulással indul. Mekkora a szögsebessége 40 másodperc múlva? Mekkora a szögelfordulás ez alatt az idő alatt?

6.7. 1000 kg tömegű gépkocsi dombvidéken halad, egyenletes 72 km/h sebességgel.

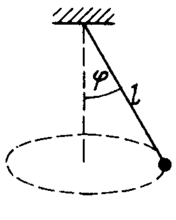
Az A és B pontokban az út 100 m illetve 50 m sugarú körív, a C pontban vízszintes.

a) Határozzuk meg e három pontban az út által a gépkocsira kifejtett nyomóerő irányát és nagyságát.

b) Mennyi lehet a gépkocsi maximális sebessége az A pontban? ($g \approx 10$ m/s^2)



6.8. Egy teherautón levő láda és a kocsipadló közti tapadási súrlódási együttható 0,1. Mekkora maximális sebességgel haladhat a gépkocsi egy 100 méter sugarú kanyarban, hogy a láda ne csússzék meg? (Tegyük fel, hogy a kanyarban is vízszintes a pálya, és a kocsi kereke nem csúszik meg.) ($g \approx 10$ m/s^2)

6.9. 

Az l fonálhosszúságú fonálingát φ szöggel kitérítjük, majd a fonál végén levő golyót vízszintes irányban meglökjük úgy, hogy körpályán keringjen.

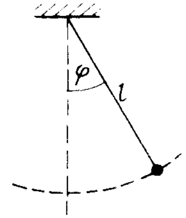
a) Mennyi a keringési idő?

b) Mekkora erő feszíti a fonalat?

6.10. Az l hosszúságú fonálra függesztett m tömegű golyó ingaként leng. A legnagyobb kitérés $\varphi_{max} = 30°$. Mekkora erő hat a fonálban, amikor

a) az inga szélső helyzetben van;

b) a függőleges helyzeten halad át? Mennyi a gyorsulás az előbbi helyzetekben?



6.11. 110 N-ig terhelhető, 1 méter hosszú fonálon 1 kg tömegű követ forgatunk függőleges síkban, egyre gyorsabban és gyorsabban. A fonál egyszer csak elszakad.

a) A körpályának melyik pontján volt a kő abban a pillanatban, amikor elszakadt a fonál?

b) Mennyi volt a kő sebessége ekkor? ($g \approx 10$ m/s^2)

c) Milyen mozgást végez a kő, miután elszakadt a fonál?

6.12. *a)* Milyen erő hat a Föld körül keringő űrhajóban „lebegő" űrhajósra?

b) Milyen erő hat a Föld felé szabadon eső testre?

c) Milyen erő hat a Föld felé zuhanó repülőgépben „lebegő" pilótára?

6.13. Átlagosan milyen magasságban halad a Föld felszíne felett az űrhajó, ha átlagsebessége 28 000 km/h? (Adatok: A Föld átlagos sugara 6370 km, a gravitációs állandó: $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; a Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg.)

Házi feladatok

6.14. 12 óra után mennyi idővel lesz az óra nagy- és kismutatója merőleges egymásra?

6.15. Egy gépkocsi 108 km/h sebességgel halad. Kerekeinek átmérője 75 cm. Mekkora a kerekek szögsebessége?

6.16. A Föld—Nap közepes távolság 150 millió kilométer. Számítsuk ki a Föld átlagos gyorsulását a Nap körüli keringése közben. (Tételezzük fel, hogy a Föld körpályán kering, aminek középpontjában a Nap áll.)

6.17. Minthogy a Föld forog saját tengelye körül, ezért a Föld felszínén nyugalomban levő tárgyak egyenletes körmozgást végeznek. Számítsuk ki e körmozgáshoz tartozó centripetális gyorsulás értékét a következő szélességi körök mentén:
a) 0°;
b) 45°;
c) 90°.
A Föld sugara 6370 km.
Eredményeinket hasonlítsuk össze a nehézségi gyorsulás ismert értékével!

6.18. Kezdeti szögsebesség nélkül forgásnak induló test állandó szöggyorsulással 10 másodperc alatt 30 s^{-1} szögsebességet ér el. Hány fordulatot tett meg a 10 másodperc alatt?

6.19. 0,25 méter sugarú korong függőleges tengely körül forog. A korong szélén egy alacsony test áll. Mekkora lehet a szögsebesség, hogy a test a korongról ne csússzék le, ha a korong és közötte a tapadási súrlódási együttható 0,4? ($g \approx 10$ m/s^2)

6.20. Legfeljebb mekkora sebességgel haladhat az r sugarú, vízszintes síkú körpályán a gépkocsi, ha a tapadó súrlódási együttható μ_0?

6.21. 110 N -ig terhelhető 1 méter hosszú fonálon 1 kg tömegű követ forgatunk vízszintes síkban, egyre gyorsabban és gyorsabban. A fonál egyszer csak elszakad.
a) A körpályának melyik pontján volt a kő abban a pillanatban, amikor elszakadt a fonál?
b) Mennyi volt a kő sebessége ekkor? ($g \approx 10$ m/s^2)
c) Milyen mozgást végez a kő, miután elszakadt a fonál?

6.22. Mennyi a keringési ideje a Föld felszíne felett 200 km magasságban repülő űrhajónak? (A szükséges adatokat lásd a 6.13. feladatnál!)

Ajánlott feladatok

6.23. Mennyi a repülőgép-légcsavar legszélső pontjának a sebessége, miközben a repülőgép 120 km/h sebességgel a földön gurul, s a légcsavar fordulatszáma 600 min^{-1}? A légcsavar legszélső pontja 1,5 m távolságra van a forgástengelytől.

6.24. Tyitov szovjet űrhajós űrrepülése 1961. augusztus 6-án reggel 7 órakor kezdődött, és másnap reggel 8 óra 18 perckor fejeződött be. Hány fordulatot tett meg Tyitov űrhajója a Föld körül? (Az űrhajó nem emelkedett 260 km-nél magasabbra.)

6.25. Papírból készült egyenes körhenger tengelye körül percenként 1500 fordulattal forog egyenletesen. Egy, a tengellyel párhuzamosan haladó lövedék az alap- és fedőlapot egy pontban átszakítja. Ezen pontokhoz tartozó sugarak egymással 30°-os szöget zárnak be. Határozzuk meg a lövedék sebességét, ha a henger magassága 1,5 m.

6.26. Közismert tapasztalati tény, hogy a Földről a Holdnak mindig ugyanazt az oldalát lehet látni. A Hold keringési ideje a Föld körül 27,3 nap.
Mennyi idő telik el a Holdon két napfelkelte között?

6.27. *a)* Legalább mekkora vízszintes irányú sebességgel kell indítani egyensúlyi helyzetéből az l hosszúságú fonálingát, hogy végpontja az l sugarú függőleges síkú körpályán végig fusson?
b) Mekkora ez a sebesség, ha az inga fonalát ugyanolyan hosszú súlytalan merev rúddal helyettesítjük?

6.28. Egyensúlyi helyzetétől vízszintesig kitérített m tömegű fonálingát elengedjük. Határozzuk meg a fonál szögsebességét mint a vízszintestől mért szögének a függvényét!

6.29. 1 méter hosszú, 200 g tömegű fonálingát kitérítünk a vízszintesig. Mekkora függőleges kezdősebességgel kell visszalöknünk, hogy a függőlegestől mért 60°-os kitérésig a fonál elszakadjon, ha a fonál teherbírása 8 N? ($g \approx 10$ m/s^2)

6.30. Egy fonálingát nyugalmi helyzetéhez képest 90°-kal kitérítünk, majd elengedünk. Amikor az inga átlendül a függőleges helyze ten, a fonál egy szögbe ütközik. A fonal hosszának hányadrészénél lehet a szög, ha azt akarjuk, hogy a fonál végére kötött test további pályája *teljes egészében* kör legyen?

6.31. Vízszintes asztalon fekvő 0,5 kg tömegű kis golyót 0,5 m hosszú fonállal az asztal egy pontjában rögzítjük. A golyó és az asztal között a súrlódási tényező 0,2. A golyónak a megfeszített fonálra merőleges 5 m/s kezdősebességet adunk. Mekkora a golyó sebessége és a fonalat feszítő erő a mozgás kezdetétől számított 2 másodperc múlva? ($g \approx 10$ m/s^2)

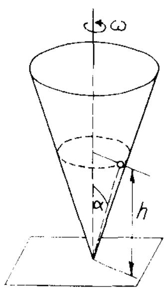
6.32. Két $l = 0{,}5$ m hosszúságú fonálingát közös pontban felfüggesztünk. A 0,1 kg tömegű ingát vízszintes helyzetig kitérítjük. Legalább mekkora kezdősebességgel kell visszalökni, hogy a másik 0,2 kg tömegű ingával teljesen rugalmatlanul ütközve, mindketten leírják a teljes l sugarú függőleges síkú kört. ($g \approx 10$ m/s^2)

6.33. Egy 0,6 méter sugarú gömb tetején egy kis golyót elengedünk. A gömb tetejétől számítva milyen magasságban hagyja el a golyó a gömböt? (A súrlódástól eltekinthetünk.)

6.34. 0,5 m sugarú félgömb belsejében vízszintes síkban körbe gurul egy golyó a gömb aljától számítva 0,1 m magasságban. Mennyi idő alatt fut körül? (A súrlódástól eltekinthetünk; ($g \approx 10$ m/s^2)

6.35. Az R sugarú, belül üres gömb függőleges átmérője körül ω szögsebességgel forog. Hol helyezkedik el a gömb belsejében levő kisméretű, m tömegű golyó? Hogyan befolyásolja a jelenséget a súrlódás?

6.36.



Az ábrán feltüntetett 2α nyílású kúp függőleges tengelye körül állandó ω szögsebességgel forog. A kúp belső felületén m tömegű golyó a kúphoz képest nyugalomban van. Mekkora erővel nyomja a golyó a kúpot, és mekkora a h magasság? A kúp belső felülete és a golyó közötti súrlódás elhanyagolható.

6.37. Mennyi a nehézségi gyorsulás értéke a Föld felszíne felett 200 km magasságban? (Körülbelül ilyen magasan keringenek az űrhajók a Föld körül. A szükséges adatok a 6.13. feladat szövege utáni zárójelben találhatók.)

6.38. A Föld felszíne felett milyen magasságban lesz a testre ható gravitációs vonzóerő feleakkora, mint a Föld felszínén?

6.39. Egy űrállomás 30 m hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú" állapotban érezzék magukat? ($g \approx 10$ m/s^2)

6.40. A Föld tömege 81-szerese a Hold tömegének, sugara pedig 3,7-szerese a Hold sugarának. Bizonyítsuk be ezek alapján, hogy egy tárgy súlya a Hold felszínén körülbelül hatodrésze e tárgy földi súlyának!

6.41. A Föld és a Hold középpontjai közötti távolság a Föld sugarának 60-szorosa. A Hold tömege 81-szer kisebb a Föld tömegénél. A középpontjaikat összekötő egyenes szakasz mely pontján gyakorolnak egyenlő nagyságú vonzóerőt egy testre?

6.42. Két rögzített, és egyaránt M tömegű test között középen egy m tömegű testet helyezünk el. Az m tömegű test tehát egyensúlyban van, mivel mindkét másik test ugyanakkora, csak ellenkező irányú erőt fejt ki rá. Stabilis vagy labilis azonban ez az egyensúlyi állapot?

6.43. Ecuador fővárosa, Quito csaknem az Egyenlítőn fekszik. Elképzelhető-e olyan, a Föld körül keringő műhold, mely állandóan Quito „fölött" tartózkodik? Milyen magasságban?

6.44. Elképzelhető-e olyan, a Föld körül körpályán keringő műhold, amelyet Budapestről (távcsővel) mindig lehet látni? Vajon az égbolt déli vagy északi felén látnánk?

6.45. Tegyük fel, hogy megmérjük egy bolygó körül, annak felszínéhez aránylag közel keringő űrhajó keringési idejét. Bizonyítsuk be, hogy ebből az adatból már kiszámítható a bolygó anyagának átlagos sűrűsége, a következő formula alapján:

$$\varrho = \frac{3\pi}{f \cdot T^2}$$

(f a gravitációs állandó.)

6.46. Egy 267 kg tömegű műhold kering a Föld körül. Közepes mozgási energiája $6{,}67 \cdot 10^9$ J, pályájának a Föld felszínétől mért átlagos magassága 1630 km. Meghatározandó ezek alapján a Föld tömege!
(A gravitációs állandó: $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Jm/kg^2}$ a Föld sugara 6370 km.)

7. Forgó mozgás

Bevezető feladatok

7.1. Egy gépkocsi kerekeinek sugara 30 cm. A gépkocsi nyugalmi helyzetből indulva másodpercenként 10 km/h-val növeli sebességét.
a) Mennyi a gépkocsi gyorsulása?
b) Mennyi a kerekek szöggyorsulása?
c) Mennyi a gépkocsi sebessége 5 másodperc múlva?
d) Mennyi a kerekek szögsebessége 5 másodperc múlva?

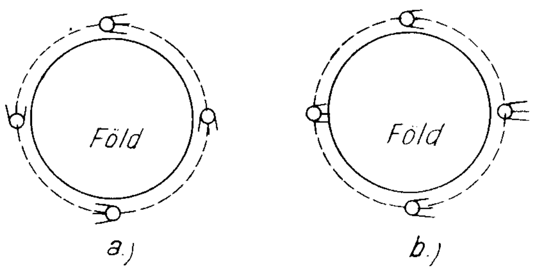
7.2. Rögzített forgástengelyű kerékre 50 N nagyságú, állandóan érintő irányú erő hat a tengelytől 2 méter távolságban. Mekkora szöggel fordul el induló helyzetéből 10 másodperc alatt, ha a tehetetlenségi nyomatéka 320 $\mathrm{kgm^2}$?

7.3. Mekkora a rögzített tengely körül 15 $\mathrm{s^{-1}}$ fordulatszámmal forgó kerék tehetetlenségi nyomatéka, ha mozgási energiája 4905 J?

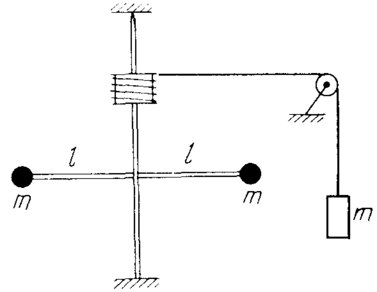
7.4. Súlytalan, 1 méter hosszú merev rúd végein $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 2{,}5$ kg tömegű pontszerű terhek vannak. A rúd a nagyobb tömegtől 0,25 méter távolságban levő, a rúdra merőleges tengely körül foroghat. Mekkora a rendszer tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre vonatkozóan?

Gyakorló feladatok

7.5. Az űrhajó kering a Föld körül, de nem forog. Melyik tehát mozgásának helyes ábrázolása, az ábra *a)* vagy *b)* része?



7.6.



Az ábrán vázolt elrendezésben a zsinór, a vízszintes rúd, a tengely a forgó dobbal, valamint a kis csiga elhanyagolható tömegek. Mekkora gyorsulással süllyed a zsinór végére akasztott test? A tengelyeknél fellépő súrlódástól eltekintünk.

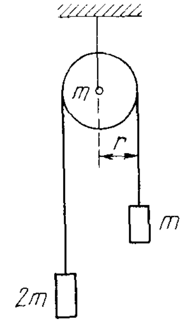
7.7. $M = 0{,}2$ Nm forgatónyomatékkal a tengelysúrlódást legyőzve egyenletesen forgatunk egy testet. Mekkora munkát végzünk, mialatt a szögelfordulás 420°?

7.8. Bizonyítsuk be, hogy helyes az alábbi összefüggés:

$$P = M\omega$$

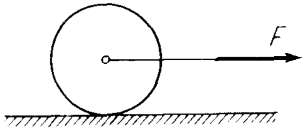
ahol P a teljesítmény, M a forgatónyomaték, ω a szögsebesség. Milyen fizikai jelenségre vonatkozik a felírt összefüggés? Fogalmazzuk meg szavakban a képlet fizikai tartalmát!

7.9.



Mennyi az ábrán vázolt rendszerben a fonálon lógó hasábok gyorsulása, és mekkora erő hat a mennyezetre? (A fonál nem nyúlik, tömege elhanyagolható, és a csigán nem csúszik meg. A csiga tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2} mr^2$.)

7.10. Hogyan mozog az ábrának megfelelő elrendezés esetén az r sugarú, m tömegű, tömör henger, ha a tengelyre kötött fonál segítségével F erővel húzzuk?

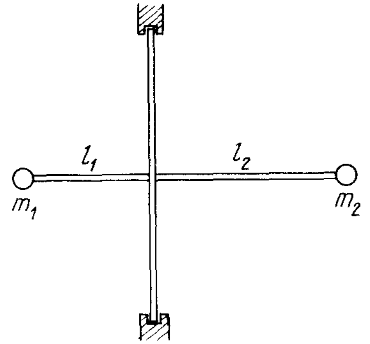


a) súrlódás nincs,
b) van súrlódás.

11. *a)* Miért gurul le a lejtőre helyezett golyó?
b) Ha a lejtő és a golyó között nincs súrlódás, milyen mozgást végez a golyó?

12. Hat-e (s ha igen, milyen irányban) tapadási súrlódási erő az autóra a következő esetekben:
a) a vezető gázt ad, az autó elindul,
b) a vezető menetközben gázt ad, az autó gyorsul,
c) a vezető óvatosan fékez,
d) a vezető hirtelen rálép a fékre, s a kocsi csúszik.

13. A függőleges, jól csapágyazott tengelyű rendszer ω szögsebességgel forog. A vízszintes rúd tömege elhanyagolható. Mekkora, és milyen irányú erő hat a tengelyre?



14. Egy tanuló kétszer dob fel függőlegesen egy labdát úgy, hogy munkavégzése mindkét esetben azonos. Egyik esetben a labda forog is emelkedés közben, a másik esetben nem. Melyik esetben emelkedik a labda magasabbra?

15. Egy 15 cm hosszú ceruzát hegyével az asztalra támasztva függőlegesen tartunk, majd elengedünk. Amikor eldől, milyen sebességgel csapódik az asztalra a ceruza másik vége? (A ceruza végpontján áthaladó, hosszára merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték $\frac{1}{3} ml^2$.)

Házi feladatok

16. Két kerékpáros halad az úton egymás után, azonos sebességgel. Az egyik kerékpár 26-os, a másik 28-as. (Ezek a számok a kerekek „inch"-ben mért átmérőjét jelentik; 1 inch = 2,54 cm, régi angol mértékegység.)

a) Mennyi a kerekek fordulatszámainak aránya?
b) Mennyi a kerekek szögsebességeinek aránya?

7.17. Tömör, korong alakú lendítőkerék tömege 100 kg, sugara 40 cm, percenkénti fordulatszáma 4800. Mekkora a forgási energiája?

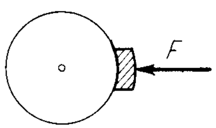
7.18. Mekkora forgatónyomaték hat a 100 kg tömegű, 1 méter sugarú, gyűrű alakú lendkerékre, ha nyugalomból indulva, egyenletesen gyorsulva 10 másodperc alatt 50 fordulatot tesz meg?

7.19. A 2 kgm^2 tehetetlenségi nyomatékú kereket egy villanymotor hajt meg. Mekkora átlagos motorteljesítmény szükséges ahhoz, hogy a kereket 0,5 perc alatt $5 \cdot 10^3$ 1/min fordulatra gyorsítsa fel egyenletesen?

7.20. Szabályos, 10 cm oldalú háromszög csúcsaiban rendre 0,5 g, 1 g, 1,5 g nagyságú tömegpontok vannak. Mekkora az elrendezés tehetetlenségi nyomatéka a háromszög középpontján áthaladó, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan?

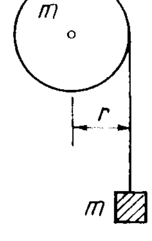
7.21. Nő vagy csökken a léggömb tehetetlenségi nyomatéka (például a középpontján átmenő tengelyre vonatkozólag) felfújás közben?

7.22. Két vékony, l hosszúságú, m tömegű merev rúd azonos szögsebességgel forog, az egyik a végpontján áthaladó, a másik a súlypontján áthaladó, hosszára merőleges tengely körül. Melyiknek és mennyivel nagyobb a mozgási energiája? A végponton áthaladó tengelyre nézve $\frac{1}{3} ml^2$ a tehetetlenségi nyomaték.

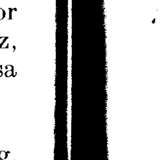
7.23. 

50 kg tömegű, 50 cm sugarú korong szögsebessége 10 s^{-1}. Mekkora sugárirányú erővel kell a féktuskót a kerékhez szorítani, hogy 20 másodperc alatt lefékezzük azt, ha a féktuskó és a korong pereme között a súrlódási együttható 0,5?

7.24. Az r sugarú, m tömegű, tömör henger súrlódásmentes csapágyban vízszintes tengely körül foroghat. A hengerre elhanyagolható tömegű fonalat csavarunk, melynek szabad végére m tömegű testet függesztünk. Mekkora a henger szöggyorsulása?

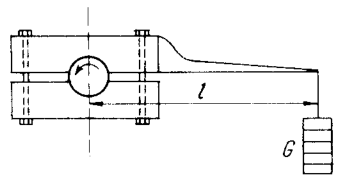


7.25. Legfeljebb mekkora vízszintes F erővel lehet az 5 cm sugarú, 1 kg tömegű, tömör hengerre tekert fonalat húzni, hogy a henger a talajon ne csússzék meg? A tapadási súrlódási együttható 0,3. ($g \approx 10$m/s^2)



7.26. Kerekeskút hengerének tömege m, sugara r, kerekének tömege M, sugara R. A hengerre csévélt kötélen m tömegű vödör függ. Mekkora lesz a kerék kerületi pontjainak sebessége az elengedés után 5 másodperccel, ha a súrlódástól és a kötél tömegétől eltekintünk? ($r = 10$ cm; $R = 50$ cm; $m = 12$ kg; $M = 6$ kg; a tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_1 = \frac{1}{2} m r^2$; a kerék tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_2 = MR^2$.)

7.27. Motor teljesítményének kísérleti úton való meghatározásakor a motor tengelyét két fékpofával veszik körül, melyeket csavarokkal jobban vagy kevésbé a tengelyre lehet szorítani. Az egyik pofáról kinyúló kar végét súlyokkal lehet megterhelni. A súlyokat addig változtatják, amíg a kar vízszintes helyzetben marad. Ekkor a tengely súrlódik a fékpofával, és a súrlódási erő által a fékpofákra gyakorolt forgatónyomaték egyenlő a súlyok forgatónyomatékával. Mekkora a motor teljesítménye, ha fordulatszám percenként 60, és az $l = 1$ m hosszú karon lógó 5 N súlyú teher a kart vízszintes helyzetben tartja? (A kar súlya elhanyagolható.)



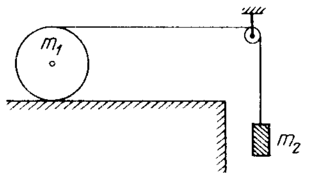
7.28. 3 méter sugarú, 13 tonna tömegű vékony falú acélhenger gördül vízszintes síkon úgy, hogy súlypontja 10,8 m/min sebességgel halad. Mekkora munkát kell végezni a megállításához?

Ajánlott feladatok

7.29. A $2\,l$ hosszúságú rúd felső végénél rögzített tengelyen függ. Legalább mekkora szögsebességgel kell a függőleges helyzetéből kilendülnie, hogy felfüggesztési pontja körül a függőleges síkban teljes körülfordulást tegyen? $\left(\Theta = \frac{1}{3} m\,[2l]^2\right)$

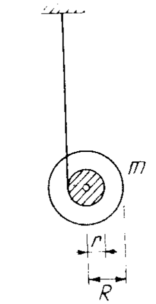
7.30. Egy R sugarú, m tömegű tekegolyót v_0 kezdősebességgel úgy löknek el, hogy nem hozzák forgásba. A golyó a pályán csúszva indul, amelyen μ a csúszási súrlódási együttható. Az indulástól mekkora távolságban kezd a golyó tisztán gördülni? $\left(\Theta = \frac{2}{5} m R^2\right)$

7.31. Az ábrán látható elrendezésben az m_1 tömegű henger és a sík között olyan nagy a tapadási súrlódás, hogy a henger tisztán gördül. A csiga és a kötél elhanyagolható tömegű. Határozzuk meg a hasáb a_2 és a henger súlypontjának a_1 gyorsulását és a kötelet feszítő erőt! $\left(\Theta = \frac{1}{2} m\,r^2\right)$

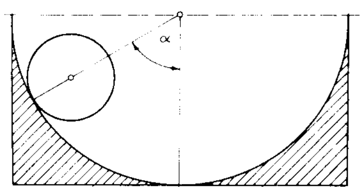


7.32. G súlyú homogén vasrudat végeihez erősített kötelekkel függesztünk fel. Mindkét kötél függőleges, a rúd vízszintes helyzetű. A kötelek súlya a rúd súlyához képest elhanyagolható.
a) Mekkora erőt fejt ki a rúdra egy-egy kötél?
b) Mennyivel csökken — és miért — az egyik kötél által kifejtett erő abban a pillanatban, amikor a másik kötelet elvágjuk?

7.33. Írógépszalag orsójára zsinórt csévélünk, majd a zsinór végét a mennyezethez rögzítve az orsót elengedjük. Hogyan mozog az orsó? („Jojó".) $\left(\Theta = \frac{1}{2} m R^2\right)$

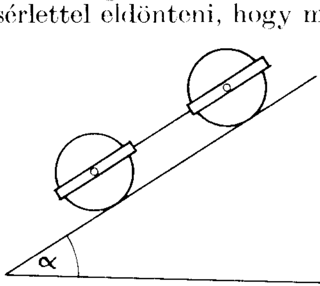


7.34. R sugarú, henger alakú vályúban az $\alpha = 60°$-os helyzetből elindul egy $r = R/4$ sugarú tömör henger, és csúszás nélkül gördül. Mekkora lesz súlypontjának sebessége a vályú aljában?



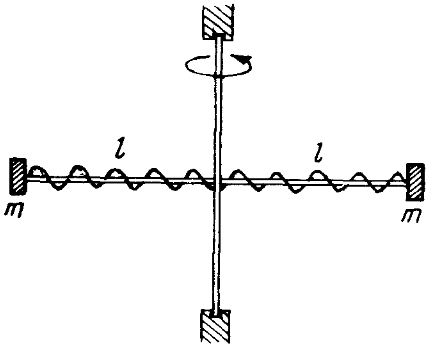
7.35. Azonos tömegű, sugarú és hosszúságú két henger közül az egyik tömör fahenger, a másik üres fémhenger (cső). Mindkettő ugyanazon színű papírral van bevonva, látszólag semmi különbség sincs közöttük. Hogyan lehetne kísérlettel eldönteni, hogy melyik a tömör és melyik az üres?

7.36. Rúddal összekapcsolt két görgő gördül le a lejtőn, amely 45°-os szöget alkot a vízszintessel. A görgők tömege és sugara azonos. Az első görgő tömör henger, a második üres (vékony falú cső). Legalább mekkora legyen a tapadó súrlódási együttható ahhoz, hogy a görgők csúszás nélkül gördüljenek? A görgőkeretek, valamint a rúd tömegét figyelmen kívül hagyhatjuk.



7.37. α hajlásszögű lejtőn csúszásmentesen gördül egy m tömegű, tömör henger. Határozzuk meg a munkatétel segítségével, hogy a nyugalomból induló henger mekkora sebességre tesz szert l hosszúságú út befutása közben. ($\alpha = 30°$; $m = 3$ kg; $r = 4$ cm; $l = 2$ m.)

7.38. Miért tudja a piruettező műkorcsolyázó saját forgásának szögsebességét karjainak mozgatásával befolyásolni? Hogyan csökkenti, és hogyan növeli a szögsebességet forgás közben?

7.39. 

Az ábrán vázolt rendszer a függőleges, jól csapágyazott tengely körül ω szögsebességgel forog. A kioldhatóan rögzített m tömegű testek a rugókat megfeszített állapotban tartják. A vízszintes rúd és a rugók tömege elhanyagolható. Mennyi lesz a szögsebesség, ha a rugók a rögzítés kioldása után a testeket a tengelytől $l/2$ távolságra behúzzák?

8. Rezgések

Bevezető feladatok

8.1 Egy részecske harmonikus rezgő mozgást végez 2 s^{-1} frekvenciával és 5 cm amplitúdóval. Határozzuk meg:
a) a periódusidőt,
b) a körfrekvenciát,
c) a legnagyobb sebességet,
d) a legnagyobb gyorsulást!

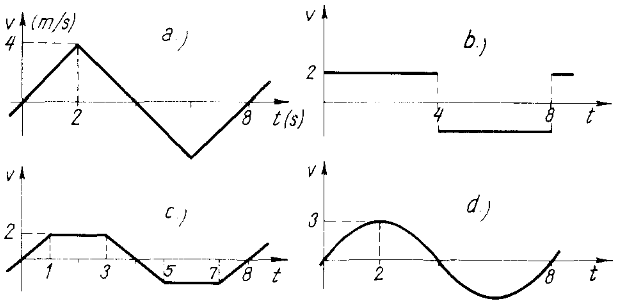
8.2 Mi a harmonikus rezgőmozgás létrejöttének dinamikai feltétele?
a) Az, hogy a tömegpontra ható erők eredője mindig a pillanatnyi kitéréssel arányos nagyságú, de azzal ellenkező irányú legyen, vagy
b) az, hogy a tömegpontra ható erők eredője mindig a pillanatnyi sebességgel arányos nagyságú, de azzal ellenkező irányú legyen, vagy
c) az, hogy a tömegpontra ható erők eredője mindig a pillanatnyi sebességgel arányos nagyságú és azzal megegyező irányú legyen, vagy
d) egyik se, hanem az, hogy . . . .

8.3 Mekkora lenne az 1 méter hosszú fonálinga lengésideje a Holdon, ha ott a nehézségi gyorsulás a földi érték hatodrésze?

8.4 Mekkora a hullámhossza annak a hullámnak, melynek terjedési sebessége 5000 m/s és a rezgésidő 0,002 s?

Gyakorló feladatok

8.5. Határozzuk meg a kitérés—idő és gyorsulás—idő grafikonjait azon egyenes vonalú mozgásoknak, melyek sebesség—idő grafikonjai az ábrán láthatók! Legyen t = 0 esetén a kitérés minden esetben nulla.



8.6. Harmonikus rezgő mozgást végző részecske kitérése

$y = 0{,}03 \cdot \sin \frac{\pi}{6} t$, ahol y-t méterben, t-t másodpercben mérjük.

Határozzuk meg

a) az amplitúdót,
b) a periódusidőt,
c) a maximális sebességet,
d) a maximális gyorsulást,
e) a kitérést, sebességet és gyorsulást a $t = 1$ s időpillanatban!

8.7. Ha a harmonikus rezgőmozgást végző pont kitérése $y = A \cdot \sin \omega t$ alakú függvénye az időnek, akkor sebessége $v = A\omega \cdot \cos \omega t$ és gyorsulása $a = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t$ alakú függvényei az időnek.

Határozzuk meg

a) a sebesség,
b) a gyorsulás időfüggvényét abban az esetben, ha a kitérés időfüggvénye a következő:

1. $y = A \cdot \sin (\omega t + \delta)$; ($\delta$ = állandó)
2. $y = A \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$;
3. $y = A \cdot \cos \omega t$.

8.8. Egy vízszintes fémlap függőleges irányú 1 cm amplitúdójú rezgést tud végezni. Erre a fémlapra egy kockát helyezünk. A fémlap adott amplitúdójú rezgéseinek számát zérusról indulva fokozatosan növeljük. Bizonyos rezgésszám elérése esetén a kocka „zörögni kezd" a fémlapon. Mekkora ez a rezgésszám?

8.9. Bizonyítsuk be, hogy egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, E Young-modulusú fémhuzal megfeszítéskor $\frac{E \cdot A}{l}$ rugóállandójú rugóként viselkedik.

8.10. Egy k rugóállandójú, függőleges helyzetű rugó felső végét a mennyezethez erősítjük. Alsó végére m tömegű testet erősítünk, majd a testet elengedjük. A test harmonikus rezgőmozgást végez. Határozzuk meg

a) az egyensúlyi helyzetet,
b) az amplitúdót,
c) a rezgésszámot,
d) a maximális sebességet,
e) a maximális gyorsulást,
f) a rugóerő maximális értékét,
g) a test mozgási energiájának maximális értékét,
h) a rugóerő által rezgésenként végzett pozitív munkát.

8.11. Ha az üzletekben levő rugós mérlegeknek nem volna csillapításuk, akkor

a) milyen mozgást végezne a mérleg mutatója valamilyen tehernek a tányérra való ráhelyezése után?
b) Hogyan tudnánk megállapítani ekkor a teher súlyát?

8.12. 2 kg tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez. Az egyensúlyi helyzettől 1 méter távolságra a visszatérítő erő nagysága 8N. Határozzuk meg a rezgés

a) körfrekvenciáját,
b) kezdőfázisát,
c) amplitúdóját,

ha a kezdő pillanatban a test kitérése 1 méter, és 4 m/s sebességgel távolodik az egyensúlyi helyzettől.

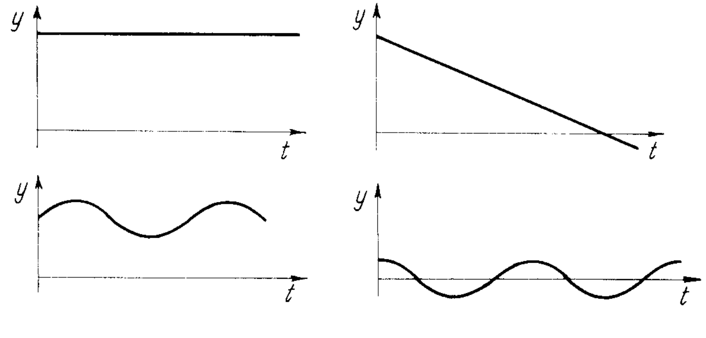
8.13. Egy $5{,}5 \cdot 10^3$ N/m rugóállandójú rugóra 5 kg tömegű golyót ejtünk. Az elengedés pillanatában a golyó alja 2 méterrel van magasabban, mint a rugó felső széle. Legfeljebb mekkora lehet a rugó összenyomódása? ($g \approx 10$ m/s^2)

8.14. Mekkora a lengésideje annak az 1,5 méter hosszú pálcának, mely a végén átmenő vízszintes tengely körül leng? $\left(\Theta = \frac{1}{3} m l^2\right)$

8.15. Mekkora rezgésszámú állóhullámok alakulhatnak ki azon a húron, melynek rezgésbe hozható része 25,2 cm hosszúságú, és úgy van megfeszítve, hogy a transzverzális hullámok 1080 m/s sebességgel terjednek rajta?

Házi feladatok

8.16. Rajzoljuk meg a körülbelüli sebesség—idő és gyorsulás—idő grafikonjait azon egyenes vonalú mozgásoknak, melyek kitérés—idő grafikonjai az ábrán láthatók.



8.17. Egy harmonikus mozgás legnagyobb sebessége 15 m/s, legnagyobb gyorsulása 90 m/s^2. Mekkora a mozgás frekvenciája és amplitúdója?

8.18. Harmonikus rezgő mozgást végző részecske kitérése $x = 0{,}04 \cdot \cos 8t$; ahol x-et méterben, t-t másodpercben mérjük. Határozzuk meg

a) az amplitúdót,
b) a frekvenciát,
c) a periódusidőt,

d) a legnagyobb sebességet,
e) a legnagyobb gyorsulást,
f) az elmozdulást, a sebességet és a gyorsulást a $t = \frac{\pi}{4}$ s időpillanatban!

8.19. Határozzuk meg, hogy az alábbi rezgések közül melyek vannak

a) azonos fázisban,
b) ellenkező fázisban,
c) sem azonos, sem ellenkező fázisban.

$$x = (2\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t) \qquad (1)$$
$$x = (5\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t + 3{,}14) \qquad (2)$$
$$x = (5\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t - 3{,}14) \qquad (3)$$
$$x = (-2\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t) \qquad (4)$$
$$x = (5\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t) \qquad (5)$$
$$x = (2\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t) \qquad (6)$$
$$x = (-5\ \text{m}) \cdot \sin (314\ \text{s}^{-1} \cdot t - 1{,}57) \qquad (7)$$
$$x = (2\ \text{m}) \cdot \cos (314\ \text{s}^{-1} \cdot t) \qquad (8)$$

8.20. Függőleges irányú harmonikus rezgéseket végző vízszintes fémlapon egy pénzdarab helyezkedik el. Megfigyelték, hogy első ízben akkor sikerült becsúsztatni egy vékony papírlapot a pénzdarab és a fémlap közé, amikor a rezgésszám elérte a 80-at másodpercenként. Mennyi volt a fémlap rezgésének amplitúdója?

8.21. Két, egyenként 3 kg tömegű ólomgömböt erősítettek egy vékony, 40 cm hosszú és 2 mm átmérőjű acélrúd két végére. Ezek után a rudat a középpontján átmenő, rá merőleges és egyben függőleges helyzetű tengely körül bizonyos szögsebességű forgásba hozták. A rúd 1 mm-rel megnyúlt.

Mennyi volt a forgás szögsebessége?
Acélra a Young-modulus értéke $2 \cdot 10^5$ N/mm^2.

8.22. Egy rugón két egyenlő tömegű teher függ. A rugó megnyúlása a terhelés hatására 2 cm. Az egyik teher hirtelen leesik. Mekkora amplitúdójú és mekkora periódusú rezgést végez a másik?

8.23. Ha egy íj húrját középen 200 N erővel feszítjük hátra, akkor a húr középső pontjának kitérése 50 cm. A feszítőerő közelítőleg arányos a húr közepének kitérésével. Ha ezzel az 50 cm-re ki húzott íjjal függőlegesen felfelé lövünk egy 1 N súlyú nyilat, az legfeljebb milyen magasra szállhat fel?

8.24. Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotban 30 cm. Rugóállandója $k = 0{,}5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
a) Mennyi munkával lehet a rugót 35 cm-ről 40 cm-re nyújtani?
b) Mennyi munkával lehet a rugót 40 cm-ről 45 cm-re nyújtani?

8.25. Mennyi egy méterrúdnak mint fizikai ingának a lengésideje az egyik végén átmenő vízszintes tengely körül? Milyen hosszú fonálingával tudna „egyszerre lengeni"?

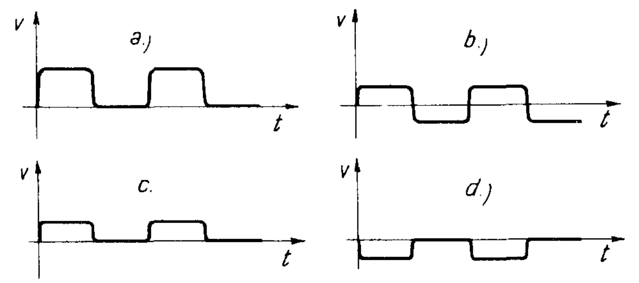
8.26. Egyik végén zárt csőben 440 Hz frekvenciájú hangvillával rezgéseket keltünk. A rezgésnek a csőben a nyitott végén kívül még egy duzzadó helye van. A cső hossza 60 cm. Határozzuk meg a hanghullám hullámhosszát és a hang terjedési sebességét a csőben levő levegőben! Mennyi ennek a levegőnek a hőmérséklete, ha a hang terjedési sebessége 0°C-os levegőben 331 m/s, és a hőmérséklet emelkedésével ez a sebesség fokonként 0,6 m/s értékkel növekszik?

Ajánlott feladatok

8.27. Összetehető-e az egyenletes körmozgás két harmonikus rezgő mozgásból?

8.28. Összetehető-e a harmonikus rezgő mozgás két egyenletes körmozgásból?

8.29. Rajzoljuk meg a körülbelüli gyorsulás—idő és kitérés—idő grafikonjait azon egyenes vonalú mozgásoknak, melyek sebesség idő grafikonjai az ábrán láthatók! Legyen $t = 0$ esetén a kitérés minden esetben nulla!



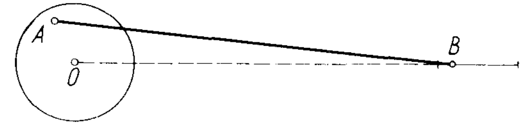
8.30. Egy részecske harmonikus rezgő mozgást végez az $x_1 = 5$ cm és $x_2 = 12$ cm határok között. Maximális sebessége 4,5 m/s. Határozzuk meg
a) a frekvenciát,
b) a maximális gyorsulást.

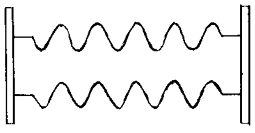
8.31. Készítsünk egy koordináta-rendszert, melynek y tengelyére a pillanatnyi kitérés, x tengelyére pedig a pillanatnyi sebesség előjeles értékeit mérjük. Bizonyítsuk be, hogy ebben a koordinátarendszerben a harmonikus rezgő mozgást végző tömegpont „állapotváltozását" ábrázoló görbe ellipszis lesz. Hol lesz az ellipszis középpontja? Mekkorák lesznek tengelyei?

8.32. Két tömegpont azonos frekvenciával harmonikus rezgést végez. Amikor az egyik az egyensúlyi helyzetén halad át, a másik az előbbi sebességének irányába eső legnagyobb kitérésnél tart. Mekkora a két rezgés fáziskülönbsége?

8.33. Egy tömegpont a x tengely mentén a —20 cm és +20 cm koordinátájú pontok között harmonikus rezgő mozgást végez. Egy teljes rezgés ideje 2 másodperc.
a) Milyen *állandó* sebességgel kell mozognia ugyanezen határok között oda-vissza, hogy a rezgésszáma is ugyanaz maradjon, mint az előbbi esetben?
b) Határozzuk meg mindkét esetben, hogy mennyi ideig tartózkodik a tömegpont egy teljes rezgés során a —10 cm és +10 cm határok között!

8.34. Egy hosszú rúd egyik (A) vége egy egyenletesen forgó kerék kerületének egyik pontjához van csuklósan rögzítve. A rúd másik (B) vége olyan szakasz mentén mozoghat, amelynek meghosszabbítása átmegy a kerék közepén. Bizonyítsuk be, hogy *ha a rúd elég hosszú a kerék sugarához képest*, akkor a rúd B pontja harmonikus rezgő mozgást végez.

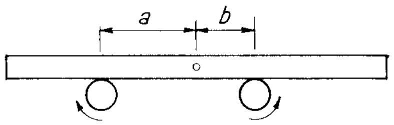


8.35. 

Egy $k = 6$ N/m rugóállandójú rugót két egyenlő hosszúságú részre vágunk szét.

a) Mennyi a keletkezett rugók rugóállandója?

b) Ha a két rugót párhuzamosan kapcsoljuk, milyen rugóállandójú rugót nyerünk?

8.36. 

Milyen mozgást végez az ábrán látható deszka? Miért? (A hengerek sugara, szögsebességük nagysága és a súrlódási együttható mindkét érintkezési felület mentén azonos.)

8.37. Egy deszka 0,5 s^{-1} frekvenciájú rezgést végez vízszintes síkban. A rajta levő test akkor kezd csúszni, ha az amplitúdó eléri a 0,6 méter értéket. Mekkora a teher és a deszka közötti tapadási súrlódási tényező?

8.38. Egy vízszintes rugó végére 0,3 kg tömegű testet erősítünk. Rugóállandó: $k = 0{,}5$ N/m. A test egy vízszintes, súrlódásmentes felületen nyugszik. A testet lefogva, a rugót 4 cm-rel megnyújtjuk. Ezután a rugó szabad végét rögzítjük, majd a testet elengedjük.

a) Mennyi a test sebességének legnagyobb értéke?

b) Mennyi a rugóerő által végzett munka, amíg a test eléri maximális sebességét?

8.39. Igazoljuk, hogy a csillapítatlan harmonikus rezgő mozgást végző test mechanikai energiáinak összege a rezgés folyamán állandó!

8.40. 3 kg tömegű test 10 cm amplitúdóval, 10 Hz frekvenciával harmonikus rezgést végez. Mekkora a mechanikai energiája?

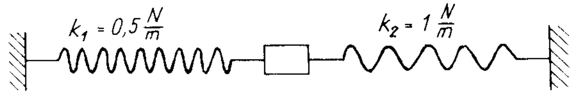
8.41. Ha egy részecske harmonikus rezgő mozgást végez, akkor mind a kitérése, mind a mozgási energiája az időnek színuszos függvénye. Ha f a részecske mozgásának frekvenciája, akkor mekkora a részecske mozgási energiájának a frekvenciája?

8.42. Egy 0,05 kg tömegű test két rugóhoz kapcsolódik, amint ez az ábrán látható. A testet 5 cm-rel balra húzzuk, majd elengedjük.

a) Mennyi munkát végez a bal oldali rugó ($k_1 = 0{,}5$ N/m), mialatt a test kitérése -5 cm-ről $+2$ cm-re változik?

b) Mennyi munkát végez a jobb oldali rugó ($k_2 = 1$ N/m) ugyanekkor?

c) Mennyi a test sebessége a $+2$ cm-es kitérés esetén?



8.43. Bizonyítsuk be, hogy egy kifeszített húr megnyújtásakor végzett munka:

$$W = \frac{1}{2}\frac{E\,A}{l}\cdot(\Delta l)^2;$$

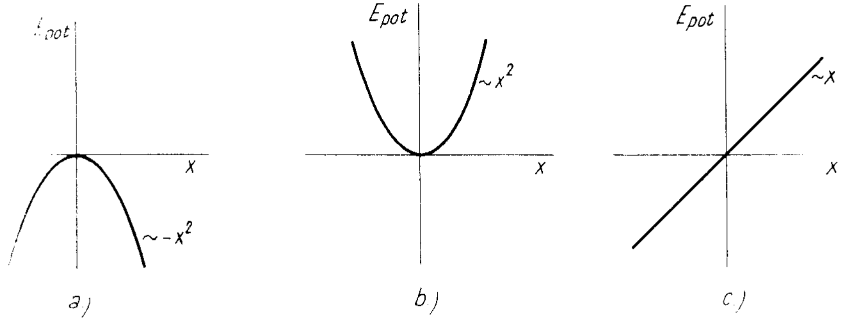
ahol l az eredeti hossz, Δl a megnyúlás, A a keresztmetszet, E a húr anyagának Young-modulusa.

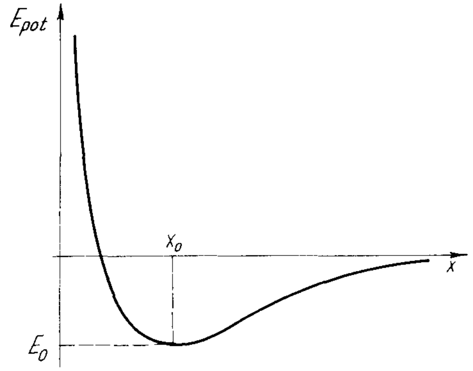
8.44. Harmonikus rezgő mozgást végez-e a földre ejtett labda az egymás utáni visszapattanások során, ha

a) az ütközések tökéletesen rugalmasaknak tekinthetők,

b) az ütközések nem tökéletesen rugalmasak.

8.45. Az x-tengely mentén mozgó részecske potenciális energiája az ábrán látható módon függ a részecske helyétől (három különböző esetben). Ábrázoljuk grafikusan mindhárom esetben a részecskére ható erőt mint a hely függvényét! Melyik esetben végezhet a részecske harmonikus rezgő mozgást?

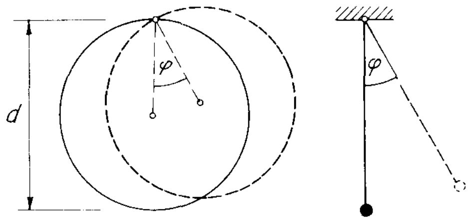


8.46. 

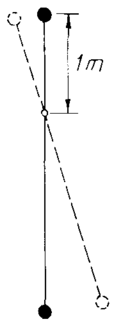
Egy részecske csupán az x tengely mentén mozoghat. Az ábrán a részecske potenciális energiájának a helytől való függése látható.

a) Ábrázoljuk grafikonon (hozzávetőlegesen) a részecskére ható erőt, mint a hely függvényét.

b) Feltéve, hogy a részecske valamilyen rezgő mozgást végez, legfeljebb mennyi lehet mozgási energiája?

8.47. 

Az m tömegű, vékony huzalból készült, d átmérőjű gyűrű lengésidejét egyenlőnek mérték az m tömegű és d hosszúságú fonálinga lengésidejével. Határozzuk meg ebből az érdekes tényből a gyűrű egy kerületi pontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

8.48. 

Súlytalan merev rúd hossza 3 méter. Végeire 1 kg tömegű, kis méretű golyókat erősítettek. Az egész rendszer a felső végétől 1 méterre levő vízszintes tengely körül kis kitérésű lengéseket végez. Mekkora a lengésidő?

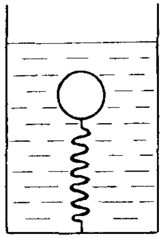
8.49. Mekkora a 300 Hz frekvenciájú, 330 m/s sebességgel terjedő hullám két legközelebbi azonos fázisban mozgó pontja között levő távolság?

8.50. Mekkora az egymástól 30 cm távol fekvő pontok fáziskülönbsége a 4 Hz rezgésszámú 4 m/s sebességgel terjedő hullámban?

9. Folyadékok és gázok mechanikája

Bevezető feladatok

9.1. Mennyi a víz nyomása az óceán felszíne alatt 1 km mélyen, ha feltételezzük, hogy a tengervíz sűrűsége végig $1{,}08 \cdot 10^3$ kg/m³? ($g \approx 10$ m/s²)

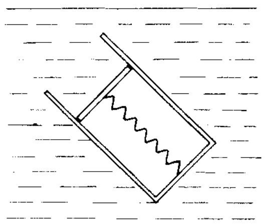
9.2. 

A 6 cm átmérőjű, $2 \cdot 10^2$ kg/m³ sűrűségű parafagolyót egy rugóval vízzel telt edény fenekéhez rögzítjük. Mekkora a rugó megnyúlása, ha a rugóállandó 22,1 N/m? ($g \approx 10$ m/s²)

9.3. Két teljesen egyforma vizespoharat csordulásig megtöltünk vízzel. Az egyikben egy fadarab úszik a víz felszínén, a másikban csak víz van. Mit állapíthatunk meg a két megtöltött pohár súlyáról?

9.4. Csökkenti vagy növeli a szappan (illetve a mosópor) a víz felületi feszültségét? (A választ a tapasztalattal indokoljuk!)

Gyakorló feladatok

9.5. 

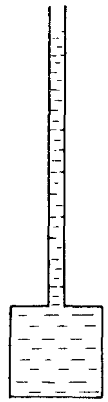
Az ábrán egy egyszerű nyomásmérő eszköz látható. Az eszköz egy hengerből, s egy ebbe pontosan illeszkedő, elhanyagolhatóan kis tömegű dugattyúból áll. A dugattyút a henger zárt lapjával rugó köti össze. A henger belsejében légüres tér van. Ha az eszközt vákuumba helyezzük, vagyis a dugattyút mindkét oldalról légüres tér határolja, akkor a rugó sem fejt ki rá erőt.

Legyen a dugattyú felszíne 2 cm² és a rugóállandó $4 \cdot 10^3$ N/m. Az eszközt az atmoszférikus levegőbe helyezve a rugó összenyomódása 5,1 mm.

a) Mekkora a légnyomás?

b) Mekkora további összenyomódás várható, ha az eszközt egy 10 méter mély tó fenekére süllyesztjük? ($g \approx 10$ m/s²)

9.6. Az 1 dm³ térfogatú, kocka alakú edény felül 0,4 cm² keresztmetszet területű csőben folytatódik. Az edénybe 1,5 liter vizet öntünk. Mekkora a fenékre ható teljes nyomóerő? ($g \approx 10$ m/s²)



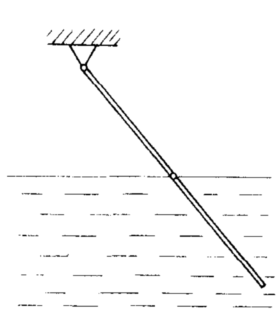
9.7. Egy kisebb tóban kövekkel megrakott csónak úszik. Mi történik a tó felszínével, ha a köveket a csónakból a vízbe dobáljuk?

9.8. Hasáb alakú test térfogatának negyed része merül higanyba. A test térfogatának hányad része merül higanyba akkor, ha annyi vizet öntünk rá, hogy a víz a testet teljesen ellepje? (A higany sűrűsége $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³)

9.9. A 0,099 N súlyú kődarabot vízbe lógatva 0,054 N, szénkénegbe lógatva 0,0423 N erővel kell tartani. Mennyi a szénkéneg sűrűsége?

9.10. A dinamométerre akasztott fadarab levegőben 200 N; vasdarab vízben 980 N; a kettő összeerősítve vízben 855 N erővel húzza a dinamométert. Mennyi a fa sűrűsége?

9.11. Vékony pálca felső végén levő vízszintes tengely körül foroghat, alsó része vízbe lóg. Az egyensúlyi helyzetben a pálca a függőleges helyzettől az ábrán látható módon elfordul úgy, hogy középpontja a víz felszínén van. Mekkora a pálca anyagának sűrűsége?



9.12. Vízzel félig töltött fazekat mérlegre helyezünk, és kiegyensúlyozzuk. Mit jelez a mérleg mutatója, ha egy fonálra függesztett vasgolyót is lógatunk a vízbe úgy, hogy a golyó sehol sem ér a fazékhoz?

9.13. A vízbe dobott vasgolyó néhány másodperccel a vízbeesés után már egyenletes sebességgel süllyed. A rá ható nehézségi erőnek hány százalékával egyenlő nagyságú ekkor a rá ható súrlódási erő? (A vas sűrűsége $7,8 \cdot 10^3$ kg/m^3, a víz sűrűsége $1 \cdot 10^3$ kg/m^3.)

9.14. Miért vékonyodik el a vízcsapból kifolyó folytonos vízsugár?

9.15. Lehet-e egy folyón szabadon úszó két tárgynak különböző sebessége? Ha együtt, egyszerre indultak el, elhagyhatja-e egyik a másikat?

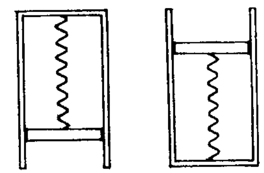
9.16. Nagyobb, vagy kisebb az űrhajóban a folyadékba helyezett testre ható felhajtó erő, mint a Föld felszínén? Milyen alakú a vízcsepp az űrhajóban?

Házi feladatok

9.17. Hidraulikus emelő munkahengerének átmérője 60 cm, a nyomóhenger átmérője 6 cm. Mekkora erőt kell kifejteni a nyomóhengerre, ha 1 tonnás terhet emel a szerkezet?

9.18. A 9.5. feladatban leírt módon működő nyomásmérő eszközzel légnyomást mérünk. Az eszköz adatai: a dugattyú keresztmetszete 1 cm^2, a rugóállandó 2000 N/m. Ha a hengert dugattyúval lefelé fordítjuk, a rugó összenyomódása 4,9 mm. Ha a hengert

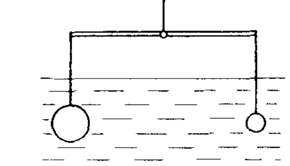
dugattyúval felfelé fordítjuk, a rugó összenyomódása 5,1 mm. ($g \approx 10$ m/s^2)
a) **Határozzuk meg a dugattyú tömegét!**
b) **Mennyi a légnyomás?**



9.19. **Mindkét végén nyitott, 1 cm^2 keresztmetszetű, *U*-alakú csőbe először higanyt töltünk, majd az egyik ágba a higany fölé 60 cm^3 vizet öntünk. Mekkora lesz a két higanyfelszín szintkülönbsége?** (A higany sűrűsége $13,6 \cdot 10^3$ kg/m^3.)

9.20. Egy 8 cm vastag, 450 kg/m^3 sűrűségű fahasáb 750 **kg**/m^3 sűrűségű benzinen úszik. Mennyire merül a fadarab a benzinbe?

9.21. **Egyenlő karú mérlegen 1750 gramm tömegű alumíniumdarab és 800 gramm tömegű vasdarab lóg. A testeket folyadékba lógatva a mérleg egyensúlyban** van. Mennyi a folyadék sűrűsége? (Az alumínium sűrűsége $2,7 \cdot 10^3$ kg/m^3, a vas sűrűsége $7,8 \cdot 10^3$ kg/m^3.)



9.22. Egy test súlya levegőben $86 \cdot 10^{-2}$ N, egy bizonyos folyadékban $72,4 \cdot 10^{-2}$ N, egy másikban $63,9 \cdot 10^{-2}$ N. A két folyadékot milyen súlyarányban kell kevernünk, hogy a keverékben a test súlya $67,1 \cdot 10^{-2}$ N legyen?

9.23. Egy vízmedencében jégtömb úszik a víz felszínén. Hogyan változik meg a víz szintmagassága, miután a jég elolvadt, ha eredetileg ez a jégtömb befagyasztott
a) vasgolyót;
b) légzárványokat;
c) fadarabokat;
d) hidrogén-zárványokat tartalmazott?

9.24. Egy 300 gramm tömegű ballont héliummal töltenek meg, amíg csak a ballon térfogata 1,5 m^3 nem lesz. A ballonban levő hélium sűrűsége ekkor 0,178 kg/m^3, a környező levegő sűrűsége pedig 1,29 kg/m^3. Mekkora erővel kell tartani a ballont, hogy fel ne emelkedjék? ($g \approx 10$ m/s^2)

9.25. A mérlegen kiegyensúlyozunk egy háromnegyed részéig vízzel töltött edényt. Mi történik, ha valamilyen tárgyat veszünk kezünkbe, s ennek kiálló végét a vízbe mártjuk? Egyensúlyban marad a mérleg? Mindegy, hogy ez a tárgy vasból van vagy fából?

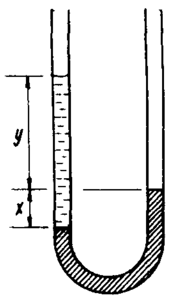
9.26. Mekkora sugarú kapilláris csőben emelkedik a víz 10 cm-rel magasabbra a tálban levő víz szintjénél? (A víz felületi feszültsége 0,073 N/m; $g \approx 10$ m/s^2.)

9.27. Egyenlő sugarú parafa és agyaggömb nagy magasságból esik úgy, hogy sebességük már állandó. A parafagömb sebessége 7 m/s. Mekkora az agyaggömb sebessége? (A parafa sűrűsége $2\cdot10^2$ kg/m^3; az agyagé $1{,}8\cdot10^3$ kg/m^3; a levegőben létrejött felhajtóerő elhanyagolható.)

Ajánlott feladatok

9.28. Két azonos sugarú gömb közül az egyik fából, a másik vasból van. Ha a közegellenállástól eltekintünk, a vasgolyónak hamarabb kell földet érnie. Miért?

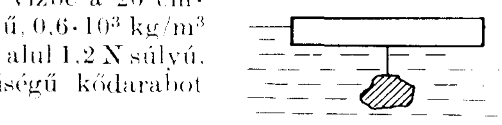
9.29. Csonka kúp alakú edényben 10 cm magasan víz van, és erre 10 cm vastag rétegben $8\cdot10^2$ kg/m^3 sűrűségű alkoholt öntünk. Mennyi a nyomás az edény fenekén? ($g \approx 10$ m/s^2)

9.30. 

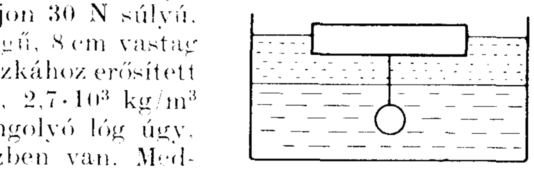
Mindkét végén nyitott, függőleges helyzetű, U-alakú csőben alul higany helyezkedik el, mindkét szárban egyenlő magasan. Ezek után az egyik szárba a higany fölé óvatosan vizet rétegezünk. Bizonyítsuk be, hogy függetlenül a vízoszlop magasságától, az ábrán megjelölt x és y szakaszok aránya mindig ugyanannyi.

9.31. Egy 40 cm egyenletes vastagságú jégtábla vízből kiálló részének magassága felére csökken, ha egy 750 N súlyú ember lép a közepére. Mekkora a jégtábla vízszintes felületének területe? (A jég sűrűsége $9{,}2\cdot10^2$ kg/m^3 és $g \approx 10$ m/s^2.)

9.32. Meddig merül be a vízbe a 20 cm·10 cm·3 cm méretű, $0{,}6\cdot10^3$ kg/m^3 sűrűségű deszka, ha alul 1,2 N súlyú, $2{,}5\cdot10^3$ kg/m^3 sűrűségű kődarabot akasztunk rá?

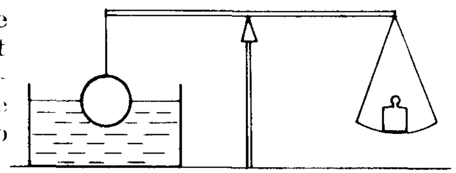


9.33. Vízre $0{,}8\cdot10^3$ kg/m^3 sűrűségű olajat rétegezünk. Az olajon 30 N súlyú, $0{,}5\cdot10^3$ kg/m^3 sűrűségű, 8 cm vastag deszka úszik. A deszkához erősített fonálon 8 N súlyú, $2{,}7\cdot10^3$ kg/m^3 sűrűségű alumíniumgolyó lóg úgy, hogy teljesen a vízben van. Meddig merül a deszka az olajba? ($g \approx 10$ m/s^2)



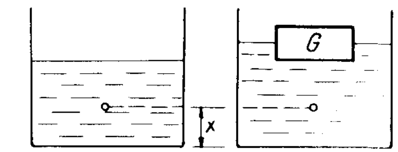
9.34. Egy gyertyát alsó végén megfelelő ólomnehezékkel ellátva vízbe helyezünk úgy, hogy függőleges helyzetben maradjon és hogy felső vége kiálljon a vízből. Ezután meggyújtjuk a gyertyát.
a) Mit tapasztalunk, meddig ég a gyertya?
b) Mi történne, ha víz helyett benzint használnánk? (!)

9.35. Egy gömbnek, ha félig vízbe mártjuk, az ábra szerint megmért súlya 20%-kal nagyobb, mintha egészen vízbe mártjuk. Mennyi a gömb anyagának sűrűsége?



9.36. Egy bizonyos tárgy súlya levegőben 250 N, vízben 180 N, egy ismeretlen folyadékban 200 N.
a) Mennyi a tárgy sűrűsége?
b) Mennyi az ismeretlen folyadék sűrűsége?
A levegő felhajtóerejét nem kell figyelembe venni.

9.37. Az A alapterületű, téglatest alakú medencében egy bizonyos magasságig víz van. Mennyivel változik a nyomás a fenék felett x magasságban, ha a vízre G súlyú, fából készült téglatestet helyezünk?



9.38. Miért lobog a láng, és miért lobog a zászló?

9.39. Egy felül nyitott, henger alakú víztartály alsó csapját kinyitjuk. Miközben a víz kifolyik, egyenletesen csökken-e a tartályban levő víz szintje?

9.40. A csapból csurgó víz közvetlenül a csap után még simán, egyenletesen folyik, azonban lejjebb már részekre szakadozva, fröcskölve zuhan a lefolyóba. Miért?

9.41. Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy egy 2 mm sugarú higanycseppet (felületi feszültség: 0,52 J/m^2) két egyforma méretű higanycseppé vágjuk szét?

9.42. Mennyi a felületi energia csökkenése, ha két, egyenként 2 mm sugarú, gömb alakú vízcsepp egyetlen gömb alakú vízcseppé egyesül? (A víz felületi feszültsége szobahőmérsékleten 0,073 J/m^2.)

9.43. Közelítőleg mennyi a Föld légkörének teljes súlya?

9.44. Két, azonos anyagból készült golyó hosszú, súlytalan fonállal van összekötve. Sugaraik aránya 2:1. Az összekötött golyókat elegendő nagy magasságból leejtve, egy idő múlva állandó sebességgel esnek. Hogyan helyezkednek el ekkor a golyók, és mekkora erő feszíti az összekötő fonalat, ha a nagyobb golyó súlya 10 N?

10. Fénytani alapjelenségek. Tükrök

Bevezető feladatok

10.1. Két síktükröt egymással szembefordítva úgy helyezünk el, hogy síkjaik 45°-os szöget alkossanak. Az a fénysugár, mely egymás után mind a két tükörről egyszer visszaverődik, hogyan halad tovább eredeti irányához képest?

10.2. 8 cm görbületi sugarú homorú tükör előtt 12 cm-re 1 cm magas tárgy van.
a) Határozzuk meg a képtávolságot!
b) Számítsuk ki a kép nagyságát!
c) Szerkesszük meg a képet!

10.3. Domború gömbtükör görbületi sugara 8 cm. Szerkesszük meg a tükör előtt 3 cm-re levő tárgy képét! Az eredményt számítással is ellenőrizzük!

10.4. Mekkora annak az anyagnak a törésmutatója, amelyre 60°-os beesési szög alatt ejtve a fényt, a visszavert és megtört fénysugár merőleges lesz egymásra?

Gyakorló feladatok

10.5. Miért nem lehet észrevenni a tökéletesen sima síktükör felületét?

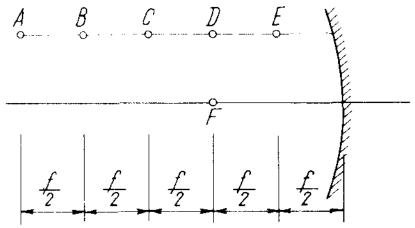
10.6. Fénysugár esik 30°-os beesési szöggel egy planparalel üveglemezre ($n = 1,5$). Milyen vastag az üveglemez, ha a fénysugár a lemezből kilépve, haladási irányára merőlegesen 1,94 cm-t tolódott el?

10.7. Prizma egyik oldallapjára merőlegesen beeső fénysugár a másik oldallapon kilépve az utóbbi síkjával 25°-os szöget zár be. A prizma anyagának törésmutatója 1,7. Mekkora a törőszög?

10.8. Számítsuk ki a teljes visszaverődés határszögét
a) üveg—levegő;
b) víz—levegő;
c) üveg—víz
határfelületre, ha az üveg abszolút törésmutatója 1,52, a víz abszolút törésmutatója 1,33, s a levegő abszolút törésmutatója 1-nek vehető.

10.9. Két közeg határfelületének egy pontjára az optikailag ritkább közeg felől minden irányból érkezik fénysugár. Milyen térrészben helyezkednek el a sűrűbb közegbe belépő megtört fénysugarak?

10.10. A visszaverődés törvényét felhasználva p o n t o s a n szerkesszük meg a homorú tükörről visszavert sugarat, ha a beeső sugár az optikai tengellyel párhuzamos, és attól $\frac{R}{2}$ távolságra halad.
a) Hol metszi el ez a sugár az optikai tengelyt?
b) Mit nevezünk fókuszpontnak?
c) Hogyan kell eljárni a szerkesztés közben?

10.11. 

Szerkesszük meg az ábrán látható *A*, *B*, *C*, *D*, *E* világító pontok képeit. Szerkesztésünk pontosságát számítással ellenőrizzük!

10.12. Egy tárgynak homorú tükörrel előállított képe kétszer akkora, mint maga a tárgy. A tárgy és képe közötti távolság 15 cm. Hány dioptriás a tükör?

10.13. Mekkora görbületi sugarú homorú tükörben látjuk arcunkat kétszeres nagyításban? A tükröt arcunktól 30 cm-re tartjuk.

10.14. Hogyan lehet megmérni egy domború tükör fókusztávolságát?

10.15. Egy tükörre összetartó fénysugarak esnek. Ha a sugarakat a tükör mögötti találkozásukig meghosszabbítjuk, akkor ez a látszólagos találkozási pont a tükörtől 12 cm-re van. Milyen távolságban találkoznak a sugarak a tükörtől való visszaverődésük után, ha a tükör fókusztávolsága:
a) +24 cm;
b) —24 cm;
c) végtelen (síktükör)?

Házi feladatok

10.16. Víz alá merülve milyen irányból látjuk a naplementét?

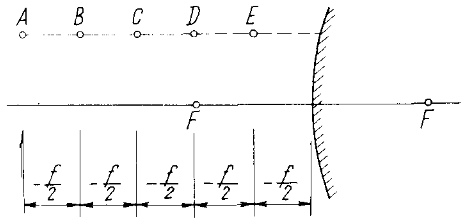
10.17. Homorú gömbtükör görbületi sugara 40 cm. Határozzuk meg a tárgy helyzetét, ha:
a) a kép valódi és a nagyítás kétszeres;
b) a kép látszólagos és a nagyítás kétszeres!

10.18. Milyen távol van a 80 cm sugarú homorú gömbtükörtől az a tárgy, melynek képe az eredeti tárgy nagyságának négyszeresе?

10.19. Hogyan lehet megmérni egy homorú tükör fókusztávolságát?

10.20. Hová kell helyezni azt a tárgyat, amelynek 0,5-szeresen „nagyított" képét 40 cm görbületi sugarú domború tükörrel akarjuk előállítani?

10.21. Valódi, fordított állású képet állítunk elő homorú tükörrel. Mi történik a képpel, ha eltakarjuk:
a) a tárgy közepét;
b) a tükör közepét?

10.22. Szerkesszük meg az ábrán látható *A*, *B*, *C*, *D*, *E* világító pontok képeit! Szerkesztésünk pontosságát számítással ellenőrizzük!


Ajánlott feladatok

10.23. Miért van az, hogy az ég, a felhők és a fák tükörképe a vízben mindig sötétebb, mint a valóságos felületük?

10.24. A lemenő nap tükröződését a Balatonban némi romantikával „aranyhídnak" nevezik. Hogyan alakul ki ez a tünemény?

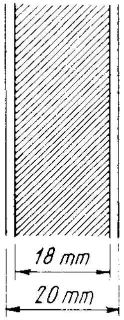
10.25. A papír és a zsír külön-külön átlátszatlan, fehér színű anyagok. A papírra került zsírcsepp helyén azonban szinte átlátszó zsírfolt keletkezik. Mi ennek a magyarázata?

10.26. A benzol sűrűsége 0,89 g/cm^3, tehát úszik a vízen. Tegyük fel, hogy egy félig vízzel telt edénybe a víz fölé benzolt rétegezünk. Vajon az a fénysugár, amely a benzolban halad a benzolnál sűrűbb vízréteg felé, a határfelületen hogyan fog megtörni?

10.27. Mit tapasztalunk akkor, ha az 1,5 törésmutatójú üvegből készült pohárba 1,5 törésmutatójú benzolt öntünk?

10.28. Egy edényt 10 cm magasságig vízzel töltünk meg. Az edény fenekén pontszerű fényforrás világít. A víz felszínén átlátszatlan, köralakú tárcsa úszik úgy, hogy középpontja éppen a fényforrás felett van. Milyen átmérőjű legyen a tárcsa, hogy a fényforrás egyetlen sugara se jusson ki a vízből? A víz törésmutatója 1,33.

10.29.



Egy 20 mm külső átmérőjű üvegcsőben higany van. A higanyoszlop „vastagsága" oldalról, az üvegcsövön át nézve 18 mm-nek látszik. Mennyi az üvegcső falvastagsága, ha az üveg törésmutatója 1,5?

10.30. Akárhogy is forgatjuk a lázmérőt, a higanytartály üvegfalát képtelenek vagyunk észrevenni. Úgy tűnik, mintha a tartály teljes egészében higanyból lenne. Az üveget itt csak tapintásunk érzékeli. Miért?

10.31. Tudunk-e egy üveggömbre olyan fénysugarat bocsátani, amely megtörve a gömb belsejébe jut, majd újra elérve a felületet, belül teljesen visszaverődik?

10.32. Prizma egyik lapjára merőlegesen fénysugár esik. A prizma anyagának törésmutatója 1,6. Mekkora az a minimális törőszög, amelynél a másik lapon nem lép ki a prizmából a fénysugár?

10.33. Egy prizma törőszöge 45°, törésmutatója adott hullámhosszúságú fényre 1,6. Milyen szöggel eshet a prizmára a fénysugár, hogy még ne lépjen fel teljes visszaverődés?

10.34. Legalább mekkora legyen egy üvegkocka anyagának törésmutatója ahhoz, hogy egyik lapján beeső fénysugár csak a szemközti lapon léphessen ki?

10.35. Vízszintes papirosra kis kerek foltot rajzolunk. A papirosra üvegkockát helyezünk úgy, hogy az a foltot elfedje. Ha a foltot a kocka valamelyik oldallapján keresztül akarjuk nézni, nem látjuk. Ha azonban a foltra vizet cseppentünk, és úgy helyezzük rá az üvegkockát, a folt látható lesz.

a) Magyarázzuk meg a jelenséget, felhasználva, hogy az üvegnek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója 3/2, a vízé 4/3!

b) Milyen törésmutatójú kockával lehet a foltot víz nélkül is látni?

10.36. A vízbe helyezett fapálca töröttnek látszik, mégpedig a vízben levő része a víz felülete felé törik, ellentétben a fénysugárral, ami a beesési merőleges felé törik. Mi a jelenség magyarázata?

10.37. 15 cm vastag üveglemez alatt egy kicsi szemcse fekszik. Hol keletkezik ennek látszólagos képe, ha a látósugár merőleges a lemez felületére és az üveg törésmutatója 1,5?

10.38. A zsebtükör felületéhez érintett ceruzahegy saját tükörképétől 2 mm-re látszik. Milyen vastag a tükör? (Az üveg törésmutatója: $n = 1{,}5$.)

10.39. A szobát megvilágító lámpa mind a külső, mind a belső ablaktáblán tükröződik. Így az ablakra nézve a lámpának két tükörképét is látjuk.

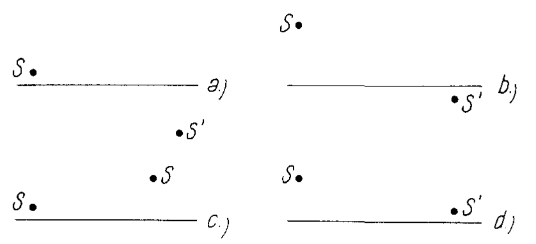
a) Egyforma erősen világít a két tükörképlámpa?
b) Egyforma nagy a két tükörképlámpa?
c) Milyen messze van egymástól a két tükörképlámpa?

10.40. A valóságosnál soványabbnak vagy kövérebbnek látjuk arcunkat, ha a fényesen csillogó alumínium fazék oldalában szemléljük tükörképét? Miért?

10.41. Homorú gömbtükörben keletkező képnek az optikai tengelyre merőleges mérete háromszor kisebb a tárgyénál. Ha a tárgyat 15 cm-rel közelebb visszük a tükörhöz, a kép mérete csak 1,5-szer lesz kisebb a tárgyénál. Mekkora a tükör fókusztávolsága?

10.42. A csillogóan fényes, nikkelezett kávéskanálnak nemcsak a domború, hanem a homorú oldala is elő tudja állítani arcunk tükörképét. A két tükörkép nagyítása közel azonos, azonban egyik esetben egyenes állású, másik esetben fordított állású képet látunk. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget!

10.43. Határozzuk meg szerkesztéssel az ábrán szereplő négy esetben a gömbtükör görbületi középpontját és optikai középpontját, ha adott a tükör optikai tengelye, S tárgypont és képe, S'! Határozzuk meg azt is, hogy az egyes esetekben domború vagy homorú gömbtükörről van-e szó?



11. Optikai lencse

Bevezető feladatok

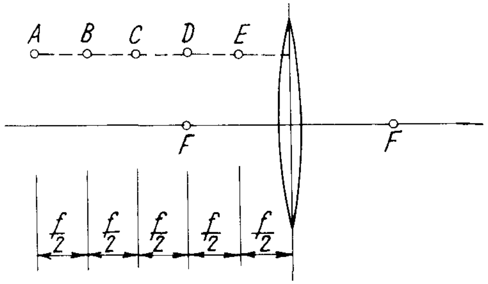
11.1. 10 dioptriás lencsétől 15 cm távolságra 2 cm magas tárgyat helyezünk el az optikai tengelyre merőlegesen.
a) Hol van a kép és mekkora?
b) Szerkesszük meg a képet!

11.2. Bikonvex lencse mindkét görbületi sugara 3 cm. Anyagának törésmutatója 1,5. Mekkora a fókusztávolsága?

Gyakorló feladatok

11.3. Valamely tárgynak 4-szeres lineáris nagyítású képét akarjuk előállítani a tőle 1 méter távolságban elhelyezett ernyőn.
a) Milyen gyújtótávolságú vékony lencsét használjunk?
b) Mekkora távolságban legyen a lencse a tárgytól?

11.4. Szerkesszük meg az ábrán látható A, B, C, D, E világító pontok képeit! Szerkesztésünk pontosságát számítással ellenőrizzük!



11.5. Egy lámpa izzószála az ernyőtől $L = 1$ méter távolságban van. A lámpa és az ernyő között kétféleképpen helyezhetjük el ugyanazt a vékony gyűjtőlencsét, ha azt akarjuk, hogy az ernyőn az izzószál éles képe jelenjék meg.

a) Határozzuk meg a lencse fókusztávolságát, ha a két lencsehelyzet közti távolság $l = 20$ cm!
b) Bizonyítsuk be, hogy a két kép nagyságának mértani közepe a tárgy nagysága!
c) Bizonyítsuk be, hogy e két nagyítás egymás reciprok értéke!

11.6. Két, 20 cm görbületi sugarú óraüveget homorú oldalaikkal egymás felé fordítva összeragasztunk, és víz alá helyezünk. A víz törésmutatója 1,33.
a) Mennyi lesz az így kapott „levegőlencse" fókusztávolsága?
b) Milyen sugárnyalábot kell a levegőlencsére bocsátani ahhoz, hogy az a lencsét elhagyva párhuzamos nyalábként haladjon tovább?

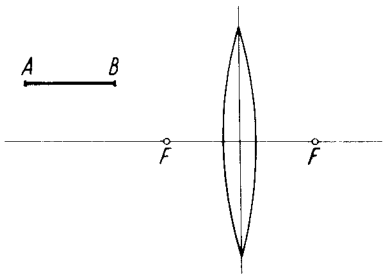
11.7. Hogyan változik meg a lencse fókusztávolsága, ha a lencsét vízbe helyezzük?

11.8. Szerkesszük meg a lencsére tetszőleges irányból érkező fénysugár útját a lencsén való áthaladás után, ha a lencse fókusza adott!

11.9. Egy 20 dioptriás gyűjtőlencsével mint egyszerű nagyítóval nézzük a lencsétől 40 mm-re levő bélyeget. Hányszor nagyobbnak látjuk?

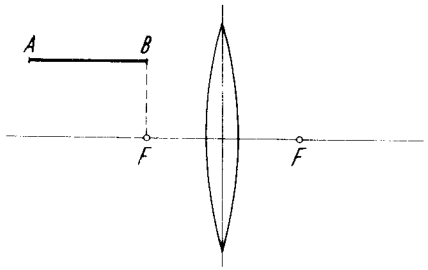
11.10. Hány dioptriával változik meg a szemlencse erőssége, miközben tekintetünket a csillagos égboltról a tiszta látás távolságában (25 cm) levő könyvre visszük?

11.11.

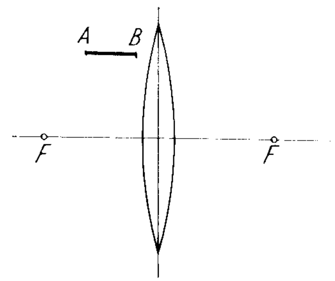


Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!

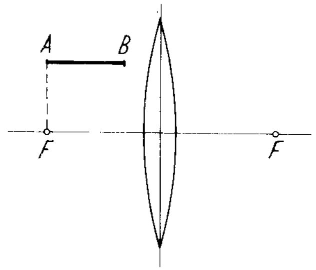
11.12. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



11.13. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



11.14. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!

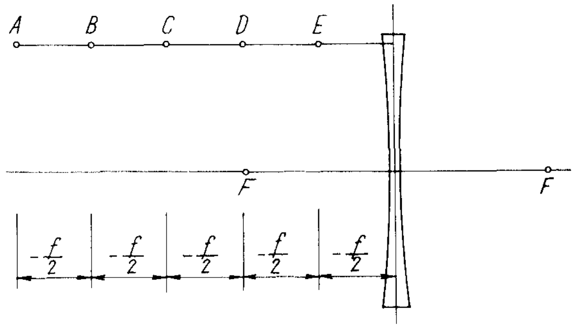


Házi feladatok

11.15. A 4 dioptriás gyűjtőlencsétől 60 cm távolságban, az optikai tengelytől 10 cm-re elhelyezett pontszerű tárgy van. Hol keletkezik a kép?

11.16. Milyen törésmutatójú üvegből kellene készülnie egy kétszer domború, mindkét oldalán R görbületi sugarú gyűjtőlencsének ahhoz, hogy fókusztávolsága $R/2$ legyen?

11.17. Szerkesszük meg az ábrán látható A, B, C, D, E világító pontok képeit! Szerkesztésünk pontosságát számítással ellenőrizzük!



11.18. Gyűjtőlencse mindkét gömbfelületének görbületi sugara 6—6 cm. A lencse 10 cm távolságra levő tárgyról szintén 10 cm távolságra levő valódi képet ad.
a) Mekkora a lencse gyújtótávolsága?
b) Mekkora a lencse anyagának törésmutatója?

11.19. Gyűjtőlencse törésmutatója 1,5, mindkét görbületi sugara 12 cm. Mekkora a tárgy távolsága a lencsétől, ha a nagyítás:
a) 1;
b) 20;
c) 0,2;
d) -2?

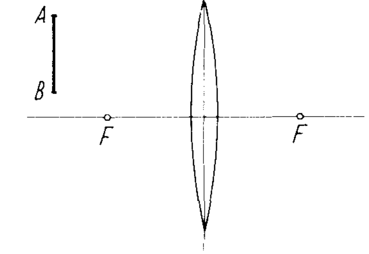
11.20. Kétszer domború lencsével előállított valódi kép a képoldali fókuszponttól 20 cm távol van. A tárgytól való távolsága 45 cm. Mekkora a lencse fókusztávolsága és a nagyítás?

11.21. Rögzített helyzetű tárgy és ernyő között a lencsét mozgatva, kétszer kapjuk a tárgy éles képét az ernyőn. A két kép nagysága K_1 és K_2. Mekkora a tárgy nagysága? Mekkora lehet a tárgy és az ernyő távolsága?

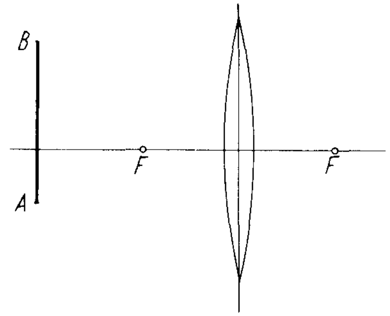
11.22. Valódi, fordított állású képet állítunk elő gyűjtőlencsével. Mi történik a képpel, ha eltakarjuk:
a) a tárgy felső felét;
b) a lencse felső felét?

11.23. Az 5 cm fókusztávolságú lencsével ellátott fényképezőgéppel egy 4 méter magasról szabadon eső golyót akarunk lefényképezni akkor, amikor az a talajtól 80 cm-re van. A gép ekkor 4 méterre van a golyótól. Mekkora expozíciós időt válasszunk, hogy a képen ne legyen 0,2 mm-nél nagyobb elmosódás?

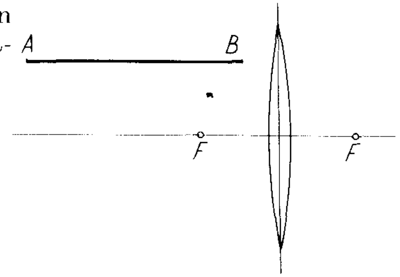
11.24. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



11.25. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



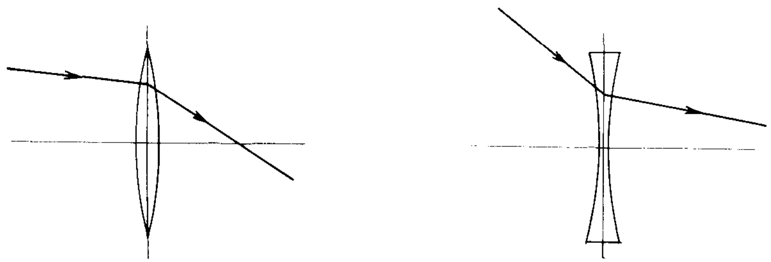
11.26. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



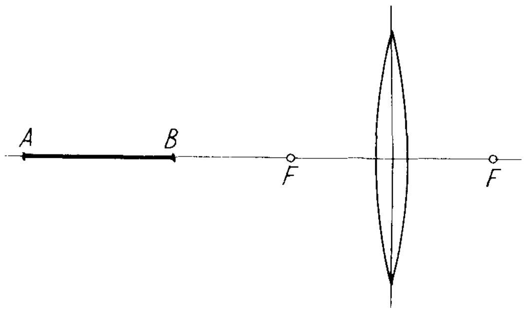
Ajánlott feladatok

11.27. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással is a szórólencse fókuszában levő világító pont képének helyét!

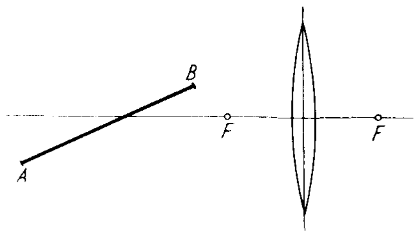
11.28. Szerkesztéssel határozzuk meg a lencse fókuszát az ábrán látható mindkét esetben! Adott a lencse helyzete, optikai tengelye és egy fénysugár menete.



11.29. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



11.30. Szerkesszük meg az ábrán AB szakasszal ábrázolt világító fénycső képét!



11.31. Az ábrán egy gyertyát és a róla keletkezett képet látjuk. Szerkesszük meg annak a leképező eszköznek (lencsének, tükörnek) a helyét és fókusztávolságát, amely a leképezést megvalósította!

11.32. Mekkora távolságra kell a tárgyat a gyűjtőlencsétől elhelyezni, hogy a tárgy és valódi képe között a távolság a legkisebb legyen?

11.33. Mekkora lehet annak a lencsének a fókusztávolsága, amellyel a padlótól $d = 2$ méter távolságban levő csillár képét a padlón elő tudjuk állítani?

11.34. 2 cm fókusztávolságú, 3 cm átmérőjű gyűjtőlencsétől 5 cm távolságban, az optikai tengelytől 4 cm-re, pontszerű tárgy van. Szerkesszük meg a képet és a leképezést létrehozó sugárnyalábot!

11.35. Párhuzamos sugárnyaláb merőlegesen esik egy ernyőre, amelyen $r = 2{,}5$ cm sugarú kört világít meg. Ha az ernyőtől $l = 50$ cm távolságban egy 3 cm sugarú szórólencsét állítunk a nyaláb útjába, az ernyőn a világos kör sugara $R = 7{,}5$ cm-re növekszik. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

11.36. Nagy távolságból egy pontszerű fényforrást közelítünk a gyűjtőlencséhez, az optikai tengelye mentén. A lencsével párhuzamos ernyőt figyelve, két ízben azt tapasztaljuk, hogy az ernyőn a lencse átmérőjével azonos átmérőjű fényes kör látszik. Hol van ezekben az esetekben a fényforrás, és melyik esetben erősebb a kör megvilágítása?

11.37. Pontszerű fényforrás $l = 95$ cm távolságra van a felfogó ernyőtől. A fényforrástól mekkora távolságra kell elhelyezni a fényforrás és az ernyő között a 16 cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét, hogy az ernyőn $2r = 2{,}5$ cm átmérőjű kör legyen erősen megvilágítva, ha a lencse átmérője $2R = 10$ cm?

11.38. Ernyőn, amely 4 méter távol van az 5 dioptriás objektívtől (vékony lencse), diapozitív éles képe keletkezik. Az ernyőt 20 cm-rel távolabb helyezzük az ernyőtől. Merre, és mennyivel kell a diapozitívot elmozdítani, hogy a kép ismét éles legyen?

11.39. Pontszerű fényforrás 30 cm távol van egy kis átmérőjű, 5 dioptriás lencsétől. Mekkora távolsággal tolódik el a kép, ha a lencse és a fényforrás közé 15 cm vastag, 1,5 törésmutatójú üveglemezt helyezünk, az optikai tengelyre merőlegesen?

12. Összetett optikai rendszerek

Bevezető feladatok

12.1. Milyen színűnek látszik az ég a Holdról?

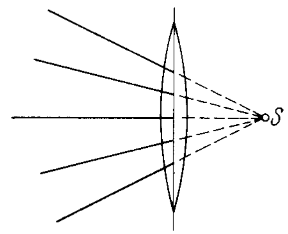
12.2. Homorú vagy domború tükröt használnak:
a) borotválkozáshoz;
b) visszapillantó tükörnek;
c) távcsőben;
d) fényszóróban;
e) vetítőlámpa mögött?

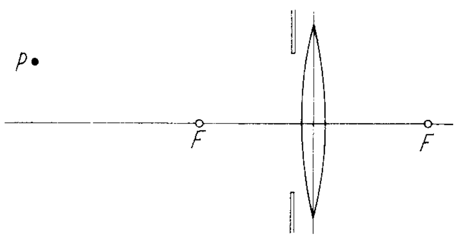
12.3. Lehet-e szórólencsével valódi, ernyőn felfogható képet előállítani?

12.4. Valamilyen fény hullámhossza vákuumban 500 nm. Ilyen hullámhosszú fényre bizonyos üvegfajta törésmutatója 1,5.
a) Mennyi e fény sebessége vákuumban?
b) Mennyi e fény sebessége az üvegben?
c) Mennyi e fény rezgésszáma a vákuumban?
d) Mennyi e fény rezgésszáma az üvegben?
e) Mennyi e fény hullámhossza az üvegben?
f) Megváltozik-e a fény színe, ha vákuumból az üvegbe lép?

Gyakorló feladatok

12.5. Az ábrán összetartó, S pontban egyesülő fénynyaláb látható. A nyaláb útjába S-től 30 cm távolságra 4 dioptriás lencsét helyezünk úgy, hogy a nyaláb szimmetriatengelye és a lencse optikai tengelye egybeessék. Hol egyesülnek ekkor a fénysugarak?



12.6. 

Az ábrán egy világító P pont, egy fényrekesz és egy gyűjtőlencse látható.
a) Szerkesszük meg a világító P pont képét!
b) Rajzoljuk meg azt a sugárnyalábot, amely ezt a képet létrehozza!
c) Mi történik, ha a fényrekeszt tovább szűkítjük?

12.7. Két azonos, homorú gömbtükör egymással szemben áll úgy, hogy optikai tengelyeik és fókuszaik is egybeesnek. Az optikai tengelyen, az egyik tükörtől t távolságra pontszerű tárgy van. Hol van a kétszeri reflexió után keletkező kép?

12.8. Fényképezőgépünk 5 cm gyújtótávolságú lencséjével a lencse állítása révén 50 cm és ∞ közti tárgyakról kaphatunk éles képet a film síkjában.
a) A lencsétől mekkora távolságban keletkezik az 50 cm-re levő tárgy éles képe?
b) Milyen minimális hosszúságú közgyűrűt kell a lencse és a film közé iktatnunk, hogy 15 cm távolságban levő tárgyakról éles képet nyerjünk?

12.9. Egy távollátó ember számára a tiszta látás távolsága 50 cm. Hány dioptriás szemüveget kell viselnie ahhoz, hogy tiszta látásának távolsága a normális (25 cm) legyen?

12.10. Egy tükrös távcső szemlencséje +5 cm fókusztávolságú. A távcső nagyítása 30-szoros. Mekkora a tükör görbületi sugara?

12.11. Mikroszkóp objektívjére ezt írták: 40x, szemlencséjére pedig ezt: 5x. Mit jelentenek ezek a számok? Mennyi a mikroszkóp nagyítása?

12.12. Vízszintesen elhelyezett homorú tükörbe egy kevés vizet öntünk. A tükör ezáltal a felette függő izzólámpáról 54 cm és 36 cm távolságokban két valódi képet ad. Határozzuk meg a tükör görbületi sugarát és az izzólámpa távolságát a tükörtől, ha a víz törésmutatója $n = 4/3$!

12.13. A nátriumlámpa olyan sárga színű fényt bocsát ki, amelynek — jó közelítéssel — egyetlen hullámhossza van csak. (Az ilyen fényt nevezik monokromatikus fénynek.) Képzeljük el, hogy egy sötét szobában egyetlen, de erős fényű nátriumlámpa világít. Hogyan módosulnak a szobában levő bútorok, képek színei ebben a megvilágításban?

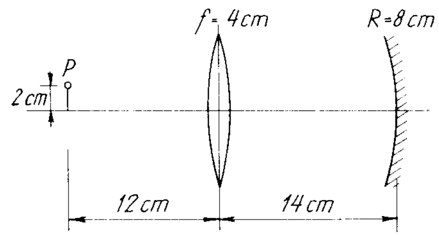
Házi feladatok

12.14. Látszólagos, vagy valódi képet látunk:
a) mikroszkópba nézve;
b) távcsőbe nézve;
c) moziban;
d) nagyítón keresztül;
e) szemüvegen át;
f) a fényképezőgép keresőjén át;
g) a televízióban?

12.15. Egy ember, levéve szemüvegét, a könyvet szemétől 16 cm távolságban tartva, olvas. Hány dioptriás szemüveget használ az illető, ha az egészséges szem esetében a tiszta látás távolsága 25 cm?

12.16. Hogyan helyezzünk el egymás után két lencsét, hogy e rendszerre érkező párhuzamos fénysugarak a lencsék után is párhuzamosan haladjanak, ha:
a) mindkét lencse gyűjtőlencse,
b) az egyik gyűjtőlencse, a másik szórólencse?

12.17. *a)* Szerkesszük meg a P pont képét!
b) Számítással határozzuk meg a P pont képének helyét!



12.18. A lencsére párhuzamos fénynyaláb érkezik, majd azon áthaladva egy 24 cm fókusztávolságú homorú gömbtükrön visszaverődik, és a tükörtől 6 cm távolságban egy pontban egyesül. A lencse és tükör távolsága 32 cm. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

12.19. 16 cm görbületi sugarú homorú gömbtükörbe vékony réteg vizet öntünk. Határozzuk meg az így keletkező vizes tükör fókusztávolságát, ha a víz törésmutatója 4/3!

12.20. 40 cm hosszú távcső nagyítása 9-szeres. Milyen fókusztávolságú lencsékből készülhetett? (Vigyázat, két megoldás van!)

12.21. Narancssárga színű monokromatikus fény hullámhosszát vákuumban 600 nm-nek mértük. Határozzuk meg ezen fény hullámhosszát, terjedési sebességét, frekvenciáját és színét tiszta vízben! (A fény terjedési sebessége vákuumban $3 \cdot 10^8$ m/s, a víz törésmutatója 4/3.)

12.22. Mennyi a fehér fény hullámhossza?

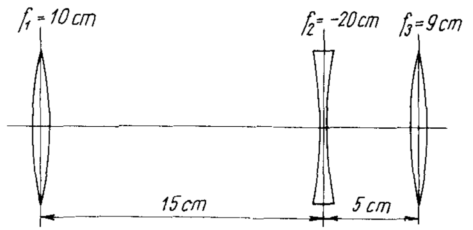
Ajánlott feladatok

12.23. Felvétel közben légy száll a fényképezőgép objektívjére. Kirajzolódnak-e a légy körvonalai a fényképen?

12.24. Mutassuk meg, hogy két, szorosan egymás mellé helyezett vékony lencséből álló rendszer dioptriája egyenlő az egyes lencsék dioptriáinak összegével!

12.25. Az asztalon fekvő zsebtükörre 50 cm fókusztávolságú sík—domború gyűjtőlencsét fektetünk. A Nap besüt az ablakon, sugarai erre a „tükrös lencsére" esnek. Hol gyűlnek össze a lencséből kilépő napsugarak?

12.26.



Az ábrán látható lencserendszerre balról párhuzamos sugárnyaláb érkezik. Mi történik a nyalábbal a rendszeren való áthaladás után?

12.27. A szürkehályogműtét során a beteg szemről a hályogot csak a szemlencsével együtt lehet eltávolítani. Az így megoperált beteg +12 dioptriás szemüveggel élesen látja a messzire levő tárgyakat. Hágy dioptriás szemüveggel tud 25 cm távolságra levő könyvet olvasni?

12.28. Miért festik matt feketére a mikroszkóp, távcső, látcső stb. tubusának belsejét?

12.29. Mikroszkóppal egy 3 mm vastag planparalel üveglemeznek először a felső, majd az alsó felületén levő karcolást állítjuk élesre. A mikroszkóp tubusát eközben 2 mm-rel kell elmozdítani. Mennyi az üveglemez törésmutatója?

12.30. A távcsőbe párhuzamos nyaláb érkezik, és párhuzamos nyaláb is hagyja el azt („teleszkopikus" sugármenet). A kilépő nyaláb azonban jóval kisebb keresztmetszetű, mint a belépő. Bizonyítsuk be, hogy a nyalábok átmérőinek aránya éppen a távcső nagyításának számértékével egyenlő!

12.31. Miért lehet távcsöveken keresztül nappal is látni a fényesebb csillagokat?

12.32. Miért a film, és miért nem a vetítőlámpa képe jelenik meg a filmvásznon?

12.33. A vetítőgépekben használt fényforrások sohasem pontszerűek, sőt, minél nagyobb felületük van, annál jobban használhatók vetítésre. Miért?

12.34. Minden vetítőgépben a fényforrás mögött homorú tükör helyezkedik el. Miért van erre szükség, és milyen messze van a tükör az izzószáltól?

12.35. Miért nem helyes a „fényszóró" elnevezés?

12.36. Mi a fényrekesz, és milyen szerepe van a fényképezőgép működésében?

12.37. Pontszerű fényforrás egy gyűjtőlencsétől kétszeres fókusztávolságban a lencse optikai tengelyén van. A lencse mögött az optikai tengelyre merőlegesen áll egy síktükör. Mekkora legyen a lencse és a tükör távolsága, hogy a tükörről visszavert sugarak a lencsén való áthaladás után párhuzamosak legyenek?

12.38. Pontszerű fényforrás gyűjtőlencse fókuszsíkjában helyezkedik el, az optikai tengelytől bizonyos távolságban. A lencse másik oldalán az optikai tengelyre merőleges síktükör áll. Hol keletkezik a kép?

12.39. 20 cm fókusztávolságú lencsével egy távoli fényforrás képét ernyőn fogjuk fel. A lencse és a fényforrás közé, a lencsétől 10 cm távolságra, egy 30 cm fókusztávolságú másik gyűjtőlencsét helyezünk el. Hova kell helyezni az ernyőt, hogy rajta ismét a fényforrás éles képe legyen látható?

12.40. Fényforrás 30 cm távolságban áll a 20 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse előtt. A lencse mögött 54 cm-re egy —12 cm fókusztávolságú szórólencse áll. Hol keletkezik a fényforrásnak a lencserendszerrel előállított képe?

12.41. Mi a különbség a prizmával és az optikai ráccsal előállított színképek között?

12.42. A ferdén tartott hanglemezre nézve, színeket látunk. Miért?

12.43. Mikor nevezünk két színt „kiegészítő" színeknek?

12.44. Milyen színűnek látszik kívülről a zöld üvegben palackozott vörösbor? Miért?

13. Ismétlő feladatcsoportok I.

(Egy feladatcsoport megoldásának időtartama 100 perc)

A.1. Egy követ függőlegesen felfelé, egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk 12 m/s sebességgel, ugyanabban a pillanatban. Mennyi idő múlva lesznek egymástól 60 méter távolságban?

A.2. Higany felszínére hasáb alakú vasdarabot helyezünk. A hasáb térfogatának hányad része merül a higanyba? (A higany sűrűsége $13{,}6\cdot10^3$ kg/m^3; a vas sűrűsége $7{,}8\cdot10^3$ kg/m^3.)

A.3. Az $\alpha = 30°$-os lejtőn, $h = 2$ m magasságban elengedünk egy 3 kg tömegű fémhasábot. A csúszó súrlódási együttható 0,2. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt érkezik a hasáb a lejtő aljához?

A.4. 1,6 abszolút törésmutatójú lencse fókusztávolsága levegőben 20 cm. Mekkora a lencse fókusztávolsága:
a) vízben ($n = 1{,}33$)?
b) metilénjodidban ($n = 1{,}72$)?

A.5. Egy 4000 min^{-1} fordulatszámmal forgó lendkerék egyenletesen lassulva 2 óra alatt áll be. Hány fordulatot tesz meg, amíg megáll?

A.6. Egy 40 N/m rugóállandójú rugó egyik végére 0,2 kg tömegű testet erősítettünk, másik végét rögzítettük. A testet akkor engedjük el, amikor a rugó megnyúlása 0,5 m.
a) Mennyi a test sebessége abban a pillanatban, amikor a rugó megnyúlása már csak 0,1 m?
b) Mennyi a test sebessége abban a pillanatban, amikor a rugó már 0,1 m-rel összenyomódott?

B.1. Egy személyautó nyugalmi helyzetből 1 m/s^2 gyorsulással indít, amikor a forgalmi lámpa zöldre vált. Ugyanabban a pillanatban elhalad mellette egy teherautó 10 m/s sebességgel.
a) Mennyi idővel később éri utol a személyautó a teherautót?
b) Ekkor milyen messze lesznek a forgalmi lámpától?
c) Mekkora a személyautó sebessége, miközben megelőzi a teherautót?

B.2. Harmonikus rezgőmozgást végző részecske egy teljes periódusidő alatt 20 cm utat tesz meg. Legnagyobb gyorsulása 4 cm/s^2. Mekkora a rezgésszám?

B.3. 10 N súlyú test fekszik vízszintes síkon. A sík és a test közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}1$. A testre vízszintes F erő hat. Mekkora a súrlódási erő, ha:
a) $F = 0{,}5$ N;
b) $F = 2$ N?
A tapadási súrlódási együttható legyen egyenlő a csúszási súrlódási együtthatóval!

B.4. A tárgyat a lencsétől 20 cm távolságra helyezve, a tárggyal megegyező nagyságú kép keletkezik. Hány dioptria a lencse erőssége?

B.5. Egy test súlya vízben háromszor kisebb, mint levegőben. Mennyi a test sűrűsége?

B.6. M tömegű deszka súrlódásmentesen csúszhat az α hajlásszögű lejtőn. Milyen irányba, és mekkora gyorsulással rohanjon rajta végig egy m tömegű kutya, hogy a deszka ne csússzék a lejtőn?

C.1. A Metró lefelé haladó mozgólépcsőjén, a lépcsőhöz viszonyított állandó sebességgel megy lefelé egy utas, és így 1 perc alatt ér le. Ha relatív sebessége kétszer nagyobb lenne, akkor 45 másodperc alatt érne le. Mennyi idő alatt ér le az a személy, aki áll a lépcsőn?

C.2. 1200 N súlyú terhet 50 N súlyú vasrúd segítségével ketten emelnek. Mekkora erővel emelnek a személyek, ha a teher a rúd harmadában van felfüggesztve?

C.3. Egy testet vízszintes talajon 0,8 m/s sebességgel húzunk. Változatlan teljesítmény mellett mennyivel csökken a sebesség, ha a testet 30°-os lejtőn húzzuk felfelé? (A talaj és a test közötti súrlódási együttható 0,2.)

C.4. Szúrjunk egy gombostűt nagy, korong alakú dugó közepébe, és helyezzük úgy egy tálba öntött vízre, hogy a gombostű feje alul legyen. A víz felszínén keresztül nézve a tűt sehonnan se lehet látni. Mennyi a parafadugó átmérője, ha a gombostű kiálló részének hossza 2 cm, s a víz törésmutatója 1,33?

C.5. Egy kerék 5000 percenkénti fordulatszámmal forog. Milyen állandó szöggyorsulás esetén áll meg 4 másodperc alatt?

C.6. 45 méter magas torony tetejéről egy ember feldob egy labdát 9 m/s kezdősebességgel. A labda a feldobástól számított 4,4 másodperc elteltével esik le a földre a torony lábához. Jelentősen befolyásolta-e a labda mozgását a levegő ellenállása?

14. Ismétlő feladatcsoportok II.

(Egy feladatcsoport megoldásának időtartama 100 perc.)

D.1. Harmonikus rezgőmozgást végző részecske amplitúdója 0,25 m, periódusideje 4 s. Határozzuk meg:

a) a részecske legnagyobb sebességét,
b) a részecske legnagyobb gyorsulását!

D.2. Monokromatikus fény hullámhossza a vákuumban 500 nm.

a) Mennyi a fény sebessége abban az üvegben, melynek törésmutatója erre a fényre 1,50?
b) Mennyi a fény hullámhossza az üvegben?

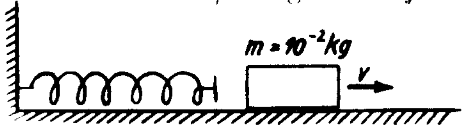
D.3. 30° hajlásszögű, 10 méter hosszú lejtőn a lejtővel párhuzamos erővel egyenletesen felhúzunk egy 600 N súlyú ládát. Mekkora a munkavégzés, ha a súrlódástól eltekinthetünk?

D.4. Állandó tárgy—ernyő távolság esetén egy 16 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse két helyzetben ad a tárgyról az ernyőn éles képet. A két helyzet egymástól 60 cm-re van. Milyen messze van a tárgy az ernyőtől?

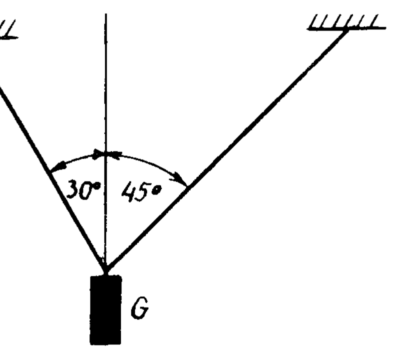
D.5. Egy fonalra kötött golyót 1 m sugarú, függőleges helyzetű körpályán forgatunk. A golyó sebessége a körpálya legfelső pontján 3,5 m/s, a legalsó pontban 8 m/s. Milyen irányú és nagyságú a golyó gyorsulása:

a) a legfelső, és
b) a legalsó pontban?

D.6. Az ábrán látható, 0,01 kg tömegű testtel 7,5 cm-rel összenyomtuk a 4 N/m rugóállandójú rugót, majd a testet elengedtük. A test és a vízszintes felület közti mozgási súrlódási együttható értéke 0,25. Mekkora utat tesz meg a test a megállásig?



E.1. 1500 N súlyú testet az ábrán látható módon függesztünk fel, két kötéllel. Mekkora erők hatnak a kötelekben?



E.2. Az 1,5 cm magas gyertyaláng képe kicsinyítve tükröződik a 8 cm átmérőjű, gömb alakú fényes karácsonyfadíszben. Milyen nagy a gyertyaláng tükörképe, ha a láng távolsága a gömb középpontjától 12 cm?

E.3. Egy $l = 1$ m hosszú fonálingát vízszintes helyzetbe lendítünk, majd elengedünk.

a) Mennyi a fonál szögsebessége, miközben az inga az egyensúlyi helyzeten halad át?
b) Mennyi volt a fonál szöggyorsulása az elindulás pillanatában?

E.4. 1 kg tömegű kő 25 méter magasról esve 20 m/s sebességet ért el. Mekkora volt a légellenállás okozta átlagos fékező erő az esés közben?

E.5. 3000 kg tömegű gépkocsi 36 km/h állandó sebességgel halad egy hídon keresztül, amely felülről nézve domború, 50 méter sugarú körív. Mekkora erővel nyomja a gépkocsi a tetőponton a hidat? Mekkora a nyomóerő, ha a híd felülről nézve homorú? ($g \approx 10$ m/s^2)

E.6. 2 kg tömegű, 30° hajlásszögű lejtőt rugós mérlegre helyezünk. A lejtőre 1 kg tömegű testet fonállal rögzítünk. Mit mutat a mérleg, ha a fonalat elégetve, az 1 kg tömegű test a lejtőn súrlódás nélkül csúszik? A lejtő a mérlegen nem tud elmozdulni. ($g \approx 10$ m/s^2)

F.1. Egy egyenletesen gyorsuló autó 80 m úton növelte sebességét 10 m/s-ról 20 m/s-ra. Mekkora úton érte el előzőleg a 10 m/s sebességét, ha nyugalmi helyzetből indult, s gyorsulása végig állandó volt?

F.2. Hol van a 10 cm görbületi sugarú homorú gömbtükör előtt 20 cm távolságban levő, az optikai tengelyre merőleges helyzetű tárgy képe?

F.3. Vízszintes talajon 2,5 m/s sebességgel húzunk egy 16 kg tömegű ládát, a talajjal párhuzamos erővel. Mekkora a súrlódási együttható, ha a húzóerő teljesítménye 50 watt?

F.4. Az állomásra befutó és fékező vonat első kocsija 1 másodperc alatt haladt el a peronon álló utas mellett, a második kocsi 1,5 másodperc alatt. A kocsik hossza 12 m. Határozzuk meg a vonat gyorsulását és a sebességét a megfigyelés kezdetén!

F.5. Egy részecske harmonikus rezgőmozgást végez 2 s^{-2} frekvenciával és 5 cm amplitúdóval. A részecske a $t = 0$ időpillanatban maximális kitérésű állapotban van. Határozzuk meg a $t = \frac{1}{6}$ s időpillanatban
a) a kitérést,
b) a sebességet,
c) a gyorsulást!

F.6. 1 méter hosszú kötél fele lelóg az asztalról. Ekkor a kötelet csúszni engedjük. Mekkora a kötél sebessége, amikor elhagyja az asztalt, ha a súrlódástól eltekintünk?

MEGOLDÁSOK

1. Kinematika

1.1 $s = v \cdot t = 4{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}25\ \text{h};$

$\underline{s = 5{,}625\ \text{km}.}$

1.2 $a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\ \text{s}};$

$\underline{a = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$

1.3 *a)* a sebesség felfelé induláskor növekszik, ezért a gyorsulás felfelé mutat;
b) a felfelé irányuló sebesség csökken, így a gyorsulás lefelé mutat;
c) a lefelé irányuló sebesség növekszik, ezért a gyorsulás is lefelé mutat;
d) a lefelé irányuló sebesség csökken, tehát a gyorsulás felfelé irányul.

1.4 A gyorsulás állandó, tehát a sebesség a t pillanatban

$v = v_0 + at = 0 + 1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\ \text{s};$

$\underline{v = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.}$

A t idő alatt megtett út

$s = \frac{v + v_0}{2}\,t = \frac{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0}{2} \cdot 2{,}5\ \text{s};\qquad \underline{s = 3{,}75\ \text{m}}$

A $\frac{v+v_0}{2}$ az átlagsebesség. Ha v helyére a pillanatnyi sebesség fentebb leírt alakját helyettesítjük, az út

$$s = \frac{v_0 + at + v_0}{2} t = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

alakban is kifejezhető.

1.5. A szabadesés egyenletesen változó mozgás, melynél a gyorsulás a nehézségi gyorsulás, tehát ha a test h magasságról esett

$$h = \frac{g}{2} t^2;$$

és innen

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

$$\underline{t = 0{,}14\ \mathrm{s}.}$$

A végsebesség

$$v = g \cdot t = 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$\underline{v = 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

1.6. A két helység közötti távolságot jelölje s, a két átlagsebességet v_1 és v_2.

Az autóbusz az s távolságot az egyik irányban $\frac{s}{v_1}$; a másik irányban $\frac{s}{v_2}$ idő alatt teszi meg. Így teljes fordulóra számított átlagsebesség

$$v_{\text{átl}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2};$$

$$\underline{v_{\text{átl}} = 48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.}$$

1.7. Az úttesthez viszonyítva nyugalomban levő személy sebessége a villamoshoz képest $-30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, ha a villamoshoz viszonyításkor pozitív iránynak a villamos mozgásának irányát tekintjük. *A villamossal egy irányban mozgó gyalogos sebessége* a villamoshoz képest tehát

$$-30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \underline{-22\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}};$$

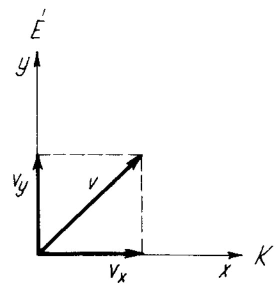
a villamossal ellentétes irányban mozgóé pedig

$$-30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \underline{-38\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}.$$

1.8. Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely keletre, az y tengely északra mutasson. Mivel az északkeleti irány 45°-os szöget zár be az egymásra merőleges északi és keleti iránnyal, a v sebesség keleti irányú komponense

$$v_x = v \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$\underline{v_x = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};}$$



az északi irányú komponens

$$v_y = v \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$\underline{v_y = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

1.9. A gyorsulás állandó, tehát

$$a = \frac{v - v_0}{t}; \text{ amelyből}$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = 6{,}25\ \mathrm{s};$$

$$\underline{t = 6{,}25\ \mathrm{s}.}$$

A megtett út

$$s = \frac{v + v_0}{2} t = 125\ \text{m};$$

$\underline{s = 125\ \text{m}.}$

$$\left(v_0 = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}; \qquad v = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.\right)$$

1.10. A mozgás kezdetén a gyorsulás állandó, és így a gyorsítás időtartama

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3\ \text{s};$$

tehát $t_2 = 8\ \text{s} - 3\ \text{s} = 5\ \text{s}$ ideig mozog egyenletesen, így a teljes út

$$s = \frac{a}{2} t_1^2 + v \cdot t_2 = 39\ \text{m};$$

$\underline{s = 39\ \text{m}.}$

1.11. Az esés első 8 másodperce alatt befutott távolság

$$s_2 = \frac{g}{2} t_2^2;$$

6 másodperc alatt megtett út

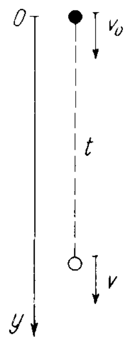
$$s_1 = \frac{g}{2} t_1^2.$$

A t_2 és t_1 időpontok közötti időben megtett út tehát

$$s_2 - s_1 = \frac{g}{2} (t_2^2 - t_1^2) = 137\ \text{m};$$

$\underline{s_2 - s_1 = 137\ \text{m}.}$

1.12. Jelölje y az elhajított test helyzetét, melyet az elhajítás helyétől lefelé mérünk. A gyorsulás állandó, és egyenlő a nehézségi gyorsulással, tehát a pillanatnyi sebesség



$$v = v_0 + gt;$$

a pillanatnyi helyzet

$$y = v_0 t + \frac{g}{2} t^2;$$

melyek a kérdezett időpontokban:

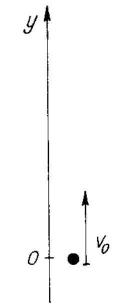
$t_1 = 1\ \text{s};$	$\underline{v_1 = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_1 = 25\ \text{m};}$
$t_2 = 2\ \text{s};$	$\underline{v_2 = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_2 = 60\ \text{m};}$
$t_3 = 3\ \text{s};$	$\underline{v_3 = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_3 = 105\ \text{m}.}$

1.13. A kavics pillanatnyi helyzetét az elhajítás helyétől fölfelé mért y koordináta jelölje. Miután a kavicsot elhajítottuk, mint magára hagyott testnek a gyorsulása a Föld felé irányul, és így a választott vonatkoztatási rendszerben $a = -g$. Ezek szerint a pillanatnyi sebesség és a pillanatnyi helyzet

$$v = v_0 - gt;$$

$$y = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

A kérdezett időpontokban



$t_1 = 1\ \text{s};$	$\underline{v_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_1 = 15\ \text{m};}$
$t_2 = 2\ \text{s};$	$\underline{v_2 = 0;}$	$\underline{y_2 = 20\ \text{m};}$
$t_3 = 3\ \text{s};$	$\underline{v_3 = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_3 = 15\ \text{m};}$
$t_4 = 4\ \text{s};$	$\underline{v_4 = -20\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_4 = 0;}$
$t_5 = 5\ \text{s};$	$\underline{v_5 = -30\ \frac{\text{m}}{\text{s}};}$	$\underline{y_5 = -25\ \text{m}.}$

A sebesség előtt álló negatív előjel lefelé irányuló sebességet jelent, tehát ezekben az időpontokban már visszafelé esik a test. A pillanatnyi helyzet negatív előjele azt jelenti, hogy ebben a pillanatban a kavics már az elhajítás helye alatt tartózkodik, miközben visszafelé esik.
Az y koordináta az elhajítás helyétől mért, előjeles távolságot jelenti, és nem azonos a megtett úttal. Ez látszik az előbb kiszámított adatokból is, mert nyilvánvaló, hogy 2 s alatt nem lehet nagyobb a megtett út, mint a 3 s alatti. Amíg a test fölfelé mozog, az út megegyezik a pillanatnyi y koordinátával, de amikor már esik, az út a fölfelé és lefelé megtett utak összege, tehát $s = y_{max} + (y_{max} - y)$. Így a feladat szövegében megadott idők alatt megtett utak, figyelembe véve, hogy $y_{max} = 20$ m;

$\underline{s_1 = 15 \text{ m}}$; $\underline{s_2 = 20 \text{ m}}$; $\underline{s_3 = 25 \text{ m}}$; $\underline{s_4 = 40 \text{ m}}$; $\underline{s_5 = 65 \text{ m}}$.

1.14. A segélycsomagot kioldva úgy mozog, mint a 200 m magasságban, $v_0 = 360\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vízszintes irányú kezdősebességgel rendelkező, magára hagyott test. Vagyis, egyszerre két, egymástól független mozgást végez. A vízszintes, az ábra szerinti x irányban, v_0 sebességgel egyenletesen, míg függőlegesen lefelé, y irányban szabadon esik. Ha a segélycsomag kioldása az ábrán látható vonatkoztatási rendszer origójában történt, akkor a pillanatnyi helyzet koordinátái az előbbiek szerint

$$x = v_0 t \qquad \text{és} \qquad y = \frac{g}{2}t^2.$$

A segélycsomag becsapódási helyének koordinátái legyenek x_1 és y_1. y_1 adott és x_1-et keressük. A megadott értékeket a fenti egyenletekbe behelyettesítve

$$x_1 = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t; \qquad 200\ m = \frac{g}{2}\,t^2;$$

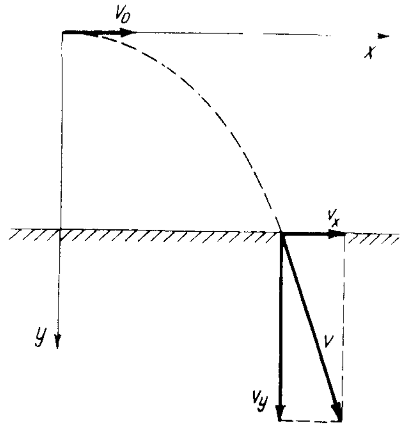
melyekből $t = 2\sqrt{10}$ s; $x_1 = 200\sqrt{10}$ m $= 632$ m.

$\underline{x_1 = 632 \text{ m}}$.

A pillanatnyi sebesség x és y irányú komponensei

$$v_x = v_0; \qquad v_y = gt.$$

Ezek felhasználásával a pillanatnyi sebesség nagysága



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

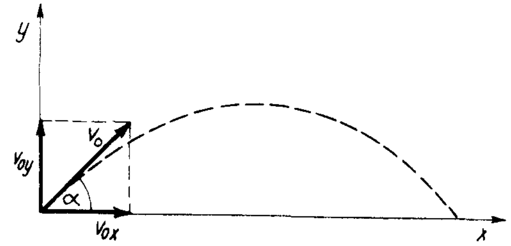
A becsapódás pillanatában, a megadott és kiszámolt adatokat felhasználva

$$v = 10\sqrt{140}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 118\,\frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$\underline{v = 118\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

1.15. Az elhajítás után a test magára van hagyva, így gyorsulása a Föld felé mutat, tehát sebességének vízszintes, x irányú, v_x komponense nem változik, vagyis x irányban egyenletesen mozog. Sebességének függőleges összetevője $a = -g$ gyorsulással változik, azaz függőleges irányban úgy mozog, mint egy v_{0y} kezdősebességgel fölfelé hajított test. Ezért sebességének összetevői és helyzetének koordinátái, ha az elhajítás az ábra szerint a vonatkoztatási rendszer origójából történt,

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha;$$
$$x = v_{0x} \cdot t;$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt;$$
$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2}\,t^2.$$



Jelölje x_1 és y_1, a test helyzetének koordinátáit a $t = 3$ s-ban. A fenti összefüggéseket felhasználva

$$x_1 = 120\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos 30°\cdot 3\text{ s} = 180\cdot\sqrt{3}\text{ m} = 311\text{ m},$$

$\underline{x_1 = 311 \text{ m}}$;

$$y_1 = 120\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin 30°\cdot 3\text{ s} - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 9s^2 = 135\text{ m};$$

$\underline{y_1 = 135 \text{ m}}$.

1.16. $t = 6$ s.

1.17. $v = 66{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.18. $v = 10{,}77\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; és $\alpha = 21°50'$ nagyságú szöget zár be a hajó mozgásának irányával.

1.19. $v = 6 \cdot \sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 37{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.20. *a)* $a = 1{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

b) $a = 1{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

c) $a = 0{,}55\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1.21. $t = 3$ s.

1.22. $v = 43{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 87{,}5$ m.

1.23. $v = 65{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.24. $s = 68$ cm.

1.25. $h = 0{,}6$ m.

1.26. $t = 0{,}45$ s.

1.27. $y_1 = 100$ m;

$\Delta y_1 = 80$ m;

$s_1 = 170$ m;

1.28. $t = 2{,}68$ s; $x = 27{,}9$ m.

1.29. $v = 86\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

1.30. A bólya a vízhez viszonyítva nyugalomban van. Az állónak tekintett bólyától azonos ideig távolodik mindkét csónak. Ha visszafordulva, sebességüket nem változtatják, akkor ugyanannyi ideig tart vissza is az útjuk, mint távolodáskor, tehát *egyszerre érnek a bólyához.* A vízhez viszonyított sebességük különböző volta abban mutatkozik meg, hogy különböző távolságra lesznek a bólyától a visszafordulás pillanatában.

1.31. Válasszuk a hosszúság egységnek egy lépés hosszát, az idő egységének egy lépés időtartamát. Ezekből származtatott sebesség egysége az $1\ \frac{\text{lépéshossz}}{\text{lépésidő}}$. A vasúti kocsival egyirányban mozogva, a vasúti kocsi hosszánál annyival megyünk többet, amennyit az 17 időegység alatt előre haladt. Ha h a kocsi hossza és v a sebessége, az előbb megbeszélt egységekben
$17 = h + 17v$.
Ellentétes irányba mozogva, hasonló okoskodással

$12 = h - 12v$.

Ezen egyenletrendszerből

$$h = \left(14 + \frac{2}{29}\right) \text{lépés}.$$

1.32. Jelöljük c-vel a folyó sebességét, v-vel a hajók vízhez viszonyított sebességét, és s-sel a két helység közötti távolságot.
A csatornában közlekedő jármű sebessége mindkét irányban v, és így a teljes menetideje

$$t_1 = \frac{2s}{v}.$$

A folyóban közlekedő hajó sebessége, a parthoz viszonyítva, folyás irányában $v + c$, ellentétes irányban $v - c$. Ezekkel a teljes menetidő

$$t_2 = \frac{s}{v - c} + \frac{s}{v + c} = \frac{2sv}{v^2 - c^2}.$$

A két menetidő hányadosa

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{v^2}{v^2 - c^2} > 1; \qquad (v < c \text{ nem lehet}),$$

tehát $t_2 > t_1$;

ami azt jelenti, hogy *a folyóvízben közlekedő hajó menetideje a nagyobb.*

1.33. A csónak a partra merőleges irányban $v = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. Függetlenül attól, hogy a vízzel együtt is mozog. A $d = 200$ m széles folyót, tehát

$$t = \frac{d}{v}$$

idő alatt szeli át.

Ennyi ideig mozog a vízzel együtt a folyás irányában

$$c = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességgel, és t idő alatt, míg a folyón átér

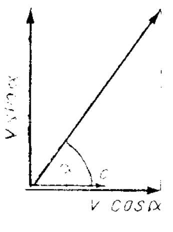
$$x = c \cdot t = c \cdot \frac{d}{v} = 66{,}7 \text{ m}$$

távolságot tesz meg, tehát *az elindulás pontjától* $\underline{66{,}7 \text{ m}}$-rel lejjebb köt ki a túlsó parton.

1.34. A csónak vízhez viszonyított sebességének a folyás irányába eső komponense $v \cdot \cos\alpha$, a partra merőleges komponense $v \cdot \sin\alpha$. A folyó sebessége c. Így a parthoz viszonyított sebességének összetevői:

a folyás irányában

$$u_x = c + v \cdot \cos\alpha;$$



a partra merőleges irányban

$$u_y = v \cdot \sin\alpha.$$

A két irányú mozgás független, tehát a d szélességű folyót

$$t = \frac{d}{v \cdot \sin\alpha}$$

idő alatt szeli át. Ennyi idő alatt a folyás irányában

$$x = (c + v \cdot \cos\alpha)\,\frac{d}{v \cdot \sin\alpha} = -38{,}4 \text{ m};$$

$$\underline{x = -38{,}4 \text{ m}}$$

az elmozdulás. Ez azt jelenti, hogy a túlsó parton az indulási helytől 38,4 m-rel feljebb fog kikötni.

1.35. Ha v jelöli a csónak vízhez viszonyított sebességének nagyságát, α ezen sebességnek a folyás irányával bezárt szögét és c a folyó sebességét, akkor a csónaknak a parthoz viszonyított folyásirányú és arra merőleges sebesség-összetevői, mint az előző feladatban

$$u_x = c + v \cdot \cos\alpha;$$

$$u_y = v \cdot \sin\alpha.$$

Az átkelés időtartama

$$t = \frac{d}{v \cdot \sin\alpha}.$$

Ez akkor lesz a legkisebb, ha $\sin\alpha = 1$, vagyis $\alpha = 90°$ esetén. ***A legrövidebb idő alatt ér át, ha a vízhez viszonyított sebessége a folyás irányára merőleges.***

A legrövidebb úton megy át, ha a pályája merőleges a partra, vagyis a folyásirányú elmozdulása nulla. Ez csak úgy lehet, ha a folyásirányú sebesség komponense nulla, tehát

$$u_x = c + v \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\cos\alpha = -\frac{c}{v} = -\frac{3}{4};$$

$$\underline{\alpha = 138°24}$$

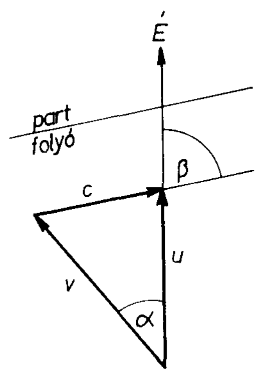
esetben.

A szárazföldhöz viszonyított sebesség nagysága

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + c^2 + 2v\cdot c\cdot \cos\alpha}.$$

Ez az α lehetséges értékeit tekintve, a legkisebb, ha $2v\cdot c\cdot \cos\alpha$ a legkisebb, tehát ha $\cos\alpha = -1$, azaz $\alpha = 180°$-nál. Ebben az esetben viszont $u_y = 0$, tehát csak a folyás irányában mozog a csónak, ami azt jelenti, hogy *a kérdezett legkisebb sebesség nem létezik.*

1.36. A hajónak a Földhöz viszonyított u sebessége a víz Földhöz viszonyított c sebességének és a hajó vízhez viszonyított v sebességének vektori eredője. Ez azt jelenti, hogy ez a három sebességvektor zárt vektorháromszöget alkot, ahogy az ábrán látható.



Erre a háromszögre alkalmazva a cosinus tételt

$$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cdot\cos\alpha;$$

amelyből $\alpha = 41°20'$ adódik. A β szöget ugyanerre a háromszögre felírt

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{v}{c}$$

sinus tételből kapjuk $82°10'$-nek. Vagyis *a folyó az északi iránnyal* $\underline{82°10'}$*-es szöget bezáró irányba folyik (nyugatra vagy keletre), a hajó a vízhez képest az északi iránnyal* $\underline{41°20'}$*-es szöget bezáró irányba halad (keletre vagy nyugatra).*

1.37. Az utasnak a vonathoz viszonyított sebessége, elmozdulása t idő alatt

$$v_1 = at; \qquad x_1 = \frac{a}{2}t^2.$$

Ugyanezen idő alatt a pályatesthez viszonyítva v_2 sebességgel mozgó vonat elmozdulása a pályatesthez képest

$$x_2 = v_2 t.$$

Az utasnak a pályatesthez viszonyított sebessége és elmozdulása ezek összege, tehát

$$u = v_2 + at; \qquad x = v_2 t + \frac{a}{2}t^2.$$

Az $a = 0{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ $\quad v_2 = 72\ \frac{\mathrm{km}}{h} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $\quad t = 3$ s

értékekkel

$$\underline{u = 22{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}; \qquad \underline{x = 63{,}6\ \mathrm{m}}.$$

1.38. Egy mennyiség megváltozását úgy kapjuk, ha későbbi értékéből kivonjuk a korábbit. A feladatbeli sebességváltozás, tehát

$20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, amely 100 s alatt jött létre, így ennek az időegységre jutó átlaga

$$a_{átl} = \frac{40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\ \mathrm{s}} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

$$\underline{a_{átl} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$

1.39. $$a_{átl} = \frac{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\ \mathrm{s}} = -0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$\underline{a_{átl} = -0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$

1.40. $$a_{átl} = \frac{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{100\ \mathrm{s}} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$\underline{a_{átl} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$

1.41. $$a_{átl} = \frac{-20\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\,s} = -0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,;$$

$$a_{átl} = -0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

1.42. A nyugalmi helyzetből induló, szabadon eső test az első Δt időközben

$$s_1 = \frac{g}{2}\cdot \Delta t^2$$

távolságot tesz meg. Az n-edik Δt időtartam alatt megtett út

$$s_n = \frac{g}{2}\,(n\cdot\Delta t)^2 - \frac{g}{2}\,[(n-1)\cdot\Delta t\,]^2 = \frac{g}{2}\,\Delta t^2.\,(2n-1)\,.$$

Az m-ik Δt időközben befutott távolság pedig

$$s_m = \frac{g}{2}\,(m\cdot\Delta t)^2 - \frac{g}{2}\,[\,(m-1)\,\Delta t\,]^2 = \frac{g}{2}\,\Delta t^2\cdot(2m-1).$$

Az n és m két természetes szám. s_n és s_m egyenlő időközök alatt megtett utak, melyeknek aránya

$$\frac{s_n}{s_m} = \frac{2n-1}{2m-1}$$

valóban két páratlan szám hányadosa, amint ezt Galilei állította.

1.43. Ha a kiejtett cserép t idő alatt ért az ötödik emeleti ablak felső éléhez, akkor itt a sebessége gt volt. Δt idővel később az ablak alsó élénél $g\,(t+\Delta t)$ sebességgel mozgott, és így a Δt idő alatt befutott út, amely az ablak magassága

$$h = \frac{gt + g\,(t+\Delta t)}{2}\cdot\Delta t.$$

Ebben csak a t az ismeretlen, melyre az adatok behelyettesítése után $t = 0{,}94$ s-ot kapunk. Ezt ismerve kiszámíthatjuk, hogy a kiejtés az ablak tetejétől számítva milyen h magasságban történt.

$$h = \frac{g}{2}\,t^2 = 4{,}4\ \mathrm{m}.$$

Így a cserepet két emelettel feljebbről, vagyis a *hetedik emeletről* ejtették ki.

1.44. Ha a híd h magasan van a víz felett, akkor az alsó golyó

$$\sqrt{\frac{2\,(h-7{,}5\ \mathrm{m})}{g}}$$

idő alatt esik a vízbe. A csobbanását a hídon a vízbeesés pillanatától $\frac{h}{c}$ idővel később halljuk. c a hang terjedésének sebessége. Az elejtéstől a csobbanás észleléséig eltelt idő

$$\sqrt{\frac{2\,(h-7{,}5\ \mathrm{m})}{g}} + \frac{h}{c}\,.$$

Hasonlóan

$$\sqrt{\frac{2\,(h-4{,}5\ \mathrm{m})}{g}} + \frac{h}{c}$$

idő múlva halljuk a felső golyó csobbanását. A két időtartam különbsége adott, tehát

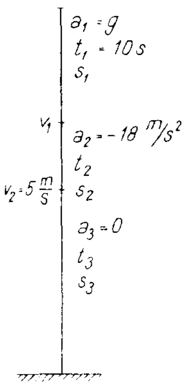
$$\left[\sqrt{\frac{2\,(h-4{,}5\ m)}{g}} + \frac{h}{c}\right] - \left[\sqrt{\frac{2\,(h-7{,}5\ m)}{g}} + \frac{h}{c}\right] = 0{,}15\ \mathrm{s}.$$

Ebből az egyenletből $h = 23{,}3$ m.

1.45. Az ábrán s_1-gyel jelölt szakaszon szabadon esik az ejtőernyős ezért a végsebessége és a megtett út

$$v_1 = gt_1 = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,;$$

$$s_1 = \frac{g}{2}\,t_1^2 = 500\,m.$$



A második szakaszon is egyenletesen változó a mozgás, csak a gyorsulás megváltozott, ezen mozgás időtartama, és az út

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} = 5{,}3\ \mathrm{s}\,;$$

$$s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}\,t_2 = 278\ \mathrm{m}.$$

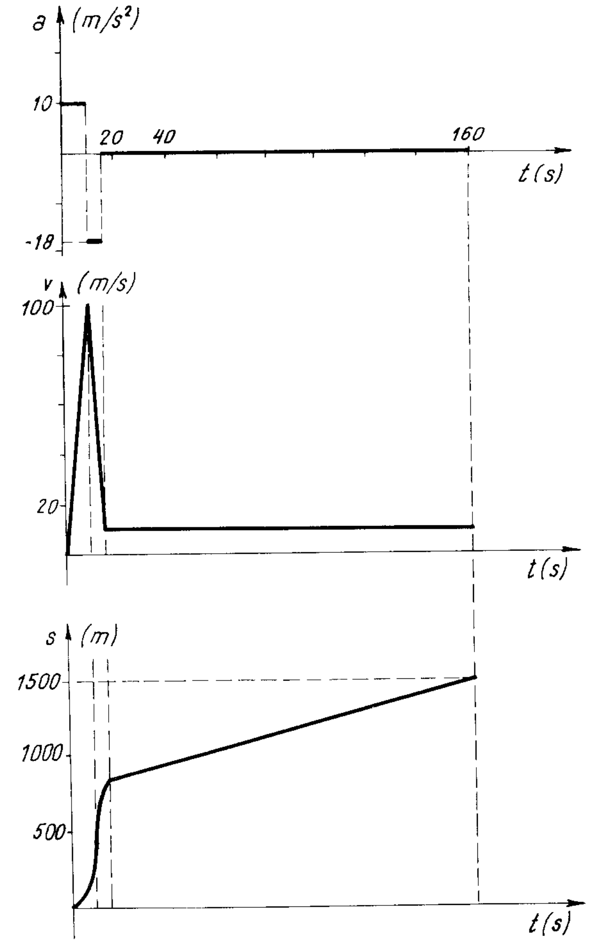
Az utolsó szakaszon a mozgás egyenletes, tehát

$$t_3 = \frac{s_3}{v_2} = \frac{s - (s_1 + s_2)}{v_2} = 144{,}4 \text{ s}.$$

Így a kiugrás és a földetérés között eltelt idő

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 159{,}7 \text{ s};$$

$$\underline{t = 159{,}7 \text{ s}.}$$



1.16. A v_0 kezdősebességgel függőlegesen feldobott test távolsága az elhajítás helyétől t idő múlva (lásd az 1.12. feladat megoldását)

$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

A $2v_0$ kezdősebességgel induló test $2t$ idő alatt

$$h' = (2v_0) \cdot (2t) - \frac{g}{2}(2t)^2 = 4\left(v_0 t - \frac{g}{2} t^2\right) = 4\,h \neq 2\,h$$

magasra jut, tehát *a feladatban szereplő állítás nem igaz.*

1.17. A fülke mennyezetéről leváló villanykörte a Föld nehézségi erőterében magára hagyott tárgy, és így gyorsulása a Föld felé mutat, és g nagyságú. A villanykörte Földhöz viszonyított gyorsulása egyenlő a lift Földhöz viszonyított gyorsulásának, a_0-nak, és a villanykörte lifthez viszonyított a' gyorsulásának összegével

$$g = a_0 + a'.$$

A lift azonban egyenletesen mozog a Földhöz viszonyítva, tehát

$$a_0 = 0, \text{ így}$$

$$a' = g;$$

vagyis a villanykörte a liftben is g gyorsulással esik, így

$$h = \frac{g}{2} t^2; \quad v' = g\,t;$$

ahol h a lift magassága, t az esés ideje, v' a villanykörte sebessége a lifthez viszonyítva. Ezen összefüggésekből

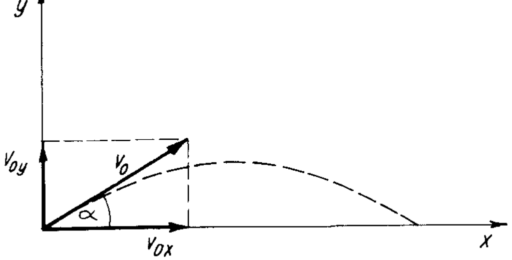
$$v' = \sqrt{2\,hg} = 6{,}9 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A villanykörte Földhöz viszonyított sebessége, ha v_0 a lift sebessége a Földhöz képest

$$v = v_0 + v' = 9{,}9 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehát a villanykörte mindkét vonatkoztatási rendszerben g gyorsulással esik és a padlóra érkezés pillanatában a sebessége a lifthez képest $\underline{6{,}9 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$, *a Földhöz képest* $\underline{9{,}9 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

1.48. Vegyük fel a vonatkoztatási rendszert az ábrán látható módon. Az 1.15. feladatban elmondottak szerint a lövedék x és y irányú sebesség-összetevői és x, y koordinátái az idő függvényében



$$v_x = v_{0x}; \qquad (1)$$

$$v_y = v_{0y} - gt; \qquad (2)$$

$$x = v_{0x} t; \qquad (3)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2; \qquad (4)$$

ahol $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ és $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$. A talajra való visszaérkezés pillanatában $y = 0$. Ezt (4)-be helyettesítve, abból a repülés időtartamára

$$t = 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g}$$

adódik. Ehhez az időpillanathoz tartozó abszcissza, melyet sokszor a hajítás távolságának neveznek (*3*) alapján

$$x = l = v_{0x} \cdot 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} = \frac{2\, v_0^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g};$$

$$l = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}.$$

Ugyanazon v_0 kezdősebességgel, de különböző irányokban történő lövések közül az megy messzebbre, mely iránynál $\sin 2\alpha = 1$, vagyis $2\alpha = 90°$; $\alpha = 45°$; tehát adott v_0 esetén a hajítás távolságának maximuma

$$l_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (5)$$

A legnagyobb y ($y_{\max}$; az emelkedés magassága) kiszámításához azt használjuk fel, hogy ebben a pontban a sebesség függőleges komponense zérus, vagyis *(2)* alapján

$$v_{0y} - gt_e = 0;$$

$$t_e = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Ehhez az időponthoz tartozó ordináta

$$y_{\max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}.$$

Ez adott v mellett a legnagyobb, ha $\alpha = 90°$, ebben az esetben

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (6)$$

A feladatban $l_{\max}$ adott. (*5*)-ből

$$v_0^2 = g \cdot l_{\max}.$$

Ezt (6)-ba helyettesítve

$$y_{\max} = \frac{g \cdot l_{\max}}{2g} = \frac{l_{\max}}{2};$$

vagyis a feladatbeli puskával *legfeljebb* 500 m *magasra* lehet lőni.

1.49. Az előző feladat alapján $l = y_{\max}$; ha

$$\frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g};$$

melyből $\operatorname{tg}\alpha = 4$; $\quad (\alpha = 75°58')$

azaz *a hajítás távolsága egyenlő lesz az emelkedés magasságával, ha a hajítás szöge* 75°58'.

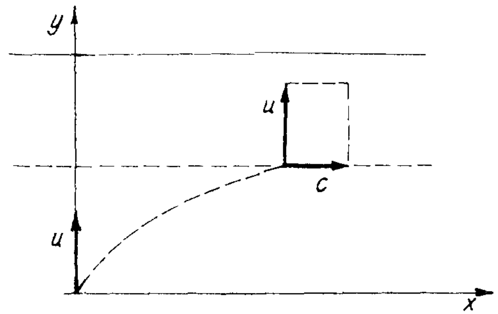
1.50. Az 1.48. feladatban láttuk, hogy a hajítás távolsága, az emelkedés magassága és a repülés időtartama is a nehézségi gyorsulás értékével fordítottan arányos, tehát a Holdon mindhárom adat hatszor nagyobb, mint a Földön.

1.51. Írjuk le a csónak mozgását az ábrán látható koordináta-rendszerben. A csónak sebesség-összetevői

$$v_y = u$$

$$v_x = \frac{c}{\frac{d}{2}} y = \frac{2c}{d} y; \qquad \left(y \leq \frac{d}{2}\right).$$

c a víz sodrának sebessége a folyó közepén, u a csónak vízhez viszonyított sebessége, d a folyó szélessége. A csónak y irányba



állandó sebességgel mozog, így, ha az origóból indult, y irányú elmozdulása t idő alatt

$$y = u \cdot t;$$

ezért az x irányú sebesség mint az idő függvénye

$$v_x = \frac{2c}{d} ut; \qquad \left(y \leq \frac{d}{2} \right).$$

A sebesség x irányú összetevője időegységenként $\frac{2\,cu}{d}$ -vel növekszik, vagyis ebben az irányban ennyi a gyorsulás

$$a_x = \frac{2cu}{d}; \qquad \left(y \leq \frac{d}{2} \right).$$

Az x irányú elmozdulás

$$x = \frac{a_x}{2} t^2 = \frac{cu}{d} t^2; \qquad \left(y \leq \frac{d}{2} \right);$$

Az $y = u \cdot t$ összefüggésből az az idő, amely alatt a csónak a folyó közepére ér

$$t_1 = \frac{d}{2u}.$$

Ezen idő alatt az x irányú elmozdulás

$$x_1 = \frac{cu}{d} \left(\frac{d}{2u} \right)^2 = \frac{cd}{4u} = 31{,}25 \text{ m}.$$

Szimmetria okok miatt az átkelés második részében ugyanakkora az x irányú elmozdulás, tehát *a csónak a túlsó parton az indulás helyétől* $\underline{2x_1 = 62{,}5 \text{ m}}$*-rel lejjebb köt ki.*

2. Dinamika I.

2.1. $m = 5$ kg; $\quad a = 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\quad F = ?$

$$F = m \cdot a;$$

$$F = 5 \text{ kg} \cdot 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$F = 7{,}5 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{F = 7{,}5 \text{ N}}.$$

2.2. F (állandó) $= ?$ $\quad m = 25 \text{ g} = 25 \cdot 10^{-3}$ kg;

$t = 1$ s; $\quad s = 25 \text{ cm} = 25 \cdot 10^{-2}$ m.

$F = ma$; $\quad a = ?$

$$s = \frac{a}{2} t^2 \text{ és ebből } a = \frac{2s}{t^2}.$$

$$F = m \cdot \frac{2s}{t^2};$$

$$F = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ s}^2};$$

$$F = 1250 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{F = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ N}}.$$

2.3. $v_0 = 9\,\frac{m}{s}$; $s = 36$ m; $v_t = 0$; $\mu = ?$

$$\mu = \frac{F_{súrl}}{F_{ny}}; \qquad F_{súrl} = ? \quad F_{ny} = ?$$

$F_{súrl} = m \cdot a$; mert most $\Sigma F = F_{súrl}$.

$F_{ny} = G = mg$, mert a jégpálya vízszintes.
Behelyettesítve

$$\mu = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g};$$

tehát már csak a gyorsulás n a g y s á g á t kell meghatározni.

A sebességváltozás n a g y s á g a $9\,\frac{m}{s}$, a megtett út 36 méter.

A mozgás egyenletesen változó, tehát:

$$s = \frac{v_0 + v_t}{2}t; \qquad a = \frac{v_t - v_0}{t}.$$

E két egyenlőség alapján a gyorsulás

$$a = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2s};$$

$$a = \frac{0 - \left(9\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 36\ m}.$$

$a = -1{,}125\,\frac{m}{s^2}$ (negatív, mert lassul a korong).

Tehát a gyorsulás nagysága (abszolút értéke)

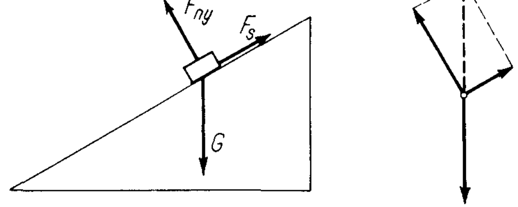
$$a = 1{,}125\,\frac{m}{s^2}.$$

A súrlódási együttható pedig

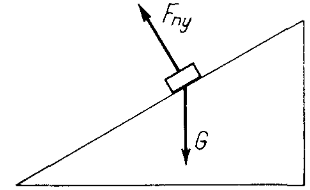
$$\mu = \frac{1{,}125\,\frac{m}{s^2}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}115;$$

$\underline{\mu = 0{,}115.}$

2.4. Mivel a test a lejtőn n y u g s z i k , ezért egyensúlyban van, vagyis a testre ható erők vektori összege nulla. Mindhárom erő iránya ismert, a súlyerőnek még a nagysága is. Ennek segítségével a másik két erő nagysága is megszerkeszthető, amint az az ábrán látható.



2.5. A testre két erő hat:
1. A nehézségi erő
($G = mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló erő).
2. A nyomóerő
(kiszámítható nagyságú, a lejtőre merőleges, felfelé irányuló erő).



A két erő eredőjét gyakran nevezik mozgató erőnek. (Elég rossz kifejezés, mivel a tehetetlenség törvénye szerint a mozgatáshoz sohasem kell erő, a mozgás a testek természetes állapota. Erőre a mozgás megváltoztatásához, vagyis a gyorsításhoz van szükség!) Ez a „mozgató" vagy helyesen g y o r s í t ó erő nem egy harmadik erő, ami a testre hat, hanem a két felírt erő eredője.
Ugyancsak helytelen a nehézségi erő komponenseit most felrajzolni, mivel ezek sem különálló, még fellépő erők!
Egyébként is gyakran elkövetett hiba, hogy a testre ható nehézségi erőnek a lejtőre merőleges összetevőjét összetévesztik, és helytelenül azonosítják a lejtőre ható nyomóerővel. Vigyázat! A kettő már csak azért sem lehet ugyanaz, mert más-más testekre hatnak!
A feladatban a t e s t r e ható erőket kellett felrajzolni, a l e j t ő r e ható erő nem volt kérdés.

2.6. Természetesen lehetséges nyugat felé irányuló erő hatására. A dinamika második alaptörvénye értelmében az erő és a gyorsulás iránya megegyezik ($F = m \cdot a$). A sebesség iránya teljesen lényegtelen. A feladat által említett esetben a test egyenes vonalú, lassuló mozgást végez keleti irányban. Az erő „fékezi"

2.7. Legyen a függőlegesen lefelé mutató irány a pozitív!

a) A gépalkatrész lefelé gyorsul.

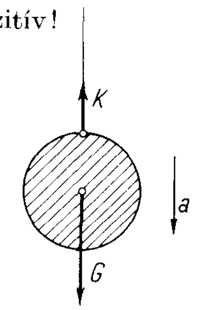
$m = 100$ kg;

$a = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; (pozitív, mert lefelé irányul);

$F_1 = G = m \cdot g = 100\text{ kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(pozitív, mert lefelé irányul);

$F_2 = -K = ?$ (negatív, mert felfelé irányul).



$\Sigma F = m \cdot a.$

$G - K = m \cdot a;$

$K = G - ma;$

$K = 100\text{ kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 100\text{ kg} \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

$K = 781\text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

$\underline{K = 781\text{ N}.}$

b) A gépalkatrész felfelé gyorsul.

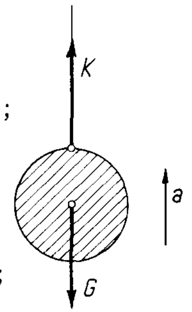
$m = 100$ kg;

$a = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; (negatív, mert felfelé irányul);

$F_1 = G = m \cdot g = 100\text{ kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

(pozitív, mert lefelé irányul);

$F_2 = -K = ?$ (negatív, mert felfelé irányul);



$\Sigma F = m \cdot a;$

$G - K = m \cdot a;$

$K = G - m \cdot a;$

$K = 100\text{ kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 100\text{ kg}\left(-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right);$

$K = 981\text{ kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 200\text{ kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

$\underline{K = 1181\text{ N}.}$

2.8. $G = 80$ N; $F_1 = 60$ N; $\mu = 0{,}5$; $a = ?$

A szőnyegre ható erők

↓ *1.* A nehézségi erő 80 N.

↑ *2.* A kőpadló nyomóereje 80 N. (Csak így lehet, hogy a szőnyeg sem fölfelé, sem lefelé nem gyorsul.)

→ *3.* A húzóerő 60 N.

← *4.* A súrlódási erő (a megrántás közben!): 0,5·80 N = 40 N.

A szőnyegre ható erők eredője:

$\Sigma F = 60\text{ N} - 40\text{ N} = 20$ N a húzóerő irányában.

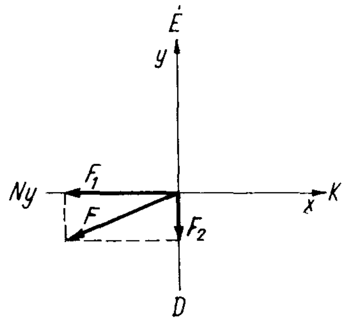
A szőnyeg tömege: $m = \frac{80\text{ N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 8{,}15$ kg

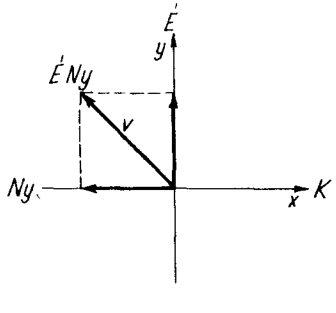
A szőnyeg gyorsulását a dinamika alaptörvényéből számíthatjuk ki:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{20\text{ N}}{\frac{80}{9{,}81}\text{ kg}} = \frac{2 \cdot 9{,}81\text{ N}}{8\text{ kg}} = \frac{2 \cdot 9{,}81\text{ kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8\text{ kg}}$$

$\underline{\boldsymbol{a = 2{,}45\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.}$

2.9. **Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy kelet felé mutasson az x tengely és észak felé mutasson az y tengely. Ennek megfelelően fogalmazzuk át a feladatban megadott és kérdezett mennyiségeket!**





$m = 10$ kg;

$|F_1| = 120$ N; $\quad F_{1x} = -120$ N; $\quad F_{1y} = 0$;

$|F_2| = 50$ N; $\quad F_{2x} = 0$; $\quad F_{2y} = -50$ N;

$|v| = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\quad -v_x = v_y$; (mert v ÉNy felé mutat).

$v_x = ?$ $\quad v_y = ?$

$a_x = ?$ $\quad a_y = ?$

$F_x = ?$ $\quad F_y = ?$

Minthogy $v_x^2 + v_y^2 = v^2$; és $|v_x| = |v_y|$ ezért

$2v_x^2 = v^2$;

$$|v_x| = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}4} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Viszont v_x Ny felé, tehát a negatív x tengely irányába mutat, ezért

$$\underline{v_x = -10\,\frac{\text{m}}{s}}.$$

Ugyanakkor v_y É felé, tehát a pozitív y tengely irányába mutat, ezért

$$\underline{v_y = +10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

A test gyorsulásának összetevőit a dinamika alaptörvényéből határozzuk meg:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

A két oldalon szereplő vektorok akkor (és csak akkor) egyenlőek, ha komponenseik is egyenlőek, vagyis jelen esetben fennáll m i n d k é t következő egyenlet:

$$F_x = ma_x; \qquad (1)$$

$$F_y = ma_y. \qquad (2)$$

Minthogy (az ábrából leolvashatóan)

$\underline{F_x = -120\text{ N};}$ $\quad$ és $\quad$ $\underline{F_y = -50\text{ N};}$

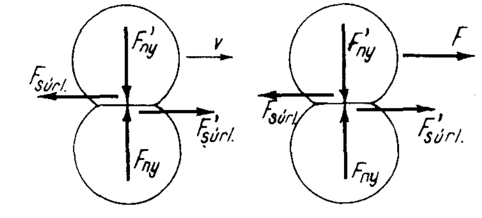
ezért (*1*) alapján $a_x = \dfrac{F_x}{m} = \dfrac{-120\text{ N}}{10\text{ kg}}$;

$$\underline{a_x = -12\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

illetve (*2*) alapján $a_y = \dfrac{F_y}{m} = \dfrac{-50\text{ N}}{10\text{ kg}}$;

$$\underline{a_y = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

2.10. A súrlódási erő mindig két érintkező test felületénél lép fel. A két testre egyszerre ható súrlódási erők a hatás—ellenhatás törvénye értelmében ellenkező irányúak.

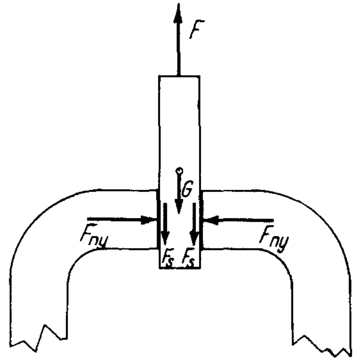


a) Mozgási súrlódási erő lép fel akkor, ha a két test érintkező felülete csúszik egymáson. Iránya mindkét testre egyformán határozható meg: *a másik testhez viszonyított mozgás irányával ellentétes.*

b) Tapadási súrlódási erő lép fel akkor, ha a két test egymáshoz képest nem csúszik el, viszont a két test érintkezési felületével párhuzamos külső erő is hat valamelyik testre. Arra a testre, amelyikre a külső erő hat, a másik test által kifejtett tapadási súrlódási erő *e külső erővel ellentétes irányú*, azt akadályozni igyekszik.

Természetesen, mind a mozgási, mind a tapadási súrlódási erő csak akkor lép fel, ha a két test az érintkezési felületre merőleges irányú nyomóerőt is fejt ki egymásra. Az ábrán F_{ny}; $F_{súrl}$ és F az egyik testre ható erők; F'_{ny} és $F'_{súrl}$ erők a másik testre hatnak. Hogy melyik van „alul" és melyik „felül", az mindegy. Lehetnek egymás mellett is. (Például két mérges utas egy zsúfolt autóbuszban; két kezünk a tapsolás közben; két összeverődött szilvásgombóc a lábosban. Ki ne tudná folytatni?)

2.11. Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a testre hat erő hat. A két nyomóerő, amit a két satupofa fejt ki, egyenlő nagyságú kell hogy legyen, mert ha különbözők lennének, akkor a test a nagyobbik erő irányába gyorsulna. (Dinamika alaptörvénye!)



Mindkét nyomóerő nyomán egy-egy tapadási súrlódási erő hat a testre. Ezek iránya attól függ, hogy milyen a testre ható többi erő eredőjének iránya.

1. Amikor még nem húzzuk a testet, akkor a tapadási súrlódási erők felfelé mutatnak, mert a testre ható nehézségi erőt kompenzálják.

2. Ha már akkora erővel húzzuk, amennyi a testre ható nehézségi erő (tehát ha $F = G$), akkor $F_s = 0$.

3. Ha pedig $F > G$, akkor mindkét F_s lefelé irányul. Az ábrán már ezt az esetet tüntettük fel.

Tudjuk, hogy a tapadási súrlódási erő nem lehet akármekkora. Van egy maximális értéke. Ez így számítható ki:

$$F_{smax} = \mu_0 \cdot F_{ny} = 0{,}5 \cdot 150\ \text{N} = 75\ \text{N}.$$

Tehát a két tapadási súrlódási erő, valamint a testre ható nehézségi erő együtt maximálisan

$$F' = 75\ \text{N} + 75\ \text{N} + 50\ \text{N} = 200\ \text{N}$$

erőt jelent. Vagyis a testet kihúzhatjuk, ha

$\underline{F > 200\ \text{N}}.$

2.12. Az ábráról leolvasható, hogy a testre ható nyomóerő és nehézségi erő eredője:

$$G \cdot \sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha.$$

a) ha $\mu = 0$, akkor ez az eredő erő

$$\Sigma F = mg \cdot \sin\alpha.$$

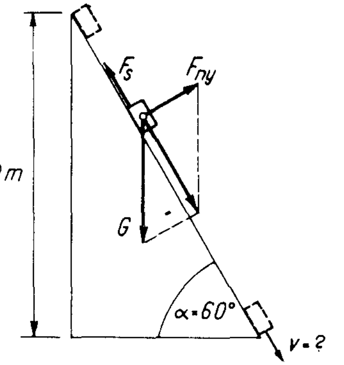
A dinamika alaptörvénye:

$$\Sigma F = m \cdot a.$$

Behelyettesítve az eredő erő kifejezését:

$$mg \cdot \sin\alpha = m \cdot a.$$

Tehát $\underline{a = g \cdot \sin\alpha}.$



b) Ha $\mu \neq 0$, akkor a testre a súrlódási erő is hat:

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu mg \cdot \cos\alpha.$$

Ezzel együtt az eredő erő

$$\Sigma F = mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha.$$

Behelyettesítve a dinamika alaptörvényébe:

$$mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = ma.$$

Tehát a test gyorsulása:

$\underline{a = g\,(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha).}$

Most, miután a gyorsulás kifejezését mindkét esetben meghatároztuk, meg tudjuk oldani a példát.

Adatok: $v_0 = 0$.

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{10\ \text{m}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 11{,}6\ \text{m}.$$

$v = ?$

$t = ?$

$$a)\ a = g \cdot \sin\alpha = g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$b)\ a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}5 \cdot \frac{1}{2}\right) = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A lecsúszás ideje $\left(s = \frac{a}{2}t^2\text{-ből}\right)$ $\quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$

a) $\underline{t = 1{,}65\ \text{s}}$; *b)* $\underline{t = 1{,}96\ \text{s}}.$

A végsebesség:

$v = a \cdot t;$

a) $\underline{v = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$; *b)* $\underline{v = 11{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$

2.13. Legyen a függőlegesen l e f e l é mutató irány a p o z i t í v. A felfüggesztett testre ható erők:

1) a nehézségi erő $= G = mg = 50\ \text{kg} \cdot 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 500\ \text{N}$;

2) a rugó húzóereje $= -F_r = ?$ (negatív, mert felfelé irányul).

A test gyorsulása a kérdezett esetekben:

a) $a = 0$, mert a test áll;

b) $a = 0$, mert a test egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez;

c) $a = -5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mert a test f e l f e l é g y o r s u l ;

d) $a = +5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mert a test l e f e l é g y o r s u l ;

e) $a = g = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ mert a test s z a b a d o n e s i k ;

A rugó húzóerejét mindig a dinamika alaptörvényének felírása után tudjuk kiszámítani:

$\Sigma F = ma.$

$G - F_r = ma.$

$F_r = G - ma;$

$F_r = 500\ \text{N} - 50\ \text{kg} \cdot a.$

Megoldás a behelyettesítéseket elvégezve:

a) és b) esetekben $\underline{F_r = 500\ \text{N}}$;

c) esetben $\underline{F_r = 750\ \text{N}}$;

d) esetben $\underline{F_r = 250\ \text{N}}$;

e) esetben $\underline{F_r = 0}$.

Megjósolhattuk volna előre is ezeket az eredményeket? Helyes fizikai szemlélettel igen.

Ugyanis az *a)* és *b)* esetben a test nem gyorsul, ezért a rugóerő épp akkora kell hogy legyen, mint a nehézségi erő. A *c)* esetben a test felfelé gyorsul, tehát felfelé nagyobb erő kell hogy húzza, mint lefelé. A *d)* esetben fordítva. Legérdekesebb azonban az *e)* eset: Ha a lift szabadon esik, s hozzá képest a test nem gyorsul, akkor a testnek is 10 m/s² gyorsulással kell lefelé mennie. De ez

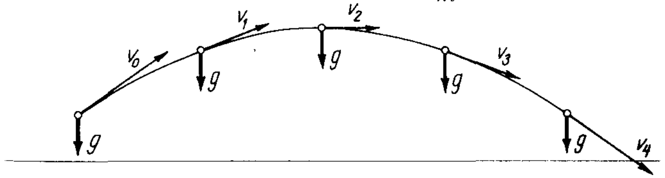
csak úgy lehet, ha a ráható nehézségi erő gyorsító hatását egy icike-picike rugóerő sem fékezi, vagyis, ha a rugó nem fejt ki erőt. A liftben levő (azzal együtt szabadon eső) megfigyelő a szokatlan jelenséget látván, így kiált fel: „— De hiszen e testnek nincs is súlya!" Majd pedig — ha tanult fizikát — így következtet: „— A nehézségi erőt nem lehet kikapcsolni! Úgy látszik, elromlott a fék a liftben, és most zuhanunk lefelé!"

Gyorsan meghúzza a vészféket, s a lift megáll. Ő pedig nagyot sóhajt. Milyen szerencse, hogy tudta:

A súlytalansági állapot az, amikor az ember „szabadon esik" a nehézségi erőtérben.

2.14. 1. Tegyük fel, hogy a hajítást légüres térben (például a Hold felszínén) végeztük. Ha már e l d o b o t t kőről beszélünk, akkor a kő már „elszállt" kezünkből, tehát mi már nem fejtünk ki rá erőt. Minthogy a nehézségi erőtér néhány száz méteren belül mind a Földön, mind a Holdon homogénnek tekinthető, ezért *a kőre — pályáján végig mindenütt — ugyanakkora, függőlegesen lefelé irányuló nehézségi erő hat. G* értéke független attól, hogy a test még emelkedik, vagy már esik lefelé, hogy lassan mozog, vagy gyorsan, hogy egyenes pályán megy, vagy görbén. Az elhajított test gyorsulásáról ugyanezt mondhatjuk, mivel $a = \dfrac{G}{m}$.

Akárhogyan is dobjuk el a testet, gyorsulása mindvégig „g" lesz, és függőlegesen lefelé irányul: $g = \dfrac{G}{m}$.



2. Ha a közegellenállást is figyelembe vesszük, akkor az eldobott kőre végig két erő hat: egyik az állandó nagyságú és irányú nehézségi erő; *másik a változó nagyságú és irányú légellenállás.* Ez utóbbi erő mindig a test sebességével ellentétes irányú és jó közelítéssel a sebesség négyzetével arányosan növekvő nagyságú. Így a test gyorsulása is változó irányú és nagyságú lesz. A légellenállás nélküli esetet mutatja az ábra, amikor is a pálya, mint tudjuk, parabolaív lesz. A légellenállás ezt a parabolaívet ballisztikus görbévé módosítja.

2.15. A testre ható erőlökés a test mozgásmennyiségét változtatj
meg:

$$F \cdot \Delta t = \Delta (mv).$$

Ha a test tömege állandó, akkor e mozgásmennyiség változás
így is kiszámítható:

$$\Delta (mv) = m \cdot \Delta v.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, majd abból m-et kifo
jezve, kapjuk:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v;$$

$$m = \frac{F \cdot \Delta t}{\Delta v}.$$

Esetünkben $F = 50$ N; $\Delta t = 10$ s; $\Delta v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Így $\underline{m = 100 \text{ kg}}$.

2.16. A tömeg olyan fizikai mennyiség, amelynek egységét alapegység
nek választottuk. Az ilyen típusú mennyiség mérése azt jo
lenti: meg kell határoznunk, hogy a kívánt mennyiség hányszoros
az egységül választott mennyiségnek, az „etalon"-nak. Dina
mikai módszerrel akkor mérünk tömeget, ha az ismeretlen tö
meg kiszámításához a dinamika alaptörvényét használjuk fel
Ezek szerint gyorsítani kell a testeket.

Az etalontömegű (1 kg) testre: $F_1 = 1 \text{ kg} \cdot a_1.$

A mérendő tömegű (x kg) testre: $F_x = x \text{ kg} \cdot a_x.$

Tehát $x = \frac{F_x}{F_1} \cdot \frac{a_1}{a_x}.$

Lehetséges két speciális eset:

1. Ha mindkét testet ugyanakkora erővel gyorsítjuk:

$$F_1 = F_x; \qquad \text{tehát} \qquad x = \frac{a_1}{a_x}.$$

Itt csupán a két gyorsulás arányát kell lemérnünk. Ha mindkét
testet állandó erővel, a z o n o s i d e i g gyorsítottuk, akkor a
gyorsulások aránya a megtett utak arányával egyezik meg, te-
hát

$$x = \frac{s_1}{s_x}.$$

2. Ha a két testet külön-külön akkora erővel gyorsítjuk, hogy gyorsulásaik megegyeznek:

$$a_1 = a_x, \qquad \text{tehát} \qquad x = \frac{F_x}{F_1}.$$

Ha mindkét erőt ugyanannak a rugónak (erőmérőnek) közbeiktatásával fejtjük ki a testre, akkor az erők aránya a rugók megnyúlásainak arányával egyezik meg, tehát

$$x = \frac{\Delta l_x}{\Delta l_1}.$$

Érdemes megfigyelni, hogy mindkét esetben a tömegmérést hosszúságmérésre vezettük vissza.

Mértek-e valaha is így tömeget? Kézzel fogható, makroszkopikus méretű testek tömegét soha. Fölöslegesen komplikált. (Ennek ellenére persze, űrhajóban csak így lehetne tömeget mérni!) Viszont érdemes elgondolkozni azon, van-e olyan mérleg, amelylyel nagyon kis testek (pl. az atommag) vagy nagyon nagy testek (pl. a Hold vagy a Föld) tömegét lehet megmérni. Valóban, ezeket dinamikai módon mérték meg. (L. pl. az *1.* speciális esetet!)

2.17. *Észak felé mutat.*

2.18. $\underline{a = 3{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

2.19. *Mindhárom esetben egyaránt* $\underline{5 \text{ N}}$.

2.20. *Igen.* Ezért tudunk például járni. Ezért lehet az asztalterítővel együtt elhúzni (felgyorsítani) a rajta levő hamutartót is: a hamutartót az a súrlódási erő gyorsítja, amelyet a terítő fejt ki rá.

2.21. *Igen.* Például két dörzspapírral bevont tárgy között. Más példa: sokszor a radírt nehezebb húzni az asztalon, mint felemelni. Ez éppen azt jelenti, hogy e súrlódási erő nagyobb a nyomóerőnél, vagyis $\mu > 1$.

2.22. *a)* $\underline{\text{tg}\, \alpha = \mu_0}$.

b) Lecsúszik, egyenletesen gyorsul lefelé. Lefelé mutató gyorsulása: $\underline{a = (\mu_0 - \mu)\, g \cdot \cos \alpha}$ lesz. (L. a 2.39. feladat megoldását!)

2.23. *a)* 200 N.

b) 231 N.

2.24. $F = 58,7$ N.

2.25. $F = 41,3$ N.

2.26. *a) A láda egyenletesen mozoghat akár felfelé, akár lefelé, akár oldalt. Állhat is.*

b) A láda mozdulatlanul áll.

2.27. *a)* 840 N.

b) 560 N.

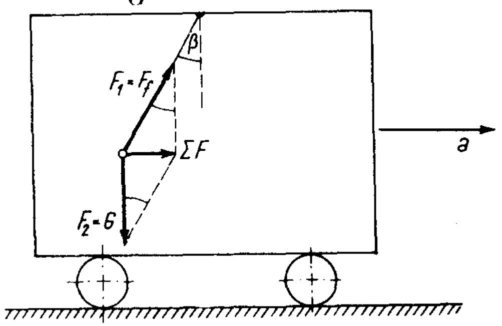
c) 840 N.

d) 560 N.

2.28. *a) A fonál függőlegesen lóg.*

b) A gyorsulással ellenkező irányban bizonyos szögben kitér, s mindaddig így marad, amíg a kocsi gyorsulása meg nem változik. A fonálra akasztott testnek ugyanis pontosan úgy kell gyorsulnia, mint a kocsinak. A nehézségi erő függőleges irányú, ez biztos nem tudja vízszintes irányban gyorsítani. A másik erőt a fonál fejti ki a testre. Ha a fonál ferde, akkor a testre ható két erő eredője már lehet vízszintes, amint az az ábrán is látható. Az is leolvasható az ábráról, hogy

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Sigma F}{G}.$$



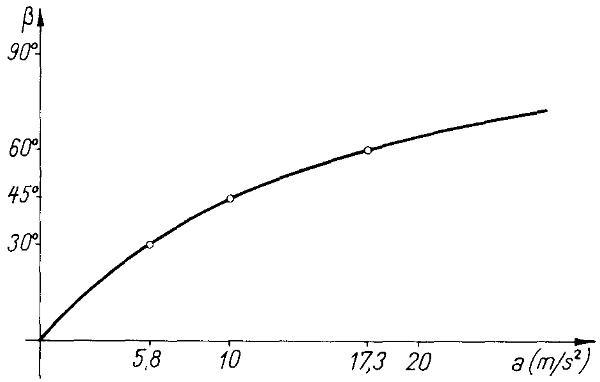
Felhasználva a dinamika alaptörvényét ($\Sigma F = ma$):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{ma}{G}.$$

Mivel $G = mg$, ezért

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{g}.$$

A hajlásszöget a gyorsulás függvényében ez az egyenlet határozza meg, és ennek alapján készíthető el a grafikon.



Amint látjuk, ez az eszköz kiválóan alkalmas gyorsulásmérőnek. Ezzel az eszközzel valósítható meg a **g y o r s u l á s m é r é s e d i n a m i k a i ú t o n**. Fontos észrevenni, hogy a gyorsuló rendszerben ülő megfigyelő képes ezzel mérni a rendszer gyorsulását anélkül, hogy „kinézne az ablakon". Galilei óta tudjuk, hogy a rendszer sebességének megmérése viszont, anélkül, hogy „kinéznénk az ablakon", nem lehetséges. Az azonban már csak Einsteinnek jutott az eszébe, hogy gyorsulásmérőnk esetleg a kocsi háta mögé került nagy darab test tömegvonzásának hatására lendült hátra. Mit jelez hát akkor az eszköz: a rendszer gyorsulását vagy pedig nagy tömegű testet a rendszer közelében? Alapvető igazság, hogy ha „nem nézünk ki az ablakon", akkor ezt se tudjuk eldönteni. Ez a felismerés az **á l t a l á n o s r e l a t i v i t á s i e l v n e k** egyik alappillére.

2.29. $G = 150\ \text{N};$ $v_0 = 0;$
$m = 15\ \text{kg};$ $h = 9\ \text{m};$
$a = \text{állandó};$ $v = 6\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}};$ $F_{emelő} = ?$

$$\Sigma F = F_{emelő} - G. \qquad a = \frac{v^2}{2h}.$$
$$\longrightarrow \Sigma F = ma. \longleftarrow$$

$$F_{emelő} - G = m\,\frac{v^2}{2h};$$

$$F_{emelő} = G + m\,\frac{v^2}{2h};$$

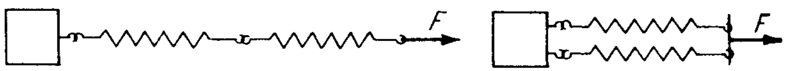
$$F_{emelő} = 150\ \text{N} + 15\ \text{kg}\,\frac{\left(6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9\ \text{m}};$$

$$F_{emelő} = 150\ \text{N} + 30\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$F_{emelő} = 150\ \text{N} + 30\ \text{N};$$

$$\underline{F_{emelő} = 180\ \text{N}.}$$

2.30. *a)* A sorba kapcsolt egyforma rugók egyformán is nyúlnak meg. Valamennyi rugó egyenlő nagyságú erőt fejt ki a s z o m s z é d j á r a . Az utolsó rugó egyik szomszédja azonban a test, tehát az utolsó rugó hat a testre. És c s a k az utolsó rugó hat a testre, mert csak ez kapcsolódik a testhez! A rugósorozat teljes hossza 165 cm lett, tehát egyetlen rugó hossza ennek 15-öd része, vagyis 11 cm lett. Így az utolsó rugó megnyúlása is — akárcsak a többieké — 1 cm. Ez pedig azt jelenti, hogy *a testre* $\underline{1\cdot 10^{-2}}$ N *erő hat.*



b) Ha a rugókat párhuzamosan kapcsoltuk, akkor mindegyik rugó egyik vége a testhez, másik vége pedig kezünkhöz kapcsolódik. Most tehát az összes rugó hat a testre, s ha megnyúlásuk

ugyanannyi mint az előbb volt, akkor most *a testre* $\underline{15\cdot 10^{-2}}$ N *erő hat.*
Az ábrán két sorba kapcsolt és két párhuzamosan kapcsolt egyforma rugót láthatunk.

2.31. A gyorsulás iránya mindig megegyezik az erő irányával, nagysága pedig a testre ható erőnek és a test tömegének hányadosa. A test sebessége a gyorsulást nem befolyásolja!

$$a = \frac{F}{m} = \frac{20\ \text{N}}{0{,}25\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}25\ \text{kg}} = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehát a válaszok:

a) $\underline{a = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ *keleti irányban;*

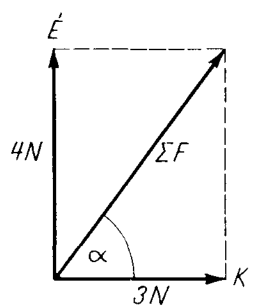
b) $\underline{a = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ *nyugati irányban;*

c) $\underline{a = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ *déli irányban.*

2.32. Először számítsuk ki az eredő erő adatait az ábra alapján

$$\Sigma F = \sqrt{(3\ \text{N})^2 + (4\ \text{N})^2} = 5\ \text{N};$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4\ \text{N}}{3\ \text{N}} = 1{,}33; \qquad \alpha = 53°.$$



a) A test gyorsulásának *iránya a ΣF eredő erő irányával egyezik meg.*
A gyorsulás nagysága:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{5\ \text{N}}{0{,}1\ \text{kg}} = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \qquad \underline{a = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};}$$

b) A test a k á r m e r r e is mozog állandó nagyságú és irányú sebességgel, a testre ható erők eredője biztosan zérus. A szükséges harmadik erő adatai tehát:
nagysága $\underline{5\ \text{N}}$,
iránya a másik kettő eredőjével ellentétes.

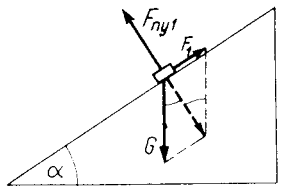
2.33. Esés közben a test tömege állandó, sebessége egyenletesen növekszik. Tehát szorzatuk ($mv = I$) szintén egyenletesen növekszik.

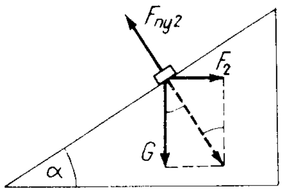
$I = mv = mgt.$

Érdekessége: az arányossági tényező éppen a testre ható nehézségi erő.

$\underline{I = G \cdot t.}$

2.34. Egyensúly esetén a testre ható három erő eredője zérus. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy bármelyik két erő eredője a harmadikkal azonos nagyságú, és ellentétes irányú. Ennek felhasználásával készíthetjük el az ábrát, majd a helyesen szerkesztett ábráról leolvashatók a következő összefüggések:





$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G}; \quad \text{illetve} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{G}.$$

A feladat szövegében α nem szerepel, tehát G-t F_1 és F_2-vel kell kifejezni.

Mivel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

ezért
$$\frac{F_2}{G} = \frac{\frac{F_1}{G}}{\sqrt{1 - \frac{F_1^2}{G^2}}}.$$

Ebből rendezéssel adódik

$$\underline{G = \frac{F_1 F_2}{\sqrt{F_2^2 - F_1^2}}.}$$

35. A feladatban sem a tárgy tömege, sem a súrlódási együttható nem szerepel. Ez azt jelenti, hogy ezek a végeredmény megadásakor sem szerepelhetnek!
Adottak: α; v_0; s. Keresett: v.

a) $\mu = 0$.

A lejtőn súrlódás nélkül mozgó tárgy gyorsulása (l. 2.12. megoldás):

$a = g \cdot \sin \alpha.$

Ezek szerint a lejtőn felfelé megtett út:

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g \cdot \sin \alpha}.$$

Vagyis a súrlódásmentes esetben α, v_0 és s között a most felírt összefüggésnek kell fennállnia.
Tegyük fel, hogy α, v_0 és s megadott számszerű értékei között fennáll ez az összefüggés. Ebben az esetben a mozgás súrlódásmentes, vagyis „megfordítható". A tárgy visszacsúszásakor az előbbi folyamat „időbeli tükörképe" játszódik le. A visszaérkezési sebesség nagysága az előbbi v_0-lal egyezik meg.
Mire következtethetünk abból, ha α, v_0 és s megadott értékei nem elégítik ki a fenti egyenletet? Egyértelműen arra, hogy van súrlódás. Vagyis:

b) $\mu \neq 0$

A lejtőn súrlódással l e c s ú s z ó tárgy gyorsulása (l. 2.12. megoldás)

$a_{le} = g\,(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$

Ha viszont a tárgy f e l f e l é haladva lassul le és áll meg a súrlódásos lejtőn, akkor a súrlódási és a nehézségi erő egyaránt fékezi, vagyis lassulásának nagysága:

$a_{fel} = g\,(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha).$

Ezek szerint a lejtőn felfelé megtett út:

$$s = \frac{v_0^2}{2a_{fel}} = \frac{v_0^2}{2g\,(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}.$$

Ebből az egyenletből α; v_0 és s ismeretében μ meghatározható:

$$\mu = \frac{1}{\cos \alpha}\left(\frac{v_0^2}{2\,gs} - \sin \alpha\right).$$

A l e f e l é csúszó tárgy gyorsulása:

$a_{le} = g\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)$.

Behelyettesítve μ kiszámított értékét:

$$a_{le} = g\left(2\sin\alpha - \frac{v_0^2}{2\,gs}\right).$$

A visszacsúszási végsebesség:

$v = \sqrt{2a_{le}s}$.

Behelyettesítve a_{le} kiszámított értékét:

$v = \sqrt{4\,gs\cdot\sin\alpha - v_0^2}$.

Végül meg kell jegyeznünk, hogy ha α, v_0 és s megadott értékei olyanok, hogy behelyettesítés után zérust vagy negatív számot kapnánk a gyökjel alatt, akkor ez azt jelenti, hogy a tárgy a lejtőn nem csúszik vissza. Minthogy a feladat szövege határozottan leszögezte, hogy a tárgy visszacsúszik, ezért α; v_0 és s megadott számszerű értékei nem lehetnek tetszőlegesek, hanem az alábbi feltételt kell kielégíteniük:

$4\,gs\cdot\sin\alpha - v_0^2 > 0$.

2.36. A lejtőn súrlódással lefelé csúszó test gyorsulása (l. 2.12. megoldás)

$a = g\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)$.

Kezdősebesség nélkül induló, egyenletesen gyorsuló test sebessége s út megtétele után:

$v = \sqrt{2as}$.

Behelyettesítve a gyorsulás értékét:

$v = \sqrt{2gs\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)}$.

Ha nincs súrlódás ($\mu = 0$), akkor

$v' = \sqrt{2gs\cdot\sin\alpha}$.

A feladat feltétele szerint

$$v = \frac{v'}{2}$$

vagyis

$$\sqrt{2gs\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{2gs\cdot\sin\alpha}}{2}$$

Ebből a súrlódási együttható

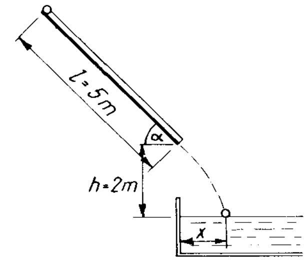
$\mu = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}43$;   ($\alpha = 30°$ miatt)

$\underline{\mu = 0{,}43.}$

[illegible] Először azt számítsuk ki, milyen sebességgel ér a gyerek a csúszda végére!
Gyorsulása lecsúszás közben (l. 2.12. megoldást):

$a = g\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)$.

Minthogy $\alpha = 45°$ és $\mu = 0{,}2$, ezért



$a = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(\sin 45° - 0{,}2\cdot\cos 45°)$

$a = 5{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Kezdősebesség nélkül indulva ($v_0 = 0$) l út megtétele után a végsebesség:

$v = \sqrt{2a\cdot l}$.

Behelyettesítve $a = 5{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ és $l = 5$ m értékét:

$v = 7{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ezzel a sebességgel hagyja el a gyerek a csúszda végét, 45°-os szögben. További mozgása ferde hajítás, amely – mint tudjuk – egy függőleges hajításból és egy vízszintes egyenletes mozgásból tehető össze. Függőleges irányú kezdősebessége:

$v_{0y} = v\cdot\sin 45° = 7{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$v_{0y} = 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Vízszintes irányú kezdősebessége:

$$v_{0x} = v\cos 45° = 7{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$v_{0x} = 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Most számítsuk ki a csúszdától a vízbeesésig eltelt időt a következő összefüggésből:

$$h = v_{0y}t + \frac{g}{2}t^2$$

$$2\,\mathrm{m} = 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t + \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}t^2.$$

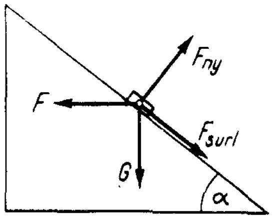
Innen $t = 0{,}3$ s.

Ennyi ideig távolodik tehát a medence falától is, vagyis

$$x = v_{0x}\cdot t = 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}3\,\mathrm{s};$$

$$\underline{x = 1{,}6\,\mathrm{m}.}$$

2.38.



Oldjuk meg a feladatot először paraméteresen. A test a lejtőre merőleges irányban nem gyorsul, tehát a ráható erőknek a lejtőre merőleges komponensei zérus eredőt adnak:

$$F\cdot\sin\alpha + G\cdot\cos\alpha - F_{ny} = 0.$$

Ebből már a nyomóerő, majd a súrlódási erő nagysága megkapható:

$$F_{ny} = F\cdot\sin\alpha + G\cdot\cos\alpha;$$

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu F\cdot\sin\alpha + \mu G\cdot\cos\alpha.$$

A test a lejtővel párhuzamos irányban a gyorsulással halad felfelé. Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$F\cdot\cos\alpha - G\cdot\sin\alpha - F_{súrl} = ma.$$

Behelyettesítve a súrlódási erő előbbi kifejezését:

$$F\cdot\cos\alpha - G\cdot\sin\alpha - \mu F\cdot\sin\alpha - \mu G\cdot\cos\alpha = ma.$$

Ebből az egyenletből F kifejezhető:

$$F = \frac{ma + G\cdot\sin\alpha + \mu G\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha.}.$$

Használjuk még fel, hogy $G = mg$, ekkor kapjuk:

$$F = m\frac{a + g\,(\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha.}.$$

Helyettesítsük be a megadott értékeket!

a) $\alpha = 30°$.

$$F = 1\,\mathrm{kg}\cdot\frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\underline{F = 40\,\mathrm{N}.}$$

b) $\alpha = 45°$: a nevezőben nulla áll!

c) $\alpha = 60°$: az erő nagyságára negatív érték adódik!

Hol a hiba e két utóbbi esetben? Nyilván a kapott képlet nem alkalmazható, de hát mi a helyzet a valóságos kísérletben? Ki lehet próbálni, hogy ha a súrlódásos lejtő elég meredek, akkor *vízszintes erővel* már képtelenség felhúzni rajta a testeket. Hiába alkalmazunk mind nagyobb és nagyobb F erőt, ezzel a nyomóerőt is növeljük, s így a súrlódási erő is egyre nagyobb lesz. A mérések szerint a határeset az a hajlásszög, amelynek a cotangense éppen a súrlódási együttható. Dehát a levezetett képlet is éppen itt válik értelmetlenné!

$$\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha = 0;$$

$$\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Esetünkben ($\mu = 1$) a határszög éppen 45°. 45°-os, *és ennél nagyobb szögű lejtőkre nem lehet így felhúzni a testet.*

2.39. A hasáb akkor kezd csúszni, amikor a rá ható nehézségi és nyomóerő eredője éppen eléri (sőt, egy „hajszállal" meghaladja) a tapadási súrlódási erő maximális értékét. Esetünkben tehát

$$mg\cdot\sin 30^\circ = \mu_0\cdot mg\cdot\cos 30^\circ;$$

$$\mu_0 = \mathrm{tg}\,30^\circ = 0{,}58;$$

$$\underline{\mu_0 = 0{,}58.}$$

A csúszási súrlódási erő azonban kisebb, mint a tapadási súrló-dási erő maximális értéke, ezért a test, ha már egyszer elindult a továbbiakban gyorsulni fog a lejtőn. Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$mg\cdot\sin 30^\circ - \mu\cdot mg\cdot\cos 30^\circ = ma;$$

$$g\,(\sin 30^\circ - \mu\cdot\cos 30^\circ) = a.$$

A gyorsulás a megadott út- és időadatokból számítható:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot 4\ \mathrm{m}}{(4\ \mathrm{s})^2} = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ezt behelyettesítve az előbb kapott összefüggésbe, a csúszási súrlódási együttható kiszámítható:

$$10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(\sin 30^\circ - \mu\cdot\cos 30^\circ) = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$\underline{\mu = 0{,}52.}$$

2.40. Jelöljük a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét β-val, ezt kell meghatároznunk.

a) $\mu = 0$.

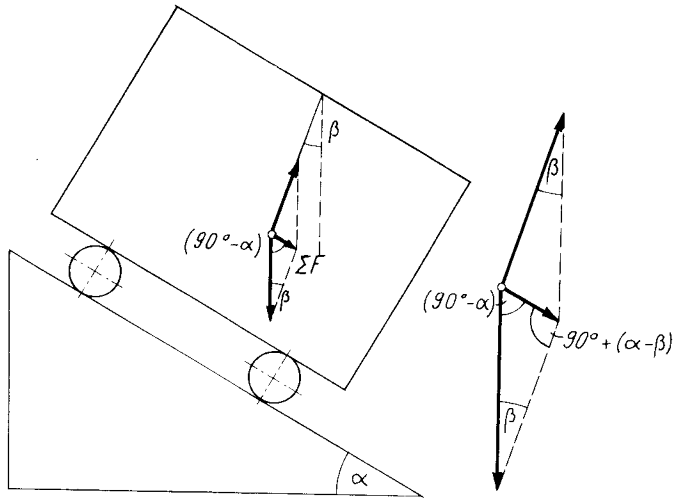
A 2.28. megoldásban alkalmazott gondolatmenettel belátható, hogy a fonalra akasztott test gyorsulása megegyezik a kocsiével, tehát $a = g\cdot\sin\alpha$. Ugyanakkor a testre ható erők eredőjének nagysága (a sinustételt alkalmazva):

$$\Sigma F = mg\,\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)};$$

$$mg\,\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = mg\sin\alpha.$$

$$\underline{\beta = \alpha = 30^\circ.}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy *a fonal a lejtőre merőleges!*



b) $\mu \neq 0$.

Ekkor a kocsi gyorsulása (l. 2.12. megoldás)

$$a = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha).$$

A testre ható erők eredőjének nagysága (sinustételt alkalmazva):

$$\Sigma F = mg\,\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

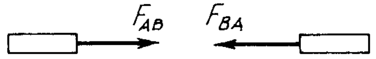
Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$mg\,\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = mg\,(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha),$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos(30^\circ-\beta)} = \sin 30^\circ - 0{,}2\cdot\cos 30^\circ,$$

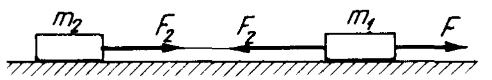
$$\underline{\beta = 18{,}6^\circ < 30^\circ.}$$

3. Dinamika II.

3.1. 

A hatás-ellenhatás törvénye (Newton III. törvénye) azt fejezi ki, hogy két test között mindig kölcsönös erőhatás jön létre: amekkora erővel hat a második test az elsőre, ugyanakkora (és ellentétes irányú) erővel hat az első test is a másodikra ($F_{AB} = -F_{BA}$). Az egyik erő az egyik testre, a másik erő a másik testre hat, és az egyik vagy másik, vagy esetleg mind a két test a rá ható erő következtében gyorsul.

„Megsemmisítés", helyesebben egyensúly (erőegyensúly) akkor lehetséges, ha a kiszemelt testre (arra az egyetlen testre) két vagy több erő hat, és ezek vektori összege zérus.

3.2. 

Az F erő hatására az m_1 tömegű testnek gyorsulnia kell. Az elmozduló első test azonban — a megfeszülő fonál közvetítésével — erőt fejt ki a második testre (F_2), amely ennek következtében ugyancsak gyorsul, elmozdul. A két test közötti erőhatás azonban (Newton III. törvénye értelmében) kölcsönhatás: a második test is hat az elsőre, ugyanakkora, de ellenkező irányú erővel. Vegyük pozitív előjellel pl. az F erő irányát.

Az első testre tehát két erő hat (F és $-F_2$), gyorsulását e két erő „együttes hatása", eredője határozza meg. A második test gyorsulása a rá ható (F_2) erőtől függ.

Mivel a fonál nem nyúlik, meghatározott idő alatt mindkét test ugyanannyi utat tesz meg, mindkét test sebessége ugyanannyival növekszik. Ezért a két test gyorsulása egyenlő. Írjuk fel ezt az egyenlőséget, valamint a dinamika alapegyenletét mindkét testre külön-külön:

$$F - F_2 = m_1 a_1$$

$$F_2 = m_2 a_2$$

$$a_1 = a_2$$

Az így kapott, három egyenletet tartalmazó egyenletrendszert megoldva a három ismeretlen mennyiség (a_1; a_2; F_2) kiszámítható.

A harmadik, majd a második egyenlet figyelembevételével az első egyenlet:

$$F - m_2 a_1 = m_1 a_1.$$

Ebből a gyorsulás ($a_1 = a_2 = a$);

$$a_1 = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

A fonalat feszítő erő:

$$F_2 = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = \frac{3\ \text{kg}\ 8\ \text{N}}{5\ \text{kg}};$$

$$\underline{F_2 = 4{,}8\ \text{N}.}$$

Megjegyzések

1. Az egyes testekre a felsorolt erőkön kívül természetesen hat a nehézségi erő, valamint a „talaj" által függőlegesen felfelé kifejtett erő is. Ezek eredője azonban mindkét test esetében zérus, a testek függőleges irányban nem gyorsulnak (nem is mozdulnak el). Ezért a függőleges erőket az áttekinthetőség érdekében figyelmen kívül hagyhattuk.

2. A két test mozgását ebben a feladatban nem tárgyalhattuk külön-külön, egymástól függetlenítve, mert — mint láttuk — a jelenséget meghatározó erőhatások egy része (a két test közötti, úgynevezett belső erők) a probléma felvázolásakor eleve nem voltak ismertek, megadottak. Ezek az erők maguk is a testek mozgásától (gyorsulásától) függenek. Ilyen esetekben, amikor több test egymásrahatása, az egyes testek mozgásállapota, és további külső hatások (külső erők) együttesen határozzák meg a körülményeket, a szóba jövő testeket együttesen pontrendszernek nevezzük. A pontrendszer mozgásával kapcsolatos kérdésekre úgy válaszolhatunk, ha annak minden elemére külön-külön alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét, mi után a belső kölcsönhatásokat, az egymáshoz viszonyított elmozdulást (sebességet, gyorsulást) is figyelembe vettük.

3. A feladatot szokás úgy is megoldani, hogy a két testet „egyesítve elképzelve", az összesen 5 kg tömegű „test" 8 N erő hatására létrejött gyorsulásának kiszámítása után, külön állapítjuk meg a második test ekkora gyorsulásának előidézéséhez szükséges (F_2) erőt. Ez a megoldás természetesen ugyanazt az eredményt adja. Az

$$F = (m_1 + m_2)\,a$$

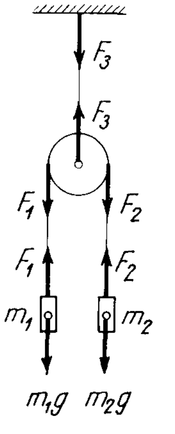
egyenletből

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2};$$

és

$$F_2 = m_2 a = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

3.3.



Az ábra mutatja a függesztett testekre, a csigára, a mennyezetre ható erőket. Valamelyik irányt, pl. a nehézségi erők (itt most külső erők) irányát válasszuk pozitívnak.
Mivel a csiga haladó mozgást nem végez, gyorsulása zérus. Ezért a rá ható erők eredője is zérus:

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0;$$
$$F_3 = F_1 + F_2.$$

A csiga elhanyagolható tömegű. Ezért forgatásához nem szükséges, hogy a rá ható F_1 és F_2 erők közül valamelyik nagyobb legyen a másiknál. (A csiga szerepe itt csak annyi, hogy a fonál „irányát módosítsa", a fonál által közvetített erőhatás irányát megváltoztassa.) Az F_1 és F_2 erők tehát egyenlő nagyok.
Mivel a fonál nem nyúlik meg, adott idő alatt az egyik test ugyanannyit emelkedik, mint amennyit a másik süllyed, a két test sebességének növekedése, és így gyorsulása is ugyanakkora, csak ellenkező irányú.
Mindezeket egyenletekbe foglalva, és a két függesztett testre a dinamika alapegyenletét alkalmazva, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1;$$
$$m_2 g - F_2 = m_2 a_2;$$

$$F_1 = F_2;$$
$$a_1 = -a_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g;$$

$$F_1 = \frac{2\,m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g;$$

$$F_3 = \frac{4\,m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g.$$

3.4. Az összekapcsolódás miatt az ütközés tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető, utána közös (v) sebességgel haladnak tovább a kocsik.
A két kocsira mozgásuk és ütközésük során külső erők nem hatnak, csak egymásra fejtenek ki erőhatást. Belső erők hatására a rendszer teljes mozgásmennyisége nem változik meg: az ütközés után együttes mozgásmennyiségük ugyanannyi, mint amennyi az ütközés előtt volt.

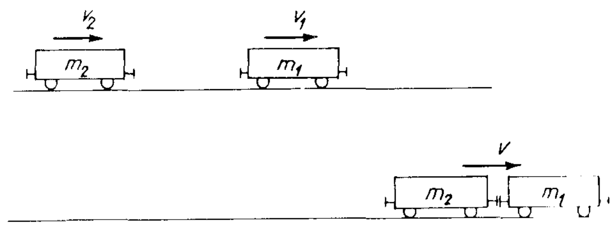
$$(m_1 + m_2)\,v = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Ebből:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v = \frac{30\ \text{g} \cdot 4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 40\ \text{g} \cdot 5\ \frac{\text{cm}}{s}}{30\ \text{g} + 40\ \text{g}} = 4{,}57\ \frac{\text{cm}}{s};$$

$$v = 4{,}6\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$



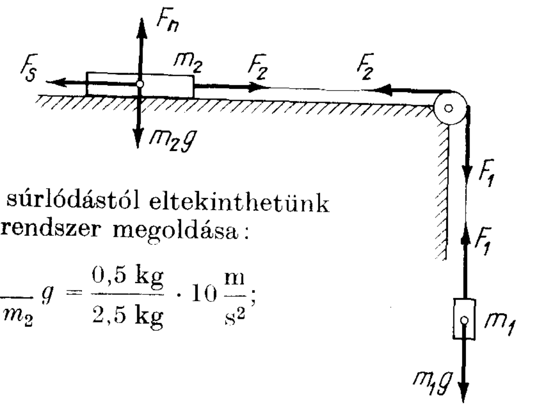
3.5. Az egyes testekre ható erőket az ábra mutatja. Az m_1 tömegű test gyorsulását az m_1g és F_1 eredője; az m_2 tömegű test gyorsulását F_2 és a súrlódási erő eredője határozza meg. (Az m_2g erőt a síkfelületnek a testre kifejtett ereje, F_n egyensúlyozza, a második test függőlegesen nem gyorsul: $F_n = m_2g$.) Mivel a csiga tömege zérus, az F_1 és F_2 erők nagysága megegyezik. (Ugyanúgy, mint a **3**.3 feladatnál.) A fonál nyújthatatlanságából következik, hogy a két test gyorsulásának abszolút értéke egyenlő (l. a 3.2. és 3.3. feladatok megoldását). Ezeket az összefüggéseket és a dinamika alapegyenletét alkalmazva, egyenletrendszert kapunk. Vegyük pozitív iránynak pl. a mozgás irányát, az ábrának megfelelően.

$$m_1g - F_1 = m_1 a_1;$$

$$F_2 - F_s = m_2 a_2;$$

$$F_1 = F_2;$$

$$\underline{a_1 = a_2}.$$



a) Amikor a síkon a súrlódástól eltekinthetünk ($F_s = 0$), az egyenletrendszer megoldása:

$$a_1 = a_2 = a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{0{,}5\ \text{kg}}{2{,}5\ \text{kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

$$F_1 = F_2 = m_2 a = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 2\ \text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4\ \text{N} = 0{,}4\ \text{kp};$$

$$\underline{F_1 = 4\ \text{N}.}$$

b) Ha a súrlódási erő nem zérus, $F_s = \mu F_n = \mu m_2 g$:

$$m_1g - F_1 = m_1 a;$$

$$F_1 - \mu m_2 g = m_2 a.$$

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{0{,}5\ \text{kg} - 0{,}2 \cdot 2\ \text{kg}}{2{,}5\ \text{kg}} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{a = 0{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

$$F_1 = m_2 a + \mu m_2 g = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \mu) g;$$

$$F_1 = \frac{0{,}5\ kg \cdot 2\ kg}{2{,}5\ kg} 1{,}2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

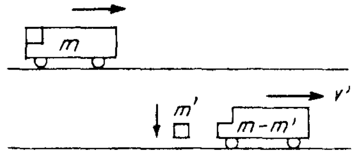
$$\underline{F_1 = 4{,}8\ \text{N}.}$$

Megjegyzés

Megfigyelhetjük a megoldás alapján, hogy a fonálban ható erő annál kisebb, minél nagyobb gyorsulással mozog a rendszer. A fonálban ható erő m_1g-nél kisebb, ha rendszer gyorsul; csak akkor egyenlő vele, ha a gyorsulás zérus.

3.6. A mozgó rendszerre külső erő nem hat. (A síndarab ledobásakor belső erőhatások érvényesülnek.) A rendszer teljes mozgásmennyisége nem változik meg: amikor a síndarab sebessége zérusra csökken (hátrafelé lökve az emberek a síndarabnak a talpfákhoz viszonyított sebességét zérusra csökkentik), a kocsi sebessége megnő.

$$mv = m' \cdot 0 + (m - m') v';$$



$$v' = \frac{mv}{m - m'} = \frac{1000\ \text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{900\ \text{kg}};$$

$$\underline{v' = \mathbf{11{,}1} \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

3.7. Az ábra a rendszernek a mozgást megelőző, illetve a mozgás után létrejött helyzetét vázolja. Mivel a jelenség során csak belső erők működnek, a rendszer teljes mozgásmennyisége állandó marad: a mozgás előtt (és után) zérus, tehát a mozgásmennyiségek összege a folyamat közben is zérus kell hogy legyen.
A csónaknak a vízhez viszonyított elmozdulását (s) és sebességét (v_1) vegyük pl. pozitív előjellel. Ekkor az ember ezzel ellentétes vízhez viszonyított elmozdulását ($l - s$) és sebességét (v_2) negatív előjellel kell vennünk. A mozgásmennyiség megmaradását felhasználva:

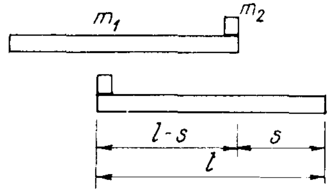
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

Ha a mozgást egyenletesnek tekintjük és t ideig tart,

$v_1 = \frac{s}{t}$; és $v_2 = \frac{l-s}{t}$

helyettesítésével:

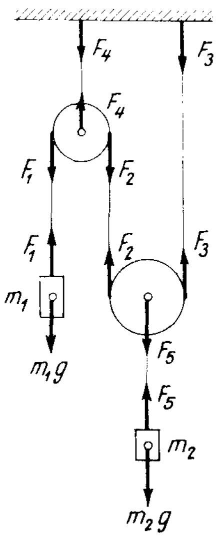
$$m_1 \frac{s}{t} - m_2 \frac{l-s}{t} = 0.$$

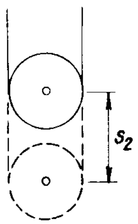


Ebből

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l.$$

3.8.





Az ábra mutatja az egyes testekre, illetve az egyes köteldarabokban ható erőket. Válasszuk pozitívnak pl. a függőlegesen lefelé mutató irányt.

Mivel a csigák tömege elhanyagolható: $F_1 = F_2$ és $F_2 = F_3$, ezért

$$F_1 = F_2 = F_3.$$

Az állócsiga gyorsulása zérus.

$$F_1 + F_2 - F_4 = 0.$$

A mozgócsiga gyorsul ugyan, de tömege elhanyagolható, ezért

$$F_5 - F_2 - F_3 = 0.$$

Miközben a mozgócsiga tengelye (és így az m_2 tömegű test is) meghatározott (t) idő alatt s_2 úton elmozdul, a függesztő kötél egy pontja (az m_1 tömegű testtel együtt) kétszer akkora úton mozdul el: $s_1 = 2\,s_2$. Mivel valamennyi erőhatás állandó, csak egyenletesen gyorsuló mozgás jöhet létre. Az $s_1 = \frac{a_1}{2} t^2$ és $s_2 = \frac{a_2}{2} t^2$ összefüggések alkalmazásával azt kapjuk, hogy az m_1 tömegű test gyorsulása kétszerese a másik test gyorsulásának, és a gyorsulások ellentétes irányúak: $a_1 = -2a_2$. Megállapításainkat összegezve, és a dinamika alapegyenletét alkalmazva:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1;$$
$$m_2 g - F_5 = m_2 a_2;$$
$$a_1 = -2a_2.$$
$$F_1 = F_2 = F_3;$$
$$F_4 = F_1 + F_2,$$
$$F_5 = F_2 + F_3.$$

Ebből

$$F_5 = 2F_1;$$

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1 \quad \text{és} \quad m_2 g - 2F_1 = -m_2 \frac{a_1}{2};$$

$$a_1 = \frac{4\,m_1 - 2\,m_2}{4\,m_1 + m_2} g = \frac{8\text{ kg} - 7\text{ kg}}{8\text{ kg} + 3{,}5\text{ kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$a_1 = 0{,}87 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{0{,}87}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$a_2 = -0{,}44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(Az első test lefelé, a második felfelé gyorsul.)

$$F_2 = F_3 = F_1 = m_1 (g - a_1) = 2\text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0{,}87 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right);$$

$$F_2 = 18{,}26\text{ N}.$$

$$F_2 = 18{,}26\text{ N}.$$

$$F_4 = 2\,F_1 = 2m_1 (g - a_1) = 2 \cdot 18{,}26\text{ N} = 36{,}52\text{ N}.$$

$$F_4 = 36{,}52\text{ N}.$$

$$F_5 = 2\,F_1 = F_4 = 36{,}52\text{ N}.$$

$$F_5 = 36{,}52\text{ N}.$$

3.9. Feltételezzük, hogy egyik csónakban sem eveznek; a közegellenállástól eltekintünk, ezért a két csónakból álló rendszerre külső erők nem hatnak.

A feladat megoldásához elegendő, ha csak a második, m_2 tömegű csónakot és a menet közben átrakott, m' tömegű testet tekintjük egy rendszernek. A második csónak vízhez viszonyított sebessége

a találkozás előtt v_2, a találkozás után v. A csomag vízhez viszonyított sebessége a találkozó előtt $v_1 = -v_2$ (ha a második csónak haladási irányához rendeljük a pozitív előjelet), a találkozás után v.
A csomag áthelyezését úgy képzelhetjük el, hogy azt az első csónakban ülők „oldalirányban" teszik át, sebességét ők nem változtatják meg. (A csomag sebessége a második csónakba való beesés következtében változik meg, amit az is jelez, hogy a második csónak sebessége lecsökken.)
A mozgásmennyiség megmaradásának törvénye értelmében a második csónak és a csomag együttes mozgásmennyisége a találkozás előtt és után ugyanannyi:

$$m_2 v_2 - m' v_2 = (m_2 + m')\, v.$$

Ebből

$$m_2 = \frac{v_2 + v}{v_2 - v}\, m' = \frac{0{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 60\ \text{kg} = 300\ \text{kg};$$

$\underline{m_2 = 300\ \text{kg}.}$

3.10. A labda által a padlóra kifejtett erő átlaga ugyanannyi, mint a padló által a labdára kifejtett erő átlaga (hatás—ellenhatás törvénye). Ez utóbbit fogjuk kiszámítani.
Figyeljük a labda mozgását. Alkalmazzuk az impulzustételt.
1. A labda mozgásmennyisége a folyamat kezdetekor:

$I_1 = 0;$

mert a labda zérus kezdősebességről indul.
2. A labda mozgásmennyisége a folyamat végén:

$I_2 = 0;$

mert a labda megnyugodott a padlón.
3. A folyamat közben mely testek gyakorolnak erőt a labdára?
A Föld (állandóan); a padló (csak ütközéskor).
4. Mennyi a Föld által kifejtett erőlökés nagysága a folyamat $\Delta t = 4$ s időtartama alatt?

$mg\Delta t.$

5. Írjuk fel a padló által kifejtett á t l a g o s erőlökés nagyságát a folyamat $\Delta t = 4$ s időtartamára:

$F_{átl}\Delta t.$

6. Válasszuk a függőlegesen l e f e l é mutató irányt pozitívnak, és írjuk fel az impulzustételt:

$mg\Delta t - F_{átl}\Delta t = I_2 - I_1;$

$(mg - F_{átl})\,\Delta t = 0 - 0.$

Tehát

$F_{átl} = mg$

vagyis jelen esetben

$\underline{F_{átl} = 1{,}96\ \text{N}.}$

Megjegyzés

Ha a labdára a számítottakon kívül még más erő is hat — például ha közben még tenyerünkkel is ütögetjük lefelé —, akkor természetesen a padlóra ható erő átlaga is megváltozik.
Az említett példa esetén éppen annyival lesz nagyobb, amennyi a tenyerünk által a labdára kifejtett erő átlaga. (Mintha a padlót ütögettük volna.)
A kiszámított átlagos erő meglepően kicsi. A félreértést elkerülendő megjegyezzük, hogy a labda ütközésének rövid időtartama alatt sokkal nagyobb erő hat a padlóra.

3.11. $\underline{a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};}$ $\underline{F_1 = 15\ \text{N};}$ $\underline{F_2 = 50\ \text{N}.}$

3.12. $\underline{x = 1\ \text{cm}.}$

3.13 *a)* $\underline{a = \dfrac{m_1 \cdot \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\, g.}$

b) Amikor az m_1 tömegű test a lejtőn felfelé gyorsul:

$$\underline{a = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\, g.}$$

Abban az esetben, ha a test a lejtőn lefelé gyorsul:

$$\underline{a = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\, g.}$$

3.14. $v = 16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; a 80 g tömegű test eredeti sebességével egyező irány-ban.

3.15. $l = 4500$ m.

3.16. *a)* $F = 80$ N.

b) a géppuskára ható átlagos visszalökő erő $F_v = 80$ N.

3.17. Egy részecske az összes többire, tehát $(n - 1)$ db. részecskére hat. Mivel n részecske van, az összes erőhatások száma: $n(n - 1)$.

3.18. A h_1 magasságból szabadon eső labda $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ sebességgel érkezik a padlóra. Visszapattanva $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Az ütközés közben létrejött mozgásmennyiség-változás, mivel v_2 ellentétes irányú v_1-gyel:

$$\Delta(mv) = mv_1 - (-mv_2) = mv_1 + mv_2 = m(v_1 + v_2) =$$
$$= m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2});$$

$$\Delta(mv) = 0{,}46\ \text{kg} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\ \text{m}} + \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}5\ \text{m}}\right) =$$
$$= 5{,}4\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$\Delta(mv) = 5{,}4\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.19. *a)* Az impulzustétel értelmében az ütközés közben létrejött átlagos erőhatás egyenlő az időegység alatt létrejött mozgásmennyiség-változással:

$$\Sigma F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$$

$$\Sigma F = F_{padló} - mg.$$

A h_1 magasságból eső labda $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ sebességgel érkezik a padlóra. A h_2 magasságra pattanó labda $v_2 = \sqrt{2gh_2}$ sebességgel indul felfelé a padlóról. Figyelembe véve, hogy a sebesség iránya is megváltozik, a mozgásmennyiség-változás, ha a pozitív irány fölfelé mutat:

$$\Delta(mv) = mv_2 - (-mv_1) = mv_1 + mv_2 = m(v_1 + v_2) =$$
$$= m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}).$$

Az impulzustétel szerint:

$$F_{padló} - mg = \frac{mv_2 - (-mv_1)}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1})}{\Delta t};$$

$$F_{padló} = \frac{m(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1})}{\Delta t} + mg = 124\ \text{N}.$$

$$F_{padló} = 124\ \text{N}.$$

b) A mozgás teljes idejére vonatkozó átlagos erőt úgy számíthatjuk ki, hogy a létrejött mozgásmennyiség-változást osztjuk a mozgás teljes idejével. (A labda esésének és emelkedésének idejéhez természetesen az ütközés idejét is hozzá kell adnunk, noha az előbbiekhez viszonyítva elég kicsi ez az idő.)

A labda mozgásmennyisége az elengedés és a visszapattanás utáni tetőpont elérése pillanatában egyaránt zérus. Ezért a mozgásmennyiség-változás a teljes folyamat alatt zérus. Az impulzustétel alapján:

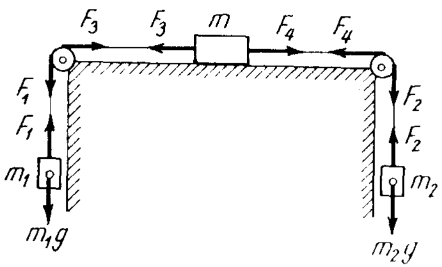
$$\Sigma F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = 0.$$

Az átlagos erőhatás:

$$\Sigma F = 0.$$

3.20. Az ábra az egyes testekre, illetve a fonáldarabokban ható erőket mutatja. Mivel a fonál nem nyúlik, $a_1 = a_2 = a$. A csigák tömegét zérusnak vehetjük, ezért $F_1 = F_3$, és $F_2 = F_4$. A dinamika alapegyenletét alkalmazva, az alábbi egyenletrendszert kapjuk. Válasszuk pozitív előjellel pl. azokat az irányokat, amelyek az m tömegű test jobbra történő elmozdulásakor jönnek létre:

$$F_1 - m_1 g = m_1 a_1;$$
$$F_4 - F_3 = ma;$$
$$m_2 g - F_2 = m_2 a_2;$$
$$a_1 = a_2 = a;$$
$$F_1 = F_3;$$
$$F_2 = F_4.$$



Ebből:

$$a_1 = a_2 = a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m + m_1} g = \frac{4\ \text{kg} - 2\ \text{kg}}{4\ \text{kg} + 7\ \text{kg} + 2\ \text{kg}} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\underline{a = 1{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$

$$F_1 = F_3 = m_1 a_1 + m_1 g = \frac{2\,m_2 + m}{m_2 + m + m_1} m_1 g;$$

$$F_1 = F_3 = \frac{8\ \text{kg} + 7\ \text{kg}}{13\ \text{kg}} \cdot 2\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 23{,}1\ \text{N}$$

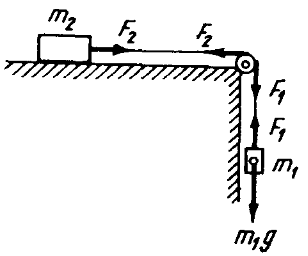
$$\underline{F_1 = 23{,}1\ \text{N}.}$$

$$F_2 = F_4 = -m_2 a_2 + m_2 g = \frac{2m_1 + m}{m_2 + m + m_1} m_2 g;$$

$$F_2 = F_4 = \frac{11\ \text{kg}}{13\ \text{kg}} \cdot 4\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 33{,}8\ \text{N}$$

$$\underline{F_2 = 46{,}2\ \text{N}.}$$

3.21.



Az egyes testekre, valamint a gumizsinórban ható erőket az ábra mutatja. Mivel a csiga tömege elhanyagolható, $F_1 = F_2$.

a) Ha az m_2 tömegű testet rögzítjük, a rendszer nem mozog. Az m_2 tömegű testre ható F_2 erőt a rögzítéshez biztosított erő egyensúlyozza. Az m_1 tömegű testre ható erők eredője zérus:

$$F_1 = m_1 g_1.$$

Ez az erő feszíti a gumizsinórt. A gumizsinór megnyúlására a Hooke-törvényt alkalmazva:

$$F = kx;$$

ahol k az egységnyi megnyúlás esetén létrejött feszítőerővel egyenlő nagyságú (az úgynevezett rugóállandó). Példánkban:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{m_1 g}{k} = \frac{2\text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}}; \quad \underline{x = 2\ \text{cm}.}$$

b) Amikor a rendszer gyorsul, a gumizsinór megfeszült állapotban van. (Ne foglalkozzunk most azzal a jelenséggel, amely az indulás után a valóságban létrejönne. Ekkor ugyanis a rendszer gyorsulna, mozogna, de közben az egyes testek még külön-külön rezgőmozgást is végeznének. Csak azt a jelenséget vizsgáljuk, ahol ilyen rezgés nincsen, vagy legalábbis olyan kicsi, hogy nem észlelhető.) Ekkor a két test gyorsulása ugyanakkora.

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1;$$

$$F_2 = m_2 a_2;$$

$$a_1 = a_2;$$

$$\underline{F_1 = F_2.}$$

Ebből

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g;$$

$$F_1 = F_2 = m_2 a_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2\ \text{kg} \cdot 10\ \text{kg}}{12\ \text{kg}} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$F_1 = 16{,}7\ \text{N}$$

A gumizsinór megnyúlása:

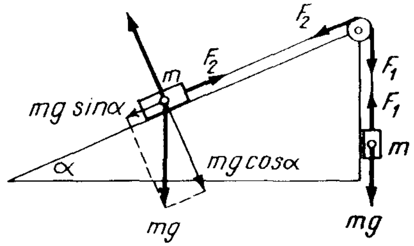
$$x = \frac{F}{k} = \frac{16{,}7\ \text{N}}{10\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}};$$

$$\underline{x = 1{,}67\ \text{cm}.}$$

3.22. *a)* Egyenletes mozgás esetén a gyorsulás zérus, az egyes testekre ható erők egymást egyensúlyozzák.

$$mg = F_1 = F_2.$$

Abban az esetben, ha a lejtőn csúszó test felfelé halad a lejtőn, a súrlódási erő $mg \cdot \sin\alpha$-val egyező irányú:



$$mg \cdot \sin\alpha + \mu mg \cdot \cos\alpha - $$
$$- mg = 0.$$

Ebből

$$\underline{\mu = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.}$$

Ha a test a lejtőn lefelé mozog egyenletesen, a súrlódási erő iránya $mg \cdot \sin \alpha$-val ellentétes:

$$mg \cdot \sin \alpha - \mu mg \cdot \cos \alpha - mg = 0.$$

Ebben az esetben:

$$\mu = \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}$$

volna. A kifejezés azonban valóságos lejtő esetén ($\alpha < 90°$) negatív. A súrlódási együttható csak pozitív szám lehet. Ez azt jelenti, hogy ilyen elrendezésben a lejtőn lefelé egyenletes mozgás nem jöhet létre.

b) Mivel $F_2 = mg$ nagyobb, mint $mg \cdot \sin \alpha$, a lejtőn levő test felfelé indul meg, ha a tapadó súrlódás nem elég nagy. Nyugalomban akkor maradhat, ha

$$mg \cdot \sin \alpha + F_{so} - mg = 0;$$

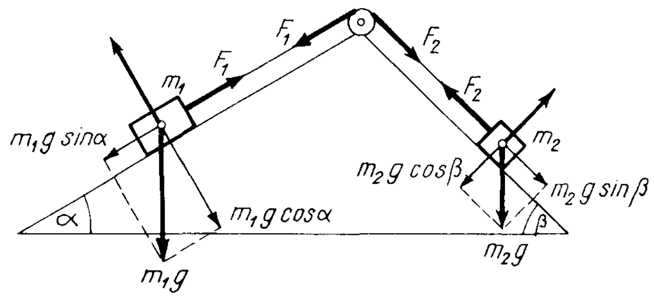
$$F_{so} = mg - mg \cdot \sin \alpha = mg\,(1 - \sin \alpha).$$

A tapadó súrlódási erő maximális értéke ($F_{so_{max}} = \mu_0 mg \cdot \cos \alpha$) legalább ekkora kell hogy legyen:

$$\mu_0\, mg \cdot \cos \alpha \geqq F_{so} = mg\,(1 - \sin \alpha),$$

$$\mu_0 \geqq \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

3.23.



A feladat szövege alapján feltételezhetjük, hogy a súrlódástól eltekinthetünk, a fonál és a csiga tömege elhanyagolható, és a fonál nem nyúlik. Rendeljük a pozitív előjelet pl. a „jobbra" mutató irányhoz:

$$m_2 g \cdot \sin \beta - F_2 = m_2 a_2;$$

$$F_1 - m_1 g \cdot \sin \alpha = m_1 a_1;$$

$$F_1 = F_2;$$

$$a_1 = a_2.$$

Ebből

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 \cdot \sin \beta - m_1 \cdot \sin \alpha}{m_2 + m_1}\, g =$$

$$= \frac{1\ \text{kg} \cdot \sin 45° - 2\ \text{kg} \cdot \sin 30°}{3\ \text{kg}}\, 10\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_1 = a_2 = -0{,}98\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(A rendszer „balra" gyorsul, vagyis az m_1 tömegű test csúszik lefelé a lejtőn.)

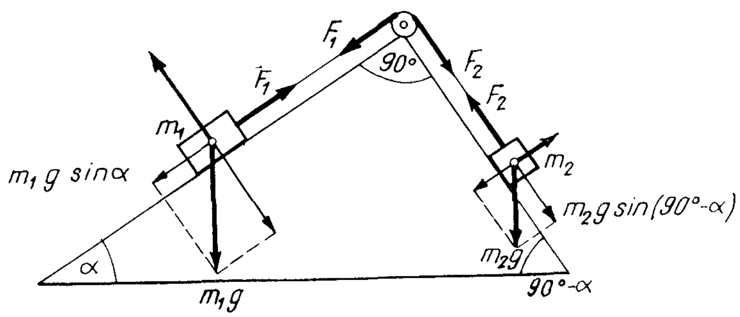
3.24. Az egyes testekre ható erőket az ábra mutatja. Mivel a súrlódást zérusnak vehetjük, egyensúly esetén:

$$m_1 g \cdot \sin \alpha = F_1 = F_2 = m_2 g \cdot \sin(90° - \alpha) = m_2 g \cdot \cos \alpha.$$

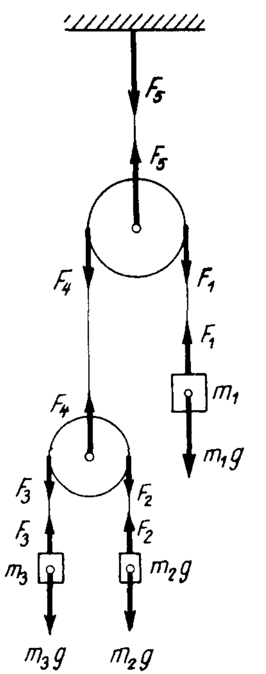
Ebből

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{m_2}{m_1};$$

$$\alpha = \text{arc tg}\, \frac{m_2}{m_1}.$$



3.25.



Az ábra mutatja az egyes testekre, illetve a fonaldarabokban ható erőket. Mivel a csigák tömege elhanyagolható:

$F_1 = F_4$; és $F_2 = F_3$.

Az állócsiga egyensúlyban van:

$F_5 = F_1 + F_4 = 2\,F_1$.

A mozgócsiga gyorsulhat ugyan függőleges irányban, de tömege zérus, ezért:

$F_3 + F_2 - F_4 = 0$;

$F_4 = F_2 + F_3$.

Írjuk fel a mozgásra vonatkozó egyenletrendszert, pozitív előjelet választva pl. a lefelé mutató iránynak. Használjuk fel, hogy a fonál nem nyúlik, ezért a mozgócsiga középpontjának gyorsulása (a_4) ugyanakkora, mint az m_3 tömegé, csak ellenkező irányú ($a_1 = -a_4$).

Nehézséget okoz, hogy a mozgócsiga középpontjának gyorsulása és az m_2 valamint m_3 tömegű test gyorsulása között könnyen nem találunk összefüggést. Ha az m_2 illetve m_3 tömegű test csigához viszonyított gyorsulása a_2', illetve a_3', a fonál nyújthatatlansága miatt:

$a_2' = -a_3'$.

Az m_2 illetve m_3 tömegű testnek a nyugvó vonatkoztatási rendszerhez (pl. a mennyezethez) viszonyított gyorsulását úgy kaphatjuk meg, ha az a_2' illetve a_3' (csigához viszonyított) gyorsuláshoz hozzáadjuk a csiga középpontjának a gyorsulását:

$a_2 = a_2' + a_4$; illetve $a_3 = a_3' + a_4$.

Az utóbbi két egyenletet az előbbivel összevetve:

$a_2 - a_4 = -(a_3 - a_4)$;

$a_2 + a_3 = 2a_4$.

A mozgás egyenletrendszere:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1;$$
$$m_2 g - F_2 = m_2 a_2;$$
$$m_3 g - F_3 = m_3 a_3.$$
$$F_1 = F_4;$$
$$F_2 = F_3;$$
$$F_2 + F_3 = F_4;$$
$$a_1 = -a_4;$$
$$a_2 + a_3 = 2a_4.$$

Ebből:

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4\,m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\,m_2 m_3}\,g =$$
$$= \frac{3\text{ kg}\cdot 1\text{ kg} + 3\text{ kg}\cdot 2\text{ kg} - 4\cdot 1\text{ kg}\cdot 2\text{ kg}}{3\text{ kg}\cdot 1\text{ kg} + 3\text{ kg}\cdot 2\text{ kg} + 4\cdot 1\text{ kg}\cdot 2\text{ kg}}\,10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$a_1 = 0{,}59\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

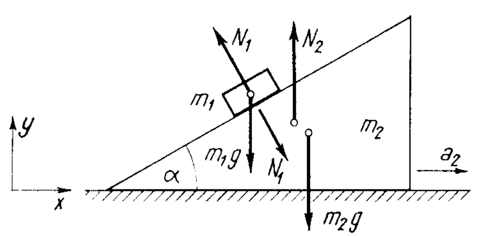
$$a_2 = \frac{m_1 m_2 - 3\,m_1 m_3 + 4\,m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\,m_2 m_3}\,g =$$
$$= \frac{3\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2}{3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2}\,10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

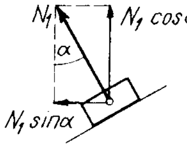
$$a_2 = -4{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

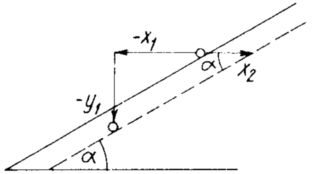
$$a_3 = \frac{-3\,m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\,m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\,m_2 m_3}\,g =$$
$$= \frac{-3\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2}{3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2}\,10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$a_3 = 2{,}94\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3.26. Jelöljük N_1-gyel a test és a lejtő közötti kölcsönös nyomóerőt, N_2-vel a lejtő és a vízszintes talaj közötti nyomóerőt.
Célszerű, ha az erőket derékszögű összetevőkre bontjuk, az ábrán jelölt koordináta-rendszernek megfelelően, és a gyorsulásokat is komponenseikkel állítjuk elő.







Az m_1 tömegű testre ható erők eredőjének összetevői:

$$F_{1x} = -N_1 \cdot \sin\alpha; \qquad F_{1y} = N_1 \cdot \cos\alpha - m_1 g.$$

A lejtőre ható erők eredőjének összetevői:

$$F_{2x} = N_1 \cdot \sin\alpha; \qquad F_{2y} = N_2 - N_1 \cdot \cos\alpha - m_2 g.$$

A lejtő csak vízszintes irányban gyorsul, ezért

$$a_{2y} = 0.$$

Használjuk még fel, hogy a test a lejtő felületén marad lecsúszás közben. Ez azt jelenti, hogy miközben a lejtő jobbra (pozitív irányban) elmozdul x_2-vel, a lecsúszó test elmozdulása balra $-x_1$, függőlegesen $-y_1$, és az elmozdulás összetevőire:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-y_1}{-x_1 + x_2} = \frac{y_1}{x_1 - x_2};$$

$$y_1 = (x_1 - x_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Mivel a testekre időben állandó erők hatnak, állandó gyorsulások, egyenletesen változó mozgások jönnek létre. Ilyen mozgások esetén a létrejött elmozdulások egyenesen arányosak a meg-

felelő gyorsulásokkal. Ugyanez a megfelelő komponensekre is érvényes, ezért:

$$a_{1y} = (a_{1x} - a_{2x})\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A dinamika alapegyenletét az egyes testekre, illetve a megfelelő összetevőkre alkalmazva:

$$-N_1 \cdot \sin\alpha = m_1 a_{1x};$$
$$N_1 \cdot \cos\alpha - m_1 g = m_1 a_{1y};$$
$$N_1 \cdot \sin\alpha = m_2 a_{2x};$$
$$N_2 - N_1 \cdot \cos\alpha - m_2 g = m_2 a_{2y};$$
$$a_{2y} = 0;$$
$$a_{1y} = (a_{1x} - a_{2x})\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_{1x} = \frac{m_2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{m_2 + m_1 \cdot \sin^2\alpha}\, g;$$

$$a_{1y} = \frac{(m_1 + m_2)\sin^2\alpha}{m_2 + m_1 \cdot \sin^2\alpha}\, g;$$

$$a_{2x} = \frac{m_1 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{m_2 + m_1 \cdot \sin^2\alpha}\, g = \frac{1\ \mathrm{kg} \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{4\ \mathrm{kg} + 1\ \mathrm{kg} \cdot \sin^2 30^\circ}\, 10\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

A lejtő gyorsulása:

$$a_{2x} = 1{,}01\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

3.27. Ha az m_2 tömegű test nem mozdul el a kocsihoz viszonyítva, akkor mindhárom test azonos gyorsulással mozog vízszintes irányban. (Az ábra feltünteti az egyes testekre ható erőket.) A kötél és a csiga tömegének elhanyagolhatósága miatt $F_1 = F_2$. A dinamika alaptörvénye az m_1 tömegű testre:

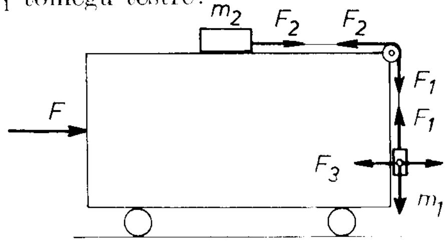
$$m_1 g - F_1 = 0$$
$$F_3 = m_1 a;$$

az m_2 tömegű testre:

$$F_1 = m_2 a;$$

a kiskocsira:

$$F - F_1 - F_3 = ma.$$



Az utolsó három egyenletet összeadva kapjuk:

$F = (m_1 + m_2 + m)\,a.$

Az első és a harmadik egyenletből:

$m_1 g = m_2 a;$

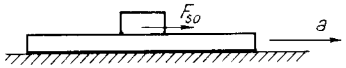
$$a = \frac{m_1}{m_2}\,g;$$

tehát a keresett erő:

$$F = (m_1 + m_2 + m)\,\frac{m_1}{m_2}\,g.$$

3.28. *a)* A deszkán akkor nem csúszik meg a test, ha gyorsulása ugyanannyi, mint a deszkáé. A deszkán levő testet a súrlódási erő (tapadó súrlódási erő) gyorsítja. A dinamika alapegyenletét alkalmazva:

$\mu_0 mg = ma;$



$a = \mu_0 g.$

A deszka gyorsulása legfeljebb:

$$a \leq \mu_0 g = 0{,}4 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$a \leq 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) A deszka és a hasáb között a súrlódási erő $1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulás esetén:

$$F_{so} = ma = 2\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

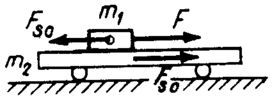
$$F_{so} = 3\ \mathrm{N}.$$

Megjegyzés

Ekkora gyorsulással valóban mozoghat a deszka, mert a tapadó súrlódási erő maximális értéke:

$$F_{so\,max} = \mu_0 mg = 0{,}4 \cdot 2\ \mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 8\ \mathrm{N} > 3\ \mathrm{N}.$$

3.29. A kocsit a hasáb és a kocsi közötti súrlódási erő, a hasábot pedig a húzóerő és a súrlódási erő eredője gyorsítja. Tételezzük fel, hogy a hasáb nem csúszik a kocsin.



$F - F_{so} = m_1 a;$

$F_{so} = m_2 a;$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{1\ \mathrm{N}}{2\ \mathrm{kg} + 0{,}5\ \mathrm{kg}} = \frac{1\ \mathrm{N}}{2{,}5\ \mathrm{kg}} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ez azonban csak akkor lehetséges, ha a súrlódási erő elég nagy.

$$F_{so\,max} = \mu_0 m_1 g = 0{,}25 \cdot 0{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}25\ \mathrm{N};$$

$$F_{so} = m_2 a = 2\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}8\ \mathrm{N}.$$

A súrlódási erő maximális értéke valóban nagyobb, mint amennyi szükséges a kocsi gyorsításához, ezért a hasáb és a kocsi gyorsulása egyaránt

$$a = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Amikor az F erő 10 N nagyságú:

$$a = \frac{10\ \mathrm{N}}{2{,}5\ \mathrm{kg}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$F_{so} = m_2 a = 2\ \mathrm{kg} \cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 8\ \mathrm{N}$$

volna. Mivel a tapadó súrlódási erő maximális értéke is kisebb ennél, a hasáb csúszik a kocsin, ezért a mozgásegyenletekbe különböző gyorsulásokat és a csúszó súrlódási erőt kell írnunk.

$F - \mu m_1 g = m_1 a_1$

$\mu m_1 g = m_2 a_2.$

$$a_1 = \frac{F - \mu m_1 g}{m_1} = \frac{10\ \mathrm{N} - 0{,}01 \cdot 0{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}5\ \mathrm{kg}} = 19{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$a_1 \approx 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

$$a_2 = \frac{\mu m_1 g}{m_2} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}5\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2\ \text{kg}} = 0{,}025\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{a_2 = 0{,}025\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$

3.30. A hasáb mozgásegyenlete:

$$m_1 g\cdot\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cdot\cos\alpha = m_1 a_1.$$

$$a_1 = g\,(\sin\alpha - \mu_1\cdot\cos\alpha) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(\sin 45^\circ - 0{,}3\cdot\cos 45^\circ) =$$

$$= 4{,}95\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{a_1 \approx 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$

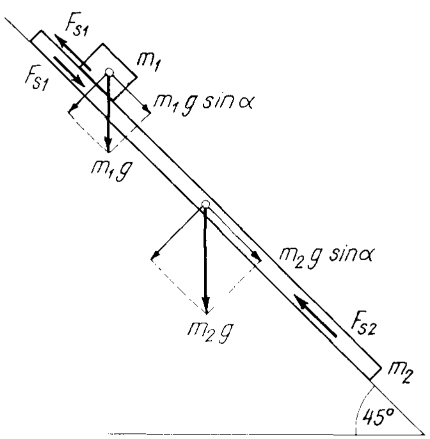
A deszka mozgásegyenlete:

$$m_2 g\cdot\sin\alpha + \mu_1 m_1 g\cdot\cos\alpha - \mu_2\,(m_1 + m_2)\,g\cdot\cos\alpha = m_2 a_2.$$

$$a_2 = g\left(\sin\alpha + \mu_1\frac{m_1}{m_2}\cos\alpha - \mu_2\frac{m_1+m_2}{m_2}\cos\alpha\right);$$

$$a_2 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left(\sin 45^\circ + 0{,}3\cdot\frac{2\ \text{kg}}{5\ \text{kg}}\cdot\cos 45^\circ - 0{,}4\,\frac{2\ \text{kg}+5\ \text{kg}}{5\ \text{kg}}\cdot\cos 45^\circ\right) = 3{,}96\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\underline{a_2 \approx 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$$



3.31. A lövedék a pálya tetőpontjáig a ferde hajítás törvényei szerint mozog. Bevezetve a

$$v_{0x} = v_0\cdot\cos\alpha;$$

$$v_{0y} = v_0\cdot\sin\alpha,$$

jelöléseket, a lövedék helyét, sebességét meghatározó függvények:

$$x = v_{0x}\,t;\qquad v_x = v_{0x};$$

$$y = v_{0y}\,t - \frac{g}{2}t^2;\qquad v_y = v_{0y} - gt.$$

Ezekből a tetőpont (P) helyének koordinátái:

$$x_P = \frac{v_{0x}\,v_{0y}}{g};\qquad y_P = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

A tetőponton, a robbanás előtt a lövedék sebességének összetevői:

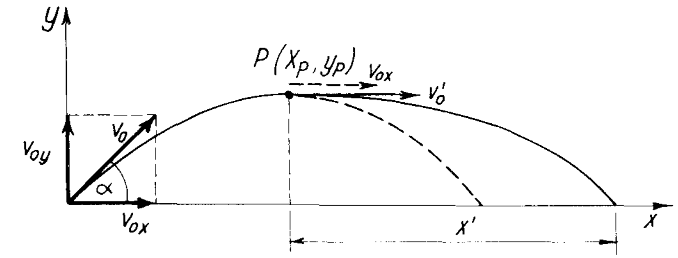
$$v_{Px} = v_{0x};\qquad v_{Py} = 0.$$

A robbanás következtében a lövedék m_1 tömegű részének sebessége zérusra csökken, a másik (m_2 tömegű) rész sebessége megnövekszik. Mivel a robbanás a feladat szerint a függőleges sebesség-összetevőket nem változtatja meg, csak a vízszintes sebesség-összetevőkkel kell foglalkoznunk. A robbanás közben csak belső erők működnek, ezért a mozgásmennyiség megmaradásának törvényét alkalmazhatjuk:

$$(m_1 + m_2)\,v_{0x} = m_1\cdot 0 + m_2 v_0'.$$

Ebből az m_2 tömegű rész robbanás utáni v_0' sebessége:

$$v_0' = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\,v_{0x}.$$



Ennek a résznek a mozgása a továbbiakban v_0' kezdősebességű vízszintes hajítás. A test t' idő alatt a P ponttól vízszintes irányban

$$x' = v_0' t'$$

távolságra jut, függőlegesen pedig

$$y' = \frac{g}{2} t'^2$$

mélyre süllyed. A vízszintes talajig zuhanva:

$$y' = y_P = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Ebből a vízszintes hajítás időtartama kiszámítható:

$$t' = \frac{v_{0y}}{g}.$$

A hajítás vízszintes távolsága:

$$x' = \frac{v_0' v_{0y}}{g} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 g} v_{0x} v_{0y}.$$

A lövedékrész becsapódási helyének az ágyútól mért távolsága:

$$l = x_P + x' = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} + \frac{m_1 + m_2}{m_2 g} v_{0x} v_{0y} = \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}.$$

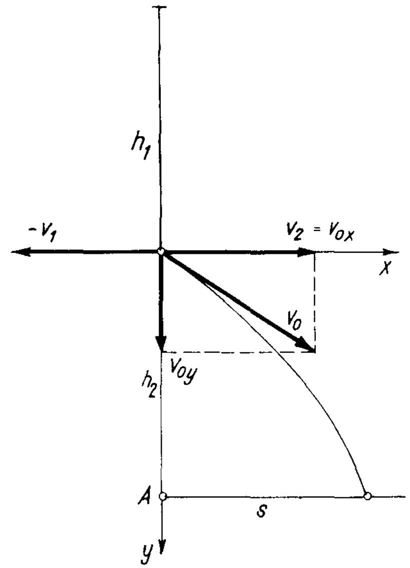
Az adatokat figyelembe véve:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 240 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30^\circ = 208 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha = 240 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30^\circ = 120 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$l = \frac{4\ \mathrm{kg} + 12\ \mathrm{kg}}{6\ \mathrm{kg}} \cdot \frac{208 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ 120 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}};$$

$$l = 6656\ \mathrm{m}.$$



.32. A bomba $h_1 = 600$ m-t szabadon esik. Közben felgyorsul, és $\sqrt{2gh_1}$ függőlegesen lefelé mutató sebességre tesz szert. A robbanás közben csak belső erők működnek, és ezek hatására a két repesznek csak vízszintes irányú sebessége változik meg. (Nulláról $-v_1$-re, illetve 0-ról v_2-re.) A mozgásmennyiség megmaradásának törvénye alapján:

$$m_1(-v_1) + m_2 v_2 = 0;$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1.$$

Az m_2 tömegű rész mozgása ferde hajítás lesz, amelynek v_0 kezdősebessége α depressziószöget zár be a vízszintessel. A kezdősebesség összetevői:

$$v_{0x} = v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1;$$

$$v_{0y} = \sqrt{2gh_1}.$$

A repesz pillanatnyi helyét meghatározó függvények az ábrán jelölt koordináta-rendszerben:

$$x = v_{0x} t;$$

$$y = v_{0y} t + \frac{g}{2} t^2.$$

Mivel a repesz h_2 mélységben ér földet:

$$y = h_2;$$

$$\frac{g}{2} t^2 + v_{0y} t - h_2 = 0.$$

Ebből a hajítás időtartama:

$$t = \frac{-2v_{0y} \pm \sqrt{4v_{0y}^2 + 8\,h_2 g}}{2g};$$

ahol t csak pozitív lehet, ezért

$$t = \frac{-2v_{0y} + \sqrt{4v_{0y}^2 + 8h_2 g}}{2g} = \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2h_2 g}}{g}$$

A becsapódási pont s távolsága az A ponttól:

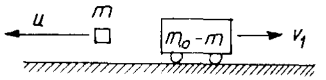
$$s = v_{0x}\,t = \frac{v_{0x}}{g}\cdot\left(\sqrt{v_{0y}^2 + 2\,h_2 g} - v_{0y}\right);$$

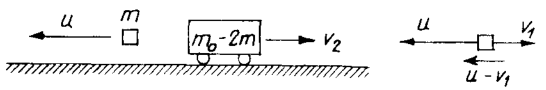
$$s = \frac{m_1 v_1}{m_2 g}\cdot\left(\sqrt{2g(h_1 + h_2)} - \sqrt{2gh_1}\right);$$

$$s = \frac{30\ \mathrm{kg}\cdot 200\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{50\ \mathrm{kg}\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\cdot\left(\sqrt{2\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1000\ \mathrm{m}} - \sqrt{2\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 600\ \mathrm{m}}\right);$$

$$\underline{s = \mathbf{376}\ \mathrm{m}.}$$

3.33. Az első kilövellés előtt a kocsi nyugalomban van, mozgásmennyisége zérus. A kilövellés után tömege $m_0 - m$ lesz, sebessége v_1. A kilövellt tömegnek a pályához viszonyított sebessége $-u$.





A mozgásmennyiség megmaradásának törvényét alkalmazva:

$$(m_0 - m)\,v_1 - mu = 0;$$

$$\underline{v_1 = \frac{m}{m_0 - m}\,u.}$$

A második kilövellés előtt a kocsi tömege $m_0 - m$; sebessége v_1; mozgásmennyisége $(m_0 - m)\,v_1$. A kilövellés után a kocsi tömege $m_0 - m - m = m_0 - 2\,m$; sebessége v_2; mozgásmennyisége $(m_0 - 2m)\,v_2$ lesz.
A kilövellt tömeg sebessége (a kilövellés után) a kocsihoz viszonyítva változatlanul u, de a talajhoz viszonyítva $u - v_1$ (és v_2-vel természetesen ellenkező irányú). Ezért a kilövellt tömeg mozgásmennyisége $-m\,(u - v_1)$ lesz. A mozgásmennyiség megmaradásának törvénye alapján:

$$(m_0 - 2m)\cdot v_2 - m\cdot(u - v_1) = (m_0 - m)\cdot v_1;$$

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{m_0 - 2m}\cdot u = \left(\frac{m}{m_0 - m} + \frac{m}{m_0 - 2m}\right)\cdot u.$$

Ugyanilyen gondolatmenettel a harmadik kilövellésre:

$$(m_0 - 3m)\cdot v_3 - m\cdot(u - v_2) = (m_0 - 2m)\cdot v_2;$$

$$v_3 = v_2 + \frac{m}{m_0 - 3m}\cdot u =$$

$$= \left(\frac{m}{m_0 - m} + \frac{m}{m_0 - 2m} + \frac{m}{m_0 - 3m}\right)\cdot u.$$

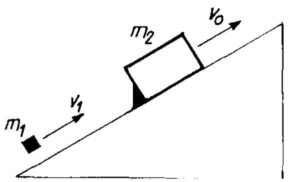
Már az eddigi lépésekből is látszik, hogy az eljárás folytatásával hogyan állítható elő a tetszőleges n-ik kilövellés utáni sebesség képlete. (Próbaképpen esetleg érdemes pl. v_4 és v_5 képletét kiszámítani.) Ennek alapján a 20. kilövellés utáni sebesség:

$$v_{20} = \left(\frac{m}{m_0 - m} + \frac{m}{m_0 - 2m} + \ldots\ldots + \frac{m}{m_0 - 20m}\right)\cdot u.$$

Vagy más alakban:

$$\underline{v_{20} = \left(\frac{1}{\frac{m_0}{m} - 1} + \frac{1}{\frac{m_0}{m} - 2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\frac{m_0}{m} - 20}\right)\cdot u.}$$

3.34. Feltételezhetjük, hogy a becsapódás után a lövedék a hasábban marad, és így a jelenség tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető, amely közben csak belső erők működnek. A mozgásmennyiség megmaradásának törvényét alkalmazva:



$$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) v_0;$$

$$v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0{,}05\ \text{kg}}{2{,}05\ \text{kg}} \cdot 600\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 14{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}; \qquad (1)$$

ahol v_0 jelöli a lejtőn felfelé elmozduló test kezdősebességét.
A testnek a lejtőn felfelé végbemenő mozgására a mozgásegyenlet:

$$-(m_1 + m_2) g \cdot \sin\alpha - \mu(m_1 + m_2) g \cdot \cos\alpha = (m_1 + m_2) a.$$

Ebből a test gyorsulása (lassulása):

$$a = -g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha). \qquad (2)$$

A mozgás során megtett út és a sebesség időfüggvényei:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2; \qquad (3)$$

$$v = v_0 + at. \qquad (4)$$

Amikor a test megáll $v = 0$, ebből a felfelé mozgás ideje

$$t = -\frac{v_0}{a}. \qquad (5)$$

A lefelé csúszó test mozgásegyenlete:

$$(m_1 + m_2) g \cdot \sin\alpha - \mu(m_1 + m_2) g \cdot \cos\alpha = (m_1 + m_2) a'.$$

Gyorsulása:

$$a' = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha). \qquad (6)$$

A mozgás függvényei:

$$s' = \frac{a'}{2} t'^2; \qquad (7)$$

$$v' = a't'. \qquad (8)$$

Mivel lefelé ugyanakkora utat tesz meg a test, mint felfelé ($s' = s$), a lecsúszás t' ideje (*5*), (*3*) és (*7*) alkalmazásával kiszámítható.

$$t' = \frac{v_0}{\sqrt{-a \cdot a'}}$$

Az egész mozgás ideje (*2*) és (*6*) behelyettesítésével:

$$t + t' = -\frac{v_0}{a} + \frac{v_0}{\sqrt{-a \cdot a'}};$$

$$t + t' = \frac{v_0}{g} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}} \right).$$

Az adatokat és (*1*)-et helyettesítve:

$\underline{t + t' = 3{,}5\ \text{s}.}$

4. Munka, energia, teljesítmény

4.1. A teherre két erő hat, az F emelőerő és a G nehézségi erő. A teher egyenletesen mozog, tehát

$$F - G = 0;$$

azaz

$$F = G.$$

Az emelőerő munkája

$$W_1 = F \cdot h = 800\ \mathrm{N} \cdot 15\ \mathrm{m} = 12\,000\ \mathrm{J};$$

$$\underline{W_1 = 12\,000\ \mathrm{J}.}$$

A nehézségi erő munkája

$$W_2 = -Gh = -800\ \mathrm{N} \cdot 15\ \mathrm{m} = -12\,000\ \mathrm{J}.$$

$$\underline{W_2 = -12\,000\ \mathrm{J}}$$

Az utóbbiban a negatív előjel ezért van, mert a nehézségi erő és az elmozdulás ellentétes irányú. Az emelőerő munkája a kiszámítottnál nagyobb a valóságban, mert a teher felgyorsításához is munkára van szükség.

4.2. A munkatétel szerint a tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők munkájának összegével

$$\Sigma W = \Delta E_{kin};$$

$$\Sigma W = 4\ \mathrm{J}; \qquad m = 2\ \mathrm{kg}; \qquad v_0 = 0; \qquad v = ?$$

$$\Sigma W = \frac{1}{2} m v^2 - 0;$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,\Sigma W}{m}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \qquad \underline{v = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

4.3. $m_1 = 120\ \mathrm{g}; \quad v_1 = 40\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}; \quad m_2 = 80\ \mathrm{g}; \quad v_2 = -60\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}};$

$$u_1 = ? \qquad u_2 = ?$$

A v_2 előjele negatív, mert az m_1 tömegű test mozgásának irányát választottuk pozitívnak. u_1 és u_2 az ütközés utáni sebességek.
A mechanikai energia megmaradásának és a mozgásmennyiség megmaradásának törvényét alkalmazva az ütközés előtti és utáni állapotra:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2;$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Ezen egyenletek gyökei a fenti adatokkal

$$u_1 = \pm 40\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}; \qquad u_2 = \mp 60\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

Fizikailag az $u_1 > 0$, $u_2 < 0$ lehetőségnek nincs értelme, a golyók ugyanis nem bújhatnak át egymáson. Így

$$\underline{u_1 = -40\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}};} \qquad \underline{u_2 = +60\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.}$$

4.4. $W = 12\,000\ \mathrm{J};$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{12\,000\ \mathrm{J}}{15\ \mathrm{s}} = 800\ \mathrm{W};$$

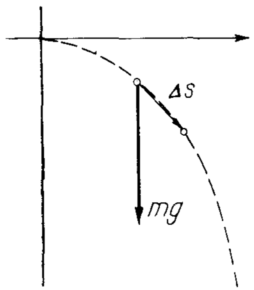
$$\underline{P = 800\ \mathrm{W}.}$$

4.5. A munka definíció szerint:

$$F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s;$$

ahol α a Δs elmozdulás és az erő által bezárt szög. Ha $\alpha = 90°$, az erő nem végez munkát. *A fonálerő az inga elmozdulására merőleges, tehát nem végez munkát.*

4.6. *a)* Ha súrlódás nélkül csúszik le a test a lejtőn, akkor a lejtő a testre csak a lejtő síkjára merőleges nyomóerővel hat. Így az elmozdulás és az erő merőleges egymásra, tehát a nyomóerő mun



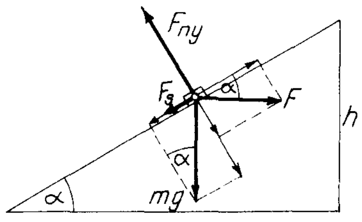
kája zérus, vagyis a lejtő nem végez munkát a rajta lecsúszó testen.

b) Az mg nehézségi erő és a mozgás bármely pillanatához tartozó Δs elmozdulás hegyesszöget zár be, amint az az ábrán látható, és így $\cos\alpha > 0$, tehát

$$W = mg\cdot\cos\alpha\cdot\Delta s > 0.$$

4.7. A bőröndre az ábrán látható négy erő hat. A dinamika alaptörvénye alapján a lejtőirányú és lejtőre merőleges összetevőkre felírhatjuk, hogy

$$F\cdot\cos\alpha - mg\cdot\sin\alpha - F_s = 0;$$
$$F_{ny} - mg\cdot\cos\alpha - F\cdot\sin\alpha = 0.$$



A jobb oldalakon azért áll zérus, mert a bőrönd egyenletesen mozog, és így a gyorsulás nulla. A mozgási súrlódási erő:

$$F_s = \mu\cdot F_{ny}.$$

A három egyenletből az ember által a bőröndre kifejtett erő:

$$F = \frac{mg\cdot\sin\alpha + \mu mg\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha} = 176\ \text{N}.$$

Számoljuk most ki az egyes erők munkáját!

a) $W_1 = F\cdot\cos\alpha\cdot s = F\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{h}{\sin\alpha} = F\cdot h\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 609\ \text{J};$

$\underline{W_1 = 609\ \text{J}.}$

b) $W_2 = -F_s\cdot s = -\mu\cdot(mg\cdot\cos\alpha + F\cdot\sin\alpha)\cdot\dfrac{h}{\sin\alpha} = -209\ \text{J};$

$\underline{W_2 = -209\ \text{J}.}$

c) $W_3 = mg\cdot\cos(90^\circ + \alpha)\cdot s = -mg\cdot\sin\alpha\cdot\dfrac{h}{\sin\alpha} = -mgh =$

$= -400\ \text{J};$

$\underline{W_3 = -400\ \text{J}.}$

$\underline{d)\ W_4 = 0,}$ mert F_{ny} merőleges az elmozdulásra.

e) Az eredő erő nulla kell hogy legyen, mert a bőrönd egyenletesen mozog, és így az eredő erő munkája is nulla. Az eredő erő munkája egyenlő az összetevő erők munkáinak összegével, vagyis:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 609\ \text{J} - 209\ \text{J} - 400\ \text{J} = 0;$$

ami az előbbi fizikai meggondolással kapott eredményünkkel megegyezik. Jól számoltunk.

4.8. Jelölje s az elmozdulást, miközben a sebesség v_1-ről v_2-re változott. A ható erő munkája:

$$W = F\cdot s; \qquad (\cos\alpha = 1)$$

A dinamika alaptörvénye szerint

$$F = m\cdot a.$$

Minthogy a = állandó

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t};$$

$$s = \frac{v_2 + v_1}{2}\cdot t.$$

Ezt a munka kifejezésbe helyettesítve:

$$W = m\cdot\frac{v_2 - v_1}{t}\cdot\frac{v_2 + v_1}{2}\cdot t = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta E_{kin};$$

$$W = \Delta E_{kin}.$$

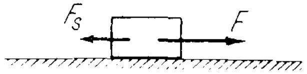
Eredményünk azt mutatja, hogy a munka egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával.

Megjegyzés

Ez általánosan is igaz, nemcsak ebben az egyszerű esetben. Egy tömegpontra ható erők eredőjének a munkája, vagy másképpen a tömegpontra ható erők munkáinak az összege egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával. Ezt a természeti törvényt nevezik a fizikában munkatételnek.

4.9. Használjuk az előző feladat megoldásában felidézett munkatételt. A testre vízszintes irányba az ábra szerinti két erő hat. Ezek munkája s úton

$$(F - F_s)s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 .$$



Keressük az F erő munkáját, amely a fenti egyenlőségből:

$$W = Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 + F_s s .$$

$$m = 4\ \mathrm{kg}; \qquad v_1 = 0; \qquad v_2 = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \qquad F_s = \mu mg.$$

$$\underline{W = 42\ \mathrm{J}.}$$

4.10. *a)* Írjuk fel a lejtőn lecsúszó testre a munkatételt:

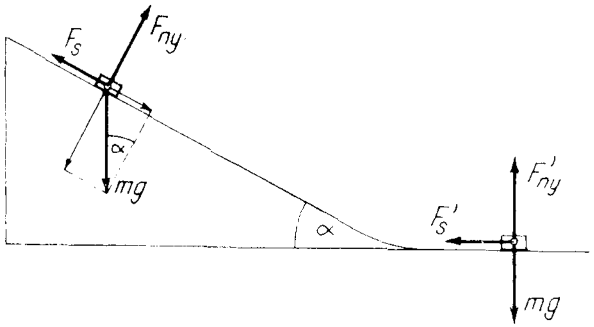
$$\Sigma W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 .$$

Az ábráról leolvasható erőkkel:

$$mg\cdot\sin\alpha\cdot l - \mu\, mg\cdot\cos\alpha\cdot l = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 .$$

Ebből a test sebessége a lejtő alján

$$\underline{v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gl(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)}\, .}$$



b) Ha a lejtő a vízszintes úthoz az ábra szerint rövid, ívelt szakaszon csatlakozik, akkor a test v_2 sebességgel indul a vízszintesen. A mozgás ezen szakaszára is felírva a munkatételt,

$$-\mu mgs = 0 - \frac{1}{2}mv_2^2 ,$$

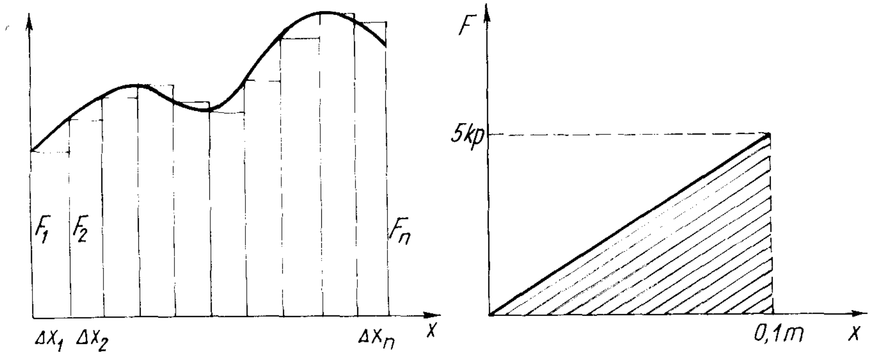
amelyből

$$s = \frac{v_2^2}{2\,\mu g} .$$

Felhasználva v_2-re kapott korábbi eredményünket:

$$\underline{s = \frac{v_1^2 + 2gl(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)}{2\mu g} .}$$

4.11. A rugóra kihúzása közben változó nagyságú erőt kell kifejteni. Változó erő munkáját a $W = Fx$ definíció alapján nem tudjuk kiszámítani. A definíció általánosítása azonban szinte önként adódik. Mozogjon a tömegpont az x egyenesen, és hasson rá a baloldali diagramon ábrázolt változó nagyságú, de az elmozdulás irányába eső erő.



Az elmozdulást $\Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n$ elemi elmozdulások sorozatára bontjuk, és az erőnek az egyes ilyen Δx_i elmozdulásokhoz tartozó, kis hibával állandónak vehető, F_i értékeivel k i s z á m í t j u k a z e l e m i m u n k á k a t, m a j d e z e k e t ö s s z e g e z z ü k.
Így a munka közelítőleg

$$W \approx \Sigma F_i \cdot \Delta x_i$$

Ez természetesen függ az egyes Δx_i elemi elmozdulások nagyságától. A munka pontos értékének azt a számot tekintjük, amelyhez az előbbi módon értelmezett összeg tart, miközben minden Δx_i elemi elmozdulás nagyságát egyre kisebbre választjuk. Más szavakkal a munka pontosan a $\Sigma F_i \cdot \Delta x_i$ összeg határértéke, midőn minden Δx_i tart a nullához. Az ábrán a munka közelítő értékének a Δx_i alapú F_i magasságú téglalapok területeinek összege felel meg, a munka pontos értékének, a határértéknek pedig a görbe alatti terület.
Az ábra jobb oldali része a rugó végén megnyújtás közben kifejtett, egyenletesen növekvő erőt tünteti fel. A görbe (most egyenes) alatti terület, vagyis a fentebb megbeszéltek alapján a munka:

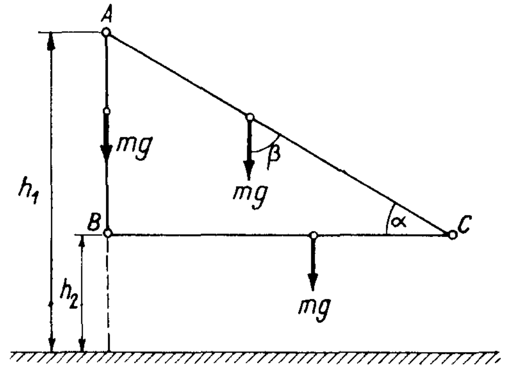
$$W = \frac{F \cdot x}{2} = \frac{50\ \mathrm{N} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}{2};$$

$$\underline{W = 2{,}5\ \mathrm{J}.}$$

Mint tudjuk, a rugóra megnyújtás közben a megnyújtással arányos kx erőt kell kifejteni. (k-t rugóállandónak szokták nevezni.) A fentiek értelmében x-szel történő megnyújtás közben végzett munka

$$W = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

4.12.



A munka a függőleges egyenesen haladva:

$$\underline{W_1 = mg\ (h_1 - h_2).}$$

A-ból C-n keresztül B felé, ha $AC = l$ és $CB = k$.

$$W_2 = mgl \cdot \cos\beta + mgk \cdot \cos 90° = mg\frac{h_1 - h_2}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha + 0;$$

$$W_2 = mg\ (h_1 - h_2).$$

A nehézségi erő munkája tehát mindkét úton ugyanaz. Meg lehet mutatni, hogy bármely utat is válasszuk A pontból B pontba, a nehézségi erő munkája mindig $mg(h_1 - h_2)$. Ez azt jelenti, hogy a nehézségi erő munkája független az úttól, a kezdő és a végpont helyzete egyértelműen meghatározza azt. Nem minden erő rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A súrlódási erő munkája például nem független az úttól.

4.13. Az emelő erő munkája

$$W = F \cdot h = 100\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m};$$

$$\underline{W = 200\ \mathrm{J}.}$$

Legyen a potenciális energia nulla a kiindulási helyzetben, akkor h-val magasabban mgh lesz. Így a helyzeti energia megváltozása

$$\Delta E_{pot} = mgh - 0 = 5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\ \mathrm{m};$$

$$\underline{\Delta E_{pot} = 98{,}1\ \mathrm{J}.}$$

Az F erő munkája ennél nagyobb 101,9 J-lal. A W fennmaradó része a kinetikus energia növekedésében jelentkezik. Miért nem az egész W egyenlő a mozgási energia megváltozásával? Azért, mert a testre nemcsak az F erő hatott, hanem a $-mg$ súlyerő is. A mozgási energia megváltozása a két erő munkájának összegével egyenlő, és ez

$$Fh - mgh = 200\ \mathrm{J} - 98{,}1\ \mathrm{J} = 101{,}9\ \mathrm{J}$$

valóban!

4.14. A mozgási energia nem lehet negatív, mert az $\frac{1}{2}mv^2$ kifejezésben minden tényező pozitív.
A helyzeti energia lehet negatív is. Például a nehézségi erőtérben a választott nullnívó alatt negatív lesz.

4.15. A mechanikai energiák összege valóban más lesz, ha azt a mozgó vonathoz képest számoljuk ki, mint amit az állomás peronján állókhoz képest kapunk. Az is igaz, hogy az összes energia függ a helyzeti energia nulla szintjének megválasztásától. De a mechanikai energia megmaradásának törvénye nem azt mondja ki, hogy az energia ugyanannyi marad, függetlenül attól, hogy mi hez viszonyítunk, hanem azt, hogy ha megválasztottuk a helyzeti energia nulla szintjét, és azt is eldöntöttük, hogy a sebességet mihez viszonyítva mérjük, akkor bármely időpontban számítjuk is ki a test, vagy több test energiáját, az állandó lesz. Ha megváltoztatjuk a vonatkoztatási rendszert, az energiaösszeg abban is állandó az időben, de az előzőtől különböző állandó. Az elmondottak alapján megfogalmazhatjuk úgy is a mechanikai energiamegmaradás törvényét, hogy az már ne okozzon félreértést. Ugyanis, ha az energiaösszeg egy rögzített viszonyítás esetén állandó, ekkor azt is mondhatjuk, hogy az összenergia megváltozása az időben nulla. Ez viszont már minden vonatkoztatási rendszerben igaz. Vagyis, ha egy testre mozgása során nem hat „súrlódás jellegű" erő, akkor a test *mechanikai energiái összegének megváltozása nulla*, bármely időtartamra, attól függetlenül, hogy hol választottuk nullának a helyzeti energiát, és a sebességet az állomáshoz képest, vagy az egyenletesen mozgó vonathoz képest mérjük.

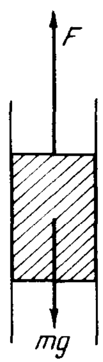
4.16. Ha eltekintünk a súrlódástól, akkor a motor munkája a munkatétel szerint egyenlő a mozgási energia megváltozásával, tehát:

$$P_{\text{átl}} \cdot t = \frac{1}{2} m v^2 - 0\,;$$

$$P_{\text{átl}} = \frac{m v^2}{2t}\,;$$

$$\underline{P_{\text{átl}} = 38\,600\ \text{W}}$$

4.17. A felvonóra két erő hat:
1. a felvonó kötelében ébredő erő F;
2. a nehézségi erő mg.
Az F erő teljesítményét keressük.



a) Ha t idő alatt h utat tesz meg a lift, az átlagos teljesítmény

$$P_{\text{átl}} = \frac{F \cdot h}{t} = \frac{F \frac{a}{2} t^2}{t} = \frac{Fat}{2}\,.$$

Ehhez meg kell határozni az F erőt. Írjuk fel a dinamika alaptörvényét a liftre!

$$F - mg = ma.$$

Ebből:

$$F = m(g + a)\,;$$

és így

$$P_{\text{átl}} = \frac{Fat}{2} = \frac{m\,(g + a)\,at}{2}\,;$$

$$P_{\text{átl}} = \frac{10^3\ \text{kg} \cdot \left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\ \text{s}}{2}\,;$$

$$\underline{P_{\text{átl}} = 26\,400\ \text{W}.}$$

b) A pillanatnyi teljesítményt a következő módon számíthatjuk ki:

$$P = Fv.$$

A mozgás egyenletesen gyorsuló, és a kezdő sebesség nulla, tehát

$$v = at\,;$$

vagyis

$$P = m \cdot (g + a) \cdot at = 10^3\ \text{kg} \cdot \left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t\,;$$

$$P = 13\,200\ \frac{\text{W}}{\text{s}} \cdot t\,.$$

Ha $t = 1\text{s}$;

$$\underline{P = 13\,200\ \text{W}.}$$

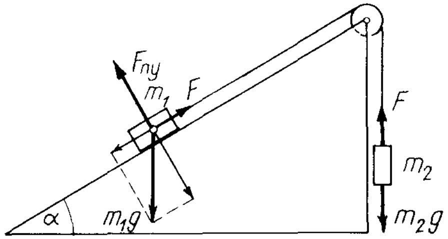
c) Ha $t = 4\text{s}$;

$$\underline{P = 52\,800\ \text{W}.}$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a pillanatnyi teljesítmény a negyedik másodpercben kétszer akkora, mint a négy másodperc alatti átlagos teljesítmény!

4.18. A lejtőn levő m_1 tömegű test lefelé gyorsul, mert a rá ható nehézségi erő lejtőirányú komponense nagyobb, mint az m_2 tömegű testre ható nehézségi erő.



$m_1g\cdot\sin\alpha > m_2g$;
mert
$m_1g\cdot\sin\alpha =$
$= 4\,\mathrm{kg}\cdot g\cdot\frac{1}{2} = 2\,\mathrm{kg}\cdot g$;
$m_2g = 1{,}5\,\mathrm{kg}\cdot g$.

Azonos idő alatt most mindkét test ugyanakkora utat fut be, és sebességeik minden pillanatban megegyeznek. Alkalmazva a munkatételt

az m_1 tömegű testre

$$(m_1g\cdot\sin\alpha - F)l = \frac{1}{2}m_1v^2;$$

az m_2 tömegű testre

$$(F - m_2g)l = \frac{1}{2}m_2v^2.$$

A két egyenletet összeadva:

$$(m_1g\cdot\sin\alpha - m_2g)l = \frac{1}{2}\cdot(m_1 + m_2)\cdot v^2;$$

és ebből

$$v = \left[\frac{2\cdot(m_1\cdot\sin\alpha - m_2)\cdot gl}{m_1 + m_2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

a megadott értékeket behelyettesítve:

$$\underline{v = 1{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}};$$

4.19. $\underline{P_{átl} \approx 10^2\,\mathrm{W}}$. A mozgási energia elhanyagolható!

4.20. $\underline{v_0 = \sqrt{2gl\cdot(1 - \cos\alpha)}}$.

4.21. $\underline{\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}}$.

4.22. $\underline{P = 100{,}66\,\mathrm{kW}}$.

4.23. $\underline{W = 2{,}5\cdot10^6\,\mathrm{J}}$.

4.24. $\underline{P = 470{,}88\,\mathrm{W}}$. $\underline{P_{átl} = 235{,}44\,\mathrm{W}}$;

4.25. $\underline{v = 11{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$.

4.26. a) $\underline{\Delta I = 40\,\mathrm{N\cdot s}}$.
b) $\underline{W = 400\,\mathrm{J}}$.
c) $\underline{\Delta I = 40\,\mathrm{N\cdot s}}$; $\underline{W = -200\,\mathrm{J}}$.

4.27. $\underline{u_1 = 4{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$; $\underline{u_2 = 2{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$.

4.28. $\underline{\alpha = 28°\,53'}$.

4.29. $\underline{W = 1700\,\mathrm{J}}$.

4.30. $\underline{t = 0{,}51\,\mathrm{s}}$.

4.31. A ládán két erő végez munkát.
A húzóerő munkája $W_1 = 0{,}001\,\mathrm{kWh} = 3{,}6\cdot10^3\,\mathrm{J}$;
a súrlódási erő munkája s úton $W_2 = -F_s\cdot s = -250\,\mathrm{N}\cdot s$.

A láda egyenletesen mozog, kinetikus energiája változatlan, tehát a munkatétel szerint az összes munka is nulla kell hogy legyen. Így

$$W_1 + W_2 = 0;$$

$$W_1 - F_s\cdot s = 0;$$

$$s = \frac{W_1}{F_s} = \frac{3{,}6\cdot10^3\,\mathrm{J}}{250\,\mathrm{N}};$$

$$\underline{s = 14{,}4\,\mathrm{m}}.$$

4.32. A golyóra csak a fa fékező ereje, F_s hat. A munkatétel szerint az $s_1 = 5$ cm útra:

$$F_s \cdot s_1 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

Ebből:

$$F_s = -\frac{m v_0^2}{2 s_1} .$$

Írjuk fel a munkatételt az $s_2 = 2$ cm útra!

$$F_s \cdot s_2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

Ebből

$$v^2 = \frac{2}{m} \cdot \left(F_s \cdot s_2 + \frac{1}{2} m v_0^2 . \right)$$

Beírva F_s előbbi értékét:

$$v^2 = \frac{2}{m} \left(-\frac{m v_0^2}{2 s_1} s_2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \right);$$

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{s_2}{s_1}} = 500 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{5}} \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

$$\underline{v = 387 \frac{\text{m}}{\text{s}} .}$$

4.33. Válasszuk a felvonó mozgásának irányát a pozitív iránynak. Ekkor, mivel a golyó gyorsulása a felvonóhoz és a Földhöz viszonyítva is $-g$, a golyó sebessége

a felvonóhoz viszonyítva $v' = -gt$;

a Földhöz viszonyítva $v = v_0 - gt$.

v_0 a lift sebessége a Földhöz viszonyítva, és ez egyben a golyó kezdeti sebessége is a Földhöz képest, mert a leejtése előtt a lifttel együtt mozog. Ezek szerint a golyó mozgási energiája a felvonóhoz viszonyítva $E'_{kin} = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m g^2 t^2$;

$$\underline{E'_{kin} = 0{,}001 \text{ J}.}$$

a Földhöz viszonyítva $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_0 - gt)^2$;

$$\underline{E_{kin} = 0{,}016 \text{ J}.}$$

4.34. A két különböző anyagból készült lejtőn lecsúszó test kezdeti és végső sebessége is nulla, vagyis a lecsúszás teljes időtartamára a mozgási energia megváltozása nulla, és így a testre ható erők munkájának összege is nulla kell, hogy legyen. Csak a lejtőirányú erők végeznek munkát. Ezek, amint ezt már többször megbeszéltük,

a felső, l_1 hosszúságú szakaszon

$$mg \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot mg \cdot \cos \alpha ;$$

az alsó, l_2 hosszúságú szakaszon

$$mg \cdot \sin \alpha - \mu_2 \cdot mg \cdot \cos \alpha .$$

Ezek munkája a lecsúszás alatt nulla, tehát

$$mg \cdot (\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha) \cdot l_1 + mg \cdot (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) \cdot l_2 = 0.$$

Ebből

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\mu_2 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha} .$$

Az $\alpha = 30°$; $\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}6$ értékeket behelyettesítve:

$$\underline{\frac{l_1}{l_2} = 0{,}06.}$$

A test a lejtő aljára csak úgy érkezhet nulla sebességgel, ha a felső szakaszon megindul, és az alsó szakaszon lassul, tehát akkor, ha a ráható erők eredője fent a lejtő irányába lefelé, lent felfelé mutat, vagyis akkor, ha

$$mg \cdot \sin \alpha - \mu_1 mg \cdot \cos \alpha > 0 ;$$

$$\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha ;$$

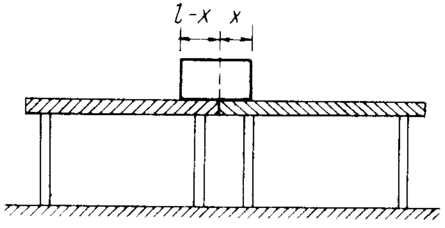
és

$$mg \cdot \sin \alpha - \mu_2 \cdot mg \cdot \cos \alpha < 0 ;$$

$$\mu_2 > \operatorname{tg} \alpha$$

feltételek teljesülnek. Az $\frac{l_1}{l_2}$ hányadosra kapott eredményünk ebben az esetben nem válik negatívvá. Abban az esetben, ami

$kor \frac{l_1}{l_2}$ negatív, μ_1 és μ_2 nem tesz eleget a fenti feltételeknek, és így fizikailag nincs semmi értelme.

4.35. 

A csomag egyenletes mozgatáshoz szükséges erő, az egyes asztalokon ébredő súrlódási erők összege, $F_{s1} + F_{s2}$. Ez változik, mert a súrlódási együtthatók különbözők. Amikor már x távolsággal elmozdult a csomag, az egyes asztalokon ható nyomóerők egyenlőek a rajtuk levő rész súlyával, tehát

a bal oldali asztalon $\frac{G}{l} \cdot (l - x)$;

a jobb oldali asztalon $\frac{G}{l} \cdot x$.

Így a súrlódási erő

a bal oldali asztalon $F_{s1} = \mu_1 \cdot \frac{G}{l} (l - x)$;

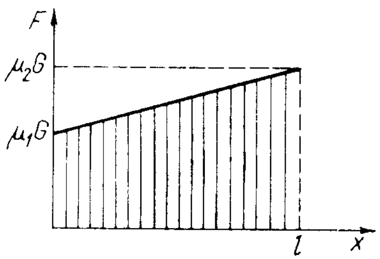
a jobb oldali asztalon $F_{s2} = \mu_2 \cdot \frac{G}{l} \cdot x$.

Az áthúzáshoz szükséges erő

$$F = F_{s1} + F_{s2} = \mu_1 \cdot \frac{G}{l} \cdot (l - x) + \mu_2 \cdot \frac{G}{l} \cdot x.$$

$$F = \mu_1 \cdot G + \frac{G}{l} \cdot (\mu_2 - \mu_1) \cdot x.$$

Az erő az útnak lineáris függvénye. Munkája a 4.11. feladat megoldásában elmondottak értelmében az erő, útdiagram alatti terület, amely az ábráról leolvasva:



$$W = \frac{\mu_1 \cdot G + \mu_2 \cdot G}{2} \cdot l;$$

$W = 25$ J.

4.36. Ha a gépkocsira ható közegellenállástól és a gördülési ellenállástól eltekintünk, akkor a motor munkája egyedül felelős a mozgási energia megváltozásáért, tehát:

$$P \cdot t = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2};$$

$$t = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2P}.$$

$P = 73{,}55$ kW; $m = \frac{G}{g} = 10^3$ kg; $v_1 = 19{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$v_2 = 27{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$t = 2{,}7$ s.

Hogyan kerül kapcsolatba a teljesítménnyel a kerekeknél fellépő tapadási súrlódási erő? Úgy, hogy tulajdonképpen ez gyorsítja a kocsit. Ha a kerekek nem érnének le a talajra, a motor a kerekeket forgatná ugyan, de a talajhoz viszonyítva a gépkocsi nem jönne mozgásba. A tapadási súrlódási erő addig növekedhet, amíg a kerék nem csúszik meg, és legnagyobb értéke $\mu_0 \cdot mg$. Az F_s tapadási súrlódási erő teljesítménye kell, hogy megegyezzék a motor teljesítményével, tehát:

$$F_s \cdot v = P.$$

A sebesség a gyorsítás alatt növekszik. A teljesítmény állandó csak úgy lehet, ha az F_s csökken. Legnagyobb az értéke a legkisebb sebességnél, vagyis a gyorsítás elején!

$$F_{s1} = \frac{P}{v_1}.$$

A súrlódási együtthatónak olyan nagynak kell lennie, hogy ez az erő még létrejöhessen, tehát:

$$\frac{P}{v_1} \leq \mu_0 \cdot mg$$

a feltétele annak, hogy a kocsi ne csússzék meg, vagyis:

$$\mu_0 \geq \frac{P}{mg \cdot v_1} = 0{,}38.$$

Tehát a *tapadási súrlódási együtthatónak legalább* 0,4-nek *kell lenni,* hogy a kocsi ne csússzon meg.

4.37. A szán mindhárom esetben egyenletesen mozog, tehát a rá ható erők eredője nulla. Írjuk fel ezt a mozgás irányával párhuzamos erőkomponensekre!

Felfelé menet $F_1 - mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = 0.$
Lefelé menet $F_2 + mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = 0.$
Vízszintes úton $F_3 - \mu \cdot mg = 0.$

F_1; F_2; F_3 a légcsavar húzóereje a három esetben. A teljesítmény állandó, tehát:

$$P = F_1 \cdot v_1; \quad P = F_2 \cdot v_2; \quad P = F_3 \cdot v_3.$$

Az első kettőt v_1-gyel illetve v_2-vel osztva, és összeadva:

$$F_1 + F_2 = \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2}.$$

Az $F_1 + F_2$ összeg az erők egyensúlyát kifejező egyenletekből

$$F_1 + F_2 = 2\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha.$$

Tehát:

$$2\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2};$$

$$\mu = \frac{P \cdot (v_1 + v_2)}{v_1 \cdot v_2 \cdot 2 \cdot mg \cdot \cos\alpha}.$$

És így F_3 teljesítménye

$$P = F_3 \cdot v;$$

$$P = \mu \cdot mgv;$$

$$P = \frac{P \cdot (v_1 + v_2) \cdot mgv}{v_1 \cdot v_2 \cdot 2 \cdot mg \cdot \cos\alpha}.$$

Ebből a kérdezett sebesség

$$v = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}.$$

Ha a lejtő hajlásszöge kicsi, $\cos\alpha \approx 1$. Tehát

$$v \approx 2 \cdot \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2};$$

$$v = 6{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

4.38. Jelöljük v-vel azt a legkisebb sebességet, amellyel ugorva a partot még el lehet érni. Az elugrás pillanatában az ember és a csónak kölcsönhatásban van, és a mozgásmennyiség megmaradása értelmében a csónak is megindul. Az

$m \cdot v + M \cdot u = 0$-ból adódó

$$u = -\frac{m}{M} v$$

sebességgel (ahol m az ember, M a csónak, illetve a hajó tömege). A munkatétel szerint az ugró által végzett munka egyenlő az ő és a csónak (hajó) mozgási energiájának együttes megváltozásával:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} - 0;$$

$$W = \frac{mv^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Ez a munka annál kisebb, minél kisebb az $\frac{m}{M}$ arány. A hajó tömege sokszorosa az emberének $\left(\frac{m}{M} \approx 0\right)$; ezért a hajóról ugorva az ember kisebb munkát kell hogy végezzen, mintha könnyű csónakból ugrik.

4.39. Amíg az inga a függőleges helyzetig ér, a nehézségi erő mgl munkát végez rajta. Ez egyenlő az inga mozgási energiájának megváltozásával, tehát

$$mgl = \frac{1}{2} mv^2 - 0;$$

$$v = \sqrt{2lg}.$$

Evvel a sebességgel ütközik a másik golyóba. Mivel tömegük egyenlő és az ütközés rugalmas, a meglökött golyó ezt a sebességet átveszi, tehát $v = \sqrt{2lg}$ sebességgel mozog vízszintes irányban, miközben g gyorsulással esik. Ha t idő alatt ér a talajra

$$h = \frac{g}{2} t^2; \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Ennyi idő alatt $x = vt = \sqrt{2lg}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$;

$\underline{x = 2\sqrt{lh}}$

távolságra jut az asztaltól.

4.40. A golyó és zsák impulzusának összege közvetlenül a becsapódás előtt $mv + 0$, közvetlenül a becsapódás után $(m + M)\cdot u$. Mivel a két állapot között eltelt idő kicsi, a külső erők az impulzust alig változtatják ($\Delta I = F\cdot\Delta t$), tehát

$$mv = (M + m)\,u;\quad u = \left(\frac{m}{M + m}\right)v.$$

Amíg a zsák az $\alpha = 10°$-kal jellemzett helyzetbe ér, a nehézségi erő munkája:

$$W = -(m + M)gh.$$

Ugyanezen idő alatt a mozgási energia megváltozása

$$\Delta E_{kin} = 0 - \frac{1}{2}(m + M)\,u^2.$$

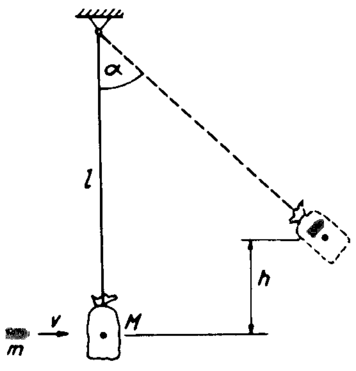
A munkatétel szerint

$$\Delta E_{kin} = W;$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)u^2 = -(m + M)gh.$$

$$\frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v^2 = (M + m)g\,(l - l\cos\alpha);$$

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)}.$$



A golyó tömege sokkal kisebb, mint a homokzsáké, ezért $m + M \approx M$, tehát:

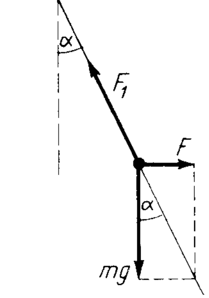
$$v = \frac{M}{m}\cdot\sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)};$$

$$\underline{v = 780\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

5. Statika

5.1. A golyót — a feladat körülményei között — pontszerű testnek tekinthetjük. A pontszerű test egyensúlyának (szükséges és elégséges) feltétele az, hogy a testre ható erők eredője zérus legyen. ($\Sigma F = 0$.)

A golyóra ható három erő eredője — az ábrának megfelelően — akkor zérus, ha



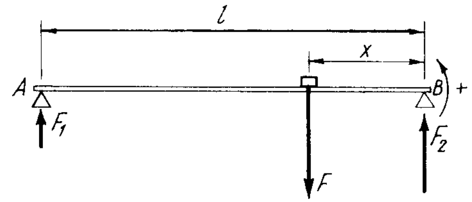
$$\frac{mg}{F_1} = \cos\alpha.$$

Ebből:

$$F_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{20\ \mathrm{N}}{\cos 30°};$$

$$\underline{F_1 = 22.8\ \mathrm{N}}$$

5.2. A gépkocsi a hídra az erősebb pillér felől (B) mehet fel. Az ábrán x jelöli azt a távolságot, ameddig a gépkocsi súlypontja előre haladhat. A híd mindaddig egyensúlyban van (az A vége nem szakad le), amíg a gyengébb pillérre jutó többletterhelés el nem éri az $F_1 = 9000$ N kritikus értéket.



A feladat megoldásához a hidat mint (kiterjedt) merev testet kell felfognunk. A merev test egyensúlyának (szükséges és elégséges) feltétele az, hogy a rá ható erők vektori összege és az erők — tetszőleges forgáspontra (forgástengelyre) számított — forgatónyomatékainak vektori összege egyaránt zérus legyen:

$$\Sigma F = 0;\qquad \text{és}\qquad \Sigma M = 0.$$

A keresett x távolság kiszámításához először írjuk fel a második feltételt: célszerűen az F_2 hatásvonalába eső B pontra számított forgatónyomatékokkal. (Vegyük pozitív előjelűnek pl. az óramutató járásával ellentétes forgásirányt.)

$$-F_1 \cdot l + F \cdot x + F_2 \cdot 0 = 0;$$

$$x = \frac{F_1 \cdot l}{F} = \frac{9000\ \mathrm{N} \cdot 20\ \mathrm{m}}{30\,000\ \mathrm{N}};$$

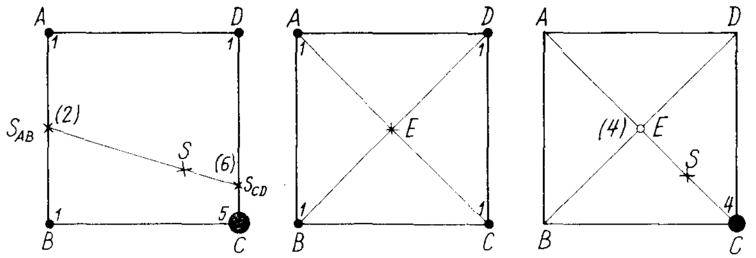
$$\underline{x = 6\ \mathrm{m}.}$$

Megjegyzés

Az egyensúly másik feltételét a megoldáshoz azért nem kell alkalmaznunk, mert az F_2 erőt a feladat nem kérdezi.

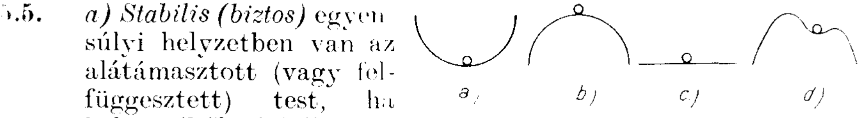
5.3. Ha a zászló (vagy tábla) rúdját úgy tartja az ember, hogy a súlypont a kezén áthaladó függőleges egyenesben legyen, akkor akár egy kézzel is foghatja. (Amennyiben egy kézzel a súlyát egyáltalán elbírja.) Mivel a zászló (tábla) súlypontja az ember kezei fölött van, ez az egyensúlyi helyzet azonban bizonytalan (labilis): a rúd könnyen megbillenhet. Ekkor kezeire forgatónyomaték hat. Ezt a forgatónyomatékot a kezével létrehozott két ellentétes irányú erő forgatónyomatékával kell egyensúlyoznia. A szükséges forgatónyomatékot „könnyebben" (kisebb erőkifejtéssel) akkor tudja biztosítani, ha az erőkar és így a két kéz távolsága is nagyobb.

5.4. Az A és B pontokban levő „súlyok" S_{AB} súlypontja az AB szakasz felezőpontja. A C és D pontokban levő „súlyok" S_{CD} súlypontja a CD szakaszt 1 : 5 arányban osztja. Az S_{AB} pontba egyesítve képzelhetjük az A és B pontokban levő „súlyokat" (2 súlyegységet), az S_{CD} pontba pedig a C és D pontokban levő „súlyokat" (6 súlyegységet). Az egész rendszer súlypontja az S_{AB} S_{CD} szakaszt 6 : 2 = 3 : 1 arányban osztó S pont.



Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy előbb a négyzet minden csúcsába 1—1 forintost teszünk. Ekkor a rendszer súlypontja a négyzet középpontjában, az átlók metszéspontjában van. A maradék négy pénzt most tegyük a C pontba. Ekkor az E pontban „egyesítve" képzelt 4 súlyegység, és a C-be helyezett újabb 4 súlyegység súlypontja az AC átlón levő S, amelyre $AS:SC = 3:1$.

5.5. *a) Stabilis (biztos)* egyensúlyi helyzetben van az alátámasztott (vagy felfüggesztett) test, ha helyzetéből kibillentve, utána visszafordul (visszatér) eredeti helyzetébe.



b) Labilis (bizonytalan) a test egyensúlyi helyzete, ha a kibillentés után eredeti helyzetébe nem tér vissza, hanem attól tovább távolodik.

c) Indifferens (közömbös) a test egyensúlyi helyzete, ha a kibillentés után magára hagyva helyben marad; az eredeti helyzetébe nem tér vissza, és attól nem is távolodik tovább.

d) Az előbbieken túlmenően megkülönböztetünk úgynevezett *metastabil* egyensúlyi helyzetet is, amelyben akkor van a test, ha bizonyos határok között kibillentve utána visszatér eredeti helyzetébe, de túl nagy kitérítés esetén ez már nem következik be, hanem tovább távolodik.

5.6. Az „egyensúly" fogalmát a fizikában (és a technikában) kétféle értelemben is használjuk.

Tágabb értelemben egyensúlyban van: a pontszerű test, ha nem gyorsul (tehát nyugalomban, illetve egyenesvonalú egyenletes mozgásban van); vagy a merev test, ha súlypontja nem gyorsul, és gyorsuló forgása, szöggyorsulása nincsen. (Tehát nyugalomban van, vagy súlypontja egyenes mentén egyenletesen mozog, illetve valamilyen tengely körül a test állandó szögsebességgel forog.)

Szűkebb értelemben egyensúlyról akkor beszélünk, ha a pontszerű test vagy a (kiterjedt) merev test kifejezetten nyugalomban van: sem haladó, sem forgó mozgást nem végez.

A tágabb vagy szűkebb értelemben vett egyensúly szükséges feltétele ugyanaz:

a pontszerű test egyensúlyban van, ha $\Sigma F = 0$;

a merev test egyensúlyban van, ha $\Sigma F = 0$ és $\Sigma M = 0$ (bármely forgáspontra).

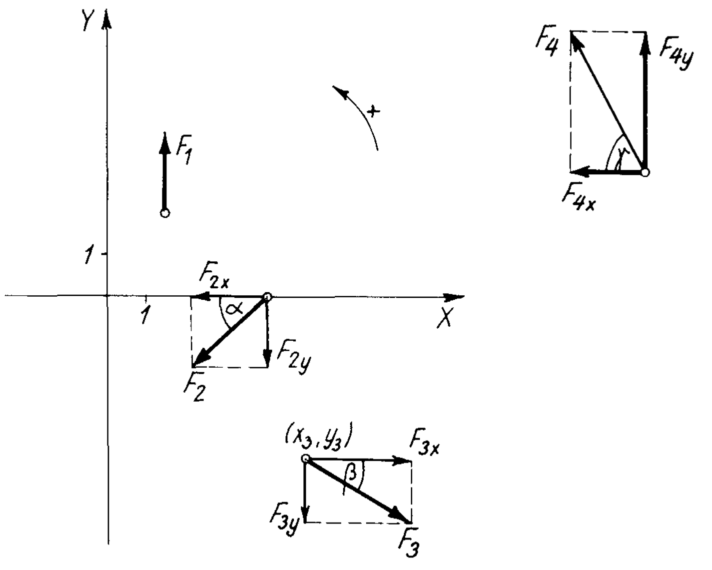
5.7. A merev test egyensúlyának feltétele, hogy a testre ható erők vektori összege és az erők bármely forgáspontra számított forgatónyomatékainak előjeles összege egyaránt zérus legyen. Ez egyben azt is jelenti, hogy az erőket komponensekre bontva, a komponensek vektori összege és forgatónyomatékaik előjeles összege is külön-külön zérus. Ha minden vektort úgy bontunk két-két összetevőre, hogy azok a koordinátarendszer X, illetve Y tengelyével legyenek párhuzamosak, a

$$\Sigma F = 0 \qquad \text{és} \qquad \Sigma M = 0$$

feltételek szétbonthatók a

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{és} \quad \Sigma M_x = 0; \quad \Sigma M_y = 0$$

feltételekre, ahol a forgatónyomatékot célszerű az origóra számítanunk.



Használjuk fel, hogy

$F_{1x} = 0;$

$F_{1y} = F_1 = 4$ N.

$F_{2x} = -F_2 \cdot \cos\alpha = -5 \text{ N} \cdot \cos 45° = -3{,}54$ N;

$F_{2y} = -F_2 \cdot \sin\alpha = -5 \text{ N} \cdot \sin 45° = -3{,}54$ N;

$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\beta = 6 \text{ N} \cdot \cos 30° = 5{,}2$ N;

$F_{3y} = -F_3 \cdot \sin\beta = -6 \text{ N} \cdot \sin 30° = -3$N.

Ezekkel az adatokkal:

$-3{,}54 + 5{,}2 + F_{4x} = 0;$

$4 - 3{,}54 - 3 + F_{4y} = 0;$

$5{,}2 \cdot 4 + F_{4x} \cdot y_4 = 0;$

$4 \cdot 1{,}5 - 3{,}54 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + F_{4y} \cdot x_4 = 0.$

Ebből:

$F_{4x} = -1{,}66$ N; $\qquad F_{4y} = 2{,}54$ N;

$x_4 = 8{,}66;$ $\qquad y_4 = 12{,}5.$

Az F_4 erő nagysága:

$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2} = \sqrt{1{,}66^2 + 2{,}54^2};$

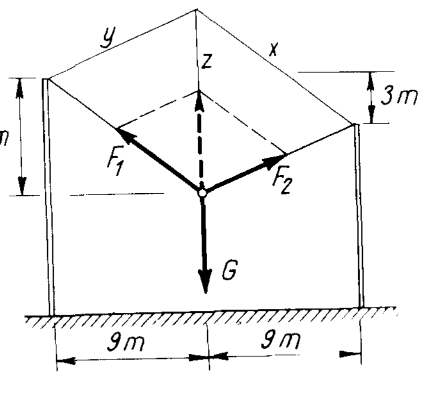
$F_4 = 3{,}04$ N.

$$\sin\gamma = \frac{F_{4y}}{F_4} = \frac{2{,}54}{3{,}04} = 0{,}835;$$

$\gamma = 56{,}5°.$

Az F_4 erő iránya nyugattól 56,5°-kal észak felé mutat.

5.8. A lámpa akkor van egyensúlyban, ha a rá ható F_1; F_2 és G erők eredője zérus.
Az ábra alapján, a megfelelő háromszögek hasonlóságát felhasználva:



$$\frac{F_1}{G} = \frac{x}{z};$$

$$F_1 = \frac{x}{z} G; \quad \text{és}$$

$$\frac{F_2}{G} = \frac{y}{z};$$

$$F_2 = \frac{y}{z} G.$$

Az adatok alapján:

$x = \sqrt{7^2 + 9^2} = 11{,}4$ m;

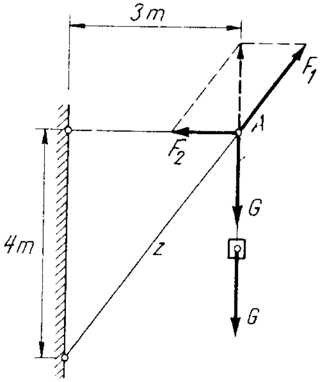
$y = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9{,}85$ m;

$z = 11$ m.

Ebből:

$\underline{F_1 = 156\ \text{N};}$ $\underline{F_2 = 134\ \text{N}.}$

5.9.



Egyensúly esetén az állvány A pontjában az erők eredője zérus. A megfelelő háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{F_2}{G} = \frac{3}{4}; \quad \text{és} \quad \frac{F_1}{G} = \frac{z}{4};$$

ahol $z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Ebből:

$\underline{F_2 = 600\ \text{N};}$ $\underline{F_1 = 1000\ \text{N}.}$

5.10. A deszka akkor van egyensúlyban, ha $\Sigma F = 0$ és $\Sigma M = 0$.
a) A második feltétel alapján, forgatónyomatékokat célszerűen a deszka alátámasztási pontjára számítva:

$$3\,G - xG_1 - 1{,}5\,G = 0;$$

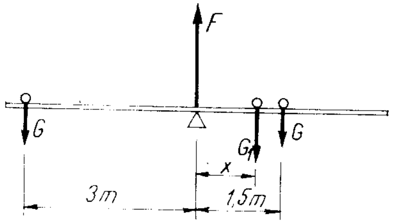
$$x = \frac{1{,}5\,G}{G_1} = \frac{0{,}5 \cdot 450\ \text{N}}{650\ \text{N}};$$

$\underline{x = 1{,}04\ \text{m}.}$

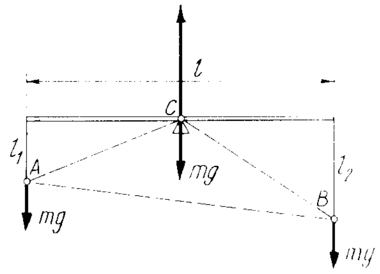
b) Az első feltétel alapján:

$$F = 2G + G_1;$$

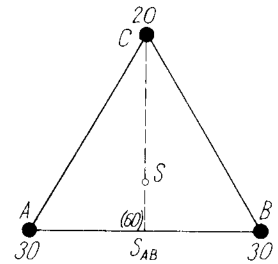
$\underline{F = 1550\ \text{N}.}$



5.11. *a)* A rudat *középen* kell alátámasztani, mert erre a pontra nézve a forgatónyomatékok vektori összege zérus.
b) Stabilis egyensúlyi helyzet jön létre, mert
c) a rendszer súlypontja az ABC háromszög súlypontjában van és ez a C alátámasztási pontnál mélyebben van.



5.12. Az A és B pontban levő testek súlypontja (S_{AB}) az AB szakasz felezőpontja. Az egész rendszer súlypontja (S) az $S_{AB}C$ szakaszon van, amelyet 20 : 60 = 1 : 3 arányban oszt meg.

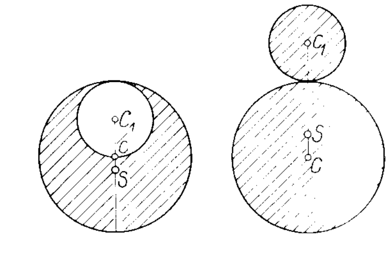


5.13. Körlap súlypontja a kör középpontjában van.
a) Körgyűrű esetén az R sugarú körlapból $R/2$ sugarú, koncentrikus körlap hiányzik. Az idom súlypontja a kör középpontja.
b) A síklap tömege (illetve súlya) egyenesen arányos a területével. Ezért a terület mérőszámát a tömeg (illetve súly) mérőszámaként használhatjuk. A nagy, illetve kis körlap tömegének mérőszáma:

$$R^2\pi; \quad \text{illetve} \quad \frac{R^2}{4}\pi;$$

a hiányos lemezé:

$$R^2\pi - \frac{R^2}{4}\pi = \frac{3}{4}R^2\pi.$$



Ha a hiányos lemezhez gondolatban a kis körlapot hozzávesszük, a súlypont S-ből C-be (a nagy kör középpontjába) helyeződik át. A C pont az SC_1 szakaszt a tömegekkel fordított arányban osztja:

$$\frac{SC}{CC_1} = \frac{\frac{R^2}{4}\pi}{\frac{3}{4}R^2\pi} = \frac{1}{3};$$

$$SC = \frac{1}{3} CC_1 = \frac{1}{3}\frac{R}{2};$$

$$\underline{SC = \frac{R}{6}.}$$

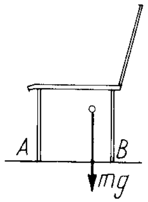
c) A nagy és kis körlapból „egyesített" rendszer S súlypontjára:

$$\frac{CS}{SC_1} = \frac{\frac{R^2}{4}\pi}{R^2\pi} = \frac{1}{4}; \qquad \text{és} \qquad CS + SC_1 = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R.$$

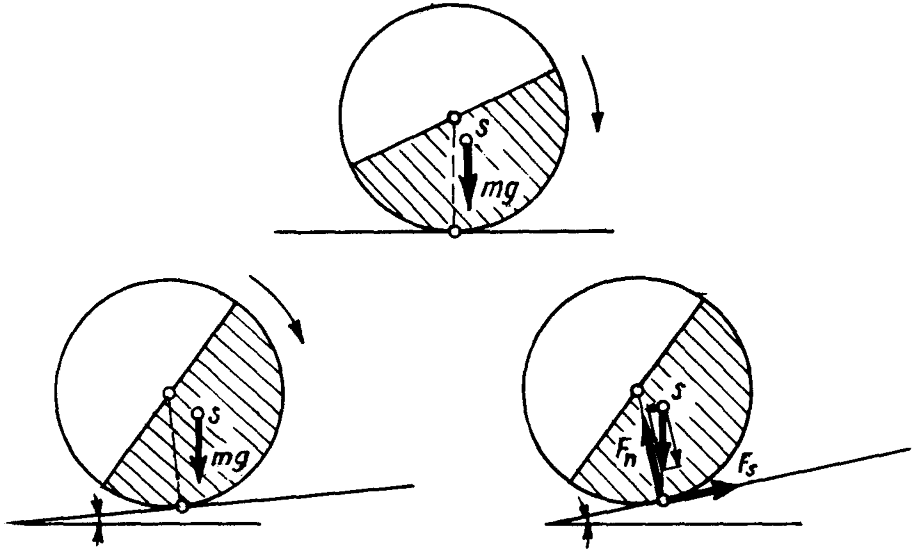
Ebből:

$$\underline{CS = \frac{3}{10}R.}$$

5.14. A szék súlypontja, és ezért a nehézségi erő hatásvonala közelebb van a B forgástengelyhez, mint az A-hoz. A szék egyensúlyi helyzetéből való kibillentésekor a nehézségi erő által előidézett forgatónyomaték („visszatérítő nyomaték") az A tengelyre vonatkozóan nagyobb, mint a B tengelyre. Ezért a széket az A tengely körüli forgást előidézve „nehezebb" felborítani, mint a B tengely körül elfordítva: *a széket hátrafelé „könnyebb" felborítani.*



5.15. *a)* A padlón (vízszintes síkon) nyugalomban úgy helyezkedik el a golyó, hogy súlypontja (amely nem esik egybe a gömb középpontjával) a lehető legmélyebbre kerüljön. (Ha a golyó még nincsen ilyen helyzetben, a nehézségi erő a golyó és padló érintkezési pontjára vonatkozóan forgatónyomatékot hoz létre, és tovább forgatja a golyót.) Ezért a vasrész kerül alulra.
b) Nem túl nagy hajlásszögű lejtőn lehetséges, hogy a súlypont excentrikus helyzete miatt a nehézségi erő hatásvonala a golyó



és lejtő érintkezési pontjához viszonyítva, a lejtő magasabb felének irányában van. Ilyenkor a nehézségi erő forgatónyomatéka a golyót a lejtőn éppen felfelé gördíti.
Egyensúly (nyugalom) akkor jön létre, ha az érintkezési pont a nehézségi erő hatásvonalára illeszkedik. Ekkor a golyó nyugalomban is maradhat a lejtőn (ha a tapadó súrlódási erő elég nagy), vagy gördülés nélkül csúszhat (ha megcsúszott már valamilyen ok következtében; illetve, ha a tapadó súrlódási erő legnagyobb értéke sem elegendő a nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevőjének kiegyensúlyozásához).

5.16. Nem.

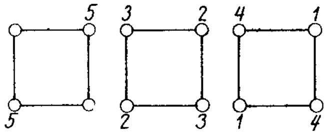
5.17. $\underline{F_{AB} = 50\ \text{N};}$ $\qquad$ $\underline{F_{BC} = 70{,}5\ \text{N}.}$

5.18. *a)* $\underline{G = 6\ \text{N};}$ $\qquad$ *b)* $\underline{\frac{l_1}{l_2} = 2.}$

5.19. *a)* $\underline{G \doteq 12\,500\ \text{N};}$ $\qquad$ *b)* $\underline{x = 1{,}3\ \text{m}.}$

5.20. $F = 173$ N.

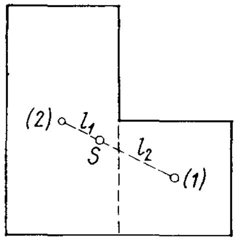
5.21.



Három, amint az az ábrán is látható.

Valamilyen körüljárási irányt választva az egymás utáni csúcsokban elhelyezett pénzdarabok száma: 5, 0, 5, 0; 2, 3, 2, 3; 1, 4, 1, 4.

5.22.



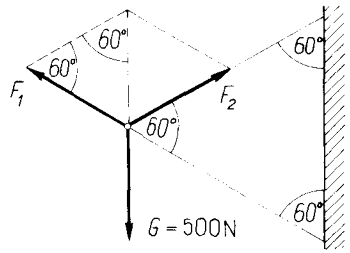
A megoldást az ábra mutatja ($l_1 : l_2 = 1:2$).

5.23. A rúd közepétől 1,8 cm-re (az ólom oldalán).

5.24. Az ábra alapján, a sinustétel alkalmazásával:

$$\frac{F_1}{G} = \frac{\sin 60°}{\sin 50°};$$

$$\frac{F_2}{G} = \frac{\sin 70°}{\sin 50°}.$$



Ebből:

$F_1 = 50\ \mathrm{N}\,\frac{\sin 60°}{\sin 50°}$; $F_2 = 50\ \mathrm{N}\,\frac{\sin 70°}{\sin 50°}$;

$F_1 = 56{,}5$ N; $F_2 = 61{,}3$ N.

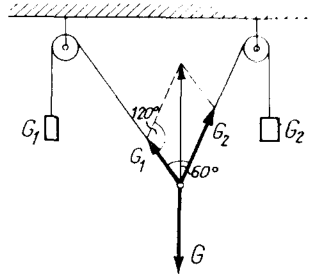
5.25. Az ábra alapján a cosinustétel alkalmazásával:

$G^2 = G_1^2 + G_2^2 - 2G_1 \cdot G_2 \cdot \cos 120° =$

$= 400\ \mathrm{N}^2 + 900\ \mathrm{N}^2 + 1200\ \mathrm{N}^2 \cdot$

$\cdot \cos 60° = 1900\ \mathrm{N}^2$;

$G = 43{,}69$ N.

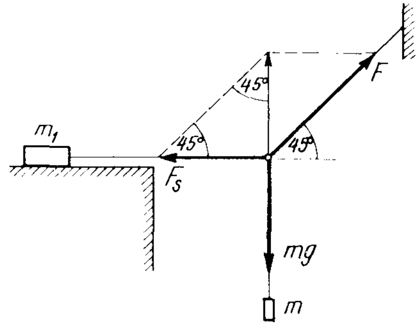


5.26. Az ábra szerint:

$mg = F_s = \mu \cdot m_1 \cdot g,$

$m = \mu m_1 = 0{,}25 \cdot 72$ kg;

$m = 18$ kg.



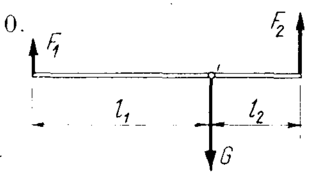
5.27. A rúd egyensúlyban van, ha

$F_1 + F_2 = G$; és $F_2 \cdot l_2 - F_1 \cdot l_1 = 0.$

Mivel

$l_1 = 2l_2$; és $G = 1200$ N;

$F_1 = 400$ N; $F_2 = 800$ N.



5.28. Az ábra alapján:

$G = F_1 + F_2 = 60\ \mathrm{N} + 90\ \mathrm{N}$;

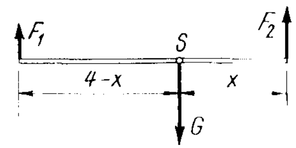
$G = 150$ N.

$F_1\,(4 - x) = F_2\,x;$

Ebből

$$x = \frac{4F_1}{F_1 + F_2};$$

$x = 1{,}6$ m.



5.29. Az ABC egyenlő szárú háromszög, ezért a B-nél illetve C-nél levő szög:

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

A rúd egyensúlyban van, ha pl. az A forgástengelyre számított forgatónyomatékok összege zérus. Az erőkarok:

$$l_1 = \overline{AB} \cdot \sin \beta = \overline{AB} \cdot \sin \left(90° - \frac{\alpha}{2} \right) = \overline{AB} \cdot \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$l_2 = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Az egyensúly feltétele alapján:

$$G_1 \cdot l_1 - G_2 \cdot l_2 = 0;$$

$$G_1 \cdot \overline{AB} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = G_2 \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$25 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 50 \cdot \sin \alpha;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Az egyenlet akkor teljesül, ha

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0;$$

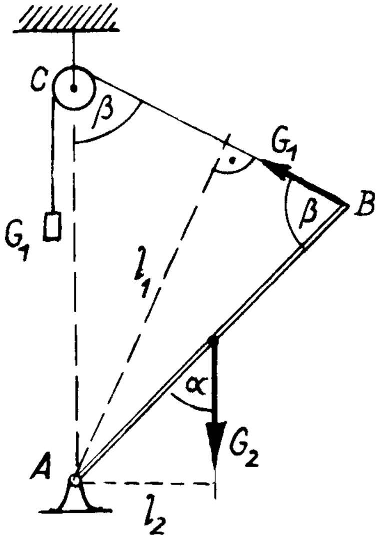
$$\alpha = 180°;$$

vagy $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, és akkor:

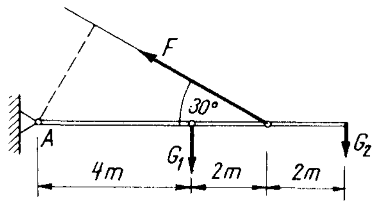
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{\alpha}{2} = 14{,}5°;$$

$$\underline{\alpha = 29°}$$



5.30. A rúd akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők (pl. az A pontra vonatkozó) forgatónyomatékainak összege zérus:



$$F \cdot 6 \sin 30° - 4G_1 - 8G_2 = 0.$$

Ebből:

$$F = \frac{4G_1 + 8G_2}{3} = \frac{4 \cdot 500\ \text{N} + 8 \cdot 300\ \text{N}}{3};$$

$$\underline{F = 1466{,}67\ \text{N}.}$$

5.31. A rúd akkor van egyensúlyban, ha az erők (pl. az A pontra vonatkozó) forgatónyomatékainak összege zérus. Mivel az F_1 és F_2 erő forgatónyomatéka az A pontra vonatkozóan egyaránt zérus, a G erő forgatónyomatéka is zérus kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy G hatásvonala az A pontot tartalmazza.
A fonalak 90°-os hajlásszöge miatt az F_1 és F_2 vektorokkal kifeszített paralelogramma téglalap, mindkét átlója G hosszúságú.
A megfelelő háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{3}.$$

A téglalap átlójára:

$$F_1^2 + F_2^2 = G^2.$$

Ezért

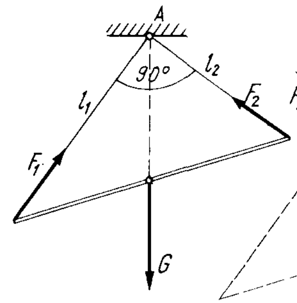
$$F_1 = \frac{4}{5} G;$$

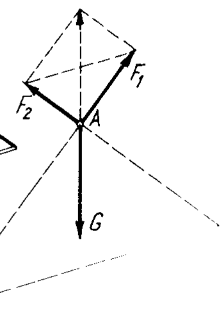
$$\underline{F_1 = 24\ \text{N};}$$

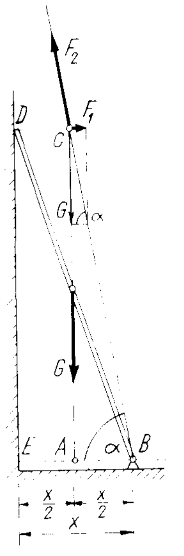
és

$$F_2 = \frac{3}{5} G;$$

$$\underline{F_2 = 18\ \text{N}.}$$





5.32. 

A padlóhoz tengellyel rögzített, és felső végével sima falhoz támaszkodó rúd egyensúlyban csak akkor lehet, ha a rúdra ható erők vektori összege zérus. (Ez az egyensúly szükséges, de önmagában nem elégséges feltétele.) A rúdra a súlyerőn kívül hat egyrészt a D pontban a fal által kifejtett erő (F_1), amelynek nagyságát egyelőre nem ismerjük, irányáról viszont tudjuk, hogy a falra merőleges, és a szoba felé mutat; másrészt hat még a B pontban (a tengely által kifejtett) erő (F_2), amelynek sem nagyságát, sem irányát nem ismerjük még, csak annyit tudunk, hogy hatásvonala áthalad a tengelyen.

E három erő vektori összege akkor zérus, ha

a) hatásvonalaik egy ponton haladnak át; és

b) F_1, F_2 és G közül bármely kettőnek az eredője egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a harmadikkal. Az *a)* feltétel alkalmazásával az F_2 erő hatásvonala szerkeszthető, a *b)* feltétel alapján pedig már F_1 és F_2 nagyságát is megkaphatjuk.

A szerkesztés menete:

A G és F_1 erők hatásvonalát meghúzva, megkapjuk azt a C pontot, ahol a három erő hatásvonala metszheti egymást. A B és C pontok összekötésével F_2 hatásvonalát meghatároztuk.

Ezután — felhasználva, hogy a merev testre ható erő támadáspontja a hatásvonal mentén bárhova áthelyezhető — a G erőt C-be toljuk, majd a paralelogramma szerkesztésével F_1-et és F_2-t kapjuk.

A szerkesztés alapján, a geometriai összefüggések és az adatok felhasználásával az F_2 irányát jellemző α-t, továbbá F_1 és F_2 nagyságát kiszámíthatjuk.

A rúd hosszát l-lel jelölve, az EBD háromszögből:

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{1{,}48^2 - 0{,}5^2} = 1{,}39\ \text{m}.$$

Az ABC háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{2y}{x} = \frac{2 \cdot 1{,}39}{0{,}5} = 5{,}57;$$

$$\underline{\alpha = 79{,}8^\circ.}$$

A vektor-paralelogrammából:

$$F_1 = G \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 50\ \text{N} \cdot \operatorname{tg} 10{,}2^\circ;$$

$$\underline{F_1 = 8{,}855\ \text{N}.}$$

$$F_2 = \frac{G}{\sin\alpha} = \frac{50\ \text{N}}{\sin 79{,}8^\circ};$$

$$\underline{F_2 = 50{,}9\ \text{N}.}$$

A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy az egyensúly szükséges feltételét ($\Sigma F = 0$) a rúdra ható erők derékszögű komponenseire alkalmazzuk, a koordináta-rendszer X tengelyének az EB; Y tengelyének az ED egyenest választva. Ekkor a

$$\Sigma F_x = 0; \qquad \text{és} \qquad \Sigma F_y = 0$$

feltételek kell, hogy teljesüljenek.

A feladatban:

$$G_x = 0; \qquad G_y = -G;$$

$$F_{1x} = F_1; \qquad F_{1y} = 0;$$

$$F_{2x} = -F_2 \cdot \cos\alpha; \qquad F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha.$$

Az egyensúly feltétele alapján:

$$G_x + F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad \text{és} \qquad G_y + F_{1y} + F_{2y} = 0;$$

tehát

$$F_1 - F_2 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad \text{és} \qquad -G + F_2 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Ezekből:

$$F_1 = G \cdot \operatorname{ctg}\alpha; \tag{1}$$

$$F_2 = \frac{G}{\sin\alpha}; \tag{2}$$

ahogyan azt az előző megoldásban is kaptuk. Most azonban α értékét még nem ismerjük!

Ezt azt jelzi, hogy az egyensúly általános feltételének ($\Sigma F = 0$ és $\Sigma M = 0$) csak egy részét kihasználva a feladat nem oldható meg. (Az előző megoldás során a $\Sigma M = 0$ feltétel alkalmazását a szerkesztés alapján kapott ábra felhasználásával „kerültük meg".)

Ha az erőkről azonban csak annyit tudunk és használunk fel, amennyit az első megoldás elején összegeztünk, a forgatónyo matékokat célszerűen a B forgástengelyre számítva, a $\Sigma M = 0$ feltétel alkalmazásával:

$$G \cdot \frac{x}{2} - F_1 \cdot y = 0.$$

Ebből:

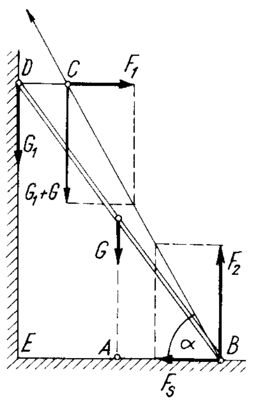
$$\frac{F_1}{G} = \frac{x}{2y}.$$

Felhasználva (*1*)-et:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{2y}.$$

Így α és ezzel (*2*) is kiszámítható, és éppen az előző megoldás eredményét kapjuk.

5.33.



A feladat hasonló az előzőhöz, annyi eltéréssel, hogy a rúd súlyán kívül még az ember súlyát is figyelembe kell vennünk, a tengely által kifejtett erő helyett pedig a padlónál létrejött nyomóerő és súrlódási erő együttesen biztosítják végeredményben ugyanazt a hatást.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$x = EB = 1{,}8$ m; $\quad l = BD = 3$ m;
$y = ED$.

A geometriai feltételek alapján:

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{3^2 - 1{,}8^2} = 2{,}4 \text{ m}.$$

Alkalmazzuk az egyensúly $\Sigma M = 0$ és $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ feltételeit, a forgatónyomatékokat például az E pontra számítva; és a koordináta-rendszer X tengelyének az EB, Y tengelyének pedig az ED egyenest választva:

$$F_2 x - G\frac{x}{2} - F_1 y = 0;$$

$$F_1 - F_s = 0;$$

$$F_2 - G_1 - G = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$F_1 = \left(G_1 + \frac{G}{2}\right)\frac{x}{y};$$

$$F_2 = G_1 + G.$$

$$F_s = \left(G_1 + \frac{G}{2}\right)\frac{x}{y}.$$

A padlónál létrejött (tapadó) súrlódási erőt a többi erő határozza meg. Ugyanakkor tudjuk, hogy a tapadó súrlódási erő nagyságának felső határa van:

$$0 < F_s \leq F_{s\,max} = \mu_0 \cdot F_{nyomó}.$$

Feladatunkban a létra csak akkora „terhelést bír el" megcsúszás nélkül, amelyre:

$$\left(G_1 + \frac{G}{2}\right)\frac{x}{y} \leq \mu_0 \cdot F_2.$$

Ebből

$$\mu_0 \geq \frac{G_1 + \frac{G}{2}}{F_2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{G_1 + \frac{G}{2}}{G_1 + G} \cdot \frac{x}{y} = \frac{800 \text{ N} + 75 \text{ N}}{800 \text{ N} + 150 \text{ N}} \cdot \frac{1{,}8 \text{ m}}{2{,}4 \text{ m}};$$

$$\underline{\mu_0 \geq 0{,}69.}$$

Megjegyzések

1. Abban az esetben, ha a létra „terhelése" olyan, hogy éppen a súrlódási erő maximális értéke jön létre a padlónál:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{F_{s\,max}} = \frac{F_2}{\mu_0 \cdot F_2} = \frac{1}{\mu_0};$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. A feladat eleve feltételezte, hogy annál nagyobb súrlódásra van szükség a padlónál, minél magasabbra megy fel az ember a létrán. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

3. Az ábrán — a viszonylag hű vázlat érdekében — G_1 és G eredője hatásvonalának helyzetét is fel kellett használnunk ahhoz, hogy F_2-t és F_s-et megszerkeszthessük. Vegyük észre azonban, hogy a feladat megoldásának itt közölt változatához nem használtuk fel a szerkesztést és eredményét! (Ellentétben az előző feladat első megoldásával.)

5.34. Az előző feladat eredménye szerint

$$\mu_0 \geq \frac{G_1 + \frac{G}{2}}{G_1 + G} \cdot \frac{x}{y};$$

ahol most $G_1 = 0$, tehát

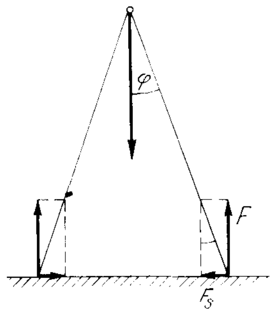
$$\mu_0 \geq \frac{x}{2y}.$$

Másrészt viszont, a geometriai összefüggések alapján:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \beta.$$

$$\underline{\mu_0 \geq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta.}$$

5.35.



Az ábra (és az előző feladatok megoldásai) alapján legalább akkora súrlódási együttható szükséges, hogy

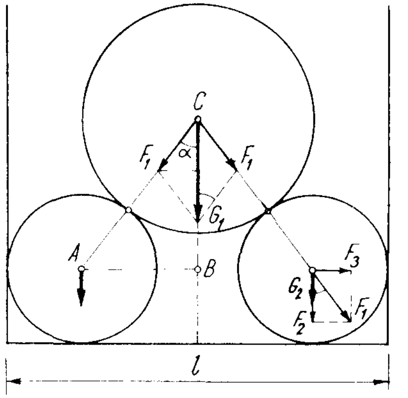
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{s\,max}}{F} = \frac{\mu_0 \cdot F}{F} = \mu_0$$

teljesüljön, tehát

$$\mu_0 \geq \operatorname{tg} \varphi.$$

Az eredményből kiolvashatjuk, hogy már $\varphi = 45°$ esetén is $\mu_0 \geq 1$ kell legyen ($\varphi > 45°$ esetén pedig $\mu_0 > 1$). Ez is mutatja, hogy a tapadó súrlódási együttható 1-nél nagyobb szám is lehet. (Másrészt pedig megérthetjük, hogy a kétágú létrát miért nem szokás túlzottan nagy szögben szétnyitni.)

5.36. A geometriai körülmények miatt, az ABC háromszögben



$$\sin \alpha = \frac{AB}{R + r} = \frac{\frac{l}{2} - r}{R + r} =$$

$$= \frac{25\text{ cm} - 10\text{ cm}}{15\text{ cm} + 10\text{ cm}} = 0{,}6;$$

$$\alpha = 36{,}9°.$$

A G_1 erő összetevőkre bontásával létrejött C pontnál levő derékszögű háromszögből:

$$F_1 = \frac{G_1}{2 \cos \alpha}.$$

Az F_1 felbontásával:

$$F_2 = F_1 \cdot \cos \alpha = \frac{G_1}{2 \cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{G_1}{2} = 300\text{ N}.$$

A padlóra ható erő az egyik kis henger alatt:

$$G_2 + F_2 = 200\text{ N} + 300\text{ N} = 500\text{ N}.$$

A padlóra ható erő összesen: $\underline{10^3\text{ N}}$.

Az oldalfalra ható erő:

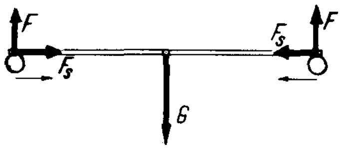
$$F_3 = F_1 \cdot \sin \alpha = \frac{G_1}{2 \cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{G_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 300\text{ N} \cdot \operatorname{tg} 36{,}9°;$$

$$\underline{F_3 = 225\text{ N}.}$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a padlóra ható összes erő ugyanannyi, mint a hengerek súlyának összege, függetlenül attól, hogy a hengerek az oldalfalakra is fejtenek ki erőt.
Érdemes megoldani a feladatot olyan általánosabb esetre is, amikor az oldalfalak pl. kifelé állnak, a függőlegessel valamilyen hajlásszöget alkotva. Vajon ilyen esetben mekkora lesz a padlóra, illetve a falra ható erő?

5.37.

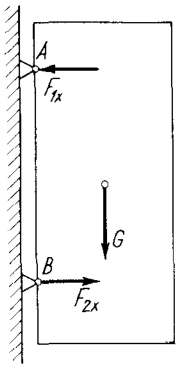


Ha két kezünk egyenlő távol van a pálca súlypontjától, mindkét helyen a pálca és kezünk között ugyanakkora a nyomóerő. Ezért — azonos súrlódási együtthatót feltételezve — a két helyen egyenlő a súrlódási erő is.

Kezeink mozgatásakor a pálcára két, egymással egyensúlyt tartó súrlódási erő jön létre, ezért a pálca (elvileg) nem mozdulhat el eredeti helyzetéből.

A műveletet a valóságban nemcsak azért nehéz megvalósítani, mert két kezünkkel nem tudjuk a pálca vízszintes helyzetét könnyen biztosítani, hanem inkább azért, mert ha az indítás pillanatában csak az egyik (pl. a bal) kezünk csúszik meg a pálca alatt, akkor a másik (jobb) kezünknél tapadó súrlódási erő jön létre, amelynek maximális értéke nagyobb a csúszó súrlódási erőnél. Ezért a pálca balra elmozdul, közben viszont a pálca súlypontja közelebb kerül bal kezünkhöz, ott már nagyobb lesz a nyomóerő, és bizonyos helyzetben a súrlódási erő is, mint jobb kezünknél. Ekkor a bal kéz helyén jön létre tapadó súrlódás (és ezzel viszonylagos nyugalom), és a jobb kéznél kezdődik el a csúszás. És így tovább: a két alátámasztási helyen a jelenség szakaszonként váltakozik.

5.38. Az ajtó egyensúlyban van, ezért a



$\Sigma F_x = 0$ és $\Sigma F_y = 0$

feltételnek teljesülnie kell. Ez azt jelenti, hogy a sarokpántoknál ható erők függőleges komponenseire:

$F_{1y} + F_{2y} = G$;

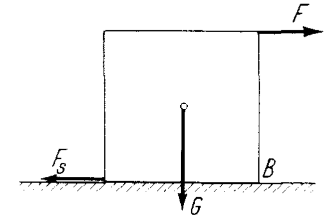
a vízszintes erőkomponensekre pedig

$F_{1x} = -F_{2x}$;

a pántok elhelyezésétől függetlenül!

A pántoknál létrejött két vízszintes erőkomponens erőpárt alkot, amelynek forgatónyomatéka egyensúlyt tart a G erő (pl. A pontra számított) forgatónyomatékával. A két pántot azért célszerű egymástól távol elhelyezni, mert ugyanaz a forgatónyomaték, nagyobb távolság esetén, kisebb erőkkel is biztosítható. (Gyengébb pántok is megfelelők lehetnek.)

5.39. Amikor a kockát pl. a B éle körül akarjuk felborítani (elforgatni), a súlyerő B-re számított forgatónyomatékát az F és F_s erőkből létrejött erőpár forgatónyomatékával kell egyensúlyoznunk. A kocka élhosszát l-lel jelölve, a felborításhoz tehát az szükséges, hogy



$$F \cdot l = F_s \cdot l \geq G \cdot \frac{l}{2}$$

legyen. Ebből

- $F_s \geq \dfrac{G}{2}$.

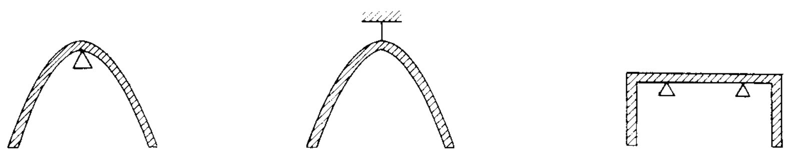
Mivel a tapadó súrlódási erő:

$$\mu_0 G = F_{s\max} \geq F_s \geq \frac{G}{2};$$

a felborítás lehetőségének feltétele:

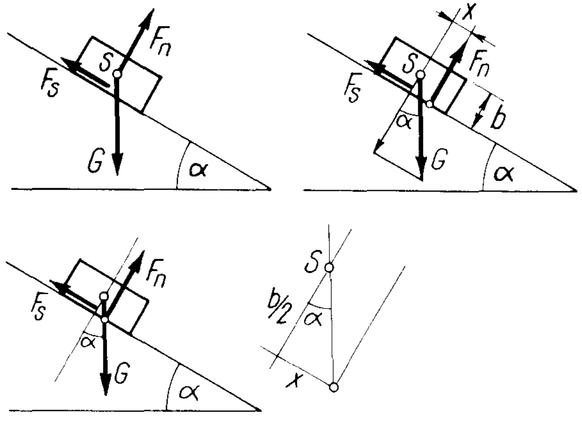
$$\underline{\mu_0 \geq \frac{1}{2}}.$$

5.40. A helyes válasz minden esetben: igen, mint azt az ábrán vázolt lehetőségek az esetleg kétségbe vonható *a)*, *b)*, *c)* esetre vonatkozóan is mutatják.



5.41. A feladat állítása első pillanatban meglepő (és tévesnek látszik). Gondoljuk meg azonban, hogy mi következne abból, ha feltételeznénk az állítás ellenkezőjét, azt, hogy a lejtőn nyugvó (egyensúlyban levő) testre ható (F_n) nyomóerő hatásvonala a test (pl. egy hasáb) súlypontján haladna át. Az ábra első része ezt a (valójában téves) feltevést rögzíti. Látható, hogy a testre ható G; F_n és F_s erők pl. a súlypontra számított forgatónyomatékainak algebrai összege nem zérus:

$\Sigma M \neq 0$.



A test viszont egyensúlyban van, amelynek feltétele, hogy

$$\Sigma M = 0$$

legyen. Feltevésünk hibás, mert ellentmondásra jutottunk.

Hol van tehát a testre ható nyomóerő hatásvonala?

A második ábrán az F_n valóságos helyzetét igyekeztünk vázolni. A hasáb egyensúlyban van, tehát kell, hogy az erők (pl. súlypontra számított) forgatónyomatékainak algebrai összege zérus legyen. A hasáb magasságát b-vel jelölve:

$$F_n \cdot x - F_s \cdot \frac{b}{2} = 0\,.$$

Ebből:

$$x = \frac{b}{2} \cdot \frac{F_s}{F_n}\,. \qquad (1)$$

Mivel a hasáb a lejtőn nem gyorsul, az erők eredője is zérus kell, hogy legyen, tehát

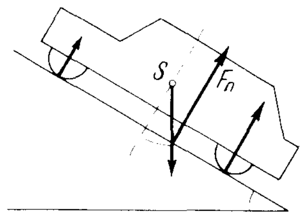
$$F_s - G \cdot \sin\alpha = 0; \quad \text{és} \quad F_n - G \cdot \cos\alpha = 0.$$

Behelyettesítve (*1*)-be:

$$x = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a második ábra is hibás egy kissé. F_n és G hatásvonalai a lejtő síkjában metszik egymást, ahogyan az a helyes harmadik ábrán látható.

5.42. Az előző feladat alapján látható, hogy a lejtőn felfelé haladó gépkocsira ható nyomóerő hatásvonala a súlyponttól hátrafelé van, ezért a nyomóerő kerekekre ható összetevői közül az első kerekekre kisebb nyomóerő hat, mint a hátsókra. Az első kerekeknél tehát a súrlódási erő is kisebb, mint a hátsóknál, emiatt az első-kerék-meghajtású gépkocsi kevésbé tud „kapaszkodni" a lejtőn, mint a hátsókerék-meghajtású.
Ugyanez a magyarázata annak is, hogy lejtős úton miért célszerű, ha az autó elejével felfelé áll meg. (A kézifék általában csak a hátsó kerekekre hat.)



6. Körmozgás

6.1. $\omega = 2\pi n;$

a) $\frac{13}{5}\pi\ \mathrm{s^{-1}} = \underline{8{,}16\ \mathrm{s^{-1}}}\ ;$

b) $\frac{3}{2}\pi\ \mathrm{s^{-1}} = \underline{4{,}71\ \mathrm{s^{-1}}}\ ;$

c) $\frac{10}{9}\pi\ \mathrm{s^{-1}} = \underline{3{,}45\ \mathrm{s^{-1}}}\ .$

6.2. $v_1 = 13\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ ; \qquad v_2 = 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ ; \qquad r_1 - r_2 = 30\ \mathrm{cm} = 0{,}3\ \mathrm{m}\ ;$

$\omega = ?$

$v_1 = r_1\omega\ ; \qquad v_2 = r_2\omega\ ;$

$v_1 - v_2 = (r_1 - r_2)\omega\ .$

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{r_1 - r_2} = \frac{13\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}3\ \mathrm{m}} = 20\ \mathrm{s^{-1}}\ .$$

$\underline{\omega = 20\ \mathrm{s^{-1}}}.$

6.3. $n = 10\ \mathrm{min^{-1}}\ ; \qquad v_1 = ? \qquad v_2 = ?$

$r_1 = 0{,}1\ \mathrm{m}; \qquad a_1 = ? \qquad a_2 = ?$

$r_2 = 0{,}2\ \mathrm{m}.$

$v_1 = r_1\omega = r_1 \cdot 2\pi n = 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 2\pi \frac{10}{60}\ \mathrm{s^{-1}}\ ; \qquad \underline{v_1 = 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\ ;$

$v_2 = r_2\omega = r_2 \cdot 2\pi n = 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 2\pi \frac{10}{60}\ \mathrm{s^{-1}}\ ; \qquad \underline{v_2 = 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\ ;$

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{\left(0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}1\ \mathrm{m}} = 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\ ; \qquad \underline{a_1 = 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}\ ;$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{\left(0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}2\ \mathrm{m}} = 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\ ; \qquad \underline{a_2 = 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}\ .$$

6.4. <u>Körpályán.</u>

6.5. $v = 2400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\ ; \qquad r = 80\ \mathrm{km}\ ;$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}{80\ \mathrm{km}} = 72\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h^2}}\ ;$$

$$72\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h^2}} = 72\,000\ \frac{1000\ \mathrm{m}}{(3600\ \mathrm{s})^2} = 5{,}55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\ ;$$

$\underline{a = 5{,}55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}\ .$

Amíg a gép északi irányból kelet felé fordul, egy 80 km sugarú kör negyedrészét teszi meg. A negyedkör hossza:

$$s = \frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2} = \frac{80\ \mathrm{km} \cdot 3{,}14}{2} = 125{,}6\ \mathrm{km}.$$

Ennek megtételéhez szükséges idő:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{125{,}6\ \mathrm{km}}{2400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 0{,}05\ \mathrm{h} = 3\ \mathrm{min}.$$

A gép tehát kb. <u>3 perc alatt</u> fordul északról kelet felé, s ezalatt több mint <u>120 km-t</u> tesz meg.

6.6. Ha a motor álló helyzetből indul, és szöggyorsulása (β) állandó, akkor szögsebessége az idővel arányosan nő:

$\omega = \beta t.$ ($v = at$-hez hasonlóan.)

A t idő alatti szögelfordulás így számítható ki ebben az esetben:

$\alpha = \frac{\beta}{2} t^2.$ $\left(s = \frac{a}{2} \cdot t^2\text{-hez hasonlóan.}\right)$

A feladatban $\beta = 25\ \mathrm{s^{-2}}$ és $t = 40\ \mathrm{s}$, tehát

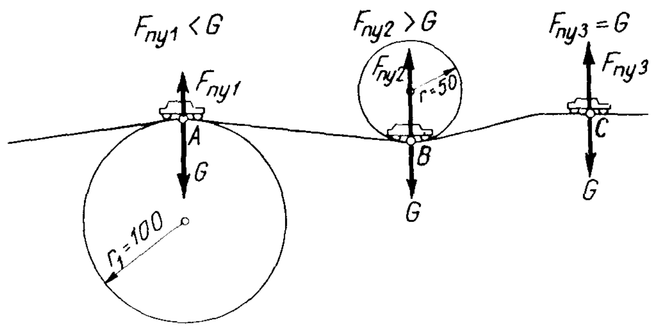
$\omega = 25\ \mathrm{s^{-2}} \cdot 40\ \mathrm{s} = 1000\ \mathrm{s^{-1}}$; $\underline{\omega = 1000\ \mathrm{s^{-1}}}$.

$\alpha = \frac{25\ \mathrm{s^{-2}}}{2} (40\ \mathrm{s})^2 = 20\,000$; $\underline{\alpha = 20\,000\ \text{(radián)}}$.

6.7. *a)* Alkalmazzuk a gépkocsi mozgására a dinamika alaptörvényét

$\Sigma F = ma.$

Ebben az egyenletben ΣF most a testre ható nyomóerő és nehézségi erő eredője; a pedig a test gyorsulása, amely így számítható ki: $a = \frac{v^2}{r}$.



1. Az *A* pontban:

$\Sigma F = G - F_{ny1}$;

$a = \frac{v^2}{r_1}.$

Tehát (behelyettesítve a dinamika alaptörvényébe):

$G - F_{ny1} = m \cdot \frac{v^2}{r_1}.$

Behelyettesítve

$$10\,000\ \mathrm{N} - F_{ny1} = 1000\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\left(72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}{100\ \mathrm{m}}.$$

Fejezzük ki F_{ny1}-et:

$$F_{ny1} = 10\,000\ \mathrm{N} - 1000\ \mathrm{kg}\ \frac{\left(20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{100\ \mathrm{m}};$$

$$F_{ny1} = 10\,000\ \mathrm{N} - 4000\ \mathrm{kg}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}};$$

$$\underline{F_{ny1} = 6000\ \mathrm{N}};$$

2. A *B* pontban:

$\Sigma F = F_{ny2} - G$;

$a = \frac{v^2}{r_2}.$

Tehát (behelyettesítve a dinamika alaptörvényébe):

$F_{ny2} - G = m \frac{v^2}{r_2}.$

Behelyettesítve

$$F_{ny2} - 10\,000\ \mathrm{N} = 1000\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\left(72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}{50\ \mathrm{m}}.$$

Fejezzük ki F_{ny2}-t:

$$F_{ny2} = 10\,000\ \mathrm{N} + 1000\ \mathrm{kg}\,\frac{\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{50\ \mathrm{m}};$$

$$F_{ny2} = 10\,000\ \mathrm{N} + 8000\ \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$$

$$\underline{F_{ny2} = 18\,000\ \mathrm{N}.}$$

3. A C pontban:

$\Sigma F = F_{ny3} - G.$

$a = 0$ (mert egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez a gépkocsi.)

Tehát (behelyettesítve a dinamika alaptörvényébe):

$F_{ny3} - G = m \cdot 0 = 0;$

vagyis

$F_{ny3} = G;$

$\underline{F_{ny3} = 10\,000\ \mathrm{N}.}$

b) A gépkocsit az a tapadási súrlódási erő gyorsítja, amit a talaj fejt ki rá. (Ezért kényszerül „beragadni" a sárba, ha a sáros, vizes talaj nem tud elég nagy erőt kifejteni rá.) A súrlódási erő nagysága viszont a nyomóerő nagyságával arányos (ezért kell pl. a mozdonynak olyan „súlyosnak" lennie). Az előbb láttuk, hogy a 100 méter sugarú domb tetején a nyomóerő 10 000 N-ról 6 000 N-ra csökkent, pedig csak 72 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel ment a gépkocsi. Az elérhető legnagyobb sebesség az lesz, amikor a nyomóerő nullára csökken, mivel ebben az esetben már nincs tapadási súrlódási erő, ami a gépkocsit tovább gyorsíthatná. A maximális sebességet is a dinamika alaptörvényének felhasználásával számíthatjuk ki:

$\Sigma F = G - 0 = G;$ (mert $F_{ny} = 0$)

$$a = \frac{v_{max}^2}{r_1}.$$

Tehát (behelyettesítve a dinamika alaptörvényébe):

$$G = m\,\frac{v_{max}^2}{r_1}.$$

Fejezzük ki a maximális sebességet:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{G r_1}{m}};$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{10\,000\ \mathrm{N} \cdot 100\ \mathrm{m}}{1000\ \mathrm{kg}}};$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{10\,000\ \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\ \mathrm{m}}{1000\ \mathrm{kg}}};$$

$$v_{max} = \sqrt{1000\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 31{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 113\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}};$$

$$\underline{v_{max} = 113\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.}$$

Érdemes észrevenni, hogy ebben az esetben nemcsak a gépkocsira nem hat nyomóerő, de a gépkocsiban ülő vezetőre sem. Egyetlen tárgyra sem, ami a gépkocsiban van! Hiszen mennyi a gépkocsi gyorsulása a benne ülő vezetővel és valamennyi tárggyal együtt? Számítsuk ki:

$$a = \frac{v_{max}^2}{r_1} = \frac{\left(31{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{100\ \mathrm{m}} = \frac{1000\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{100\ \mathrm{m}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ez éppen a nehézségi gyorsulás $\left(g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$!

És az a gyorsulás iránya? Függőlegesen lefelé mutat. Ez viszont azt jelenti, hogy a gépkocsi az A pontban v_{max} sebességgel haladva

egyidejűleg „szabadon esik" a nehézségi erőtérben! A gépkocsiban tehát úgynevezett súlytalansági állapot uralkodik egy pillanatra, megszűnnek a nyomóerők. Az A ponton túljutva s a B pont felé közeledve a gépkocsira ható nyomóerők újra fellépnek, sőt, egyre növekednek. Ezzel együtt növekednek a gépkocsiban ülő vezetőre és minden tárgyra ható nyomóerők is.
Ezzel a módszerrel lehet előidézni itt a Földön egy autóban — igaz, csak egy pillanatra — a súlytalansági állapotot.
Érdemes még egyszer elolvasni a 2.13. feladat megoldását is!

6.8. A példa megoldásának az a kulcsa, hogy nem a teherautó, hanem a láda mozgását kell figyelni.
1. Milyen mozgást kell a ládának végeznie? Egyenletes körmozgást. (Ha együtt mozog a teherautóval.) Tehát a láda gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

2. Milyen erők hatnak a ládára?
Nehézségi erő, nyomóerő, súrlódási erő.

3. Mennyi ezek eredője? $\Sigma F = ?$
A nehézségi és a nyomóerő egyenlő nagyok, ellenkező irányúak. A három erő eredője tehát maga a tapadási súrlódási erő.

$$\Sigma F = F_s.$$

4. Mi az összefüggés ΣF és a között?
A dinamika alaptörvénye.

$$\Sigma F = ma.$$

Tehát $F_s = m\dfrac{v^2}{r}$.

Tehát a láda sebessége saját körpályáján:

$$v = \sqrt{\frac{r}{m}F_s}.$$

5. Mi a sebesség maximális értéke?
Az a sebesség, amely esetén F_s maximális.

$$F_{s\,max} = \mu_0 \cdot mg. \qquad \text{(Vízszintes pálya.)}$$

Tehát

$$v_{max} = \sqrt{\frac{r}{m}\mu_0 \cdot mg} = \sqrt{r\mu_0 g}.$$

A feladatban $r = 100$ m; $\mu_0 = 0{,}1$; $g = 10\,\dfrac{m}{s^2}$; tehát

$$v_{max} = 10\,\frac{m}{s} = 36\,\frac{km}{h}.$$

6.9. A megoldás kulcsa most is az, hogy nem az egész inga mozgását figyeljük, hanem csak a golyóét.
1. Milyen mozgást kell a golyónak végeznie?
Egyenletes körmozgást. A kör sugara: $r = l \cdot \sin\varphi$.
Tehát a golyó gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{l \cdot \sin\varphi}.$$

2. Milyen erők hatnak a golyóra (körmozgás közben)?
Nehézségi erő és a fonál húzóereje.

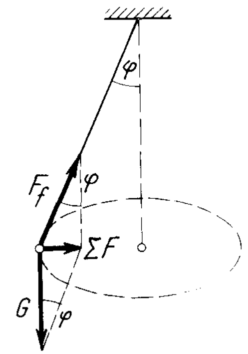
3. Milyen irányú az eredőerő?
Amilyen a gyorsulás. (A kör középpontja felé mutat.)
Milyen nagyságú az eredőerő?
Az ábra alapján:

$$\Sigma F = G \cdot \text{tg}\,\varphi = mg \cdot \text{tg}\,\varphi.$$

4. Mi az összefüggés ΣF és a között?
A dinamika alaptörvénye:

$$\Sigma F = ma.$$

$$mg \cdot \text{tg}\,\varphi = m\frac{v^2}{l \cdot \sin\varphi}.$$



Tehát a golyó sebessége saját körpályáján:

$$v = \sqrt{gl \cdot \sin\varphi \cdot \text{tg}\,\varphi}.$$

5. A kerületi sebességből a keringési idő kiszámítható:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi l \cdot \sin\varphi}{T}$$

Tehát:

$$T = \frac{2\pi l \cdot \sin\varphi}{v} = \frac{2\pi l \cdot \sin\varphi}{\sqrt{gl \cdot \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi}};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cdot \cos\varphi}{g}}.$$

6. A fonál feszítőereje (F_f) az ábra alapján:

$$F_f = \frac{\Sigma F}{\sin\varphi} = \frac{G \cdot \operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{G}{\cos\varphi}$$

$$\underline{F_f = \frac{G}{\cos\varphi}}.$$

6.10. Ha egy kis golyó úgynevezett „síkmozgást" végez, vagyis olyan pályán halad végig, amelyre egy képzeletbeli sík fektethető, akkor mozgása már nagyon bonyolult is lehet. Nagy mértékben egyszerűsíti mozgásának tárgyalását az a módszer, hogy pályájának minden pontján gyorsulását két komponensre választjuk szét.

Ezek:

1. Érintőleges („tangenciális") gyorsulás, amely a pálya érintője irányába mutat.

2. Merőleges („normális") gyorsulás, amely a pálya érintőjére merőleges irányba mutat. (Egy olyan — sokszor csak elképzelt — pont felé, amely köré rajzolt kör egy darabjával helyettesíthető a pályának az illető része.)

Érintőleges gyorsulása akár egyenes vonalú, akár görbe vonalú pályán mozgó golyónak lehet. Az egy pillanatra nyugalomban levő testnek is lehet érintőleges gyorsulása, például a függőlegesen feldobott kő gyorsulása akkor is g, amikor — egy pillanatra — megáll pályájának legmagasabb pontján.

Merőleges gyorsulása azonban csak akkor lehet a kis golyónak, ha görbe vonalú pályán van és éppen nem áll. Ez a gyorsulás ugyanis így számítható ki:

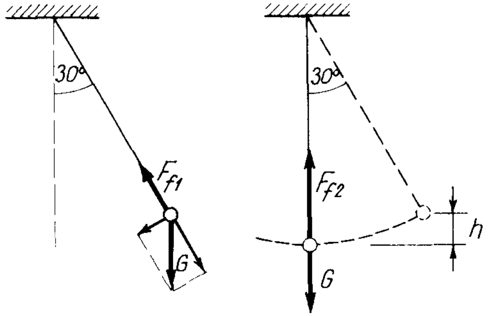
$$a_\perp = \frac{v^2}{r}.$$

1. Tekintsük a feladatbeli *a)* esetet!

Írjuk fel az érintővel párhuzamos ($\|$) és az érintőre merőleges ($\perp$) irányú komponensekre külön-külön a dinamika alaptörvényét!

$\Sigma F_\| = ma_\|$; $\qquad \Sigma F_\perp = ma_\perp$;

$G \cdot \sin 30° = ma_\|$. $\qquad F_{f1} - G \cdot \cos 30° = ma_\perp$.



Az előbb mondottak alapján ($v = 0$ miatt) $a_\perp = 0$. Ez azt jelenti, hogy a fonál feszítőereje kiszámítható:

$$F_{f1} = G \cdot \cos 30° = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \underline{F_{f1} = 0{,}87\ mg.}$$

A golyó gyorsulása pontosan érintő irányú lesz ebben a pontban, s e gyorsulás nagysága:

$$a_\| = g \cdot \sin 30° = \frac{g}{2}; \qquad \underline{a = 0{,}5\ g.}$$

2. Tekintsük a feladatbeli *b)* esetet!

Írjuk fel az érintővel párhuzamos ($\|$) és az érintőre merőleges ($\perp$) irányú komponensekre külön-külön a dinamika alaptörvényét!

$\Sigma F_\| = ma_\|$; $\qquad \Sigma F_\perp = ma_\perp$;

$0 = ma_\|$;. $\qquad F_{f2} - G = ma_\perp$.

Azt látjuk, hogy a golyónak most érintőleges gyorsulása nem lesz, csupán az érintőre merőleges. Hogyan számíthatjuk ki ennek nagyságát?

$$a_\perp = \frac{v^2}{l};$$

mert a golyó l sugarú köríven mozog. És a sebesség? Ennek meghatározására írjuk fel a munkatételt az *a)* és *b)* állapotok között!

$$\Sigma W = E_{mozg.\,b} - E_{mozg.\,a};$$

$$\Sigma W = \frac{1}{2} m v^2 - 0.$$

ΣW-ben két munka összege szerepel: a testre ható két erő által végzett munka. Szerencsére az egyik erő (amelyiket a fonál fejt ki a golyóra) mindig merőleges az elmozdulásra, ezért ez nem végez munkát. A másik erő (a nehézségi erő) által végzett munkát így számíthatjuk ki:

$$W = mgh.$$

Most, mivel az inga 30°-os helyzetből indult:

$$h = l - l \cdot \cos 30°;$$

tehát:

$$W = mg\,(l - l \cdot \cos 30°).$$

Ez egyben az összes munka is (minthogy csak ez van) tehát (behelyettesítve e munkatételbe):

$$mg\,(l - l \cdot \cos 30°) = \frac{1}{2} mv^2 .$$

Innen tudjuk v^2-et kifejezni:

$$v^2 = 2gl\,(1 - \cos 30°).$$

és így a centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{2gl\,(1 - \cos 30°)}{l} = 2g\,(1 - \cos 30°) .$$

A *b)* esetben tehát $a = a_{cp}$ és így:

$$\underline{a = 0{,}27\, g.}$$

A fonál feszítőereje:

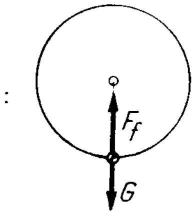
$$F_{f2} = G + ma_{cp};$$

$$\underline{F_{f2} = 1{,}27\, mg.}$$

6.11. *a)* *A legalsó pontban.*
b) Írjuk fel a dinamika alaptörvényét a kőre akkor, amikor a pálya legalsó pontján van:

$$\Sigma F = ma;$$

$$F_f - G = m \frac{v^2}{r} .$$



Tehát a kő sebessége a pálya legalsó pontjában:

$$v = \sqrt{\frac{r}{m}(F_f - G)} \,.$$

A kő sebességének legnagyobb értéke (amely esetén a fonál már éppen elszakadt):

$$v = \sqrt{\frac{1\ \text{m}}{1\ \text{kg}} \cdot (110\ \text{N} - 10\ \text{N})} = \sqrt{\frac{1\ \text{m}}{1\ \text{kg}} \cdot 100\ \text{N}} \,.$$

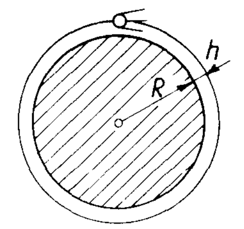
$$\underline{v = 10\, \frac{\text{m}}{\text{s}}} \,.$$

c) Egyenletesen m o z o g n a, ha nem lenne nehézségi erőtérben. Így azonban egyidejűleg szabadon is esik, tehát a kő mozgása vízszintes hajítás.

6.12. *a)* A Föld gravitációs vonzóereje hat rá. Az űrhajósra is, meg az űrhajóra is. Ezért végeznek egyenletes körmozgást együtt a Föld körül. Egyébként egyenes vonalú egyenletes mozgással eltávolodnának a Földtől, érintő irányban. Így azonban „körülesik" a Földet. Egymáshoz képest az űrhajó és az űrhajós nem gyorsulnak, valamint hiányoznak az űrhajón belül a nyomóerők. Ezek hiánya okozza az űrhajós számára a súlytalanság érzését.
b) A Föld gravitációs vonzóereje. A levegő ellenállásának figyelembe vételekor már nem mondhatjuk, hogy a test „szabadon esik".
c) A Föld gravitációs vonzóereje, ha a repülőgép szabadon esik, vagy ferde hajítás szerű mozgást végez, egyszóval, ha a repülőgépnek a Föld felszíne felé irányuló g gyorsulása van. Amennyiben a repülőgép gyorsulása más, akkor a pilótára még az ülés, illetve a heveder n y o m ó e r e j e is hat, annál erősebben, minél jobban különbözik a repülőgép gyorsulása g-től.
Lásd még a 2.13. feladat és a 6.7/*b* feladat megoldását!

6.13. $h = ?$

$$v = 28\,000\, \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7{,}8 \cdot 10^3\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \,;$$



$R = 6370 \text{ km} = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}$;

$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$;

$m_{\text{Föld}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

1. Milyen mozgást végez az űrhajó?

Egyenletes körmozgást. A kör sugara: $r = R + h$. Tehát az űrhajó gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h}.$$

2. Milyen erők hatnak az űrhajóra? Egyetlen erő: a Föld gravitációs vonzóereje. Tehát

$$\Sigma F = f\frac{m_1 m_2}{r^2} = f\frac{m \cdot m_{\text{Föld}}}{(R+h)^2}.$$

3. Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$\Sigma F = ma.$

$$f\frac{m \cdot m_{\text{Föld}}}{(R+h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{R+h}.$$

Ebből $(R + h)$-t, majd h-t kifejezve:

$$R + h = f\frac{m_{\text{Föld}}}{v^2};$$

$$h = f\frac{m_{\text{Föld}}}{v^2} - R.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

$h = 200 \text{ km}.$

Ez az érték a Föld sugarának valamivel kevesebb mint harmincad része! Vagyis, ha például egy 30 cm átmérőjű nagy asztali földgömb körül próbáljuk meg elképzelni a keringő űrhajó modelljét, akkor annak pályáját a földgömb felületétől f é l c e n t i m é t e r r e kell helyesen elképzelnünk. (És még voltak, akik azt hitték, hogy ott már nem hat a Föld vonzóereje!)

6.14. $t = \dfrac{15}{1 - \dfrac{1}{12}} \text{ min} = 16{,}36 \text{ min}.$

6.15. $\omega = 80 \text{ s}^{-1}.$

6.16. $a = 0{,}006 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

6.17. *a)* $a = 0{,}034 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

b) $a = 0{,}024 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

c) $a = 0.$

6.18. 24 fordulatot tett meg.

6.19. $\omega_{\max} = 4 \text{ s}^{-1}.$

6.20. $v_{\max} = \sqrt{\mu_0 r g}$

6.21. *a)* Akármelyik pontján lehetett.

b) $v = 10{,}4 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. (L. a 6.9. feladat megoldását!)

c) A kő mozgása vízszintes hajítás.

6.22. Körülbelül másfél óra. (Pontosabban: 88,4 perc.)

6.23. A légcsavar legszélső pontjának pályája csavarvonal. Mozgása ugyanis két mozgásból tevődik össze:

1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás $v_1 = 120 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 33{,}3 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel;

2. Egyenletes körmozgás, amelynek kerületi sebessége:

$$v_2 = r\omega = r2\pi n = 1{,}5\ \mathrm{m}\cdot 2\pi\cdot 600\ \mathrm{min}^{-1}\ ;$$

$$v_2 = 5652\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 94{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

A két sebességvektor minden pillanatban merőleges egymásra, így az eredő sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(33{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(94{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 360\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

$$v = 360\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

6.24. Számítsuk ki egy keringés idejét abban az esetben, ha az űrhajó végig 260 km magasan repül:

$$r = 6370\ \mathrm{km} + 260\ \mathrm{km} = 6{,}63\cdot 10^6\ \mathrm{m};$$

$$f = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\ ;$$

$$m_{\text{Föld}} = 6\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg};$$

$$f\cdot\frac{m\cdot m_{\text{Föld}}}{r^2} = m\omega^2 r\ ;$$

tehát:

$$\omega^2 = f\,\frac{m_{\text{Föld}}}{r^3}\ ;$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = f\,\frac{m_{\text{Föld}}}{r^3}\ ;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{f\cdot m_{\text{Föld}}}}\ ;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}63\cdot 10^6\ \mathrm{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot 6\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}}$$

$$T = 5358\ \mathrm{s} = 89{,}3\ \mathrm{min}.$$

Minthogy Tyitov űrhajója legfeljebb 260 km magasan repült, ezért a keringési idő legfeljebb 89,3 perc lehetett.

Valószínűleg közelebb járunk az igazsághoz, ha kereken 89 perces keringési időt tételezünk fel.

Tyitov űrrepülése 25 óra 18 percen át tartott. Ennyi idő alatt x fordulatot tett. Egy keringés ideje 89 perc, tehát felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

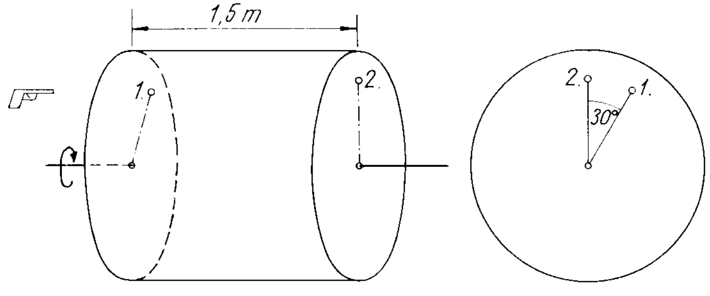
$$25\cdot 60 + 18 > x\cdot 89.$$

Figyelembe véve azt, hogy a fel- és leszállás a Szovjetunió különböző területein történt, valamint, hogy a felszálláshoz és a leszálláshoz összesen nem több, mint 10—15 perc időre van szükség, mondhatjuk:

$$x = 17.$$

A megtett fordulatok száma tehát 17 volt.

6.25. A lövedék a két körlap közötti utat (1,5 métert) annyi idő alatt tette meg, amennyi idő alatt a henger 30°-os szögben elfordult. Minthogy 360° jelent egy teljes fordulatot, ezért a 30°-os elfordulás $\frac{1}{12}$ fordulatnak felel meg. A henger percenként 1500-at for-



dul, vagyis másodpercenként 25 fordulatot tesz meg. Mennyi idő alatt tesz meg $\frac{1}{12}$ fordulatot?

$$t = \frac{1}{12\cdot 25}\ \mathrm{s} = \frac{1}{300}\ \mathrm{s}\,.$$

Feltételezve, hogy a lövedék egyenletes mozgást végzett, sebessége:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1{,}5\ \mathrm{m}}{\frac{1}{300}\ \mathrm{s}} = 450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ ; \qquad v = 450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Megjegyzés

Amennyiben a két körlap elég közel van egymáshoz, és a henger elég gyorsan forog, egy változó mozgású lövedéknek is meg lehet határozni rövid szakaszon belüli átlagsebességét. Minél rövidebb ez a szakasz, annál jobban közelíti a kapott eredmény a golyó pillanatnyi sebességét. Ezen *elv* alapján lehet mérni akár a f é n y s e b e s s é g é t is. (Foucault-féle fénysebességmérési módszer.)

6.26. Ha a Földről a Holdnak mindig ugyanazt az oldalát lehet látni, akkor ez csak úgy lehet, hogy a Hold 1 keringése során 1 fordulatot tesz saját tengelye körül. A nappalok és éjszakák váltakozása pedig a tengelykörüli forgás eredménye itt a Földön s ott a Holdon is. Minthogy a Föld forgási periódusa 24 óra, a Holdé pedig az előbbiek alapján 27,3 nap, ezért a Földön 24 óra, a Holdon pedig 27,3 nap telik el két napfelkelte között. Körülbelül két hétig tart tehát a holdi éjszaka, s utána két hétig nappal van a Holdon. Az pedig, hogy a Hold a Föld árnyékkúpjába kerüljön, s a Holdra ezért boruljon sötétség, nagyon ritka jelenség. Ilyen „holdfogyatkozást" a Földről 1972. január 30-án, illetve 1974. november 29-én lehet majd megfigyelni. 1975 és 2000 között összesen 22 (teleholdas) napon figyelhető majd meg holdfogyatkozás.

6.27. *a)* Ahogy az ingát lent meglökjük, felfelé lendül az l sugarú körpályán. Közben a nehézségi erő fékezi, kerületi sebessége csökken. Tegyük fel, hogy végigfut a körön. Leglassabban a kör legfelsőbb pontján fog haladni. Írjuk fel a dinamika alaptörvényét erre a pontra (pozitívnak választva a lefelé mutató irányt):

$$F_f + mg = m\frac{v^2}{l}.$$

Az egyenletből látszik, hogy v értéke akkor a legkisebb, ha a fonál feszítőereje ebben a pillanatban:

$$F_f = 0.$$

A minimális kerületi sebesség tehát a kör legfelsőbb pontján:

$$v_{min} = \sqrt{gl}.$$

Az ellökési sebesség persze ennél nagyobb volt. Mennyivel? Írjuk fel a munkatételt. Legyen az 1. állapot az elindítás, a 2.

állapot a kör legfelsőbb pontja-beli állapot. Munkát csak a nehézségi erő végez, méghozzá (fékezi a mozgást) negatív munkát.

$$W = -mg\cdot 2l;$$

$$-mg\cdot 2l = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Minthogy $v_2 = v_{min} = \sqrt{gl}$,

így az ellökési sebesség:

$$\underline{v_1 = \sqrt{5gl}.}$$

b) Helyettesítsük az inga fonalát súlytalan merev rúddal. Ez a végére erősített testet nemcsak húzni tudja a kör középpontja felé, hanem nyomni is, ellenkező irányban. Így a kör legfelső pontján levő testre a nehézségi erőt ellensúlyozó nyomóerőt is ki tud fejteni. Vagyis, felírva a dinamika alaptörvényét erre a pontra (pozitívnak választva a lefelé mutató irányt):

$$mg - F_{ny} = m\frac{v^2}{l}.$$

Látjuk, hogy

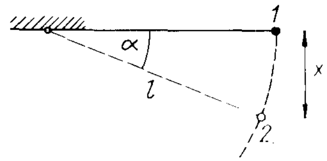
$v_{min} = 0$, amennyiben $F_{ny} = mg$.

Ebben az esetben tehát a testnek a pálya legfelső pontján elhanyagolhatóan kis sebessége lehet, s át tud lendülni ezen a „holtponton". Az ellökési sebességet újra a munkatétel felhasználásával számíthatjuk ki:

$$-mg\cdot 2l = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2;$$

$$\underline{v_1 = \sqrt{4gl}.}$$

6.28. Először a kerületi sebességet határozzuk meg, majd ebből a szögsebességet.
A kerületi sebesség kiszámításához a munkatételt használjuk fel. Az ábra jelöléseivel:



$$mg\cdot x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Viszont $v_1 = 0$ („elengedjük")
és $x = l\cdot\sin\alpha$; tehát:

$$mgl \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Kifejezve a kerületi sebességet:

$$v_2 = \sqrt{2gl \cdot \sin\alpha}.$$

Ezek után határozzuk meg a szögsebességet:

$$\omega = \frac{v_2}{l} = \frac{\sqrt{2gl \cdot \sin\alpha}}{l};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g \cdot \sin\alpha}{l}}.$$

6.29. A dinamika alaptörvénye a pályára merőleges irányra: (l. 6.10 megoldás)

$$\Sigma F_\perp = ma_\perp;$$

$$F_f - G \cdot \cos 60° = m \cdot \frac{v^2}{l}.$$

A fonál elszakad, ha $F_f > 8$ N;

$$F_f = m\frac{v^2}{l} + G \cdot \cos 60° > 8\ \text{N};$$

A sebességet a munkatétel felhasználásával a v_0 kezdősebesség segítségével fejezzük ki:

$$mgl \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2;$$

vagyis $v^2 = 2gl \cdot \cos 60° + v_0^2$.

Ezt helyettesítsük be a feltételi egyenlőtlenségbe:

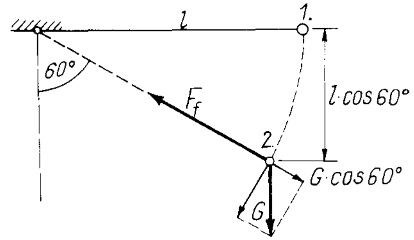
$$m \cdot \frac{2gl \cdot \cos 60° + v_0^2}{l} + G \cdot \cos 60° > 8\ \text{N}.$$

Ismert adatok: $m = 0{,}2$ kg; $l = 1$ m; $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$0{,}2\ \text{kg} \cdot \frac{2 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ 1\ \text{m}\ \frac{1}{2} + v_0^2}{1\ \text{m}} + 2\ \text{N} \cdot \frac{1}{2} > 8\ \text{N};$$

$$2\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}\ v_0^2 + 1\ \text{N} > 8\ \text{N};$$

$$v_0^2 > \frac{(8-3)\ \text{N}}{0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}};$$

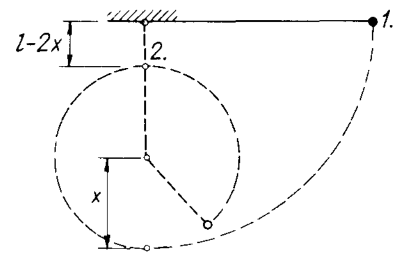


$$v_0^2 > 25\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2};$$

$$v_0 > 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.30. Legyen a szög és a test legalsó helyzete közötti távolság x. Ez lesz egyben a kis kör sugara is. Írjuk fel a kis kör legfelső pontjára a dinamika alaptörvényét (a lefelé mutató irányt véve pozitívnak):

$$F_f + mg = m \cdot \frac{v^2}{x}.$$



Már a 6.27. megoldásnál is láttuk, hogy a minimális sebesség az $F_f = 0$-hoz tartozó sebesség lesz ebben a pontban:

$$v_{\min} = \sqrt{g \cdot x}.$$

A test elindulási helyzeténél $l - 2x$ távolsággal van mélyebben, tehát a munkatétel alapján:

$$mg(l - 2x) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Viszont $v_1 = 0$ volt és $v_2 = v_{\min}$, tehát:

$$mg(l - 2x) = \frac{1}{2}mgx; \qquad l - 2x = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{5}.$$

6.31. A golyót a súrlódási erő fékezi. Minthogy az asztal vízszintes, ezért a nyomóerő állandóan a testre ható nehézségi erővel egyező nagyságú. Így a súrlódási erő nagysága:

$$F_{\text{súrl}} = \mu m g.$$

Érintőirányban csupán ez az erő hat rá, vagyis érintőirányban a test egyenletesen lassul.

Lassulása:

$$-a = \mu g = 0{,}2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A kezdősebesség $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt, ez lecsökken 2 másodperc alatt:

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értékre.

Ekkora kerületi sebesség esetén a test merőleges (centripetális) gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{l} = \frac{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}5\ \text{m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ezt a gyorsulást egyedül a fonál feszítőereje biztosítja, tehát:

$$F_f = ma = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{N}.$$

Végeredményben a test a mozgás kezdetétől számított 2 másodperc múlva már csak $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad, miközben a fonalat 1 N erő feszíti.

6.32. Induljunk ki abból, hogy a kísérlet sikerült, vagyis az $m_1 + m_2$ tömegű test függőleges síkban l sugarú körön kering. A kör legfelsőbb pontján a szükséges sebesség (lásd a 6.27. megoldást)

$$v_{\min} = \sqrt{g \cdot l}.$$

A két „összeragadt" test együttes mozgási energiája a körpálya legfelső pontján (legyen ez az 1. állapot):

$$E_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\sqrt{gl})^2.$$

Számítsuk ki a közös sebességet a legalsó pontban is (legyen ez a 2. állapot) a munkatétel segítségével:

$$\Sigma W = E_2 - E_1;$$

$$(m_1 + m_2)\, g \cdot 2l = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, gl;$$

$$v_2 = \sqrt{5gl}.$$

Most már csak az a kérdés, hogy milyen v^* sebességgel kellett az m_1 tömegű golyónak itt eredetileg az m_2 tömegű nyugvó golyóhoz ütköznie ahhoz, hogy összeragadva $\sqrt{5gl}$ nagyságú sebességgel haladjanak tovább. Erre a kérdésre a mozgásmennyiségek összegének megmaradását kimondó törvény segítségével válaszolhatunk.

$$\underbrace{m_1 \cdot v^* + m_2 \cdot 0}_{\text{előtt}} = \underbrace{(m_1 + m_2) \sqrt{5gl}}_{\text{után}};$$

Vagyis:

$$v^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{5gl}.$$

Vajon honnan volt az m_1 tömegű golyónak v^* sebessége? Két forrásból is. Először is meglöktük, másodszor a nehézségi erő is gyorsította közben. Írjuk csak fel a munkatételt:

$$m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 v^{*2} - \frac{1}{2} m_1 v_0^2.$$

Ebből az egyenletből határozható meg az ellökési sebesség:

$$v_0 = \sqrt{v^{*2} - 2gl}.$$

Behelyettesítve v^* előbbi értékét:

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{5gl}\right)^2 - 2gl};$$

$$v_0 = \sqrt{5gl\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 2gl}.$$

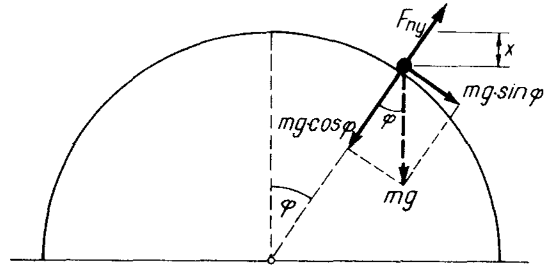
Adatok: $g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $l = 0{,}5$ m; $m_1 = 0{,}1$ kg; $m_2 = 0{,}2$ kg.

$v_0 = 14{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

6.33. Vizsgáljuk a golyó mozgását egy olyan pillanatban, amikor még hozzáér a gömbhöz. Ekkor mind érintőirányban, mind arra merőlegesen gyorsul a golyó. A 6.10. megoldás gondolatmenetét követve, vizsgáljuk külön az érintőleges és külön a merőleges (normális, centripetális, sugárirányú – ez mind ugyanazt jelenti) gyorsulást.

$\Sigma F_{\parallel} = ma_{\parallel}$; $\qquad \Sigma F_{\perp} = ma_{\perp}$;

$mg \cdot \sin\varphi = m \cdot a_{\parallel}$; $\qquad mg \cdot \cos\varphi - F_{ny} = ma_{\perp}$.



Foglalkozzunk a merőleges összetevőkkel részletesebben:

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{r}.$$

A kerületi sebesség a munkatétel felhasználásával kifejezhető, mint az elengedési helyzettől számított x mélység függvénye (l. pl. a 6.28. megoldásban követett módszert), és így kapjuk:

$$v = \sqrt{2gx};$$

tehát

$$a_{\perp} = 2\frac{gx}{r}.$$

Fejezzük ki cos φ-t is x és r segítségével:

$$\cos\varphi = \frac{r - x}{r};$$

és helyettesítsük be az alaptörvénybe:

$$mg\frac{r-x}{r} - F_{ny} = m\frac{2gx}{r}.$$

Az ismeretlen F_{ny} nyomóerő ebből meghatározható:

$$F_{ny} = mg\frac{r-3x}{r}.$$

Ahogyan x 0-tól kezdődően egyre nagyobb és nagyobb lesz, úgy csökken F_{ny}. Lehet-e F_{ny} negatív? (Húzhatja-e magához a félgömb a golyót, mint valami megfeszített fonál?) Nem. A nyomóerőre kapott képlet tehát n e m é r v é n y e s olyan x értékekre, amelyek esetén F_{ny} kiszámított értéke negatív lenne. Emlékezzünk vissza, hogy abból indultunk ki, hogy a golyó még hozzáér a gömbhöz. F_{ny}-re kapott képletünk tehát a d d i g é r v é n y e s, a m í g a g o l y ó é s a g ö m b é r i n t k e z n e k. Hol válik el a golyó a gömbtől? Hol veszti érvényét a kapott képlet? Ott, ahol $F_{ny} = 0$ lesz.

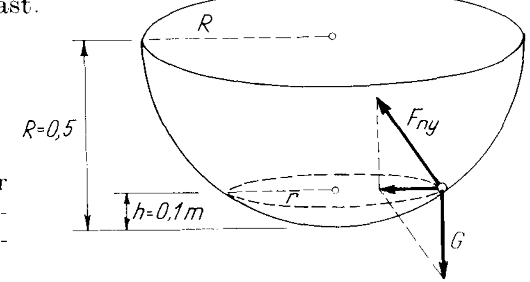
$$F_{ny} = 0; \qquad \text{ha } x = \frac{r}{3}.$$

A 0,6 méter sugarú gömb tetején elengedett golyó tehát a gömb tetejénél 0,2 méterrel mélyebben hagyja el a gömböt, s érintőirányban lerepülve parabola pályán esik a földre.

6.34. A keringési időt ki tudjuk számítani, ha ismerjük a golyó kerületi sebességét vagy szögsebességét, mivel a körpálya sugara kiszámítható. A sebesség a centripetális gyorsulással függ össze, ezt kell először meghatároznunk. Miből? A dinamika alaptörvényéből. Menjünk sorjában:

1. Milyen mozgást végez a golyó? Egyenletes körmozgást. (Nincs súrlódás.) Tehát gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$



2. Számítsuk ki a kör sugarát! Geometriailag könnyen belátható, hogy:

$$r = \sqrt{h(2R - h)}\ .$$

Tehát: $r = \sqrt{0{,}1\ \text{m}\ (2 \cdot 0{,}5\ \text{m} - 0{,}1\ \text{m})} = 0{,}3\ \text{m}\ .$

3. Milyen erők hatnak a golyóra?
A nehézségi erő. A gömbfal nyomóereje.
4. Mit tudunk az eredőerőről?
Iránya megegyezik a gyorsulás irányával (most tehát a körpálya középpontja felé mutat).
Nagysága geometriai összefüggésbe hozható a nehézségi erő nagyságával:

$$\Sigma F : G = r : (R - h);$$

$$\Sigma F = G\frac{r}{R - h}\ .$$

Behelyettesítve

$$\Sigma F = G \cdot \frac{0{,}3\ \text{m}}{0{,}5\ \text{m} - 0{,}1\ \text{m}}\ ;$$

$$\Sigma F = G \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} mg\ .$$

5. Írjuk fel az összefüggést ΣF és a között:

$$\Sigma F = ma;$$

$$\frac{3}{4} mg = m\frac{v^2}{r}\ .$$

6. Fejezzük ki a kerületi sebességet:

$$v = \sqrt{\frac{3}{4} gr}\ ;$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}3\ \text{m}}\ ;$$

$$v = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$

7. Számítsuk ki a körülfordulási időt:

$$v = \frac{2r\pi}{T}\ ; \quad \text{tehát} \quad T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2 \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot 3{,}14}{1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}\ ;$$

$$T = 1{,}26\ \text{s}.$$

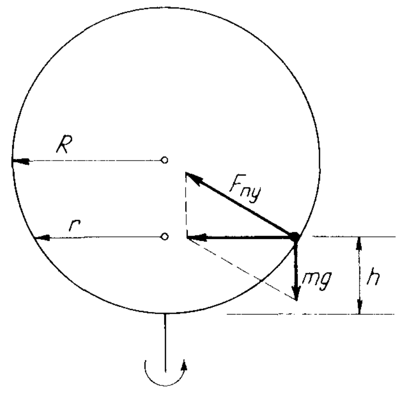
35. A golyó mindenképpen elhelyezkedhet a gömb legalsó pontján. Ettől a triviális esettől eltekintve, általában lehetséges egy másik helyzet is. Foglalkozzunk most ezzel, az ábrán is feltüntetett esettel.
1. Milyen mozgást végez a golyó?
Egyenletes körmozgást. (Ha tapad a gömbhöz.)
Tehát gyorsulása:

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

2. Milyen erők hatnak rá?
Nehézségi erő. Nyomóerő. (Esetleg tapadási súrlódási erő; ezt az esetet külön tárgyaljuk.)

3. Mit mondhatunk az eredőerőről?
Iránya megegyezik a gyorsulás irányával, tehát a golyó körpályájának középpontja felé mutat.
Nagysága geometriai összefüggésben van a nehézségi erő nagyságával:

$$\Sigma F = mg\frac{r}{R - h}\ ;$$



4. A dinamika alaptörvénye szerint:

$$\Sigma F = ma;$$

$$mg\frac{r}{R - h} = m\omega^2 r.$$

Fejezzük ki a gömb aljától mért h távolságot:

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}\ .$$

5. Diszkusszió:

a) Ha $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$; akkor a most kapott képlet szerint $h < 0$. Ez értelmetlen, hiszen a képletet azzal a feltételezéssel vezettük le, hogy a golyó valahol a gömb falához tapadva körmozgást végez. A levezetett képlet tehát csak erre az esetre alkalmazható. Ugyanakkor azzal, hogy $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ esetén értelmetlenné válik, j e l z i , h o g y a k i i n d u l á s i f e l t é t e l s e m t e l j e s ü l e b b e n a z e s e t b e n . Vagyis $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ esetén a golyó nem kering, hanem a gömb legalsó pontján tartózkodik stabilis egyensúlyi helyzetben.

b) Hogyan befolyásolja a jelenséget a súrlódás?
Először is: ha nincs súrlódás, akkor a golyó keringése és a gömb mozgása független egymástól, s a feladat határozatlan.
Másodszor: ha van súrlódás, akkor a tapadási súrlódás lehetővé teszi, hogy a golyó a most kiszámított magasságnál valamivel alacsonyabban vagy magasabban is elhelyezkedjék. A feladat tehát ebben az esetben is némiképp határozatlan, mivel a μ_0 súrlódási együtthatótól függő szélességű sávban helyezkedhet el a golyó a gömb falán.

c) Tehát milyen esetre érvényes a feladat megoldása? A válasz a következő:

$$h \to \left(R - \frac{g}{\omega^2}\right) \text{ és } \Delta h \to 0$$

akkor, ha $\omega \geqq \sqrt{\frac{g}{R}}$; és $\mu_0 \to 0$; de $\mu_0 \neq 0$.

(Δh a sáv szélességét, h a sáv közepének magasságát jelenti.)

6.36. Vizsgáljuk a golyó mozgását.

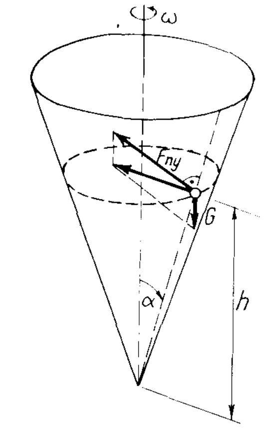
1. Milyen mozgást végez a golyó?
Egyenletes körmozgást (mivel a feladat szerint a forgó kúphoz képest nyugalomban van.)
Tehát gyorsulása ($r = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$):

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega^2 h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Milyen erők hatnak a golyóra?
A nehézségi erő. A kúpfelület nyomóereje.

3. Mit mondhatunk az eredőerőről?
Iránya megegyezik a gyorsulás irányával, tehát most a körpálya középpontja felé mutat.
Nagysága geometriai összefüggésbe hozható a nehézségi erő nagyságával:

$\Sigma F = G \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$



4. Mi az összefüggés ΣF és a között?
$\Sigma F = ma.$

$G \cdot \operatorname{cotg} \alpha = m\omega^2 h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$
Ebből h kifejezhető:

$$\underline{h = \frac{g}{\omega^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

5. Számítsuk ki a nyomóerő nagyságát!
Az ábra alapján:

$$F_{ny} = \frac{\Sigma F}{\cos \alpha} = \frac{G}{\sin \alpha};$$

$$\underline{F_{ny} = \frac{G}{\sin \alpha}}.$$

6. Diszkusszió.
a) A feladatnak tetszőleges ω és α mellett van megoldása.
b) Mivel nincs súrlódás, ezért a golyót valamilyen módon körmozgásba k e l l h o z n i , és csupán a kiszámított h magasságban egyezik meg a golyó körmozgásának szögsebessége a kúp forgásának szögsebességével.
c) Érdemes összehasonlítani a feladatot az előző, 6.35. feladattal. Lényeges különbség a két eset között az, hogy a gömbben keringő golyó a vele forgó gömbhöz képest s t a b i l i s egyensúlyi helyzetben van, ugyanakkor a kúpban keringő golyó egyensúlyi helyzete a vele forgó kúphoz képest l a b i l i s . Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

6.37. A nehézségi gyorsulás értéke így számítható ki:

$$g = f\,\frac{m_{\text{Föld}}}{r^2} = f\,\frac{m_{\text{Föld}}}{(R + h)^2}$$

ahol

$$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}; \quad m_{\text{Föld}} = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg};$$

$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $h = 2 \cdot 10^5$ m.
Ezeket behelyettesítve:

$$\underline{g = 9{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

6.38. Általában, a Föld felszíne felett h magasságban a nehézségi gyorsulás értéke:

$$g\,(h) = f\frac{m_{\text{Föld}}}{(R+h)^2}.$$

Most azt a h magasságot keressük, amelynek esetén:

$$g\,(h) = \frac{g\,(0)}{2}.$$

Tehát

$$f\frac{m_{\text{Föld}}}{(R+h)^2} = \frac{1}{2}\cdot f\frac{m_{\text{Föld}}}{R^2}.$$

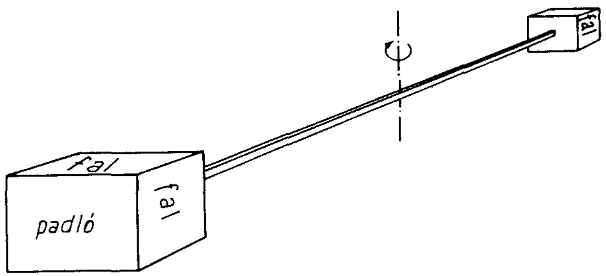
Ebből

$$h = R\,(\sqrt{2}-1).$$

Minthogy a Föld sugara: $R = 6370$ km, ezért:

$\underline{h = 2600 \text{ km}.}$

6.39. Ha egy 70 kg tömegű ember olyan padlón áll, amely 700 N erőt fejt ki rá, akkor az ember „megszokott súlyát érzi". Hogyan lehet ilyen padlót mesterségesen létrehozni? Földi körülmények között minden vízszintes, szilárd padló megfelel. És a világűrben, ahol minden test a nehézségi erőtérben állandóan „szabadon esik"? Erre szolgál a feladatban említett űrállomás.



Ha az óriási súlyzóhoz hasonló űrállomás a középpontja körül ω szögsebességgel forog, akkor a kabinban elhelyezkedő 70 kg-os űrhajóst a kabin padlója kényszeríti ω szögsebességű forgásra. A nyomóerő nagysága tehát $G = mg$ kell, hogy legyen. Az űrhajós gyorsulása pedig:

$$a = r\omega^2.$$

Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$\Sigma F = ma;$$

$$mg = mr\omega^2;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Az adott űrállomás esetén $r = \dfrac{30 \text{ m}}{2} = 15$ m; tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{15 \text{ m}}} = 0{,}8 \text{ s}^{-1};$$

$\underline{\omega = 0{,}8 \text{ s}^{-1}.}$

6.40. Az m tömegű tárgyra ható gravitációs vonzóerő az M tömegű és R sugarú bolygó felszínén:

$$F = f\frac{mM}{R^2}.$$

Következésképpen a tárgy súlya a Föld felszínén, jó közelítésben:

$$G_1 = f\,\frac{m\cdot M_{\text{Föld}}}{R^2_{\text{Föld}}}.$$

Ugyanennek a tárgynak a súlya a Hold felszínén:

$$G_2 = f\,\frac{m\cdot M_{\text{Hold}}}{R^2_{\text{Hold}}}.$$

Kérdés, mennyi a $G_1 : G_2$ arány?

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{M_{\text{Föld}}}{M_{\text{Hold}}}\cdot\left(\frac{R_{\text{Hold}}}{R_{\text{Föld}}}\right)^2 = 81\cdot\left(\frac{1}{3{,}7}\right)^2;$$

$$\underline{\frac{G_1}{G_2} \approx 6.}$$

Ezt kellett bebizonyítani!

6.41. A Föld középpontjától x_1 távolságra levő m tömegű testre a Föld által gyakorolt vonzóerő:

$$F_1 = f\frac{m \cdot M_{\text{Föld}}}{x_1^2}.$$

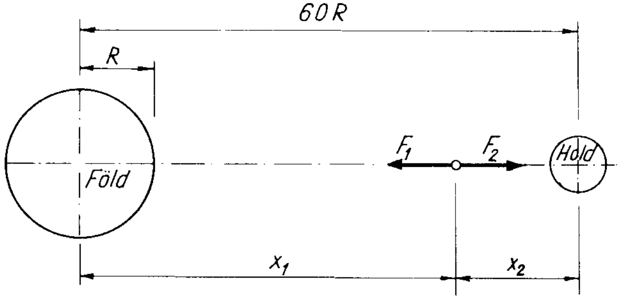
A Hold középpontjától x_2 távolságra levő m tömegű testre a Hold által gyakorolt vonzóerő:

$$F_2 = f\frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{x_2^2}.$$

Azt a helyet keressük, ahol $F_1 = F_2$; tehát:

$$f\frac{m \cdot M_{\text{Föld}}}{x_1^2} = f\frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{x_2^2}.$$

Ebből



$$\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{M_{\text{Föld}}}{M_{\text{Hold}}};$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 81;$$

$$\frac{x_1}{x_2} = 9.$$

($+9$; mert sem x_1 ; sem x_2 nem lehet negatív.)

A másik összefüggés x_1 és x_2 között:

$$x_1 + x_2 = 60R.$$

A két egyenlet segítségével x_1 és x_2 meghatározható.

$$x_1 = 54R;$$

$$x_2 = 6R.$$

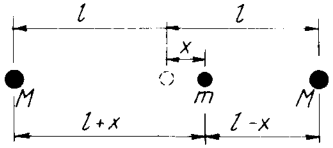
A keresett hely tehát a Föld felszínétől 53 Föld-sugár távolságra, a Hold felszínétől kevesebb, mint 6 Föld-sugár távolságra van.

6.42. A kérdésre csak úgy tudunk válaszolni, ha megnézzük, hogy az egyensúlyi helyzetéből k i s s é kitérített m tömegű testre milyen e r e d ő e r ő hat. Ha csak e g y e t l e n olyan esetet találunk, hogy az eredőerő n e m az egyensúly felé akarja vissza-

hajtani a testet, hanem még jobban eltéríteni onnan, akkor az egyensúly már labilis. Tekintsük az ábrán vázolt esetet.

Az m tömegű testre ható erők:

Balra húzza:



$$F_1 = f\frac{mM}{(l+x)^2}.$$

Jobbra húzza:

$$F_2 = f\frac{mM}{(l-x)^2}.$$

F_2 nevezője kisebb, mint F_1 nevezője, tehát:

$$F_2 > F_1;$$

vagyis az ábrán jobbra húzó erő nagyobb. Ez azt jelenti, hogy az eredőerő is jobbra mutat, vagyis nem az egyensúlyi helyzetbe igyekszik visszatéríteni a testet.

Az egyensúly labilis.

6.43. A műholdnak az Egyenlítő által meghatározott síkban kell keringenie, méghozzá a Földdel azonos szögsebességgel. Ekkor fog mindig az Egyenlítőnek ugyanazon pontja „fölött" tartózkodni. Például Quito „fölött".

Mozgására alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$\Sigma F = ma;$$

$$f\frac{m \cdot M_{\text{Föld}}}{r^2} = m\omega^2 r;$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{f \cdot M_{\text{Föld}}}{\omega^2}}.$$

Adatok: $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$; $M_{\text{Föld}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ \text{s}}.$$

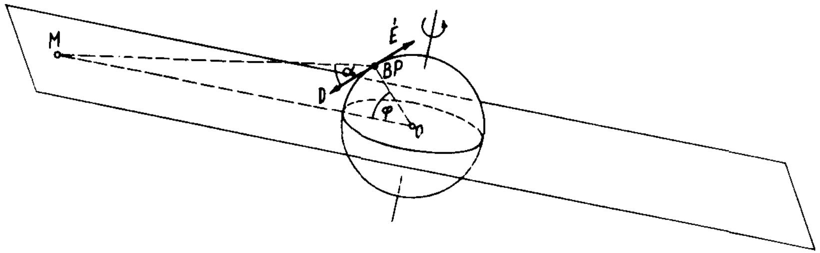
Ezeket behelyettesítve:

$r = 42 \cdot 10^6$ m;

$r = 42\,000$ km.

A műhold tehát a Föld középpontjától 42 000 km távolságra, s így a Föld felszínétől mintegy 35 600 km távolságra van. Ez a távolság több mint 100-szor akkora, mint a Föld körül keringő űrhajók átlagos távolsága, és így a műhold több mint 1000-szer magasabban van, mint amilyen magasra repülőgép egyáltalán emelkedhet a Föld felszíne fölé. Mégis, ma már elég sok ilyen műhold kering a Föld körül. Leginkább arra használják őket, hogy a Földön egymástól nagy távolságra működő adó és vevő között játsszák az ultrarövid rádióhullámok számára a tükör szerepét. Velük oldható meg a kontinensek közötti közvetlen televíziós közvetítés is. „Távközlési mesterséges holdak"-nak nevezik őket. Egymástól diszkrét távolságra követik egymást ugyanazon a pályán. 6—8 ilyen műholdból álló lánccal meg lehet oldani a 24 órás folyamatos közvetítést.

6.44. Igen, elképzelhető. Ennek is az Egyenlítő síkjában kell keringenie, olyan távolságra a Földtől, amelyet az előző feladatban számítottunk ki. Ennek a műholdnak azonban nem Quito fölött kell tartózkodnia, hanem például egy olyan síkban, amely a Föld forgástengelyén és Budapesten megy át. Budapestről ez éjjel-nappal látható lenne, természetesen a pesti égbolt *déli* felén, arra, amerre az Egyenlítő síkja van.
A Föld középpontja (O), Budapest (B) és a műhold (M) által meghatározott háromszög O-nál levő szöge $\varphi = 47{,}5°$ (ezen a „szélességi körön" fekszik Budapest). Ismert még a háromszög két oldala: $\overline{OB} = 6370$ km és $\overline{OM} = 42\,000$ km. (L. az előző feladat megoldását!) Ha a háromszög B-nél levő szögét $(90° + \alpha)$-val jelöljük, akkor α jelenti azt a szöget, amennyivel a műhold Budapestről nézve a déli horizont felett látszik. A háromszög ismert adatainak segítségével α kiszámítható. Értéke kb. 35°-nak adódik.



6.45. Határozzuk meg az R sugarú, M tömegű bolygó körül, felszínéhez közel keringő űrhajó keringési idejét. A pálya és a bolygó sugarát jó közelítésben azonosnak választva, a dinamika alaptörvényét alkalmazzuk a keringő m tömegű űrhajóra:

$$f\frac{mM}{R^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\,.$$

Ebből a keringési idő kifejezhető:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{fM}}\,.$$

A bolygó tömegét sűrűségével és térfogatával is kifejezhetjük:

$$M = \varrho\cdot\frac{4}{3}R^3\pi\,.$$

Ezt behelyettesítve, majd ϱ-t kifejezve, kapjuk:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4f\varrho\pi}}\,;$$

$$\underline{\varrho = \frac{3\pi}{fT^2}}$$

Ezt kellett bebizonyítanunk.

46. Adatok:

$m = 267$ kg; $\quad E_{mozg} = 6{,}67\cdot10^9$ J;
$h = 1630$ km $= 1{,}63\cdot10^6$ m;

$f = 6{,}67\cdot10^{-11}\dfrac{\mathrm{J\cdot m}}{\mathrm{kg^2}}$; $\quad R = 6{,}37\cdot10^6$ m. $\quad M_{\text{Föld}} = ?$

Alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét az m tömegű műhold mozgására:

$$f\frac{m\cdot M_{\text{Föld}}}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}\,.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\dfrac{R+h}{2}$-vel, kapjuk:

$$\frac{1}{2}f\frac{mM_{\text{Föld}}}{R+h} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

A jobb oldalon éppen a mozgási energia áll. Helyettesítsünk be:

$$\frac{1}{2}\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\frac{\mathrm{Jm}}{\mathrm{kg^2}}\cdot\frac{267\ \mathrm{kg}\cdot M_{\text{Föld}}}{6{,}37\cdot10^6\ \mathrm{m}+1{,}63\cdot10^6\ \mathrm{m}} = 6{,}67\cdot10^9\ \mathrm{J}\,;$$

$$\underline{M_{\text{Föld}} = 6\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}.}$$

7. Forgó mozgás

7.1. *a)* $a = \dfrac{v_2 - v_1}{t} = \dfrac{10\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}}{1\text{s}} = \dfrac{2{,}78\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{s}} = 2{,}78\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$$a = 2{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) $\beta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2{,}78\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}3\text{ m}} = 9{,}27\,\dfrac{1}{\text{s}^2}$;

$$\beta = 9{,}27\,\frac{1}{\text{s}^2}.$$

c) $v = v_0 + at = 0 + 2{,}78\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5\text{s} = 13{,}9\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$;

$$v = 13{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) $\omega = \omega_0 + \beta t = 0 + 9{,}27\,\dfrac{1}{\text{s}^2}\cdot 5\text{s} = 46{,}3\,\dfrac{1}{\text{s}}$;

$$\omega = 46{,}3\,\frac{1}{\text{s}}.$$

7.2. A rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete: $M = \Theta\cdot\beta$.
Θ a merev test tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag, β a szöggyorsulás, M a külső erő forgatónyomatéka.
Ebből az egyenlőségből:

$$\beta = \frac{M}{\Theta} = \frac{Fr}{\Theta}.$$

$F = 50\text{N}$; $\quad r = 2\text{m}$.

Mivel β állandó, a szögelfordulás:

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2;$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{F\cdot r}{\Theta}\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{50\text{ N}\cdot 2\text{m}}{320\text{ kg m}^2}\cdot 10^2\text{ s}^2 = 15{,}62;$$

$$\varphi = 15{,}62\text{ radián}.$$

7.3. Rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2.$$

Ezt az energiát forgási vagy rotációs energiának is hívják.
A tehetetlenségi nyomatékot kifejezve:

$$\Theta = \frac{2\cdot E_{kin}}{\omega^2}.$$

A fordulatszám és a szögsebesség közötti összefüggés:
$\omega = 2\pi n$;
tehát:

$$\Theta = \frac{2E_{kin}}{4\pi^2 n^2} = \frac{2\cdot 4905\text{ Nm}}{4\pi^2\cdot 15^2\text{s}^{-2}} = 1{,}10\text{ kgm}^2;$$

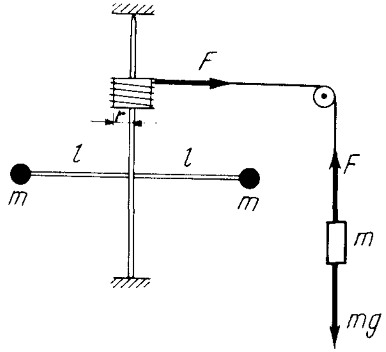
$$\Theta = 1{,}10\text{ kgm}^2.$$

7.4. $\Theta = m_1\cdot r_1^2 + m_2\cdot r_2^2$.
$m_1 = 2\text{ kg}$; $\quad m_2 = 2{,}5\text{ kg}$; $\quad r_1 = 0{,}75\text{ m}$; $\quad r_2 = 0{,}25\text{ m}$.
$\Theta = 1{,}28\text{ kgm}^2$.

7.5. Az ábra *b)* része ábrázolja helyesen az űrhajó mozgását. Ezen az ábrán az űrhajó minden pontja egyidejűleg, egymással párhuzamos és egybevágó görbéket (köröket) ír le, tehát minden pontjának ugyanaz a sebessége. Az űrhajó térbeli irányítása nem változik, a mozgás leírásához elegendő az űrhajó egyetlen pontjának mozgását megadnunk. Ezt a mozgást haladó mozgásnak vagy transzlációnak nevezzük.
A merev test másik egyszerű mozgása az álló tengely körüli forgás vagy rotáció. Ilyenkor a merev test pontjai kü

lönböző sugarú körpályán mozognak, különböző sebességgel. A merev test mozgása sok esetben sem tiszta transzláció, sem tiszta rotáció, hanem a kettő kombinációja. Az úton gördülő kerék mozgását felfoghatjuk úgy, mint olyan tengely körüli forgást, amely egyúttal haladó mozgást is végez. E problémára érvényes elmélet szerint minden merev test mozgása felbontható a test súlypontjának haladó mozgására és a súlypont körüli forgó mozgásra. Az *a)* ábra szerint az űrhajónak egy ilyen összetett mozgást kellene végeznie. Amíg egyszer megkerülné a Földet, egyszer meg kellene fordulnia saját tengelye körül is. Ez persze azt jelenti, hogy az űrhajónak mindig ugyanazt az oldalát kellene a Föld felé fordítania. Egyetlen égitest van, amely így mozog a Föld körül, ez a Hold. Nagyon nehéz dolog lenne elérni (és fölösleges is), hogy egy űrhajó, amely a Földet mintegy másfél óra alatt kerüli meg, másodpercre ugyanannyi idő alatt meg is forduljon a súlypontján átmenő és a pályasíkjára merőleges tengely körül — ahogyan az az *a)* ábrán látható.

7.6.



A zsinóron függő testre két erő hat. Lefelé az mg nehézségi erő és felfelé a fonálerő. Mozgását így a dinamika alaptörvénye szerint az

$$mg - F = ma$$

írja le. A függőleges tengely körül forgó két m tömegű test a dobra ható F fonálerő $M = Fr$ nyomatéka hatására gyorsul.

A forgásra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$Fr = \Theta\beta.$$

A tehetetlenségi nyomaték $\Theta = 2\cdot ml^2$. A β szöggyorsulás és a lefelé mozgó test a gyorsulása között kapcsolat van. Ugyanis a dob kerületi gyorsulása szintén a. Így $a = r\beta$. Ezeket figyelembe véve a mozgásegyenletek:

$$mg - F = ma;$$

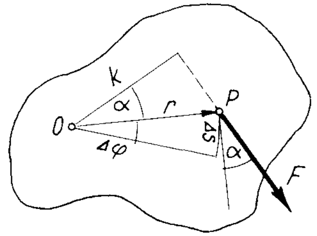
$$Fr = 2ml^2\frac{a}{r}$$

Ezen egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy:

$$a = \frac{r^2}{r^2 + 2l^2}g$$

7. A forgatónyomatéknak fontos szerepe van a forgásnál végzett munkánál is. Ha az ábrán látható test $\Delta\varphi$ szöggel elfordul az O ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengely körül, akkor a P pontban támadó erő támadáspontja $\Delta s = r\cdot\Delta\varphi$ szakasszal elmozdul. Így az F erő elemi munkája, amely az elmozdulással α szöget zár be:

$$F\cdot\Delta s\cdot\cos\alpha = Fr\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\alpha.$$



Az ábráról leolvasható, hogy $r\cdot\cos\alpha = k$; az F erő karja, tehát $Fk = M$ az erő forgatónyomatéka, ezért a forgásnál végzett elemi munka:

$$M\cdot\Delta\varphi$$

a forgatónyomatéknak és az elemi szögelfordulásnak a szorzata. Tetszőleges φ szöggel való elfordulásnál a végzett munka az elemi munkák összegezésével számítható ki:

$$W = \Sigma M_i\cdot\Delta\varphi_i\,.$$

Ha a forgatónyomaték állandó (M_i = áll $= M$), akkor az összegből kiemelhető, tehát:

$$W = M\cdot\Sigma\Delta\varphi_i = M\cdot\varphi.$$

A haladó és forgó mozgás között eddig tapasztalt szembeszökő hasonlóság, amely abban nyilvánul meg, hogy mindkét területen léteznek egymásnak következetesen megfelelő mennyiségek, amelyek egymás szerepét betöltve a rájuk vonatkozó törvényeket megfelelő átírással megadják, most is igaz. A középiskolai tankönyvben található párhuzam szerint F-nek M felel meg, és s-nek φ. Ha az ennek megfelelő átírásokat a munka $W = Fs$ kifejezésébe elvégezzük, $W = M\cdot\varphi$ képletet kapjuk, ami a fentiek szerint helyes.

A feladat szövegében $M = 0{,}2$ Nm, $\varphi = 420° = \frac{7\pi}{3}$ és így

$$W = 0{,}2\ \mathrm{Nm}\cdot\frac{7\pi}{3};$$

$$\underline{W = 1{,}5\ \mathrm{J}.}$$

7.8. Az előző feladat megoldásában felidéztük a haladó és forgó mozgás közötti hasonlóságot. Ha most a haladó mozgásnál a teljesítményre fennálló

$$P = F\cdot v$$

összefüggésben az átírást elvégezzük:

$$P = M\cdot\omega.$$

A feladatbeli összefüggés tehát a pillanatnyi teljesítményt adja meg a forgó mozgásnál. Érdemes most is megjegyezni, mint azt a haladó mozgásnál tettük, hogy ha az M nyomaték állandó is, a teljesítmény változó lesz. Állandó nyomaték ugyanis állandó szöggyorsulást hoz létre, és így a szögsebesség változik, és vele együtt változik az $M\omega$ pillanatnyi teljesítmény is. Természetesen az analógia felhasználása még nem jelent bizonyítást. Állításunkat azonban nagyon egyszerűen beláthatjuk. Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy az elemi elfordulás során végzett munka:

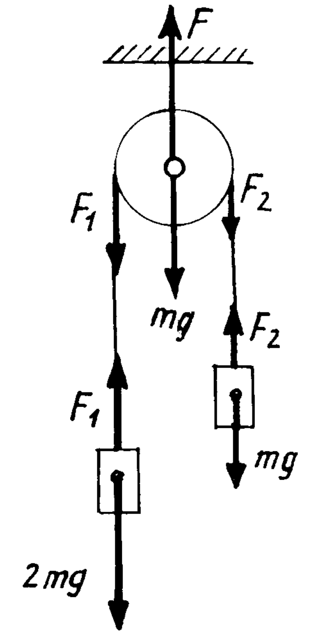
$$M\cdot\Delta\varphi.$$

A pillanatnyi teljesítmény, a matematikában már megismert határérték jelölését használva:

$$P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\Delta\varphi}{\Delta t} = M\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = M\omega;$$

amint azt állítottuk.

7.9. Az egyes kötelekre ható erők az ábrán láthatók. A két kötélágban ébredő erőt különbözőnek vettük fel. Korábban ezt a feladatot megoldottuk azzal a feltétellel, hogy a csiga tömege elhanyagolható. Akkor a kötélerők a két ágban egyenlő nagyok voltak. Most azonban nem lehetnek egyenlőek, mert ha egyenlőek lennének, a csigára ható erők nyomatékainak összege zérus lenne, és így a csiga nem gyorsulhatna. A feladat szerint a fonál a csigán nem csúszik meg, tehát a csigát gyorsítania kell.



A haladó mozgást végző $2m$ és m tömegű testekre alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$$2mg - F_1 = 2ma; \qquad (1)$$

$$F_2 - mg = ma. \qquad (2)$$

A két test gyorsulásának nagysága a kötél nyújthatatlansága miatt egyenlő. Ezen egyenletekben három ismeretlen van: F_1, F_2 és a. Még egy összefüggést kell keresni. Az F_1 és F_2 erők a csiga szöggyorsulását határozzák meg, a forgás mozgásegyenletének megfelelően:

$$F_1 r - F_2 r = \Theta\beta. \qquad (3)$$

A kötél nem csúszik a csigán, ezért a csiga kerületi pontjainak gyorsulása egyenlő a hasábok gyorsulásával, és így a csiga szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{a}{r}.$$

Felhasználva ezt és a $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$-et, a (3) egyenlet

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}ma \qquad (4)$$

alakú lesz. Az (1), (2), (4) egyenletekből:

$$\underline{a = \frac{2}{7}g.}$$

$$F_1 = \frac{10}{7}mg \quad \text{és} \quad F_2 = \frac{9}{7}mg.$$

A mennyezetre ható erő a mennyezet által a kötélen keresztül a csigára ható F erővel egyenlő nagyságú. A csiga haladó mozgást nem végez, így a rá ható erők összege nulla:

$$F - F_1 - F_2 - mg = 0.$$

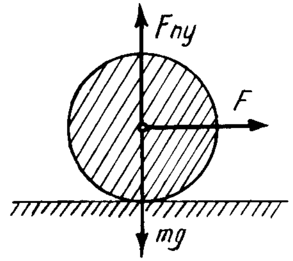
Ebből:

$$\underline{F = \frac{26}{7}mg.}$$

7.10. *a)* A hengerre három erő hat:
vízszintesen a húzóerő F;
függőlegesen a nehézségi erő mg,
a talaj nyomóereje F_{ny}.
A henger súlypontja úgy mozog, mintha tömege akkora lenne, mint az egész henger tömege, és a hengerre ható erők mind a súlypontban volnának. A súlypont mozgására felírjuk a dinamika alaptörvényét:

$F = ma;$

$F_{ny} - mg = 0.$

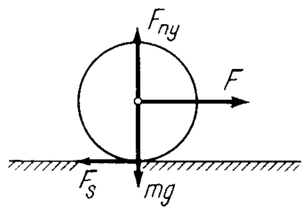


Ezekből a súlypont vízszintes irányban:

$$a = \frac{F}{m}$$

gyorsulással mozog.

Forog-e közben a henger? Nem. Ugyanis a hengerre ható erők mindegyike olyan, hogy támadásvonala átmegy a súlyponton, és így a súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka zérus. Súrlódásmentes talajon a henger nem forog, csak csúszik. Tehát csak haladó mozgást végez.



b) Más a helyzet, ha a henger és a talaj közötti súrlódást nem lehet elhanyagolni. Ilyenkor ugyanis a súrlódásmentes esethez képest még egy erő hat, az ábrán is berajzolt F_s súrlódási erő. Írjuk fel most is a súlypont haladó mozgására a dinamika alaptörvényét!

$F - F_s = ma;$ (*1*)

$F_{ny} - mg = 0.$ (*2*)

Az F_s erőnek most van nyomatéka a súlypontra nézve és így létrejön a súlypont körüli forgás is. Ha a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték Θ, és β jelöli a szöggyorsulást:

$F_s \cdot r = \Theta\beta.$ (*3*)

A továbbiakban két eset lehetséges:
1) A henger tiszta gördülést végez;
2) A henger gördülve csúszik.

Nézzük először a tiszta gördülés esetét. Ebben az esetben a β és az a között meghatározott összefüggés van:
$a = r\beta.$
Ugyanis az erők állandósága miatt a és β állandó, így tetszőleges t idő alatt a súlypont útja:

$$s = \frac{a}{2}t^2;$$

a henger valamely kerületi pontjának útja a forgástengelyhez rögzített vonatkoztatási rendszerben:

$$s' = r\varphi = r\frac{1}{2}\beta t^2.$$

A tiszta gördülés azt jelenti, hogy ez a két út egyenlő:
$s = s'.$

$$\frac{1}{2}at^2 = r\frac{1}{2}\beta t^2;$$

$a = r\beta.$

Ezt felhasználva (*1*) és (*3*) egyenletekből:

$$a = \frac{F}{m + \frac{\Theta}{r^2}}.$$

Θ a henger tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, tehát:

$$\Theta = \frac{1}{2}mr^2.$$

Ezt beírva a gyorsulás előbbi kifejezésébe:

$$\underline{a = \frac{2F}{3m}.}$$

Az (*1*) és (*3*) egyenletekből az F_s súrlódási erőt is meghatározhatjuk:

$$\underline{F_s = \frac{F}{3}.}$$

Vagyis, amíg tiszta gördülés van, a súrlódási erő a húzóerő harmadrésze. Mivel a henger tisztán gördül, az érintkezési pont a talajhoz viszonyítva nem csúszik, a súrlódási erő a talaj és a henger között fellépő tapadási súrlódási erő. Ennek legnagyobb értéke $\mu_0 F_{ny} = \mu_0 mg$;

azaz:

$$F_s \leq \mu_0 mg;$$

$$\frac{F}{3} \leq \mu_0 mg;$$

$$F \leq 3\,\mu_0 mg.$$

Ez azt jelenti, hogy tiszta gördülés csak addig lehet, amíg a húzóerő nem nagyobb, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értékének a háromszorosa. Ha a húzóerő ennél nagyobb lesz, a henger csúszva gördül, és nem áll fenn az $a = r\beta$ összefüggés. A csúszás közben viszont a súrlódási erő $F_3 = \mu mg$. Az *(1)*, *(3)* mozgásegyenletek szerint:

$$F - \mu mg = ma;$$

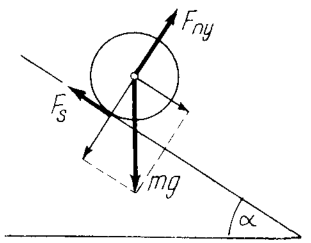
$$\mu mgr = \Theta\beta;$$

és ezekből:

$$a = \frac{F - \mu mg}{m};$$

$$\beta = \frac{\mu mg \cdot r}{\Theta} = \frac{2\mu g}{r}.$$

7.11. *a)* Mert a rá ható külső erők nemcsak haladó, hanem forgó mozgásra is kényszerítik. Nézzük meg részletesebben:



Az ábrán láthatók a golyóra ható erők:

mg a nehézségi erő;

F_{ny} a nyomóerő;

F_s a súrlódási erő.

A golyó középpontjának (súlypontjának) lejtő menti gyorsulását a lejtővel párhuzamos erők határozzák meg a dinamika alaptörvénye alapján.

$$mg \cdot \sin\alpha - F_s = ma.$$

A súlypont körüli forgást a súrlódási erő eredményezi, hiszen csak ennek van nyomatéka erre a pontra. A forgásra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$F_s r = \Theta\beta. \qquad \left(\Theta = \frac{2}{5} mr^2.\right)$$

Amíg a gömb tisztán gördül, az előbbi feladat megoldásában el mondottak alapján:

$$a = r\beta.$$

Ezen egyenletekből:

$$a = \frac{5}{7} g \cdot \sin\alpha;$$

$$F_s = \frac{2}{7} mg \cdot \sin\alpha.$$

A tapadási súrlódási erő azonban csak $\mu_0 \cdot F_{ny} = \mu_0 \cdot mg \cdot \cos\alpha$ értékig növekedhet, vagyis tisztán gördül a golyó, amíg:

$$F_s \leq \mu_0 \cdot mg \cdot \cos\alpha;$$

$$\frac{2}{7} mg \cdot \sin\alpha \leq \mu_0 mg \cdot \cos\alpha;$$

$$\mu_0 \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg}\alpha.$$

Ha ez nem teljesül, akkor a golyó csúszva gördül.

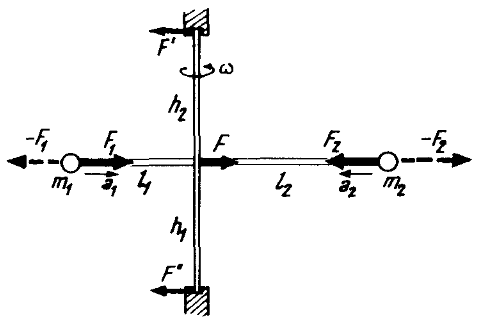
b) Súrlódás nélküli lejtőn a golyó csak csúszni fog, mert a súlyponton áthaladó erők nem hozhatnak létre forgást a súlypont körül. A gyorsulás ugyanaz, mint amekkora a lejtőn lecsúszó hasáb gyorsulása:

$$a = g \cdot \sin\alpha.$$

7.12. *a)* Igen, vízszintesen előre.
b) Igen, vízszintesen előre.
c) Igen, vízszintesen hátra.
d) Nem. A tapadási és a csúszási súrlódás egyszerre nem léphet fel.

7.13. Ha a szerkezet ω szögsebességgel forog, mindkét golyónak a tengely felé mutató gyorsulása van:

$$a_1 = l_1\omega^2; \qquad a_2 = l_2\omega^2.$$



Ezeket a gyorsulásokat a vízszintes rudakban ébredő erők biztosítják a golyóknak. Az l_1 hosszú rúd tehát:

$$F_1 = m_1 l_1 \omega^2;$$

az l_2 hosszú rúd:

$$F_2 = m_2 l_2 \omega^2$$

erővel hat az m_1 illetve az m_2 tömegű golyóra. A hatás—ellenhatás törvénye szerint a golyók ugyanakkora, de ellentétes irányú erőkkel (az ábrán szaggatott vonallal rajzolt vektorok) hatnak a vízszintes rúdra, amely ezen erőket közvetíti a tengelyre. Ez azt jelenti, hogy a tengelyre

$$F = F_2 - F_1 = (m_2 l_2 - m_1 l_1)\omega^2$$

nagyságú erő hat, melynek iránya mindig azon tömeg felé mutat, melyre az ml szorzat nagyobb.
A tengely egyensúlyban van. Ez csak úgy lehet, ha az F erőn kívül még más erő is hat rá, hogy az eredőerő nulla legyen. Ezek az erők a csapágyaknál ébredő F' és F''.

$$F - F' - F'' = 0$$

A tengely forgás szempontjából is egyensúlyban van, tehát a ráható erők nyomatéka is el kell, hogy tűnjön, mégpedig bármely pontra nézve. Például a tengely legalsó pontjára:

$$F'(h_1 + h_2) - Fh_1 + F'' \cdot 0 = 0$$

A tengely egyensúlyát leíró két egyenletből meg lehet határozni a csapágy által a tengelyre gyakorolt erőket.
Ha feladatunkban $m_2 l_2 - m_1 l_1 = 0$; $F = 0$; és így a csapágyakban ébredő erők is nullák. Ez azt jelenti, hogy nincs szükség a csapágyakra, a tengely szabad tengely. Ilyen szabad tengely körül hozzák tartós forgásba az artisták a tányért egy vékony pálca segítségével.
Eddigi megfontolásainkban az $m_1 g$ és $m_2 g$ nehézségi erő hatását nem vettük figyelembe. Azért tettük, mert figyelmünket elsősorban a forgás miatt fellépő hatásokra akartuk összpontosítani. Nincs semmi baj, ha a megfigyelést a súlytalanság állapotában, például egy a Föld körül keringő űrhajóban végezzük. Ha azonban szerkezetünk a Földön forog, a tömegek súlya miatt meg változnak a csapágyakban ébredő erők. Ez már sztatikai kérdés, alaposabb vizsgálatát az olvasóra bízzuk.

14. Ha a labda v sebességgel halad, és közben középpontja körül ω szögsebességgel forog is, a mozgási energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta\omega^2;$$

ahol Θ a labda tehetetlenségi nyomatéka a középpontjára vonatkozóan. A munkatétel szerint a tanuló által az eldobás alatt a labdán végzett munka egyenlő a labda mozgási energiájának megváltozásával.
Ha a labda forog is:

$$W = \left(\frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} \Theta\omega^2\right) - 0;$$

ha nem forog:

$$W = \frac{1}{2} mv_2^2 - 0.$$

Az első esetben:

$$v_1^2 = \frac{2W - \Theta\omega^2}{m};$$

a második esetben:

$$v_2^2 = \frac{2W}{m};$$

$$v_2^2 > v_1^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a *forgás nélkül feldobott labda* nagyobb kezdősebességgel rendelkezik, ezért *magasabbra emelkedik*.

15. A ceruza eldőlése közben a súlypontja $\frac{l}{2}$-vel mélyebbre jut, mi-

közben a nehézségi erő munkája:

$$W = mg \cdot \frac{l}{2}.$$

A ceruza mozgási energiája kezdetben nulla, az asztalra csapódás pillanatában

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta\omega^2;$$

ahol Θ a ceruza végpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, ω a végpont körüli forgás szögsebessége.
A mozgási energia megváltozása egyenlő a nehézségi erő munkájával, mert más munkavégző erő nem hat a ceruzára, tehát:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 - 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{\Theta}} = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

A végpont sebessége:

$$v = l\omega;$$

$$v = l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{3gl};$$

$$v = \sqrt{3 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}15\ \mathrm{m}};$$

$$\underline{v = 2{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

7.16. a) $\underline{\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{28}{26} = 1{,}07.}$

b) $\underline{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = 1{,}07.}$

7.17. $\underline{E = 1{,}01 \cdot 10^6\ \mathrm{J}.}$

7.18. $\underline{M = 628\ \mathrm{Nm}.}$

7.19. $\underline{P = 9{,}2\ \mathrm{kW}.}$

7.20. $\underline{\Theta = 10^{-5}\ \mathrm{kgm}^2.}$

7.21. *A tehetetlenségi nyomaték nő.*

7.22. ***A végpontja körül forgó rúd mozgási energiája $\frac{1}{8}ml^2\omega^2$-tel nagyobb.***

7.23. $\underline{\boldsymbol{F = 12{,}5\ \mathrm{N}.}}$

7.24. $\underline{\boldsymbol{\beta = \dfrac{2}{3\,r}\,g.}}$

7.25. $\underline{F = 9\ \mathrm{N}.}$

7.26. $\underline{\boldsymbol{v = 17{,}5\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}}$

7.27. $\underline{\boldsymbol{P = 31{,}4\ \mathrm{W}.}}$

7.28. $\underline{W = -421{,}2\ \mathrm{J}.}$

7.29. **A rúd még akkor körbe fordulhat, ha szögsebessége a „tetőponton" csökken éppen nullára. Eközben a súlypontja, amely a rúd közepén, a tengelytől l távolságon van, $2l$ távolsággal kerül magasabbra. Ezért a rúdra ható nehézségi erő munkája:**

$$W = -mg \cdot 2l.$$

Ez egyben a rúdra ható összes erő munkája, mert a tengely által a rúdra gyakorolt erő nem végez munkát. Ugyanekkor a rúd mozgási energiájának megváltozása:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = 0 - \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2.$$

A munkatétel szerint:

$$W = \Delta E_{\mathrm{kin}}.$$

$$-mg \cdot 2l = -\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4mgl}{\Theta}}; \quad \left(\Theta = \frac{1}{3}m\,[2l]^2\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\,mgl}{\frac{1}{3}m\cdot 4l^2}}\,;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}\,.$$

7.30. A golyóra vízszintesen csak a μmg nagyságú súrlódási erő hat, amely a golyó haladásának sebességét csökkenti. Ez az erő, mivel a súlypontra nézve van nyomatéka, a golyót forgásba hozza. Így a golyó kezdetben csúszva gördül. Haladó mozgásának gyorsulását a dinamika alaptörvényéből határozhatjuk meg:

$$ma = -\mu mg;$$

$$a = -\mu g.$$

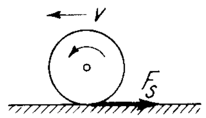
A gyorsulás állandó, tehát a sebesség:

$$v = v_0 + at = v_0 - \mu gt.$$

A súlypont körüli forgás szöggyorsulását a forgás alaptörvényéből számíthatjuk ki:

$$\Theta\beta = \mu mgR;$$

$$\beta = \frac{\mu mgR}{\Theta} = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}m\,R^2} = \frac{5\,\mu g}{2R}.$$



Az állandó szöggyorsulásból a szögsebesség:

$$\omega = \beta t = \frac{5\,\mu g}{2\,R}\,t; \qquad (\omega_0 = 0.)$$

A fentiek szerint a golyó csökkenő v sebességgel halad, és közben a súlypontja körül növekvő szögsebességgel forog. A golyó bármely pontjának sebessége a talajhoz képest a két mozgáshoz tartozó sebesség vektori összege. A talajjal érintkező pont sebessége:

$$u = v - \omega R = v_0 - \mu gt - \frac{5\,\mu g}{2}\,t.$$

A golyó akkor kezd tisztán gördülni, amikor ez a sebesség nulla lesz, tehát amikor:

$$v_0 - \mu g t_1 - \frac{5\mu g}{2}\,t_1 = 0; \qquad t_1 = \frac{2v_0}{7\mu g}.$$

Ennyi idő alatt megtett út:

$$s = v_0 t_1 + \frac{a}{2}t_1^2 = v_0\frac{2v_0}{7\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{2\,v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12\;v_0^2}{49\;\mu g};$$

$$s = \frac{12\;v_0^2}{49\;\mu g}.$$

7.31. Az m_2 tömegű hasáb gyorsulása és a reá ható erők kapcsolatát a dinamika alaptörvénye írja le:

$$m_2 g - F = m_2 a_2. \tag{1}$$

A henger összetett mozgást végez. A súlypontján átmenő tengelye halad, és közben a tengely körül forog. A haladó mozgására szintén felírhatjuk a dinamika alaptörvényét:

$$F + F_s = m_1 a_1. \tag{2}$$

A tengely körüli forgását a forgásra tanult mozgásegyenlettel írhatjuk le:

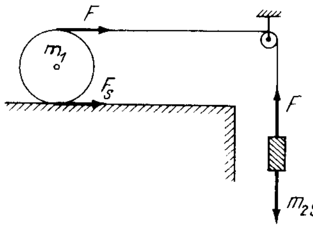
$$(F - F_s)\cdot r = \Theta\beta. \tag{3}$$

A henger tisztán gördül, ezért:

$$a_1 = r\beta. \tag{4}$$

Az a_1 és a_2 közötti kapcsolatot a következő módon állapíthatjuk meg. Az indulástól számított t idő alatt a hasáb útja:

$$s_2 = \frac{a_2}{2}t^2;$$



a henger útja:

$$s_1 = \frac{a_1}{2}t^2.$$

Az s_2 összetevődik a henger útjából és az előre haladás közben a hengerről letekeredő fonál hosszából. A letekeredő fonál hossza azonban s_1, mert a henger nem csúszhat. Ezért:

$$s_2 = 2\,s_1;$$

$$\frac{a_2}{2}t^2 = 2\cdot\frac{a_1}{2}\cdot t^2;$$

$$a_2 = 2a_1. \tag{5}$$

A (4) és (5) eredményünket (1), (2), (3) egyenletekbe behe lyettesítve kapjuk, hogy:

$m_2 g - F = m_2 \cdot 2a_1$;

$F + F_s = m_1 a_1$;

$(F - F_s) r = \Theta \dfrac{a_1}{r}$; $\left(\Theta = \dfrac{1}{2} m_1 r^2\right)$.

Ezt az egyenletrendszert megoldva:

$$F = \frac{3m_1 m_2}{3m_1 + 8m_2} g;$$

$$a_1 = \frac{4m_2}{3m_1 + 8m_2} g;$$

$$a_2 = \frac{8m_2}{3m_1 + 8m_2} g.$$

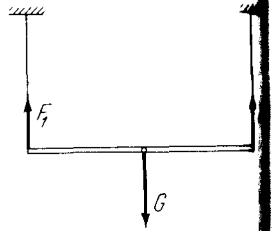
eredményeket kapjuk.

7.32. *a)* Amíg a kötelet nem vágtuk el, a rúd egyensúlyban van. E csak úgy lehet, ha a rúdra ható erők összege nulla:

$F_1 + F_2 - G = 0$,

és a forgatónyomatékok összege is nulla, például a rúd súlypont jára nézve:

$$F_1 \frac{l}{2} - F_2 \frac{l}{2} = 0.$$



Ezekből

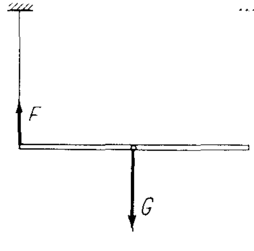
$$F_1 = F_2 = \frac{G}{2}.$$

Ezt természetesen az első ránézésre megmondhattuk volna, h szen F_1 és F_2 párhuzamos és egyirányú erők eredőjének a rú súlypontjában kell lennie, és a rúd súlyával kell egyenlő nagys gúnak lenni.

b) Ha az egyik kötelet elvágjuk, a rúdra már csak két erő ha amelyek a kezdő pillanatban párhuzamosak, és ellentétes ir nyúak. Ezek hatására a test esik is, és forog is. A súlypontján esésére alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét:

$G - F = ma.$ (1

A másik kötélhez csatlakozó vége körül meginduló forgás szögsebességét a forgatónyomatékok határozzák meg:



$$G \frac{l}{2} + 0 = \Theta\beta, \qquad \left(\Theta = \frac{1}{3} m l^2\right) \qquad (2)$$

A súlypont gyorsulása és szöggyorsulása között nyilván fennáll az

$$a = \frac{l}{2}\beta \qquad (3)$$

összefüggés. Az (1), (2), (3) egyenletek megoldása a kötélerőre:

$$F = \frac{G}{4}.$$

Vagyis, ha az egyik kötelet elvágjuk, a megmaradó kötélben az erő a felére csökken az első pillanatban.

7.33. Az orsó kétféle mozgást végez. A súlypontja a gyorsulással süllyed, és közben az orsó súlypontja körül β szöggyorsulással forog. A két mozgásra írjuk fel a megfelelő dinamikai törvényeket! A haladó mozgásra:

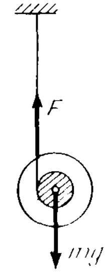
$mg - F = ma.$

A forgó mozgásra:

$$Fr + 0 = \Theta\beta; \qquad \left(\Theta = \frac{1}{2} m R^2.\right)$$

A súlypont gyorsulása és a szöggyorsulás kapcsolata:

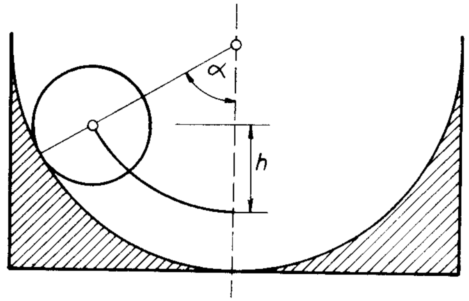
$a = r\beta.$



Ezen egyenletekből:

$$a = \frac{2r^2}{2r^2 + R^2} g;$$

$$\beta = \frac{2r}{2r^2 + R^2} g.$$



A henger súlypontja, mialatt a vályú aljára ér

$h = (R - r)\cdot(1 - \cos 60°) = \frac{3}{8}R$

távolsággal mélyebbre kerül. Ezalatt a nehézségi erő munkája:

$$W = mgh = mg\cdot\frac{3}{8}\cdot R.$$

Ez egyben a hengerre ható összes erő munkája is, mert a többi erő munkája zérus.

A henger mozgási energiájának megváltozása a legördülés alatt:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2 - 0;$$

ahol v_1 és ω_1 a henger súlypontjának sebessége, illetve a forgásának szögsebessége a legmélyebb helyzetben.

A munkatétel szerint:

$$\Delta E_{kin} = W;$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2 = \frac{3}{8}mgR.$$

Keressük meg ω és v kapcsolatát! Feltételünk szerint a henger csúszásmentesen gördül. Ez azt jelenti, hogy az érintkezési pont sebessége a vályúhoz viszonyítva zérus. Ez a sebesség összetehető az érintkezési pontnak a súlyponthoz viszonyított $-r\omega$ sebességéből és a súlypontnak a vályúhoz viszonyított v sebességéből:

$$v - r\omega = 0;$$

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Ezt a munkatételt kifejező egyenletbe írva:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{3}{8}mgR.$$

A legördülő henger tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{1}{2}mr^2.$$

Evvel az utóbbi egyenletünk:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{3}{8}mgR;$$

$$\frac{3}{4}mv_1^2 = \frac{3}{8}mgR;$$

$$v_1^2 = \frac{gR}{2};$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

A két henger közötti különbség abban áll, hogy ugyanaz a tömeg másként oszlik el bennük. Így a két henger tehetetlenségi nyomatéka különböző ugyanarra a tengelyre vonatkozóan.

A hengerek forgástengelyére vonatkozóan

a tömör henger tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}mr^2;$$

az üres henger tehetetlenségi nyomatéka, ha a falvastagság kicsi

$$\Theta_2 = mr^2.$$

Tehát

$$\Theta_1 < \Theta_2.$$

A kérdést tehát úgy lehet eldönteni, hogy mindkét hengerrel olyan kísérletet végzünk, amelyben szerepe van a tehetetlenségi nyomatéknak. A tehetetlenségi nyomatékok különbözősége miatt a kísérlet kimenetele is más lesz, amelynek alapján dönthetünk. A tehetetlenségi nyomatéknak a forgás közben döntő jelentősége van! Ezért helyezzük a két hengert egy lejtőre egymás mellé, és engedjük őket egyszerre gördülni. Az egyik henger a másik mögött elmarad. Most már csak azt kell eldönteni, hogy melyik. A *7.11.* feladatban megfigyeltük a lejtőn való legördülés kérdését. Az ott felírt mozgásegyenleteket most csak felidézzük:

$$mg\cdot\sin\alpha - F_s = ma;$$

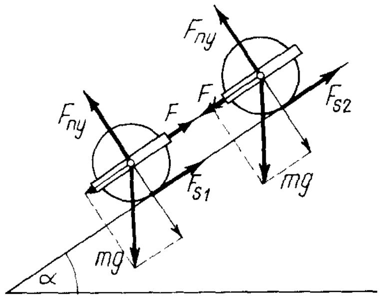
$$F_s\, r = \Theta\,\frac{a}{r};$$

ezekből a gyorsulás:

$$a = \frac{mg\cdot\sin\alpha}{m+\dfrac{\Theta}{r^2}}\,.$$

Ez a kifejezés elárulja, hogy a gyorsulás kisebb lesz, ha a tehetetlenségi nyomaték nagyobb. A Θ ugyanis a nevezőben szerepel. Más szavakkal a nagyobb tehetetlenségi nyomatékú henger „lassabban" mozog, vagyis lemarad. Esetünkben az üres henger tehetetlenségi nyomatéka a nagyobb, tehát ez marad le a másikhoz képest.

7.36.



Az ábrán feltüntettük az egyes hengerekre ható erőket. F jelenti az összekötő rúd által az egyik illetve a másik hengerre ható erőket. Most felírjuk az egyes hengerek haladó és forgó mozgására a mozgásegyenleteket:

a tömör hengerre:

$$mg\cdot\sin\alpha - F - F_{s1} = ma;$$

$$F_{s1}\cdot r = \Theta_1\beta$$

az üres hengerre:

$$mg\cdot\sin\alpha + F - F_{s2} = ma;$$

$$F_{s2}\cdot r = \Theta_2\beta.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele miatt:

$$a = r\beta.$$

Ezt felhasználva és az első és második egyenleteket összevetve:

$$mg\cdot\sin\alpha - F - \Theta_1\frac{a}{r^2} = ma. \qquad mg\cdot\sin\alpha + F - \Theta_2\frac{a}{r^2} = ma.$$

Ezen egyenleteket összeadva, és a-t kifejezve:

$$a = \frac{2mg\cdot\sin\alpha}{2m+\dfrac{\Theta_1+\Theta_2}{r^2}}\,.$$

Ezt felhasználva a súrlódási erők:

$$F_{s1} = \Theta_1\frac{a}{r^2} = \frac{2\,mg\Theta_1\cdot\sin\alpha}{2\,mr^2+\Theta_1+\Theta_2};$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}mr^2;$$

$$F_{s1} = \frac{mg\cdot\sin\alpha}{\dfrac{7}{2}}\,.$$

$$F_{s2} = \Theta_2\frac{a}{r^2} = \frac{2\,mg\Theta_2\cdot\sin\alpha}{2\,mr^2+\Theta_1+\Theta_2};$$

$$\Theta_2 = mr^2;$$

$$F_{s2} = \frac{2\,mg\cdot\sin\alpha}{\dfrac{7}{2}}\,.$$

A tapadási súrlódás legnagyobb értéke $\mu F_{ny} = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$; tehát

$$F_{s1} \leq \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha;$$

$$\frac{2mg\cdot\sin\alpha}{7} \leq \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha;$$

$$\mu \geq \frac{2}{7}\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$F_{s2} \leq \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha;$$

$$\frac{4mg\cdot\sin\alpha}{7} \leq \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha;$$

$$\mu \geq \frac{4}{7}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

feltételek teljesülése esetén nem csúszik egyik henger sem. Az üres henger mozgásából adódó feltétel a szigorúbb, tehát ha a tapadási súrlódási együttható ennek eleget tesz, vagyis:

$$\mu \geq \frac{4}{7}\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\mu \geq \frac{4}{7} \sim 0{,}6;$$

akkor a két görgő csúszásmentesen gördül le.

37. A lejtőn legördülő hengerre három erő hat:
1. a nehézségi erő mg (iránya függőleges);
2. a nyomóerő F_{ny} (iránya merőleges a lejtőre);
3. a tapadási súrlódási erő F_s (iránya a haladás irányával ellentétes).

Ezek munkája:

1. $W_1 = mg \cdot l \cdot \sin\alpha$.

2. A nyomóerő munkája nulla, mert merőleges az elmozdulásra,

$W_2 = 0$.

3. A súrlódási erő támadáspontja l úton mozdul el az erővel ellentétes irányba, így munkája $-F_s l$. Az F_s erő a henger tengelyére $M = F_s r$ nyomatékot jelent, és mivel a henger φ szöggel el is fordul, a nyomaték munkája $M\varphi = F_s r\varphi$, a tiszta gördülés miatt $\varphi = \frac{l}{r}$; tehát:

$$W_3 = -F_s\, l + F_s\, r \frac{l}{r} = 0.$$

A tapadási súrlódási erő munkája nulla. Ha a henger csúszva gördül, a súrlódási erő két munkájának összege nem nulla, mert amíg a henger l úton előre halad, a csúszás miatt a szögelfordulás kisebb, mint tiszta gördüléskor. Így a két munka összege negatív, tehát a csúszási súrlódási erő csökkenti a mozgási energiát.

A tapadási súrlódási erő munkájában fellépő első tag azt jelenti, hogy a súrlódás csökkenti a haladó mozgáshoz tartozó energiát, a második tag a forgási energia növelését eredményezi. Mivel összegük nulla, a haladási energia ugyanannyival csökken, mint amennyivel a mozgási energia növekszik. A tapadási súrlódási erő szerepe ezek szerint csak annyi, hogy a nehézségi erő munkája eredményeként jelentkező mozgási energia-növekedést elosztja a haladó és forgó mozgás között.

A feladatban szereplő henger mozgási energiájának változása:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} \Theta\, \omega^2 - 0.$$

A munkatétel szerint:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_1 + W_2 + W_3\,;$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = mgl \cdot \sin\alpha.$$

Felhasználva az $\omega = \frac{v}{r}$, $\Theta = \frac{1}{2} mr^2$ összefüggéseket:

$$v = \sqrt{\frac{4gl \cdot \sin\alpha}{3}},$$

$$\underline{v = 6{,}3\, \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

38. A feladatbeli jelenségről a középiskolában tanult törvények nem képesek közvetlenül magyarázatot adni, szükség van újabb fogalomra és a forgó testek viselkedésének mélyebb vizsgálatára. Az alapos, részletes megfontolások helyett folyamodjunk ismét a haladó és forgó mozgás közötti hasonlósághoz. A haladó mozgás útját megfeleltettük a forgó mozgás szögelfordulásának, az időt önmagának, a sebességet a szögsebességnek, a gyorsulást a szöggyorsulásnak, a tömeget a tehetetlenségi nyomatéknak, az erőt a forgatónyomatéknak, s ekkor a rájuk vonatkozó egyenletek közötti megfeleltetés végig helyesen adódott. Nem kerestük azonban a haladó mozgás mozgásmennyiségének megfelelőjét. Folytassuk a mennyiségek megfeleltetését ebben az irányban. Az m tömegű, v sebességű tömegpont mozgásmennyiségének (impulzusának) az mv szorzatot neveztük. Ha az előbb felsorolt megfeleltetést alkalmazzuk, akkor a tömeg helyébe a tehetetlenségi nyomatékot, a sebesség helyébe a szögsebességet írva, a $\Theta\omega$ szorzathoz jutunk. Ezt a mennyiséget nevezzük el a m o z g á s m e n n y i s é g n y o m a t é k á n a k (használatosabb az i m p u l z u s n y o m a t é k, vagy p e r d ü l e t elnevezés), és jelöljük N-nel.

A mozgásmennyiség megváltozására láttuk a következő összefüggést:

$$\Delta(mv) = \Sigma F \cdot \Delta t;$$

$$\Delta I = \Sigma F \cdot \Delta t;$$

ami az impulzustétel. Alkalmazzuk erre az egyenletre a megfeleltetést, ekkor a

$$\Delta N = \Sigma M \cdot \Delta t; \qquad (N = \Theta\omega)$$

összefüggéshez jutunk. Ez azt mondja ki, hogy egy tengely körül forgó merev test impulzusnyomatékának elemi megváltozása egyenlő a forgatónyomatékok összegének és a változás rövid időtartamának szorzatával. Az analógia felhasználásával nyert törvény valóban igaz, de bizonyítását itt mellőzzük. A fizikában ezt a törvényt *impulzusnyomaték-tételnek* nevezik.

Ha a forgatónyomatékok összege zérus, a törvényből:

$\Delta N = 0;$

$N_2 - N_1 = 0;$

$(\Theta\omega)_2 - (\Theta\omega)_1 = 0;$

$(\Theta\omega)_2 = (\Theta\omega)_1;$

$\Theta\omega = \text{állandó}$

eredményhez jutunk. Vagyis, ha a forgó testre ható erők forgatónyomatékainak összege nulla, az impulzusnyomaték nem változik, megmarad. Ezt az összefüggést az *impulzusnyomaték megmaradása* tételének nevezzük.

Ez a törvény lehetővé teszi azt, hogy megértsük, miképpen tudja külső erők nélkül megváltoztatni a forgó ember a szögsebességét, nevezetesen a piruettező műkorcsolyázó.

Midőn a piruettező karjait behúzza, tehetetlenségi nyomatékát csökkenti. A rá ható forgatónyomaték nulla (legalábbis kicsi), tehát a $\Theta\omega$ = állandó kell, hogy legyen. Ez most már csak úgy lehet, ha ω megnövekszik. A piruettező forgása felgyorsul.

A karok kinyújtásakor minden fordítva történik: Θ növekszik, ω csökken.

7.39. A forgó rendszerre nem hat forgatónyomaték, ezért impulzusnyomatéka a 7.38. feladatban megbeszélt törvény alapján állandó.

Az impulzusnyomaték, amíg a tömegek l távol vannak, és ω szögsebességgel forognak:

$N_1 = (2 \cdot ml^2)\omega_1 .$

Az impulzusnyomaték a tömegek behúzása után:

$$N_2 = \left[2 \cdot m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_2.$$

A megbeszéltek szerint $N_1 = N_2$, tehát:

$$\left(2 \cdot m \frac{l^2}{4}\right)\omega_2 = \left(2 \cdot ml^2\right)\omega_1;$$

$\underline{\omega_2 = 4\omega_1 .}$

A szögsebesség a négyszeresére nőtt.

Nézzük meg, mi történt a mozgási energiával! Kezdetben

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(2 \cdot ml^2\right)\omega_1^2.$$

A behúzás után

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(2 \cdot m\frac{l^2}{4}\right)\omega_2^2.$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} \cdot (2ml^2)\frac{1}{4}(4\omega_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot ml^2)\omega_1^2;$$

$$\Delta E = 3 \cdot \frac{1}{2}(2ml^2)\omega_1^2 = 3E_1.$$

A mozgási energia négyszeresére nőtt. A mozgási energia megváltozásához munkavégzés szükséges. Milyen erő munkája növelte most a mozgási energiát? Nyilván a tömegekre ható rugóerő, vagyis a rendszeren belüli testek között ható erők, úgynevezett belső erők. A belső erők munkát végezve, megváltoztatják a rendszer mozgási energiáját, de az impulzusnyomatékot nem változtatják meg.

8. Rezgések

8.1. Adatok: $f = 2\ s^{-1}$; $A = 5\ cm = 0{,}05\ m$.
Keresettek: $T = ?$ $\omega = ?$ $v_{max} = ?$ $a_{max} = ?$
Harmonikus rezgő mozgást végző részecske esetén:

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\ s^{-1}} = 0{,}5\ s$; $\underline{T = 0{,}5\ s.}$

b) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2\ s^{-1} = 12{,}56\ s^{-1}$; $\underline{\omega = 12{,}56\ s^{-1}.}$

c) $v_{max} = A \cdot \omega = 0{,}05\ m \cdot 12{,}56\ s^{-1} = 0{,}63\ \frac{m}{s}$; $\underline{v_{max} = 0{,}63\ \frac{m}{s}.}$

d) $a_{max} = A \cdot \omega^2 = 0{,}05\ m \left(12{,}56\ s^{-1}\right)^2 = 7{,}9\frac{m}{s^2}$; $\underline{a_{max} = 7{,}9\ \frac{m}{s^2}.}$

8.2. *Az* a) *válasz a helyes.*

8.3. A fonálinga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(l az inga hosszát, g a nehézségi gyorsulás aktuális értékét jelenti.)
A Földön:

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{1\ m}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}}} = 2\ s.$$

A Holdon: $\left(g_{Hold} = \frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{6} = 1{,}63\frac{m}{s^2}.\right)$

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{1\ m}{1{,}63\frac{m}{s^2}}} = 4{,}9\ s.$$

A fonálinga lengésideje a Holdon 4,9 másodperc lenne.

4. Adottak: $c = 5000\ \frac{m}{s}$; $T = 0{,}002\ s$.
Keresett: $\lambda = ?$
A hullám terjedési sebessége, a rezgésidő és a hullámhossz között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

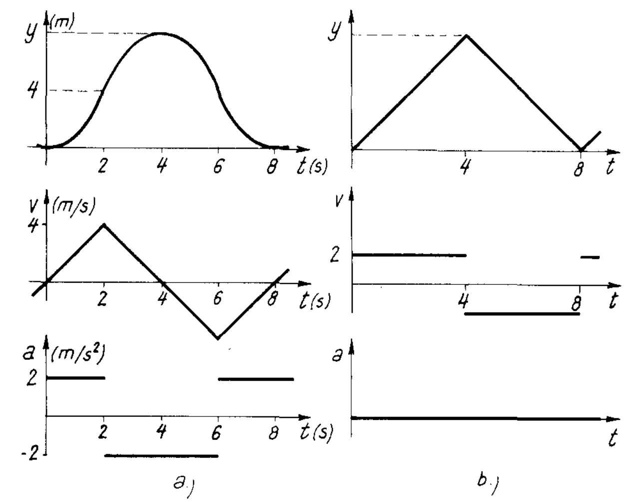
Ebből: $\lambda = c \cdot T = 5000\ \frac{m}{s} \cdot 0{,}002\ s = 10\ m$.

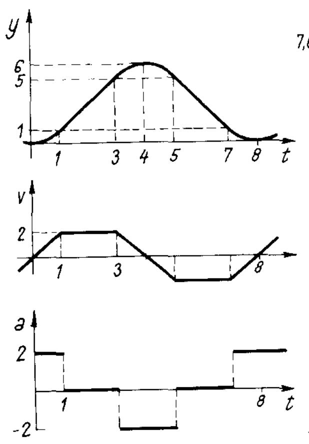
Tehát a hullámhossza 10 méter.

5. A megoldás az ábrákon látható.
A megoldás módszere:

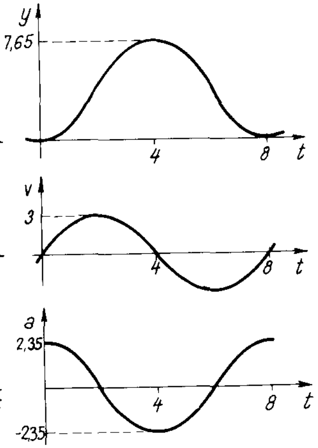
1. Az $a(t)$ gyorsulásgrafikon mutatja a $v(t)$ sebességgrafikon m e r e d e k s é g é t .

2. Az $y(t)$ kitérésgrafikon mutatja a $v(t)$ sebességgrafikon a l a t t i t e r ü l e t e t .





c)



d)

8.6. $y = 0{,}03 \cdot \sin \frac{\pi}{6} t;$

$y = A \cdot \sin \omega t$; tehát $A = 0{,}03$ m és $\omega = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{s}^{-1}$

a) $A = y_{\max} = 0{,}03$ m; $\qquad \underline{A = 0{,}03\ \mathrm{m}.}$

b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}\mathrm{s}^{-1}} = 12\ \mathrm{s};$ $\qquad \underline{T = 12\ \mathrm{s}.}$

c) $v_{\max} = A \cdot \omega = 0{,}03\ \mathrm{m}\ \frac{\pi}{6}\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}016\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$ $\qquad \underline{v_{\max} = 0{,}016 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$

d) $a_{\max} = A \cdot \omega^2 = 0{,}03\ \mathrm{m} \left(\frac{\pi}{6}\ \mathrm{s}^{-1}\right)^2 = 0{,}008\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$ $\qquad \underline{a_{\max} = 0{,}008 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$

e) $y(1) = 0{,}03 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0{,}015\ \mathrm{m};$ $\qquad \underline{y(1) = 0{,}015\ \mathrm{m}.}$

$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t = 0{,}016 \cos \frac{\pi}{6} t.$

$v(1) = 0{,}016 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 0{,}014 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$ $\qquad \underline{v(1) = 0{,}014 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$

$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -0{,}008 \cdot \sin \frac{\pi}{6} t.$

$a(1) = -0{,}008 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -0{,}004 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$ $\qquad \underline{a(1) = -0{,}004 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$

1. Először tisztázzuk az

$y = A \cdot \sin (\omega t + \delta)$

függvényben szereplő δ állandó fizikai jelentését. A színuszfüggvény argumentumának (annak, ami a képletben való felírásnál a „sin" után áll) a neve: f á z i s s z ö g. Rezgő mozgás esetén a fázisszög az időnek l i n e á r i s függvénye. E függvény meredekségét (ω) nevezik k ö r f r e k v e n c i á n a k, a f á z i s - á l l a n d ó t (δ) pedig k e z d ő f á z i s n a k.

Ez utóbbi elnevezés utal a δ fizikai jelentésére. Ugyanis a jelenségek fizikai leírásánál a m e g f i g y e l é s k e z d e t é t jelző időpillanatot szokás $t = 0$-nak választani. Amennyiben a fázis

$\varphi(t) = \omega t + \delta$

alakú, akkor a megfigyelés kezdőpillanatában ($t = 0$-kor) a fázis nem nulla, hanem

$\varphi(0) = \delta;$

s így δ a fázis kezdőértéke, vagyis a „kezdőfázis". Ha a megfigyelést hamarabb kezdtük volna, ha sikerült volna elkapni azt a pillanatot, amikor a fázis éppen nulla volt, akkor ugyanennek a rezgésnek a leírása most

$y = A \cdot \sin \omega t^*$

lehetne. Ekkor a sebesség, mint tudjuk

$v = A\omega \cdot \cos \omega t^*;$

és a gyorsulás időfüggése

$a = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t^*$

alakú.

A feladatot akkor tudjuk tehát megoldani, ha megtaláljuk a kapcsolatot t és t^* között. Tekintsük a kitérés időfüggvényének kétféle felírását:

$y = A \cdot \sin (\omega t + \delta)$ és $y = A \cdot \sin \omega t^*$.

Ez a két függvény ugyanazt a rezgést kell, hogy leírja, ezért:

$\omega t + \delta = \omega t^*.$

Ezek szerint a sebesség időfüggése:

$v = A\omega \cdot \cos \omega t^* = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta)$;

$\underline{v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta)}$;

A gyorsulás időfüggése pedig:

$a = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t^* = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta)$;

$\underline{a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta)}$.

2. A kitérés időfüggése:

$$y = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

vagyis az előbbi eredmények alkalmazhatók $\delta = \frac{\pi}{2}$ kezdőfázis esetére:

$$\underline{v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$\underline{a = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. A kitérés időfüggése:

$y = A \cdot \cos \omega t$.

Csupán azt kell észrevenni, hogy ez az eset éppen az előzővel egyezik meg, minthogy:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha.$$

Ennek megfelelően írjuk fel egyszerűbb alakban az előbb kapott $v(t)$ és $a(t)$ függvényeket is:

$\underline{v = -A\omega \cdot \sin \omega t}$;

$\underline{a = -A\omega^2 \cdot \cos \omega t}$.

Tanulság

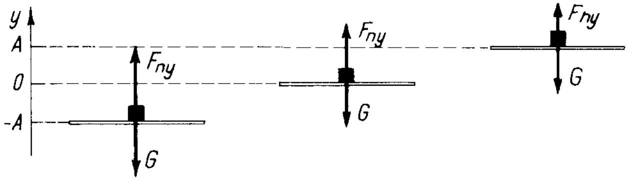
Ha egy rezgés „színuszos", akkor egyidejűleg „koszinuszos" is. Minden attól függ, mikor kezdünk a rezgésre „odafigyelni"

Miért zörög a kocka a fémlapon? Mielőtt erre válaszolnánk, előbb arra válaszoljunk, hogyan zörög a kocka a fémlapon. (Először mindig azt vizsgáljuk: MI TÖRTÉNIK?, és csak ez után azt, hogy MIÉRT?)

A kocka úgy „zörög", hogy sűrű egymásutánban pattog a fémlapon. Ráesik, leválik, ráesik, leválik olyan ütemben, ahogy a lap rezeg.

Most már jöhetnek a miértek: Miért válik el a kocka a fémlaptól? Miért csak egy bizonyos frekvenciától kezdődően tapasztaljuk a jelenséget?

Vizsgáljuk meg alaposan a kocka mozgását akkor, amikor még együtt mozog a fémlappal:



1. Milyen mozgást végez a kocka?

Harmonikus rezgő mozgást (együtt mozog a fémlappal). Tehát gyorsulása:

$a = -\omega^2 y$.

2. Milyen erők hatnak a kockára?

A nehézségi erő. A fémlap nyomóereje.

3. Mennyi a kockára ható erők eredője?

$\Sigma F = F_{ny} - G$.

(A fölfelé mutató irányt választottuk pozitívnak!)

4. Mi az összefüggés ΣF és a között?

$\Sigma F = ma$;

$F_{ny} - G = m(-\omega^2 y)$.

5. Fejezzük ki a kockára ható nyomóerőt:

$F_{ny} = G - m\omega^2 y = mg - m\omega^2 y$;

$F_{ny} = m(g - \omega^2 y)$.

6. Diszkutáljuk a kapott eredményt! A képlet nem lehet érvényes akkor, ha

$g < \omega^2 \cdot y$;

mivel a nyomóerő nem lehet negatív. (A lap nem tudja „húzni" a kockát, nincs ráragasztva a kocka a lapra!) Tehát ez az eset már nem felel meg az eredeti feltevésnek, vagyis a **kocka nem mozoghat együtt a fémlappal**, ha

$$g < \omega^2 y.$$

Milyen feltételt kaptunk ezzel a frekvenciára?

$$\omega^2 > \frac{g}{y};$$

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{y}};$$

$$f > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y}}.$$

Persze, y változó mennyiség, ezért a feltételnek eleget tevő frekvenciáknak van egy alsó határuk; ez az f_{min} a legnagyobb y-hoz tartozik. Felhasználva, hogy $y_{max} = A$ írhatjuk:

$$f > f_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}.$$

A feladat szövege szerint $A = 1\ \text{cm} = 0{,}01\ \text{m}$;

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}01\ \text{m}}} = 5\ \text{s}^{-1};$$

$$\underline{f > 5\ \text{s}^{-1}}$$

8.9. Rugóállandónak nevezzük a rugalmas anyagot feszítő erő s az erő által okozott megnyúlás hányadosát:

$$k = \frac{F}{\Delta l}. \qquad (1)$$

Kísérletileg megállapítható, hogy az F erővel megfeszített l hosszúságú és A keresztmetszetű rugalmas fémhuzal Δl megnyúlása az alábbi összefüggés szerint változik:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot l\frac{F}{A}. \qquad (2)$$

A képletben szereplő E mennyiség a huzal anyagi minőségére (s mint majd a termodinamikában látni fogjuk, a megnyújtás

folyamatára, körülményeire) jellemző állandó. A kísérletileg kapott (1) összefüggést a rugóállandó (2) definíciójával összevetve, kapjuk:

$$k = \frac{E\cdot A}{l}.$$

Ezt kellett bebizonyítanunk.

8.10. *a)* Az egyensúlyi helyzetben a testre ható erők eredőjének nullának kell lennie.

Milyen erők hatnak a testre?

A nehézségi erő lefelé, s a rugóerő fölfelé.

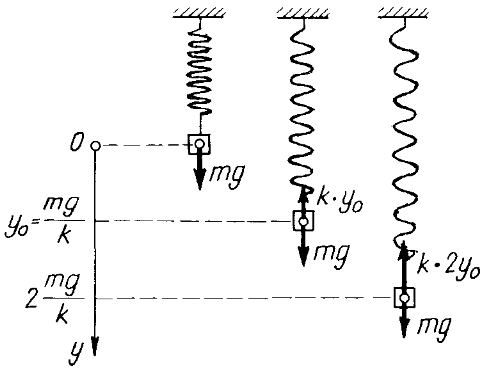
Egyensúly esetén tehát:

$$F_{neh} + F_{rugó} = 0;$$

$$mg + (-ky_0) = 0.$$

Ebből a rugó megnyúlása:

$$y_0 = \frac{mg}{k}.$$



<u>A test egyensúlyi helyzete tehát az elengedési helyzet alatt, attól $\frac{mg}{k}$ távolságra lesz.</u>

b) Milyen mozgást végez a test? — Harmonikus rezgő mozgást. Mi az amplitúdó? — A legnagyobb kitérés; de úgy is fogalmazhatnánk, hogy a nulla sebességű helyzet és a maximális sebességű helyzet távolsága.

Hol nulla a test sebessége? — Az elengedési helyzetben.

Hol maximális a test sebessége a rezgés közben? — Az egyensúlyi helyzetben.

Mennyi e két helyzet távolsága? — Az előbb kiszámítottuk: $\frac{mg}{k}$.

Tehát a rezgés amplitúdója: $\underline{A = \frac{mg}{k}}$.

c) A körfrekvencia, a tömeg és a rugóállandó közötti nagyon fontos összefüggést a dinamika alaptörvénye segítségével kaphatjuk meg.

1. Milyen mozgást végez a test?
Harmonikus rezgő mozgást az egyensúlyi helyzet körül. Tehát gyorsulása:

$$a = -\omega^2 \left(y - \frac{mg}{k}\right).$$

2. Milyen erők hatnak rá?
A nehézségi erő. A rugóerő.

3. Mennyi a testre ható erők eredője?

$$\Sigma F = mg - ky.$$

(A lefelé mutató irányt választottuk pozitívnak!)

4. Írjuk fel a dinamika alaptörvényét:

$$\Sigma F = ma;$$

$$mg - ky = m\left[-\omega^2\left(y - \frac{mg}{k}\right)\right]$$

$$mg - ky = -m\omega^2 y + m\omega^2 \frac{mg}{k}.$$

5. Diszkusszió. A kapott egyenletnek y minden szóba jöhető értékére fenn kell állnia. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyenlet két oldalán y együtthatói egyenlők egymással, azonkívül a konstans tagok is egyenlők egymással.
Tehát

$$-k = -m\omega^2;$$

és $mg = m\omega^2 \cdot \frac{mg}{k}$.

Szerencsére mindkét feltétel ugyanazt kívánja, csak más alakban, vagyis, hogy legyen

$$k = m\omega^2.$$

Ezt az összefüggést felhasználva válaszolhatunk a c) kérdésre:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

vagyis

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

d) A maximális sebesség:

$$v_{max} = A \cdot \omega = \frac{mg}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

e) A maximális gyorsulás:

$$a_{max} = A\omega^2 = \frac{mg}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2;$$

$$a_{max} = g.$$

f) A rugóerő maximális értéke:

$$F_{max} = k \cdot y_{max}; \qquad y_{max} = 2A;$$

$$F_{max} = k \cdot 2 \cdot \frac{mg}{k};$$

$$F_{max} = 2mg.$$

g) A test mozgási energiája az egyensúlyi helyzeten való áthaladás közben maximális:

$$E_{mozg.\,max} = \frac{1}{2} m \cdot v^2_{max} = \frac{1}{2} m\left(g \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2;$$

$$E_{mozg.\,max} = \frac{(mg)^2}{2k}.$$

h) A rugóerő egy rezgés során akkor végez pozitív munkát, amikor a testet a legalsó helyzetéből a legfelső helyzetébe viszi. Közben a rugóerő az úttal arányosan csökken a maximális $2mg$-ről nullára. Ezért a végzett munkát úgy számíthatjuk ki, mintha a maximális rugóerő fele hatott volna végig a $2A$ hosszúságú úton. Tehát

$$W_{rugó} = \frac{2mg}{2} \cdot 2A = mg \cdot 2 \cdot \frac{mg}{k};$$

$$W_{rugó} = 2\frac{(mg)^2}{k}.$$

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk a munkatételből is, ha kezdő és végállapotnak az előbbi két helyzetet tekintjük:
$\Sigma W = 0$; mert $E_{mozg_1} = 0$ és $E_{mozg_2} = 0$;
$W_{neh} + W_{rugó} = 0$.
A nehézségi erő munkája emelkedéskor negatív:
$W_{neh} = -mg \cdot 2A$.
Tehát

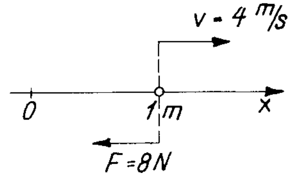
$$W_{rugó} = -W_{neh} = +mg \cdot 2A = mg \cdot 2\frac{mg}{k};$$

$$W_{rugó} = 2\frac{(mg)^2}{k}.$$

8.11. *a)* Csillapítatlan harmonikus rezgő mozgást végezne, nulla és egy maximális érték között.
b) A maximális érték fele lenne. (A szükséges indokolásokat a 8.10. megoldás magában foglalja.)

8.12. A mozgás pályájára illesszük rá a koordináta-rendszer x tengelyét úgy, hogy az egyensúlyi helyzet koordinátája $x = 0$ legyen. Ekkor a kitérés, a sebesség és a gyorsulás időfüggvényei a következők (lásd a 8.7. megoldást):
$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \delta)$;
$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta)$;
$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta)$;
A megadott értékek a következők:
$x(0) = 1$ m;

$$v(0) = 4\frac{m}{s};$$



$$\left.\begin{array}{l} F(0) = -8N \\ m = 2\ kg \end{array}\right\} \quad a(0) = \frac{F(0)}{m} = \frac{-8N}{2\ kg} = -4\frac{m}{s^2}.$$

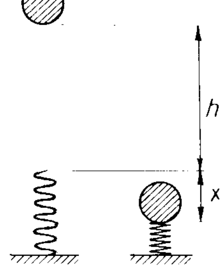
Helyettesítsük be ezeket a $t = 0$-ra vonatkozó értékeket:
$1\ m = A \cdot \sin\delta$;

$$4\frac{m}{s} = A\omega \cdot \cos\delta;$$

$$-4\frac{m}{s^2} = -A\omega^2 \cdot \sin\delta.$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:
$\omega = 2\ s^{-1}$; $\delta = 26{,}6° = 0{,}464$ (radián); $A = 2{,}24$ m.

.13. A rugó akkor nyomódik össze a legjobban, ha tömege a rá eső test tömegéhez képest elhanyagolhatóan kicsi. Ebben az esetben már nem kell azon problémázni, hogy az ütközés a rugóval rugalmas vagy rugalmatlan volt-e, hiszen abszolút rugalmatlan ütközésnél is elhanyagolható az energiaveszteség, ha az egyik test tömege elhanyagolhatóan kicsiny.
A feladatot a munkatétel segítségével oldjuk meg.



1. Mi legyen a kezdőállapot?
A golyó elindulásának pillanata.
2. Mi legyen a végállapot?
Az a pillanat, amikor a golyó egy pillanatra megáll az összenyomott rugón.
3. Milyen munkaforrásokkal volt a golyó kapcsolatban a kezdő és végállapot között?
A nehézségi erőtérrel. A rugóval.
4. Mennyi munkát végzett a golyón a nehézségi erőtér?
$W_{neh} = mg \cdot (h + x)$ (gyorsította).
5. Mennyi munkát végzett a golyón a rugó?

$$W_{rugó} = -\frac{1}{2}kx^2 \text{ (fékezte).}$$

6. Mennyi a golyón végzett munkák összege?

$$\Sigma W = mg(h + x) - \frac{1}{2}kx^2.$$

7. Mennyi a golyó mozgási energiájának változása?
$\Delta E_{mozg} = E_{mozg_2} - E_{mozg_1} = 0 - 0 = 0$.
8. Mi az összefüggés ΣW és ΔE_{mozg} között?
$\Sigma W = \Delta E_{mozg}$

$$\text{Tehát: } mg(h + x) - \frac{1}{2}kx^2 = 0.$$

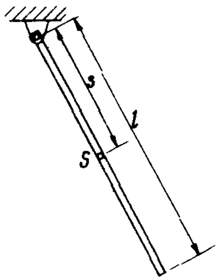
$$\text{Adottak: } m = 5\ kg; \quad h = 2\ m; \quad k = 5500\ \frac{N}{m}.$$

Keresett: $x = ?$
Behelyettesítve a munkatétel adta egyenletbe:

$$5\ kg \cdot 10\frac{m}{s^2}(2m + x) - \frac{1}{2}5500\frac{N}{m} \cdot x^2 = 0.$$

Megoldás: $x = 0{,}2$ m.

8.14. A fizikai inga lengésideje:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}};$$

(ahol Θ a test tehetetlenségi nyomatéka az adott forgástengelyre vonatkozólag; s pedig a test súlypontjának távolsága az adott forgástengelytől.)

Esetünkben $\Theta = \frac{1}{3}ml^2$ és $s = \frac{l}{2}$; tehát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{l}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{g}};$$

minthogy $l = 1{,}5$ m és $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; ezért $\underline{T = 2\ \text{s}.}$

8.15. Az úgynevezett alaphang esetén a húron kialakuló transzverzális állóhullám egyetlen orsó alakot ölt. Az alaphang hullámhossza így a húr rezgésbe hozható részének kétszerese:
$\lambda_1 = 2l = 2\cdot 25{,}2$ cm $= 50{,}4$ cm ; $\underline{\lambda_1 = 0{,}504\ \text{m}.}$

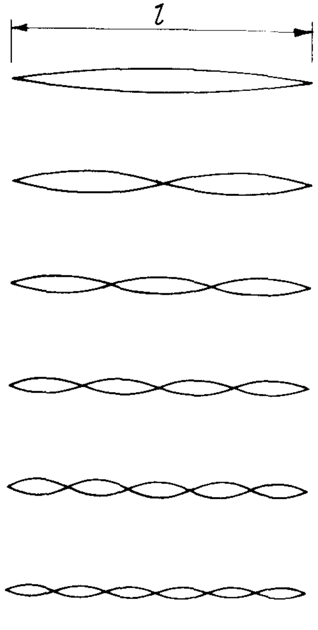
$$c = 1080\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{1080\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}504\ \text{m}}; \qquad \underline{f_1 = 2000\ \text{s}^{-1}.}$$

Amikor az első felhang szól, a húron két orsó alakul ki, amikor a második szól, akkor a húron három orsó alakul ki, és így tovább. Ezek szerint a megvalósuló további hullámhosszak, illetve frekvenciák:

$\underline{\lambda_2 = 2\cdot\frac{l}{2} = 252\ \text{mm};}$ $\underline{f_2 = 4000\ \text{Hz}.}$

$\underline{\lambda_3 = 2\cdot\frac{l}{3} = 168\ \text{mm};}$ $\underline{f_3 = 6000\ \text{Hz}.}$



$l = \frac{\lambda_1}{2}$	$f_1 = \frac{c}{\lambda_1}$
$l = 2\,\frac{\lambda_2}{2}$	$f_2 = 2f_1$
$l = 3\,\frac{\lambda_3}{2}$	$f_3 = 3f_1$
$l = 4\,\frac{\lambda_4}{2}$	$f_4 = 4f_1$
$l = 5\,\frac{\lambda_5}{2}$	$f_5 = 5f_1$
$l = 6\,\frac{\lambda_6}{2}$	$f_6 = 6f_1$

$\underline{\lambda_4 = 2\cdot\frac{l}{4} = 126\ \text{mm};}$ $\underline{f_4 = 8000\ \text{Hz}.}$

$\underline{\lambda_5 = 2\cdot\frac{l}{5} = 100{,}8\ \text{mm};}$ $\underline{f_5 = 10\ \text{kHz}.}$

$\underline{\lambda_6 = 2\cdot\frac{l}{6} = 84\ \text{mm};}$ $\underline{f_6 = 12\ \text{kHz}.}$

$\underline{\lambda_7 = 2\cdot\frac{l}{7} = 72\ \text{mm};}$ $\underline{f_7 = 14\ \text{kHz}.}$

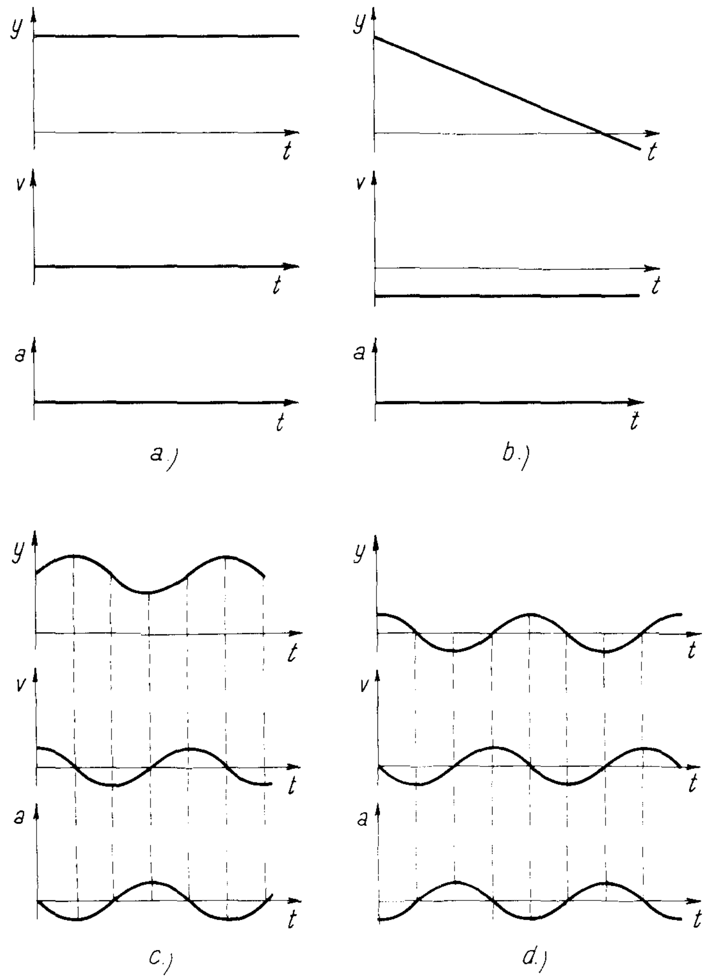
$\underline{\lambda_8 = 2\cdot\frac{l}{8} = 63\ \text{mm};}$ $\underline{f_8 = 16\ \text{kHz}.}$

$\underline{\lambda_9 = 2\cdot\frac{l}{9} = 56\ \text{mm};}$ $\underline{f_9 = 18\ \text{kHz}.}$

$\underline{\lambda_{10} = 2\cdot\frac{l}{10} = 50{,}4\ \text{mm};}$ $\underline{f_{10} = 20\ \text{kHz}.}$

A húron kialakuló állóhullámok rezgésszámai a 2000 Hz-nek természetes számú többszörösei lehetnek. Ezek közül az első 6—8 felhang lesz hallható.

8.16. A megoldások az ábrán láthatók. (Figyelmeztetés: x, v és a egységei a különböző grafikonokon általában különbözőek. Szándékosan nem tüntettük fel ezeket, mert csupán a grafikonok körülbelüli megrajzolása volt a feladat, nem pedig a pontos szerkesztés.)



8.17. $\underline{A = 2{,}5\ \mathrm{m}}$; $\underline{f = 0{,}96\ \mathrm{s}^{-1}}$.

8.18. *a)* $\underline{A = 0{,}04\ \mathrm{m}}$; *b)* $\underline{f = 1{,}27\ \mathrm{s}^{-1}}$; *c)* $\underline{T = 0{,}79\ \mathrm{s}}$;

d) $\underline{v_{\max} = 0{,}32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$; *e)* $\underline{a_{\max} = 2{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$;

f) $\underline{x\left(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}\right) = 0{,}04\ \mathrm{m}}$; $\underline{v\left(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}\right) = 0}$;

$\underline{a\left(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}\right) = -2{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$.

8.19. *a)* <u>(*1*) és (*5*)</u>; <u>(*2*) és (*3*) és (*4*)</u>; <u>(*7*) és (*8*)</u>.

b) <u>(*1*) és (*2*)</u>; <u>(*1*) és (*3*)</u>; <u>(*1*) és (*4*)</u>; <u>(*5*) és (*2*)</u>;

<u>(*5*) és (*3*)</u>; <u>(*5*) és (*4*)</u>.

c) Az összes többi, még képezhető pár. (Szám szerint 17.)

8.20. $\underline{A = 0{,}04\ \mathrm{mm}}$.

8.21. $\underline{\omega = 50\ \mathrm{s}^{-1}}$

8.22. $\underline{A = 1\ \mathrm{cm}}$; $\underline{T = 0{,}2\ \mathrm{s}}$.

8.23. $\underline{h = 50\ \mathrm{m}}$. (A légellenállás figyelembevétele nélkül.)

8.24. *a)* $\underline{W = 18{,}75\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}}$;
b) $\underline{W = 31{,}25\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}}$.

8.25. $\underline{T = 1{,}63\ \mathrm{s}}$; $\underline{l^* = 0{,}667\ \mathrm{m}}$.

8.26. $\underline{\lambda = 80\ \mathrm{cm}}$; $\underline{c = 352\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$; $\underline{t = 35\ ^\circ\mathrm{C}}$.

8.27. <u>Igen.</u> Az egyenletes körmozgás k é t e g y m á s r a m e r ő l e g e s , harmonikus rezgő mozgásból tehető össze. További kikötések: a két rezgés amplitúdója és frekvenciája azonos, fázis különbségük pedig $\frac{\pi}{2}$ legyen. Legyen például az egyik rezgés x irányú, a másik y-irányú. Ekkor:

$x = A \cdot \sin \omega t;$

$y = A \cdot \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cdot \cos \omega t.$

Mindkét egyenletet négyzetre emelve, és összeadva:

$x^2 + y^2 = A^2 \cdot \sin^2 \omega t + A^2 \cdot \cos^2 \omega t;$

$x^2 + y^2 = A^2 \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t);$

$x^2 + y^2 = A^2.$

Ez pedig egy A sugarú, origóközéppontú kör egyenlete. Tehát a tömegpont, amely e g y i d e j ű l e g végzi a kétféle rezgő mozgást, tulajdonképpen az A sugarú körön mozog egyenletesen ω szögsebességgel. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az r sugarú kör kerülete mentén történő ω szögsebességű körmozgás a következő két rezgő mozgásból tehető össze:

1. $x = r \cdot \sin \omega t;$

2. $y = r \cdot \cos \omega t.$

8.28. Igen. A harmonikus rezgő mozgás a legegyszerűbb esetben k é t a z o n o s k ö z é p p o n t ú é s s u g a r ú körmozgásból tehető össze. További kikötések: a keringési irányok ellenkezők legyenek, a szögsebességek n a g y s á g a pedig a z o n o s legyen. Indokolásul elég azt megmutatni, hogy két ilyen ellenkező irányú körmozgás eredője rezgő mozgás.
Tegyük fel, hogy az e g y i k körmozgás a következő két rezgő mozgásból tehető össze (l. 8.27. megoldás):

$x_1 = r \cdot \sin \omega t;$

$y_1 = r \cdot \cos \omega t.$

Ekkor a m á s i k , ellenkező irányú körmozgás például a következő két rezgés eredője:

$x_2 = r \cdot \sin (-\omega) t = -r \cdot \sin \omega t;$

$y_2 = r \cdot \cos (-\omega) t = +r \cdot \cos \omega t.$

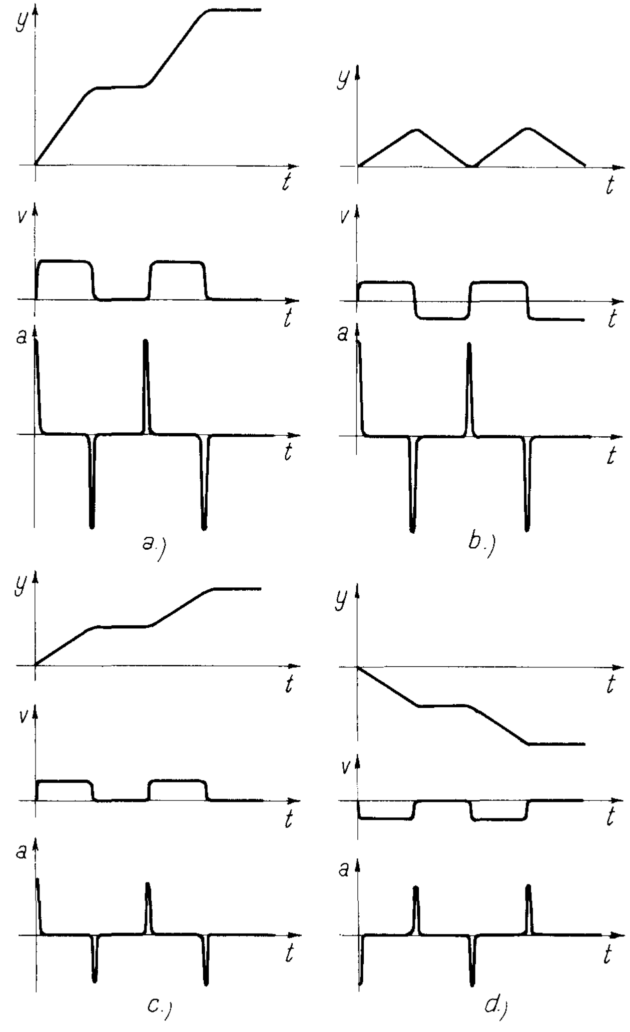
A két körmozgás eredője:

$x = x_1 + x_2 = r \cdot \sin \omega t + (-r \cdot \sin \omega t) = 0.$

$y = y_1 + y_2 = r \cdot \cos \omega t + r \cdot \cos \omega t = 2r \cdot \cos \omega t;$

vagyis y irányú harmonikus rezgő mozgás.

8.29. A megoldások az ábrán láthatók. Figyeljük meg, hogy a mozgás csupán a *b)* esetben periodikus, valamint, hogy a *c)* és a *d)* mozgás egymás tükörképe. E két utóbbi mozgás eredője a nyugalom lenne az adott koordináta-rendszerben.



8.30. Az egyensúlyi helyzet a két szélső kitérés között középen van, tehát

$$x_{\text{egyensúlyi}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 8{,}5\ \text{cm}.$$

A rezgés amplitúdója az egyensúlyi helyzet és valamelyik szélső kitérési helyzet távolsága, tehát
$A = 12\ \text{cm} - 8{,}5\ \text{cm} = 8{,}5\ \text{cm} - 5\ \text{cm} = 3{,}5\ \text{cm}$.
Adott még:

$$v_{\max} = A\omega = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az amplitúdó behelyettesítése után ω, majd f kiszámítható:
$\omega = 128{,}5\ \text{s}^{-1}$.
a) $f = 20{,}5\ \text{s}^{-1}$.
A körfrekvencia kiszámított értékét felhasználva:

$$a_{\max} = A\omega^2 = v_{\max}\cdot\omega = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 128{,}5\ \text{s}^{-1}$$

b) $a_{\max} = 580\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

8.31. Legyen a harmonikus rezgő mozgás kitérés—idő függvénye a következő:
$y = A\cdot\sin(\omega t + \delta)$.
Ekkor a sebesség—idő függvény a következő alakú:
$v = A\omega\cdot\cos(\omega t + \delta)$.
Fejezzük ki mindkét egyenletből a szögfüggvényeket:

$$\sin(\omega t + \delta) = \frac{y}{A};$$

$$\cos(\omega t + \delta) = \frac{v}{A\omega}.$$

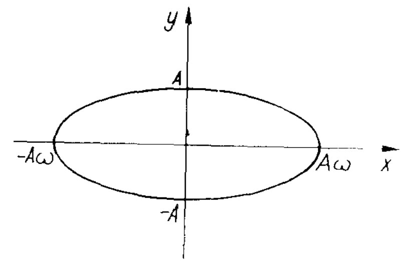
Emeljük négyzetre és adjuk össze őket:

$$\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2}.$$

A baloldalon álló négyzetösszeg azonosan 1.
Tehát

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1.$$

Abban a koordináta-rendszerben, amelynek tengelyére y és v előjeles értékeit mérjük, a fenti egyenlet egy origóközéppontú ellipszis egyenlete, ahol is az ellipszis tengelyeinek nagysága:



$2A\ (= 2y_{\max})$, illetve $2A\omega\ (= 2v_{\max})$.

8.32. Legyen az egyik rezgés kitérés—idő függvénye:
$y = A\cdot\sin(\omega t + \delta)$;
a másiké pedig:
$y^* = A^*\cdot\sin(\omega t + \delta^*)$.
Kérdés:
$(\omega t + \delta) - (\omega t + \delta^*) = ?$
Mikor halad át az első az egyensúlyi helyzeten megadott irányban?
Amikor $y = 0$, és mondjuk $v > 0$.
Tehát
$\sin(\omega t_0 + \delta) = 0; \qquad \omega t_0 + \delta = 0 + 2k\pi.$
Ugyanekkor a másik kitérése maximális, mégpedig:

$$\sin(\omega t_0 + \delta^*) = 1; \qquad \omega t_0 + \delta^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

A két fázisszög közti különbség:

$$(\omega t_0 + \delta) - (\omega t_0 + \delta^*) = -\frac{\pi}{2}.$$

A második rezgés tehát fázisban $\dfrac{\pi}{2}$-vel (90°-kal) megelőzi az elsőt.

8.33. A rezgő mozgást végző tömegpont kitérés—idő függvénye:

$$x = A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right);$$

ahol $A = 20\ \text{cm}$; $\qquad T = 2\ \text{s}$.
Mennyi utat tesz meg két szélső kitérés között?
$s = 2A = 40\ \text{cm}$.

Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat?

$$t = \frac{T}{2} = 1\ \text{s}.$$

Mennyi tehát az átlagsebessége?

$$v_{\text{átl}} = \frac{s}{t} = \frac{40\ \text{cm}}{1\ \text{s}} = 40\frac{\text{cm}}{\text{s}};$$

$$v_{\text{átl}} = 40\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Ekkora állandó sebességgel kell tehát oda-vissza mozognia ahhoz, hogy T illetve f változatlan maradjon.

b) R e z g ő m o z g á s e s e t é n : $10\ \text{cm} = \frac{20\ \text{cm}}{2} = \frac{A}{2}$.

$$-\frac{A}{2} = A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1 + \delta\right); \quad \text{tehát } \frac{2\pi}{T}t_1 + \delta = -\frac{\pi}{6}.$$

$$+\frac{A}{2} = A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2 + \delta\right); \quad \text{tehát } \frac{2\pi}{T}t_2 + \delta = +\frac{\pi}{6}.$$

Kiszámítandó $t_2 - t_1$.
A két jobb oldali egyenletet kivonva egymásból, ez a különbség meghatározható:

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{6}.$$

A jelen esetben $T = 2$ s, tehát

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{3}\ \text{s}.$$

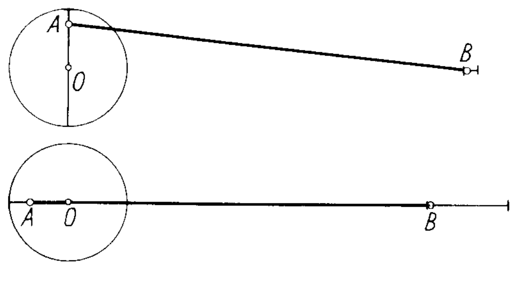
Egy teljes rezgés során azonban kétszer teszi meg ezt az utat a tömegpont „oda" és „vissza", tehát a -10 cm és $+10$ cm határok között tartózkodik összesen $\frac{2}{3}$ másodpercig.

E g y e n l e t e s m o z g á s e s e t é n a -10 cm-től $+10$ cm-ig tartó 20 cm-es utat a tömegpont:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{20\ \text{cm}}{40\frac{\text{cm}}{\text{s}}} = \frac{1}{2}\ \text{s}$$

idő alatt teszi meg. Ebben az esetben is kétszer teszi meg ugyan azt az utat egy teljes rezgés során (oda és vissza), tehát a -10 és $+10$ cm határok között összesen 1 másodpercig tartózkodik.

8.34. Tudjuk, hogy az egyenletes körmozgás két, egymásra merőleges harmonikus rezgő mozgásból összetehető. (lásd a 8.27. feladat megoldását). Legyen most az egyik az OB egyenesre merőleges, a másik pedig az OB egyenesbe eső rezgő mozgás.



1. Tegyük fel, hogy csak az első rezgő mozgás működik. Az A pont tehát a kör OB-re merőleges átmérője mentén oszcillál. Milyen mozgást végez a B pont? Szintén oszcilláló mozgást, de m i n é l h o s s z a b b a z AB r ú d h o s s z a , annál kevésbé vehető észre, hogy a B pont mozog. Akármilyen pontos berendezéssel is figyeljük a B pont mozgását, mindig található egy olyan hosszú AB rúd, hogy a B pont mozgása már ne legyen észlelhető. (Mikroszkóppal nézzük? Még hosszabb rúd, s már így sem látható. Ez a kötekedés tehát felesleges!)
2. Tegyük fel, hogy csak a másodikban említett rezgő mozgás működik, vagyis, hogy az A pont a körnek OB egyenesre eső átmérője mentén harmonikus rezgő mozgást végez. Milyen mozgást végez a B pont? Ugyanezt, mivel a rúd maga is az egyenes mentén mozog. A B pont tehát r amplitúdójú és ω körfrekvenciájú harmonikus rezgő mozgást végez az OB egyenesen.

3. Tegyük fel, hogy az A pont $\frac{\pi}{2}$ fáziskülönbséggel mindkét rezgést egyszerre végzi. (Vagyis: egyenletes körmozgást végez az r sugarú körön, ω szögsebességgel.) Ekkor a B pontnak is mindkét előbb említett mozgást egyszerre kell végeznie. Csakhogy az első esetben alig mozgott, s így elég hosszú rúd esetén mondhatjuk, hogy ez az első mozgás a másodikat nem zavarja meg, mellette elhanyagolható. Vagyis a B pont mozgása elég hosszú rúd esetén a második esetbeni mozgásával lesz azonos. Az pedig harmonikus rezgő mozgás. Ezzel bebizonyítottuk a feladatban megfogalmazott állítást.

8.35. *a)* Ha az l hosszúságú rugó bizonyos F erő hatására Δl-lel megnyúlik, akkor ugyanezen F erő hatására az $\frac{l}{2}$ hosszúságú rugó megnyúlása $\frac{\Delta l}{2}$ lesz.

A rugóállandó definíciója:

$$k = \frac{F}{\Delta l}.$$

Ezek szerint a fele hosszúságú rugó rugóállandója **kétszerese az** eredetinek. Így a keletkezett rugók rugóállandója:

$$k' = \frac{F}{\Delta l'} = 2\cdot\frac{F}{\Delta l} = 2k = 2\cdot 6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};$$

$$k' = 12\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

b) Mindkét rugó rugóállandója egyenlő. A két párhuzamosan kapcsolt rugót kétszer akkora erővel lehet ugyanolyan mértékben megnyújtani, mint külön-külön akármelyiket. Tehát

$$k'' = \frac{2F}{\Delta l'} = 2\cdot\frac{F}{\Delta l'} = 2k' = 2\cdot 12\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};$$

$$k'' = 24\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

8.36. A deszka harmonikus rezgő mozgást végez. Ezt a sejtést kell bebizonyítanunk (vagy megcáfolnunk). A deszkára ható erők:

függőleges állásúak: G; F_{ny1}; F_{ny2};

vízszintes állásúak: μF_{ny1}; μF_{ny2};

A deszka függőleges irányban nem gyorsul, így:

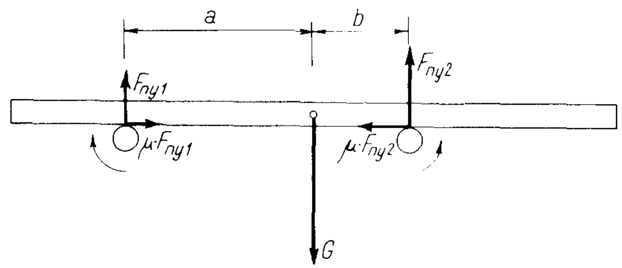
$$F_{ny1} + F_{ny2} - G = 0. \qquad (1)$$

Másrészt nem is forog a deszka, tehát:

$$a\cdot F_{ny1} = b\cdot F_{ny2}. \qquad (2)$$

(*1*) és (*2*) összevetéséből kapjuk:

$$F_{ny1} = \frac{b}{a+b}\cdot G; \qquad F_{ny2} = \frac{a}{a+b}\cdot G.$$



Most figyeljük a vízszintes irányú erők eredőjét:

$$\Sigma F = \mu F_{ny2} - \mu F_{ny1} = \mu(F_{ny2} - F_{ny1}) =$$

$$= \mu\left(\frac{a}{a+b}G - \frac{b}{a+b}G\right) = \mu\frac{a-b}{a+b}G = (a-b)\cdot\mathrm{const.}$$

A deszka egyensúlyban van, ha $a = b$. Egyébként pedig egy olyan v i s s z a t é r í t ő erő hat rá, amely az egyensúlyi helyzettől való távolsággal $\left(\frac{a-b}{2}\text{-vel}\right)$ a r á n y o s . Ez éppen a harmonikus rezgő mozgás létrejöttének dinamikai feltétele.

8.37. Mit jelent az, hogy csúszik a test a deszkán? Azt jelenti, hogy sebessége a deszkáétól különböző. Hogyan lehetséges ez? Kis amplitúdójú rezgések esetén még a test a deszkához tapadva, azzal együtt oszcillál. Ahogy növekszik az amplitúdó, a szélső helyzetekben egyre nagyobb erőre van szükség ahhoz, hogy a tárgy a kívánt gyorsulással mozogjon. Ezt az egyre nagyobb és nagyobb erőt a tapadási súrlódási erő egyszer csak már nem bírja kifejteni, s ekkor a test a deszkánál kisebb gyorsulással mozog tovább. Következésképpen sebessége is eltér a deszkáétól, vagyis a deszkán csúszni kezd.

A határeset tehát

$$F_{max} = ma_{max}.$$

$$\mu_0 mg = m(A\cdot\omega^2);$$

$$\mu_0 = \frac{A\cdot\omega^2}{g} = \frac{A4\pi^2 f^2}{g}.$$

Behelyettesítve $A = 0,6$ m; $f = 0,5\ s^{-1}$; $g = 9,81\ \frac{m}{s^2}$ értékeket:

$\mu_0 = 0,6$.

8.38. Adottak: $m = 0,3$ kg; $k = 0,5\ \frac{N}{m}$; $x = 0,04$ m.

Keresettek: *a)* $v_{max} = ?$ *b)* $W_{rugó} = ?$

Az egyensúlyi helyzet a rugó megfeszítetlen állapotához tartozik, az egyik szélső kitérés pedig a rugó megnyújtott, indulási helyzete. Ez azt jelenti, hogy a test olyan rezgő mozgást végez, amelynek amplitúdója:

$A = 0,04$ m;

és körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0,5\frac{N}{m}}{0,3\ kg}} = 1,29\ s^{-1}.$$

a) A test sebességének legnagyobb értéke:

$v_{max} = A\omega = 0,04\ m \cdot 1,29\ s^{-1}$;

$$v_{max} = 5,16\ \frac{cm}{s}.$$

b) A rugóerő által végzett munka elindulástól a maximális sebesség eléréséig kétféleképpen is kiszámítható:

1. Közvetlenül a rugóerő munkáját számolva:

$$W_{rugó} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5\ \frac{N}{m} \cdot (0,04\ m)^2 = 4 \cdot 10^{-4}\ J.$$

2. Közvetve, a munkatételből számolva:

$$W_{rugó} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}0,3 kg \cdot \left(5,16 \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s}\right)^2 = 4 \cdot 10^{-4}\ J.$$

Tehát a rugóerő által végzett munka $4 \cdot 10^{-4}$ J.

8.39. Az állítás egyszerűen a munkatételből következik, ha felhasználjuk azt a tényt, hogy a rugóerő által végzett munka úgy is képzelhető (szerencsére), mint a rugóhoz kapcsolt test rugalmas potenciális energiája megváltozásának -1-szerese.

$W_{rugó} = -\Delta E_{pot}$.

Ezért a munkatétel ($W_{rugó} = E_{kin}$) így is írható:

$-\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$.

$0 = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}$;

$0 = \Delta (E_{kin} + E_{pot})$.

Ez éppen azt jelenti, hogy

$E_{kin} + E_{pot} =$ állandó.

Másrészt az állítást úgy is beláthatjuk, hogy felhasználjuk a kitérés és a sebesség időfüggvényeit. Legyen ugyanis a kitérés időfüggvénye:

$x = A \cdot \sin(\omega t + \delta)$;

ekkor a sebességé:

$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta)$.

A test pillanatnyi potenciális energiája:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2;$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta).$$

A test pillanatnyi kinetikus energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2;$$

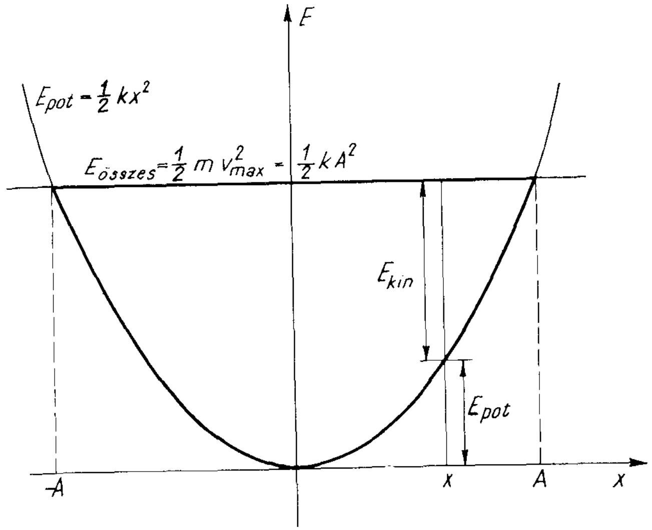
$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\ A^2\ \omega^2 \cdot \cos^2(wt + \delta).$$

A kettőt összeadva, és felhasználva, hogy $k = m\omega^2$:

$$E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}\ m\omega^2\ A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}m\omega^2\ A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \delta).$$

Minthogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; ezért:

$$E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}\ m\omega^2\ A^2 = \frac{1}{2}k\ A^2 = \text{állandó}.$$



Az ábrán a potenciális és az összenergia mint a kitérés függvénye látható.

8.40. Használjuk fel a **8.39.** feladat megoldásánál kapott végeredményt:

$$E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2.$$

Adatok: $m = 3$ kg; $f = 10\ s^{-1}$; $A = 0{,}1$ m.

$$E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot 3\ kg\ (2\pi \cdot 10 s^{-1})^2 \cdot (0{,}1\ m)^2 \cdot$$

$$\underline{E_{pot} + E_{kin} = 59{,}1\ J.}$$

8.41. A feltétel szerint legyen:
$y = A \cdot \sin (2\pi f \cdot t + \delta)$.
Ekkor a mozgási energia:

$$E_{mozg} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m [A\omega \cdot \cos (2\pi f \cdot t + \delta)]^2;$$

$$E_{mozg} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 (2\pi f \cdot t + \delta).$$

Használjuk fel a következő matematikai azonosságot:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Tehát

$$E_{mozg} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos (4\pi f \cdot t + 2\delta)];$$

$$E_{mozg} = \frac{m A^2 \omega^2}{4} [1 + \cos (2\pi \cdot 2f \cdot t + 2\delta)].$$

Ebből a képletből már leolvasható, hogy a mozgási energia zérus és maximum között oszcillál $\underline{2f}$ frekvenciával.

8.42. *a)* A bal oldali rugó által végzett munka:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \frac{N}{m} \cdot (0{,}05\ m)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \frac{N}{m} \cdot (0{,}02\ m)^2.$$

Azért ennyi, mert ameddig a bal oldali rugó össze volt nyomva, addig a sebességgel azonos irányban nyomta, gyorsította a testet, tehát a rugó pozitív munkát végzett. Miután azonban a test már továbblendült, ez a rugó megnyúlt, s így a sebességgel ellenkező irányú erőt fejtett ki rá. Ezen a 2 cm-es útszakaszon tehát a rugó negatív munkát végzett. Végül is a rugó által végzett munka:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \frac{N}{m} \cdot [(0{,}05 m)^2 - (0{,}02\ m)^2];$$

$$\underline{W_1 = 5{,}25 \cdot 10^{-4}\ J.}$$

b) A jobb oldali rugó által végzett munka:

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{N}{m} \cdot (0{,}05\ m)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{N}{m} \cdot (0{,}02\ m)^2.$$

Az indokolás ugyanaz, mint előbb. Ez a rugó is először a test sebességével megegyező irányban húzta, azután pedig ellenkező irányban nyomta a testet.

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{N}{m} \cdot [(0{,}05\ m)^2 - (0{,}02\ m)^2];$$

$$\underline{W_2 = 10{,}5 \cdot 10^{-4}\ J.}$$

c) Alkalmazzuk a munkatételt! Kezdőállapot az elindulási helyzet ($x = -5$ cm; $v = 0$); végállapot az $x = 2$ cm-es helyzet. Kiszámítható az itteni sebesség.

$$\Sigma W = E_{mozg2} - E_{mozg1};$$

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} mv^2 - 0;$$

$$5{,}25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} + 10{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot v^2;$$

$$v = 0{,}25 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

8.43. Használjuk fel a **8.9.** feladatban kapott eredményt! Ezek szerint az l hosszúságú, A keresztmetszetű, E Young-modulusú fémhuzal megfeszítéskor $\frac{E \cdot A}{l}$ rugóállandójú rugóként viselkedik.

Azt tudjuk, hogy a k rugóállandójú rugó hosszának x-szel való megnövelése:

$$W = \frac{1}{2} k x^2$$

munkabefektetést igényel.

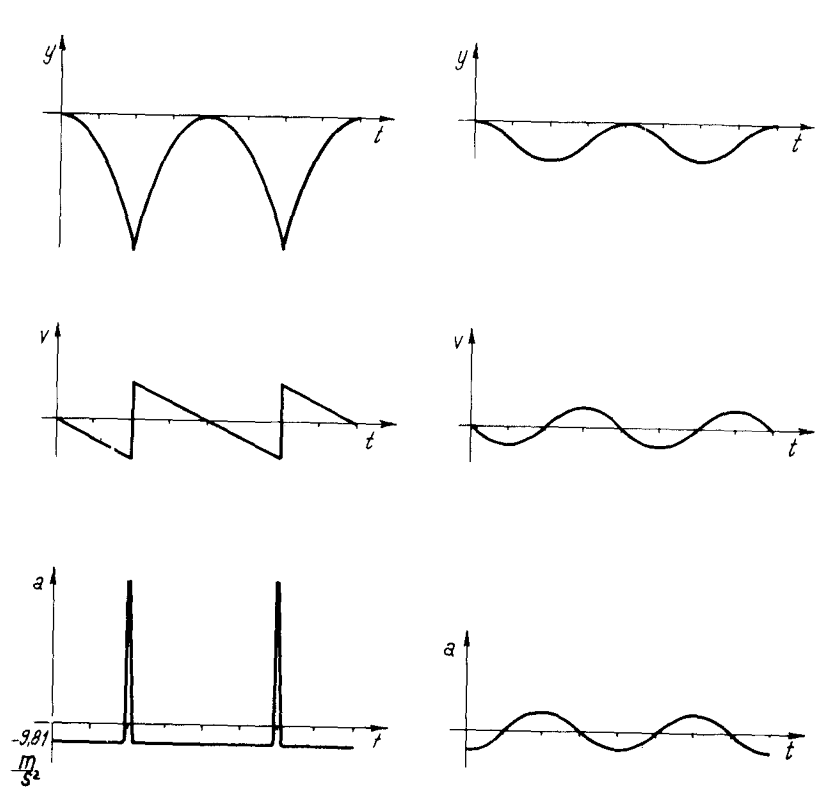
Jelen esetben

$$k = \frac{E \cdot A}{l} \quad \text{és} \quad x = \Delta l. \text{ Tehát}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l} \cdot (\Delta l)^2.$$

Ezt kellett bebizonyítanunk.

8.44. Egyik esetben sem! Indokolás: nem teljesül a harmonikus rezgő mozgás létrejöttének dinamikai feltétele, mivel a labdára két ütközés között *állandó nagyságú erő hat*, s így *gyorsulása* is állandó! Az ábrán egymás mellett látjuk a tökéletesen rugalmasan ütköző labda periodikus mozgásának és a vele azonos frekvenciával mozgó, de harmonikus rezgő mozgást végző testnek $y(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ grafikonjait.



8.45. Az erő bármely x helyen a potenciális energia ottani meredekségének (-1)-szerese. Ha ugyanis a munkatétel:

$$W = \Delta E_{kin}$$

alakjából energiamegmaradás-törvényt akarunk kovácsolni, akkor a munkavégzés helyett (ha sikerül) bevezetjük a potenciális energia-változást. Ha azt akarjuk, hogy:

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{állandó}$$

legyen, vagyis, hogy:

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0$$

legyen, akkor ez csak úgy sikerül, ha a potenciális energia változását így definiáljuk:

$$\Delta E_{pot} = -W.$$

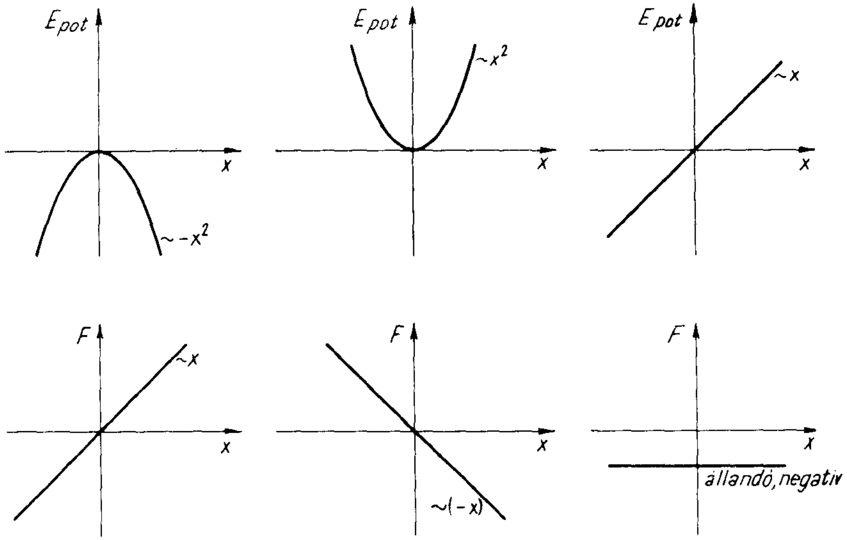
Felhasználva a munka definícióját:

$\Delta E_{pot} = -F \cdot \Delta x;$

tehát az erő:

$$F = -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta x};$$

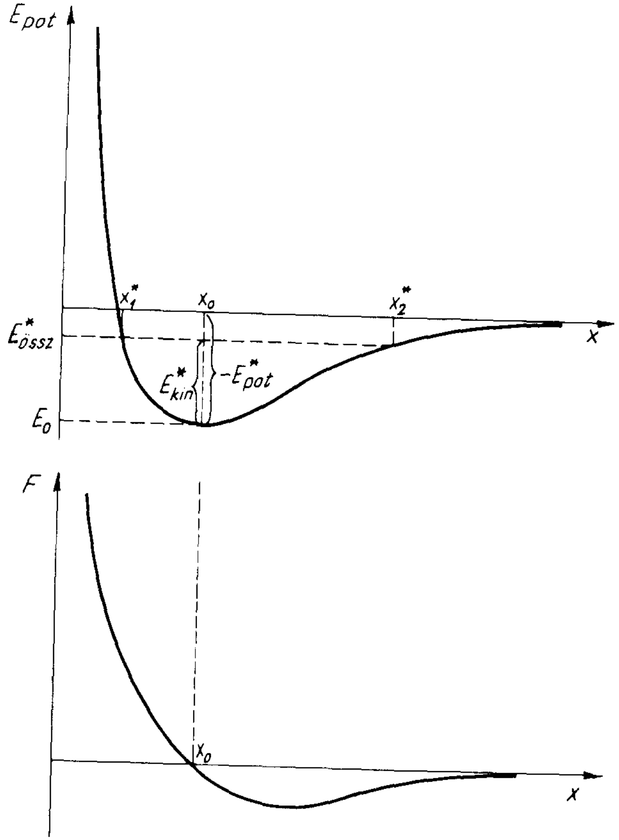
vagyis „a potenciális energia ottani meredekségének −1-szerese", ahogyan azt állítottuk.
Az erő–elmozdulás grafikonokat ezek után könnyen megszerkeszthetjük.



Az *a)* esetben az elmozdulással azonos irányú (tehát taszító) erő hatására a részecske növekvő mértékben gyorsul az origóval ellentétes irányban. $x = 0$ labilis egyensúlyi helyzet.
A *b)* esetben a részecskére az elmozdulással arányos, de azzal ellentétes irányú (vonzó) erő hat. Ennek hatására a részecske harmonikus rezgő mozgást végez az $x = 0$ stabilis egyensúlyi helyzet körül.
A *c)* esetben a részecskére ható erő nagysága állandó. Iránya azért negatív, mert a potenciális energia x növekedtével nőtt. Ez az eset áll elő például a földi nehézségi erőtérben, itt a Föld

felszínének közelében. A testre ható erő (mg) nagysága állandó, iránya lefelé mutat, míg a potenciális energia (mgh) felfelé növekszik.

8.46. *a)* Az ábrán látható.
b) A részecske mindaddig rezgő mozgást végez, amíg mozgása bizonyos x_1 és x_2 határok közé korlátozódik. Az ábrázolt esetben ez akkor valósul meg, ha a részecske összenergiája negatív. Minthogy az összenergia nem függhet a helytől, ezért a mozgási energia akkor a legnagyobb, amikor a potenciális energia a legkisebb. Ez mindig az x_0 helyen következik be. A határesetben az összenergia zérussá válik, ekkor a mozgási energia az x_0 helyen



éppen $-E_0$ lesz ($-E_0 > 0$; mert $E_0 < 0$). A rezgő mozgást végző részecske maximális kinetikai energiája tehát:

$$\underline{E_{kin\,(max)} = -E_0.}$$

8.47. A gyűrűnek — mint fizikai ingának — a lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgR}}.$$

Az $l = 2R$ hosszúságú matematikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

A két lengésidő egyenlő, tehát:

$$2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}};$$

$$\underline{\Theta = 2mR^2.}$$

Érdekes észrevenni, hogy ez pont kétszerese a gyűrű középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéknak.

8.48. A tehetetlenségi nyomaték az adott forgástengelyre vonatkozólag:

$$\Theta = \Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2;$$

$$\Theta = 1\ \text{kg}\cdot(1\ \text{m})^2 + 1\ \text{kg}\cdot(2\ \text{m})^2;$$

$$\Theta = 5\ \text{kgm}^2.$$

A súlypont távolsága a forgástengelytől:

$$s = 0{,}5\ \text{m}.$$

A fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\ \text{kg m}^2}{2\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}5\ \text{m}}};$$

$$\underline{T = 4{,}5\ \text{s}.}$$

8.49. A két legközelebbi, azonos fázisban mozgó pont távolsága a h u l l á m h o s s z . Jelen esetben:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{330\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{300\ \frac{1}{\text{s}}} = 1{,}1\ \text{m};$$

$$\underline{\lambda = 1{,}1\ \text{m}.}$$

8.50. Először határozzuk meg a hullámhosszt:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\ \frac{1}{\text{s}}} = 1\ \text{m}.$$

Az egymástól x távolságra levő pontok fáziskülönbsége a 2π-nek ($360°$-nak) annyiad része, ahányad része x a λ-nak.
Most:

$$\frac{x}{\lambda} = 0{,}3:$$

ezért a fáziskülönbség a két pont között:

$$\Delta\varphi = 0{,}3\cdot 2\pi:$$

$$\underline{\Delta\varphi = 0{,}6\ \pi.} \qquad (\Delta\varphi = 108\ °.)$$

9. Folyadékok és gázok mechanikája

9.1. A feladat a *víz* nyomását kérdezi, ezért a légnyomást nem kell figyelembe vennünk.

A folyadék felszíne alatt uralkodó nyomás (abban az esetben, ha a folyadék sűrűsége mindenhol ugyanannyi) egyenesen arányos a felszíntől mért (h) mélységgel.

$$p = \varrho \cdot g \cdot h.$$

Adatainkat behelyettesítve:

$$p = \varrho \cdot g \cdot h = 1{,}08 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^3\text{m} = 1{,}08 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2};$$

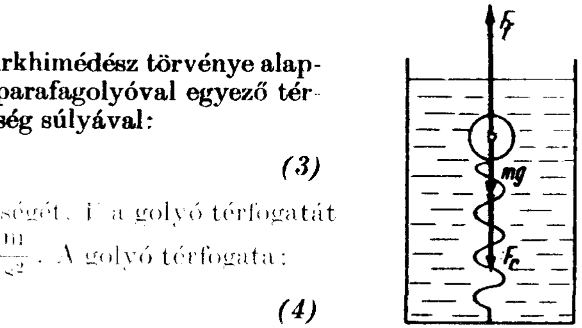
$$\underline{p = 1{,}08 \cdot 10^7 \text{ Pa.}}$$

9.2. A parafagolyó a víz alatt egyensúlyban van: a rá ható erők vektori összege zérus ($\Sigma F = 0$). A golyóra ható erők: a nehézségi erő, a folyadék által kifejtett felhajtóerő (F_f) és a rugó által kifejtett erő (F_r). Vektori összegük:

$$\boldsymbol{F}_r + m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_f = 0. \qquad (1)$$

A rugó által kifejtett erő (feltételezve, hogy a rugó túlzottan nem nyúlik meg, és ezért érvényes Hooke törvénye) egyenesen arányos a megnyúlással (y). Az arányossági tényező a rugóállandó (k):

$$F_r = ky. \qquad (2)$$



A felhajtóerő – Arkhimédész törvénye alapján – egyenlő a parafagolyóval egyező térfogatú vízmennyiség súlyával:

$$F_f = \varrho_v g \cdot V; \qquad (3)$$

ahol ϱ_v a víz sűrűségét, V a golyó térfogatát jelenti és $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A golyó térfogata:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}. \qquad (4)$$

A golyóra ható nehézségi erő:

$$mg = \varrho_p g \cdot V$$

A (*2*), (*3*) és (*5*) összefüggést (*1*)-be helyettesítve:

$$ky + \varrho_p g V - \varrho_v g V = 0$$

Ebből a kitérés, (*4*) felhasználásával:

$$y = \frac{\varrho_v g - \varrho_p g}{k} \cdot V = \frac{(\varrho_v - \varrho_p) g}{k} \cdot \frac{4r^3\pi}{3};$$

$$y = \frac{(10^3 - 2 \cdot 10^2) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \cdot 27 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 \cdot 3{.}14}{3 \cdot 22{,}41 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$y = 4{,}03 \text{ cm}$$

A rugó megnyúlása $\underline{4{,}03 \text{ cm.}}$

9.3. A fadarabot tartalmazó pohárból a fadarab vízre helyezésekor kifolyó víz súlya – Arkhimédész törvénye értelmében – ugyanannyi, mint a fadarabra ható felhajtóerő. A felhajtóerő viszont egyenlő a fadarab súlyával, mert a fadarab egyensúlyban van. Ezért a fadarabot tartalmazó pohár súlya ugyanannyi, mint a másik poháré.

9.4. A szappanoldat (illetve a legtöbb mosószer vizes oldata) erősen habosítható. (Könnyen képződik a „szappanbuborék".) Ez azt jelenti, hogy az oldat felületi **feszültsége lényegesen kisebb**, mint a tiszta vízé.

9.5. *a)* Mind a rugóállandó (k) és **a rugó összenyomódása** (Δx), valamint a dugattyú felszíne (A) ismert, **a légnyomás**:

$$p_0 = \frac{F}{A} = \frac{k \cdot \Delta x}{A} = \frac{4 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{cm}^2} = 10{,}2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2};$$

$$\underline{p_0 = 1{,}02 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}$$

b) A tó fenekén a nyomás:

$$p = \varrho_v g h = 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\ \mathrm{m} = 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

A rugó összenyomódása:

$$\Delta x = \frac{A \cdot p}{k} = \frac{2 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{4 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m};$$

$$\underline{\Delta x = 5\ \mathrm{mm}.}$$

(Ez az utóbbi eredmény várható is volt, hiszen a feladat *a)* részében is kb. 10^5 Pa nyomás és 5 mm rugó-összenyomódás volt.)

9.6. **Az edény kocka alakú részében 1 liter víz fér el, a csőtoldatban pedig 0,5 liter víz lesz. A csőben levő vízoszlop magassága:**

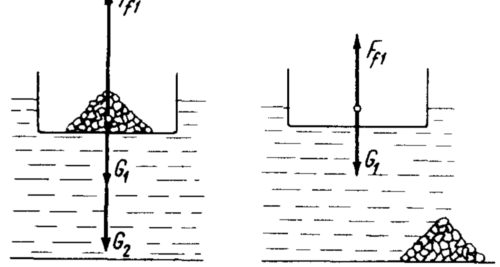
$$h_1 = \frac{V}{A} = \frac{0{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^3}{0{,}4\ \mathrm{cm}^2} = \mathbf{1250\ cm = 12{,}5\ m.}$$

Az edény fenéklapjára ható nyomás, **ha figyelembe vesszük**, hogy a kocka magassága $h_2 = 10$ cm:

$$p = \varrho_v g (h_1 + h_2) = 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12{,}6\ \mathrm{m} = 1{,}26 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

$$F = p \cdot A = 1{,}26 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 10^{-2}\mathrm{m}^2 = 1260\ \mathrm{N}; \quad \underline{F = 1260\ \mathrm{N}.}$$

9.7. Számítsuk ki először, hogy mennyi a kővel megrakott csónak víz alá merülő részének térfogata (V), majd az üres csónak felszín alatti térfogatának (V_1) és a kő térfogatának (V_2) az összege. Így megkapjuk, hogy mennyi a „kiszorított" víz térfogata az egyik és a másik esetben.



A csónak mindkét esetben egyensúlyban van, az erők vektori összege zérus. Jelölje G_1 a csónak, G_2 a kő súlyát; ϱ_v a víz, ϱ_k a kő sűrűségét. Az ábra alapján, Arkhimédész törvényének felhasználásával:

$$F_{f1} - G_1 - G_2 = 0; \qquad F_{f2} - G_1 = 0;$$

$$\varrho_v g \cdot V - G_1 - \varrho_k g \cdot V_2 = 0; \qquad \varrho_v g \cdot V_1 - G_1 = 0;$$

$$V = \frac{G_1}{\varrho_v g} + \frac{\varrho_k}{\varrho_v} \cdot V_2. \quad (1) \qquad V_1 = \frac{G_1}{\varrho_v g};$$

$$V_1 + V_2 = \frac{G_1}{\varrho_v g} + V_2. \quad (2)$$

Mivel a kő sűrűsége nagyobb a víz sűrűségénél ($\varrho_k > \varrho_v$), az (1) összefüggésben V_2 együtthatója egynél nagyobb. Ezért (1) és (2) összehasonlításával:

$$V > V_1 + V_2;$$

tehát a kövek kidobálásakor a „kiszorított" víz térfogata, és így a víz felszíne is csökken.

Az eredmény talán meglepőnek tűnik. Gondoljuk meg azonban — ha pusztán a kövekre vagyunk tekintettel —, hogy amikor a kő a csónak „segítségével" úszik, a kő *teljes* súlyát egyensúlyozó felhajtóerőre van szükség (és ez az erő nagyobb vízmennyiség súlyával egyenlő); az önmagában alámerülő kőre pedig kisebb felhajtóerő hat (amely a vele egyenlő térfogatú víz súlyával egyezik meg), az egyensúlyhoz szükséges további erőt a tófenék által kifejtett nyomóerő biztosítja.

9.8. Jelöljük a hasáb vízszintes lapjainak területét A-val, magasságát b-vel; a higany, a test, a víz sűrűségét rendre: ϱ_h; ϱ; ϱ_v-vel. Nyilvánvaló, hogy:

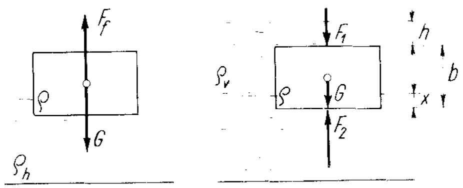
$$\varrho_h > \varrho > \varrho_v .$$

Amikor a test szabadon úszik a higany felszínén, az egyensúly feltételét alkalmazva, és felhasználva, hogy a felhajtóerő egyenlő az alámerülő rész térfogatával egyező vízmennyiség súlyával:

$$F_f - G = 0;$$

$$\varrho_h \cdot g \cdot \frac{1}{4} Ab - \varrho g \cdot Ab = 0 ,$$

$$\varrho = \frac{1}{4} \varrho_h . \qquad (1)$$



Ha a higany fölé vizet is rétegezünk, a test újabb helyzetében azért van egyensúlyban, mert a G súlyerő és a hasáb oldallapjaira ható, a folyadékok nyomásából származó erők vektori összege zérus. Az egymással szemközti, függőleges lapokra ható erők kiegyenlítik egymást, ezért ezeket a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk. A testre ható, függőleges irányú erőkre:

$$F_2 - F_1 - G = 0. \qquad (2)$$

Használjuk fel, hogy valamely vízszintes lapra ható nyomóerő az ott uralkodó hidrosztatikai nyomás és a terület szorzataként számítható. A hidrosztatikai nyomást az alsó lap helyén a két folyadékréteg nyomásának összegeként kaphatjuk meg.

$$F_1 = \varrho_v g h A ; \quad F_2 = [\varrho_v g(h + b - x) + \varrho_h g x] A .$$

Helyettesítsünk (2)-be, és egyszerűsítsünk g-vel:

$$\varrho_v h A + \varrho_v b A - \varrho_v x A + \varrho_h x A - \varrho_v h A - \varrho b A = 0.$$

Ebből – (1)-et is felhasználva – kiszámíthatjuk, hogy a második esetben a test térfogatának (illetve magasságának) hányadrésze merül higanyba.

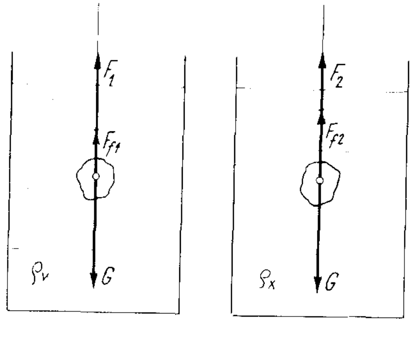
$$\frac{xA}{bA} = \frac{x}{b} = \frac{\varrho - \varrho_v}{\varrho_h - \varrho_v} = \frac{\frac{1}{4}\varrho_h - \varrho_v}{\varrho_h - \varrho_v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varrho_h - 4\varrho_v}{\varrho_h - \varrho_v} ;$$

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{4} \cdot \frac{13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 4 \cdot 1 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} ;$$

$$\underline{\frac{x}{b} = 0{,}19.}$$

A hasábnak tehát kereken 0,2 része merül higanyba (kevesebb, mint az első esetben).

9.9. A folyadékba merített kő mindkét esetben egyensúlyban van, a rá ható erők vektori összege zérus. Jelöljük ϱ_v-vel a víz, ϱ_x-szel a szénkéneg sűrűségét; F_1 ill. F_2-vel a tartóerőket, F_{f1}-el illetve F_{f2}-vel a felhajtóerőket az első illetve második esetben, és V-vel a kő térfogatát.



$$F_{f1} + F_1 - G = 0; \qquad F_{f2} + F_2 - G = 0;$$

$$\varrho_v g V + F_1 - G = 0; \qquad \varrho_x g V + F_2 - G = 0.$$

Ebből

$$gV = \frac{G - F_1}{\varrho_v} ;$$

$$\varrho_x = \frac{G - F_2}{gV} = \frac{G - F_2}{G - F_1} \varrho_v = \frac{9{,}9 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} - 4{,}23 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}}{9{,}9 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} - 5{,}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}} \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} ;$$

$$\underline{\varrho_x = 1{,}26 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} .$$

9.10 Amikor a vas egyedül merül vízbe és egyensúlyban van, a rá ható erők vektori összege zérus:

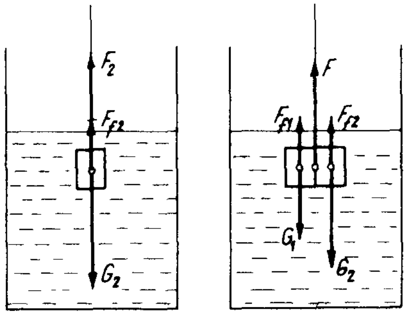
$$F_{f2} + F_2 - G_2 = 0;$$

$$G_2 - F_{f2} = F_2 .$$

Ha a két test összeerősítve merül víz alá, az egyensúly feltétele alapján:

$$F_{f1} - G_1 + F + F_{f2} - G_2 = 0. \qquad (2)$$

A fa térfogatát V_1-gyel, sűrűségét ϱ_1-gyel jelölve, és felhasználva (1)-et, továbbá azt, hogy a fa térfogata:



$$V_1 = \frac{G_1}{\varrho_1 g};$$

a (2) összefüggés:

$$\varrho_V g V_1 - G_1 + F - F_2 = 0;$$

$$\varrho_V \cdot \frac{G_1}{\varrho_1} - G_1 + F - F_2 = 0.$$

Ebből:

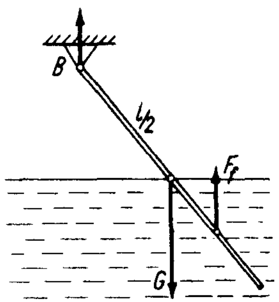
$$\varrho_1 = \frac{G_1}{G_1 - F + F_2}\varrho_V = \frac{200\ \mathrm{N}}{200\ \mathrm{N} - 855\ \mathrm{N} + 980\ \mathrm{N}}\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

$$\varrho_1 = 0{,}62\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

9.11.* A rúd egyensúlyban van, ezért a rá ható erők vektori összege és forgatónyomatékaik előjeles összege egyaránt zérus ($\Sigma F = 0$ és $\Sigma M = 0$).
Az utóbbi feltétel alkalmazásával, a forgatónyomatékokat célszerűen a B forgáspontra számítva:

$$F_f\cdot\frac{3}{4}\, l\cdot\cos\alpha - G\cdot\frac{l\cdot\cos\alpha}{2} = 0.$$

Jelöljük a pálca keresztmetszetének területét A-val, sűrűségét ϱ-val:



$$\varrho_V g\frac{l}{2} A\cdot\frac{3}{4}\, l - \varrho g l\cdot A\cdot\frac{l}{2} = 0;$$

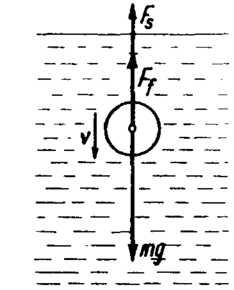
$$\varrho = \frac{3}{4}\varrho_V = \frac{3}{4}\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

$$\varrho = 0{,}75\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

9.12. Amikor a vasgolyót a vízbe lógatjuk, a golyóra a víz felhajtó erőt fejt ki. Ugyanakkor – Newton III. törvényének megfelelően – a golyó ugyanakkora (lefelé irányuló) erőt fejt ki a vízre, és így – a víz közvetítésével – a fazék fenekére. A mérleg tehát lebillen, és pontosan akkora erőt jelez, mint amekkora a felhajtó erő.

9.13. Ha a golyó egyenletesen süllyed, a rá ható erők vektori összege zérus:

$$F_s + F_f - mg = 0.$$



Jelöljük a víz sűrűségét ϱ_V-vel, a vas sűrűségét ϱ-val.

A felhajtóerő:

$$F_f = \varrho_V g V = \varrho_V\cdot\frac{mg}{\varrho}.$$

Behelyettesítve

$$F_s + \frac{\varrho_V}{\varrho} mg - mg = 0;$$

$$\frac{F_s}{mg} = 1 - \frac{\varrho_V}{\varrho} = \frac{\varrho - \varrho_V}{\varrho} = \frac{7{,}8\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{7{,}8\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 0{,}87.$$

A súrlódási erő a nehézségi erőnek 87 %-a.

9.14. A csapból kifolyó vízmennyiség a nehézségi erő hatására gyorsul, sebessége a csaptól mélyebben nagyobb lesz, mint a kifolyási helyen.
Mivel a víz (és általában a folyadékok) térfogata igen nagy erők hatására is csak kis mértékben csökken, a nagyobb sebességgel áramló vízsugár keresztmetszete szükségképpen csökken (a sebesség és keresztmetszet egymással fordítottan arányosak).
A valóságban a csapból kifolyó és elvékonyodó, folyamatos vízsugár csak olyan körülmények között jön létre, amikor a víz áramlását a belső súrlódás úgy befolyásolja, hogy réteges súrlódásos áramlás (örvénymentes áramlás) jön létre. Ellenkező esetben, ha a súrlódási viszonyok örvénylő áramlást eredményeznek, a vízsugár nem lesz folyamatos, hanem „szétspriccel”.

9.15. Igen. A valóságban a folyadékok áramlása (és így a folyamé is) nem súrlódásmentes.

Ha örvénylő áramlás nem is jön létre, a parthoz (és mederfenékhez) közelebbi folyadékrétegek lassabban, a távolabbiak gyorsabban mozognak, a part mellett kisebb, középen nagyobb a folyó áramlási sebessége és így a folyó különböző helyein szabadon úszó testeké is.
A jelenség oka az, hogy az egyes folyadékrétegek (valamint a folyadék és a meder) között súrlódás van, ezért jön létre (nem túl nagy áramlási sebesség és elegendően nagy keresztmetszet esetén) úgynevezett réteges áramlás. Bizonyos határnál nagyobb áramlási sebesség (és túlságosan kis keresztmetszet, illetve nem eléggé sima, nem kedvező alakú szilárd akadályok vagy partfal) esetén a súrlódásos áramlás már nem is réteges, hanem örvénylés is bekövetkezik.

9.16. A folyadékba merülő testekre a Föld felszínén azért hat felhajtóerő, mert alsó lapjukra nagyobb hidrosztatikai nyomás hat, mint a felső lapra. A hidrosztatikai nyomás pedig a folyadék súlyából származik: a felső folyadékrétegek súlyuknál fogva nyomják az alsókat.
Az űrhajóban a testek a súlytalanság állapotában vannak; az egymásra helyezett testek, a folyadékrétegek nem nyomják egymást. Ezért a súlytalanság állapotában hidrosztatikai nyomás nincsen, a folyadékban levő testekre felhajtóerő nem hat.
A vízcsepp az űrhajóban gömbalakú, mivel a súlytalanság állapotában csak a felületi feszültségből származó erők határozzák meg a csepp alakját. (A Földön pl. kormozott üveglapon levő vízcsepp azért nem gömb alakú, hanem kissé „belapult", mert a felületi feszültségből származó erők mellett a súlyerő is hat a cseppben foglalt folyadékmennyiségre.)

9.17. $F = 10^{[illegible]}$ N.

9.18. *a)* $m = 20$ g; *b)* $p = 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 10^5$ Pa.

9.19. $\Delta h = 4{,}4$ cm.

9.20. $x = 4{,}8$ cm.

9.21. $\varrho = 1{,}74 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

9.22. A szükséges keverési arány $G_1 : G_2 = 1 : 2{,}7$.

9.23. A víz szintmagassága
a) csökken; b) növekszik, c) nem változik; d) növekszik.

9.24. $F = 13{,}68$ N.

9.25. ***A mérleg edénnyel terhelt oldala lebillen, függetlenül attól, hogy a vízbe nyomott szilárd tárgy sűrűsége a víz sűrűségénél nagyobb vagy kisebb.***

9.26. $r = 0{,}146$ mm.

9.27. $v = 21 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

9.28. Mivel a két golyó térfogata azonos, a levegőben létrejött felhajtóerő mindkét golyóra ugyanakkora. A közegellenállástól tekintsünk el, és írjuk fel a fa-, illetve a vasgolyó mozgásegyenletét:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_f; \qquad m_2 a_2 = m_2 g - F_f;$$

$$a_1 = g - \frac{F_f}{m_1}; \qquad a_2 = g - \frac{F_f}{m_2}.$$

Mivel a fagolyó tömege kisebb, mint a vasgolyóé ($m_1 < m_2$), a fagolyó gyorsulása kisebb lesz, mint a vasgolyó gyorsulása: ($a_1 < a_2$). Ezért *a fagolyó később ér földet*, mint a vasgolyó.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy légüres térben – ahol a felhajtóerő zérus – mindkét mozgásegyenlet a tömegekkel egyszerűsíthető, és a gyorsulások: $a_1 = a_2 = g$. Szigorú értelemben vett szabadesés (g gyorsulással történő esés) csak légüres térben valósul meg, és akkor a testek gyorsulása ténylegesen független tömegüktől (sűrűségüktől stb.).
A közegellenállás az egyéb erőkhöz viszonyítva természetesen nem hanyagolható el. (Sőt, a felhajtóerőnél lényegesen nagyobb is lehet.) Annak meggondolását, hogy a közegellenállást is figyelembe véve, előbb ér-e földet a vasgolyó, az olvasóra bízzuk. (A közegellenállás a sebességtől is függ!)

9.29. A folyadék által a fenéklapra kifejtett hidrosztatikai nyomás — mint tudjuk — független az edény alakjától, és csupán a folyadék sűrűségétől, valamint a folyadékréteg magasságától függ. A fenéknyomás a két folyadékréteg nyomásának összege, ahol:

$h_1 = h_2 = h;$

$p = p_1 + p_2 = \varrho_1 g \cdot h + \varrho_2 g \cdot h$

$$p = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-1}\text{m} + 8 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-1}\text{m}.$$

$\underline{p = 18 \cdot 10^2 \text{Pa}.}$

9.30. Jelöljük a higany sűrűségét ϱ_h-val, a víz sűrűségét ϱ_v-vel. A vízoszlop nyomását az x magasságú higanyoszlop egyensúlyozza:

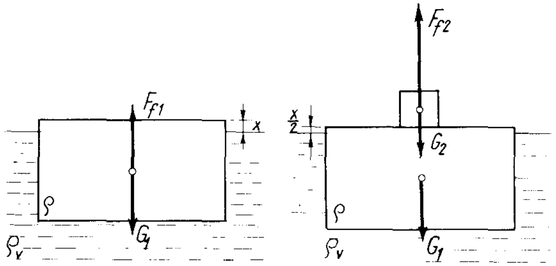
$\varrho_h g \cdot x = \varrho_v g \cdot (x + y).$

Ebből a két szakasz aránya: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\varrho_v}{\varrho_h - \varrho_v}.$

Az arány valóban független a vízoszlop hosszától (csak a sűrűségektől függ).

9.31. **Az üres, illetve a megterhelt jégtábla egyensúlyban van:**

$G_1 - F_{f1} = 0; \qquad G_1 + G_2 - F_{f2} = 0.$



Jelöljük a jégtábla vízszintes lapjának területét A-val, vastagságát h-val, sűrűségét ϱ-val.

$$\varrho g \cdot Ah - \varrho_v g \cdot A(h - x) = 0; \quad \varrho g \cdot Ah + G_2 - \varrho_v g \cdot A\left(h - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Ebből

$$A = \frac{2G_2}{h \cdot g(\varrho_v - \varrho)} = \frac{2 \cdot 750 \text{ N}}{0{,}4 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 9{,}2 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)} =$$

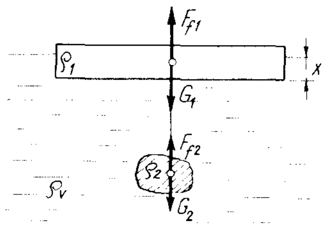
$$= \frac{1500 \text{ N}}{320 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}; \qquad \underline{A = 4{,}69 \text{ m}^2.}$$

9.32. A rendszer egyensúlyban van. Az ábra alapján:

$G_1 + G_2 - F_{f1} - F_{f2} = 0.$

Jelöljük a deszka méreteit rendre b; c; h-val, **az alámerülő rész magasságát** x**-szel:**

$$\varrho_1 gbch + G_2 - \varrho_v gbcx - \varrho_v \frac{G_2}{\varrho_2} = 0.$$



Ebből:

$$x = \frac{\varrho_1 h}{\varrho_v} + \frac{G_2}{\varrho_v gbc} - \frac{G_2 \varrho_v}{\varrho_2 \varrho_v gbc};$$

$$x = \frac{\varrho_1}{\varrho_v} h + \frac{G_2}{gbc} \cdot \frac{\varrho_2 - \varrho_v}{\varrho_2 \varrho_v};$$

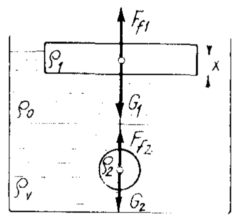
$$x = \frac{6 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} 3 \cdot 10^{-2}\text{m} + \frac{1{,}2 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{m}^2} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}},$$

$\underline{x = 2{,}16 \text{ cm}.}$

9.33. A rendszer egyensúlyban van. Az ábra alapján:

$$G_1 + G_2 - F_{f1} - F_{f2} = 0. \qquad (1)$$

Jelöljük a deszka alámerülő részének magasságát x**-szel. Az alámerülő rész térfogata:**



$$V_x = A \cdot x = \frac{V}{h} x = \frac{G_1}{\varrho_1 g} \cdot \frac{x}{h}.$$

Behelyettesítve (1)-be:

$$G_1 + G_2 - \varrho_0 \frac{G_1}{\varrho_1} \cdot \frac{x}{h} - \varrho_v \cdot \frac{G_2}{\varrho_2} = 0.$$

Ebből:

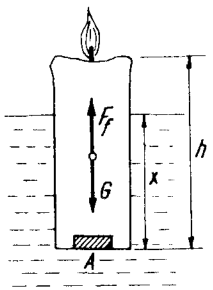
$$x = \frac{h}{G_1}\cdot\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\left(G_1 + G_2 - \frac{\varrho_v}{\varrho_2}G_2\right) = \frac{h}{G_1}\cdot\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\left(G_1 + \frac{\varrho_2-\varrho_v}{\varrho_2}G_2\right);$$

$$x = \frac{8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot 5\cdot 10^{2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{30\,\mathrm{N}\cdot 8\cdot 10^{2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\left(30\,\mathrm{N} + \frac{2{,}7\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{2{,}7\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\cdot 8\,\mathrm{N}\right);$$

$\underline{x = 5{,}8\ \mathrm{cm}.}$

9.34. *a)* A gyertya (az aljára rögzitett nehezékkel együtt) már kezdetben is csak akkor úszik, ha (átlagos) sűrűsége kisebb a víz sűrűségénél. $\varrho < \varrho_v$.

Számítsuk ki először, hogy a gyertya magasságának hányadrésze merül víz alá. Mivel a gyertya egyensúlyban van:



$$F_f - G = 0;$$

$$\varrho_v g\cdot Ax - \varrho g\cdot Ah = 0;$$

$$\frac{x}{h} = \frac{\varrho}{\varrho_v}.$$

Az eredmény mutatja, hogy az alámerülő rész és a gyertyahossz aránya csak a sűrűségektől függ, ezért a gyertya rövidülésekor mindaddig kiáll a vízből a gyertya egy darabja, amíg átlagos sűrűsége kisebb marad a víz sűrűségénél. Mivel az égés során a paraffinmennyiség csökken (a nehezék súlya viszont megmarad), a rövidülő gyertya átlagos sűrűsége lassan növekszik, az eléggé kicsire égetett gyertyacsonk elsüllyed. (És természetesen kialszik.)

b) **Ezt a kísérletet jobb, ha nem végezzük el! Szerencsére azon**ban nem is lehetséges, mert a paraffin sűrűsége nagyobb mint a benziné (nehezékkel együtt az átlagos sűrűség még inkább), **ezért a benzinbe helyezett gyertya elsüllyed, mielőtt meggyújthatnánk.**

9.35. A gömb — az ábrának megfelelően — mindkét esetben egyensúlyban van:

$$F_1 + F_{f1} - G = 0; \qquad F_2 + F_{f2} - G = 0.$$

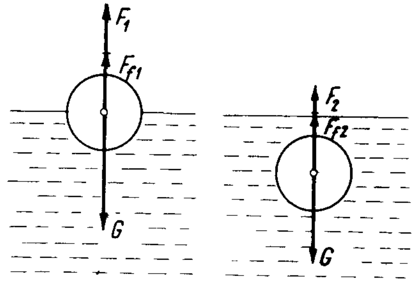
Felhasználva, hogy $F_1 = 1{,}2F_2$; és $V = \frac{G}{\varrho g}$;

$$1{,}2F_2 + \varrho_v\cdot\frac{1}{2}\,\frac{G}{\varrho} - G = 0; \qquad F_2 + \varrho_v\cdot\frac{G}{\varrho} - G = 0.$$

Ebből:

$$\varrho = \frac{7}{2}\,\varrho_v = 3{,}5\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

$$\underline{\varrho = 3{,}5\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.}$$

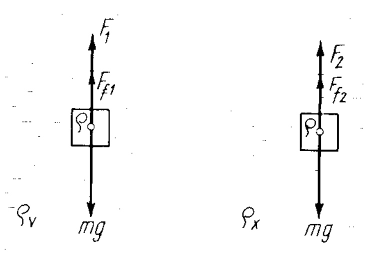


9.36. A test vízben, illetve az ismeretlen folyadékban egyensúlyban van:

$$\boldsymbol{F_1 + F_{f1} - mg = 0}; \qquad \boldsymbol{F_2 + F_{f2} - mg = 0};$$

$$F_1 + \varrho_v\cdot\frac{mg}{\varrho} - mg = 0;$$

$$F_2 + \varrho_x\cdot\frac{mg}{\varrho} - mg = 0.$$



Ebből:

$$a)\ \varrho = \frac{mg}{mg - F_1}\,\varrho_v = \frac{250\,\mathrm{N}}{250\,\mathrm{N} - 180\,\mathrm{N}}\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

$$\underline{\varrho = 3{,}57\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.}$$

$$b)\ \varrho_x = \frac{mg - F_2}{mg - F_1}\cdot \varrho_v = \frac{250\ \mathrm{N} - 200\ \mathrm{N}}{250\ \mathrm{N} - 180\ \mathrm{N}}\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

$$\varrho_x = 0{,}71\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

9.37. Amikor a fadarabot vízre helyezzük, a víz szintje Δh magassággal megemelkedik. A nyomás növekedése:

$$\Delta p = \varrho_v g\cdot \Delta h. \qquad (1)$$

A Δh szintemelkedést az okozza, hogy a fatest egy része víz alá merül, és így V vízmennyiséget „kiszorít”. Az úszó hasáb egyensúlyban van:

$$F_f - G = 0;$$

$$\varrho_v g\cdot \Delta V - G = 0;$$

$$\Delta V = \frac{G}{\varrho_v g}.$$

A szintemelkedés:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{A} = \frac{G}{\varrho_v g\cdot A}.$$

Behelyettesítve *(1)*-be:

$$\Delta p = \frac{G}{A}.$$

Az eredmény független a víz (h) szintmagasságától, a folyadék sűrűségétől és x-től is.

A nyomás növekedése akkora, mintha a G súlyú test által kifejtett nyomóerő A területű vízszintes lapra hatna. Ez érthető is, hiszen a test G súlyát a folyadék „egyensúlyozza ki”. A test G erőt fejt ki a folyadékra és az ebből származó nyomástöbblet — Pascal törvényének megfelelően — a folyadékban mindenhol érvényesül. Végső soron az edény szilárd vízszintes fenéklapja — a víz közvetítésével — ugyanakkora többleterőt kell, hogy kifejtsen, mint amekkora a test súlya.

38, A lángban a magas hőmérsékletű (és ezért a levegőnél kisebb sűrűségű) gázok függőlegesen felfelé áramlanak. A környező levegő oldalirányú áramlása megzavarja a kisebb lángok esetében sokszor csak réteges áramlást és örvénylő mozgást, „lobogást” idéz elő. (Ha a környező levegő oldalirányú áramlását megakadályozzuk, a lobogás megszüntethető. Lámpaüveg alkalmazásával pl. a petróleumlámpa lángja lobogás nélkül, „egyenletesen” ég.)

A zászló akkor lobog, ha a környező levegő a zászlóhoz viszonyítva nagy sebességgel áramlik (ha erős szél fúj vagy a zászló mozog pl. járműre erősítve, nagy sebességgel). Az áramló levegőben a zászló akadályt jelent, ahol a légrétegek súrlódása következtében örvények képződnek, és a leszakadó örvénysorok lobogtatják a zászlót.

[illegible] Nem. A víz kifolyási sebessége függ ugyanis a csapnál uralkodó hidrosztatikai nyomástól, és így a vízszint magasságától. A szintmagasság csökkenésekor a nyomás és így a kifolyási sebesség is csökken, ennek következtében pedig a vízszint süllyedése lelassul.

[illegible] A 9.14. feladattal kapcsolatban részben értelmeztük ezt a jelenséget. Kiegészítésül elegendő arra emlékeztetnünk, hogy a réteges súrlódásos áramlás nagyobb áramlási sebesség esetén (egyébként azonos körülmények között is) örvénylő áramlásba megy át, amely a folyamatos vízsugarat „szétszaggatja”

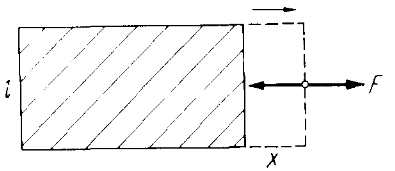
[illegible] Valamilyen folyadék felszíni hártyájának megnagyobbításához szükséges munkát egyszerűen számíthatjuk pl. egy téglalap alakú hártya esetén, amelynek l hosszúságú oldalát x távolsággal mozdítjuk el az oldalra merőleges irányban, a felületi feszültségből származó erővel ellentétesen. Egy oldalú hártyát feltételezve, a végzett munka:

$$W = F\cdot x = \alpha l x = \alpha\cdot \Delta A; \qquad (1)$$

ahol ΔA a létrejött felszín-nagyobbodás.

Amikor a higanycseppet (gömböt) két azonos méretű gömbre daraboljuk, a felszín növekedése:

$$\Delta A = 2A_2 - A_1 = 2\cdot 4r^2\pi - 4R^2\pi. \qquad (2)$$



Mivel a higany térfogata megmarad:

$$2\cdot\frac{4r^3\pi}{3}=\frac{4R^3\pi}{3};$$

$$r=\frac{R}{\sqrt[3]{2}}. \qquad (3)$$

Behelyettesítve (2)-be:

$$\Delta A=4\pi\left(2\frac{R}{\sqrt[3]{4}}-R^2\right)=4\pi R^2\frac{2-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}};$$

$$\Delta A=4\pi\cdot 4\ \mathrm{mm}^2\cdot\frac{2-1{,}59}{1{,}59}=6{,}5\ \mathrm{mm}^2=6{,}5\cdot10^{-6}\ \mathrm{m}^2.$$

A munka:

$$W=\alpha\cdot\Delta A=0{,}52\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\cdot 6{,}5\cdot10^{-6}\ \mathrm{m}^2=3{,}38\cdot10^{-6}\ \mathrm{J};$$

$$\underline{W\approx 3{,}4\cdot10^{-6}\ \mathrm{J}.}$$

9.42. A felületi energia csökkenése:

$$\Delta E=W=\alpha\cdot\Delta A=\alpha\,(2\cdot 4\,r^2\,\pi-4\,R^2\,\pi).$$

A 9.43. feladat megoldásában már használt (3) összefüggés alapján:

$$R=\sqrt[3]{2}\cdot r.$$

Behelyettesítve:

$$\Delta E=4\pi\cdot\alpha\cdot(2r^2-\sqrt[3]{4}\,r^2)=4\pi\cdot\alpha\cdot r^2\cdot(2-\sqrt[3]{4});$$

$$\Delta E=4\pi\cdot 0{,}073\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\cdot 4\cdot10^{-6}\cdot\mathrm{m}^2\cdot(2-1{,}59)=7{,}50\cdot10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

$$\underline{\Delta E=7{,}5\cdot10^{-6}\ \mathrm{J}.}$$

9.43. A valósággal ellentétben, pusztán az egyszerű becslés érdekében tekintsük úgy a Föld légkörét, mintha az h magasságú, és mindenhol azonos sűrűségű (fajsúlyú) gáz volna. Felhasználva, hogy

a légnyomást a „levegőtenger mélyén", a Föld felszínén ismerjük, a hidrosztatikai nyomásra vonatkozó összefüggés alapján (tekintsünk el g változásától is):

$$p_0=\varrho g\cdot h;\quad h=\frac{p_0}{\varrho g}.$$

Mivel a Föld felszíne $4R^2\cdot\pi$; a levegőmennyiség térfogata közelítőleg:

$$V=4R^2\pi h;$$

súlya pedig:

$$G=\varrho gV=\varrho g\cdot 4R^2\pi h=\varrho g\cdot 4R^2\pi\frac{p_0}{\varrho g}=4R^2\pi p_0.$$

A Föld sugarát kereken 6400 km $=6{,}4\cdot10^6$ m-nek tekintve:

$$G=4\cdot 6{,}4^2\cdot10^{12}\ \mathrm{m}^2\cdot\pi\cdot 9{,}81\cdot10^4\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}=5{,}05\cdot10^{19}\ \mathrm{N}.$$

A Föld legkörének súlya kereken: $\underline{5\cdot10^{19}\ \mathrm{N}.}$

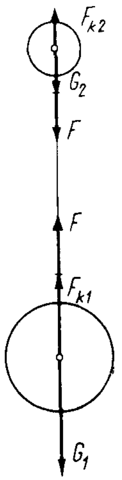
9.44. A levegő felhajtóereje a két golyóra a többi erőhöz viszonyítva elhanyagolhatóan kicsi, ettől most tekintsünk el. Mivel a kisebb gömb sugara fele a nagyobbik gömb sugarának $\left(r=\frac{R}{2}\right)$ és a gömb térfogata a sugár köbével arányos, ezért a térfogatok aránya 8 : 1. Azonos anyagi minőségük miatt súlyaik aránya ugyanennyi:

$$G_2=\frac{G_1}{8}.$$

A közegellenállás az egyező sebesség – és az egyébként is azonos körülmények között – a mozgásirányra merőleges legnagyobb keresztmetszettől: itt a gömbök főkörének területétől függ. Mivel a sugarak aránya 2 : 1; a főkörök területeinek aránya, és ezért a közegellenállási erők aránya is 4 : 1;

$$F_{k2}=\frac{F_{k1}}{4}.$$

A nagyobb gömb súlya 8-szorosa a kis gömb súlyának; a közegellenállás viszont csak 4-szer akkora, mint a kis gömbre, ezért a nagyobb gömb helyezkedik el alul, az ábrának megfelelően.



A golyók egyenletesen mozognak, ezért mindkét golyó egyensúlyban van:

$G_1 - F_{k1} - F = 0;$

$\underline{G_2 - F_{k2} = F + 0.}$

Ebből

$F_{k1} = \frac{9}{10} G_1;$

$F = \frac{1}{10} \cdot G_1 = \frac{1}{10} \cdot 10\ \text{N};$

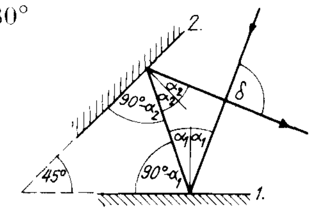
$\underline{F = 1\ \text{N}.}$

10. Fénytani alapjelenségek. Tükrök

10.1. Az ábrából leolvashatók az alábbi geometriai összefüggések:

$45° + (90° - \alpha_1) + (90° - \alpha_2) = 180°;$ (1)

és $(\alpha_1 + \alpha_1) + (\alpha_2 + \alpha_2) + \delta = 180°$ (2)



(1) átrendezése után:

$\alpha_1 + \alpha_2 = 45°;$

és mivel (2) alapján:

$\delta = 180° - 2(\alpha_1 + \alpha_2);$

ezért $\underline{\delta = 90°}$.

Tehát a fénysugár a kétszeres visszaverődés után mindig az eredeti irányára merőlegesen halad, ha a két tükör síkja 45°-os szöget alkot.

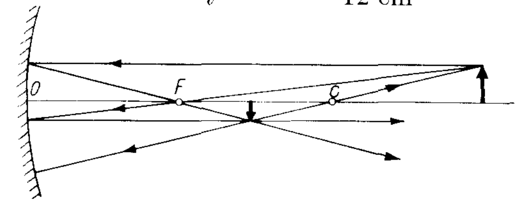
10.2. *a)* $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f};$

ebből $k = \frac{t f}{t - f} = \frac{12\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}}{12\ \text{cm} - 4\ \text{cm}};$

tehát $\underline{k = 6\ \text{cm}}$.

b) $\frac{K}{T} = \frac{k}{t};$

ebből: $K = T\frac{k}{t} = 1\ \text{cm} \cdot \frac{6\ \text{cm}}{12\ \text{cm}};$ tehát $\underline{K = 0{,}5\ \text{cm}}$.



c) Az ábrán látható. Természetesen a szerkesztéshez két sugár elég lett volna, a harmadik már csak „ellenőrzi" a szerkesztés pontosságát.

10.3 $R = 8$ cm és a tükör d o m b o r ú , tehát $f = -4$ cm.
$t = 3$ cm; $k = ?$

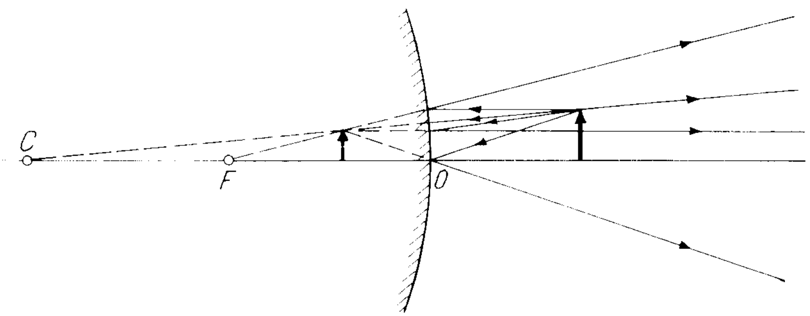
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f};$$

tehát

$$k = \frac{tf}{t-f} = \frac{3\text{ cm} \cdot (-4\text{ cm})}{3\text{ cm} - (-4\text{ cm})};$$

$$k = -\frac{12}{7}\text{ cm} = -1{,}7\text{ cm};$$

$\underline{k = -1{,}7\text{ cm}.}$



10.4. Felhasználva, hogy a visszaverődési szög ugyanannyi, mint a beesési szög ($= 60°$), az ábráról leolvasható, hogy a törési szög $30°$. Akkor pedig:

$$n = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$\underline{n = 1{,}73.}$

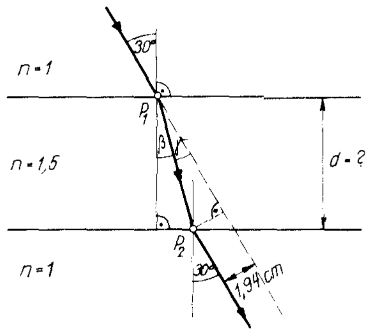
10.5. Ahhoz, hogy egy világító pontot lássunk, szükséges, hogy a pontból kiinduló, s z é t t a r t ó s u g á r n y a l á b egy része a pupillán át a szemünkbe jusson. Ez a sugárnyaláb jelenti a (szem + agy) rendszer számára az információt a fényforrás szinéről, erősségéről és h e l y é r ő l . Ha ugyanis a világító pontból csak egyetlen fénysugár jutna a szembe, akkor látásunkkal nem tudnánk eldönteni, hogy a fény honnan jött, csak az irányt tudnánk megjelölni.
Amennyiben a világító pontot tükörből látjuk, akkor azért képzeljük oda a tárgyat a tükör mögé (ahol pedig semmi sincs), mert a szemünkbe jutó, széttartó sugárnyaláb o n n a n l á t s z i k k i i n d u l n i . Minthogy pedig a tárgyról jövő összes látási információt a szembe jutó sugárnyaláb hordozza, azért, csupán látásunkkal képtelenek vagyunk eldönteni, hogy amit látunk az valódi tárgy vagy annak csak látszólagos képe.
Miért nem látjuk közben a tükröt?
Mert a tökéletesen sima tükör felületén szabályos visszaverődés történik, s így a tükör bármely pontjáról c s u p á n e g y fénysugár jut a szemünkbe.
Miért vesszük észre a poros tükör felületét?
Mert a poros tükör felületén diffúz (magyarul: szórt) visszaverődés történik, tehát a tükör felületén levő porszemekről s z é t t a r t ó s u g á r n y a l á b o k verődnek vissza, és jutnak a szemünkbe.
Igaz, hogy ebben a magyarázatban csupán egyetlen világító pont esetét tárgyaltuk, azonban bármilyen kiterjedt, tarka-barka tárgyra vagy tárgyak sokaságára is nézünk, a szemünkben kialakuló kép pontról-pontra világító pontok képeinek összességéből alakul ki. Mindazt tehát, amit egyetlen világító pont esetére végiggondoltunk, igaz kell, hogy legyen mindenre, amire csak ránézünk.

10.6. A fénysugár az ábrán P_1 pontban éri el a planparalel lemezt, és P_2 pontban lép ki belőle.
A β törési szög a törésmutató és a beesési szög ismeretében kiszámítható:

$$1{,}5 = \frac{\sin 30°}{\sin\beta};$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2\cdot 1{,}5} = \frac{1}{3};$$

$$\beta = 19{,}5°.$$



Az ábráról leolvasható, hogy β és γ együtt 30°-ot ad, tehát:

$$\gamma = 30° - 19{,}5° = 10{,}5°.$$

Most már a $\overline{P_1P_2}$ szakasz hossza is kiszámítható:

$$\sin\gamma = \frac{1{,}94\ \text{cm}}{\overline{P_1P_2}};$$

tehát

$$\overline{P_1P_2} = \frac{1{,}94\ \text{cm}}{\sin\gamma} = \frac{1{,}94\ \text{cm}}{\sin 10{,}5°} = 10{,}64\ \text{cm}.$$

Ezt felhasználva, a lemez vastagsága egy másik derékszögű háromszögből:

$$d = \overline{P_1P_2}\cdot\cos\beta = 10{,}64\ \text{cm}\cdot\cos 19{,}5°;$$

$\underline{d = 10\ \text{cm}.}$ (Elég vastag üveglemez!)

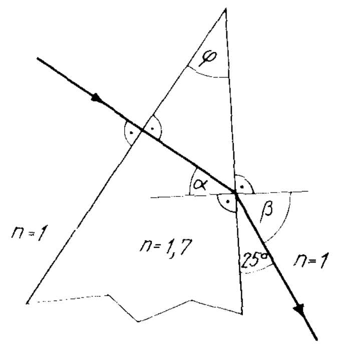
10.7. Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha = \varphi$, mert merőleges szárú szögek: valamint, hogy $\beta = 90° - 25° = 65°$.
Alkalmazzuk a törés törvényét:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{1{,}7}.$$

Behelyettesítve $\alpha = \varphi$-t és $\beta = 65°$-ot;

$$\sin\varphi = \frac{\sin 65°}{1{,}7};$$

$\underline{\varphi = 32{,}2°.}$



10.8. Teljes visszaverődés olyankor léphet fel, ha a fénysugár optikailag ritkább (vagyis kisebb abszolút törésmutatójú) közeghez érkezik. Például, ha a vízben haladó fénysugár eléri a víz felszínét, amit levegő határol. Ekkor sem lép fel minden esetben a teljes visszaverődés, bár részleges visszaverődés mindig lesz, teljes visszaverődés csak akkor, ha a fénysugár a határfelületet elég nagy beesési szög alatt (tehát elég „laposan") éri. Amennyiben

a fénysugár n_1 abszolút törésmutatójú közegben haladva a n á l a k i s e b b n_2 abszolút törésmutatójú közeghez érkezik, akkor az az α_h h a t á r s z ö g, amelynél nagyobb beesési szög esetén a fénysugár teljesen visszaverődik a felületről az n_1 abszolút törésmutatójú közegbe, így számítható ki:

$$\sin\alpha_h = \frac{n_2}{n_1}.$$

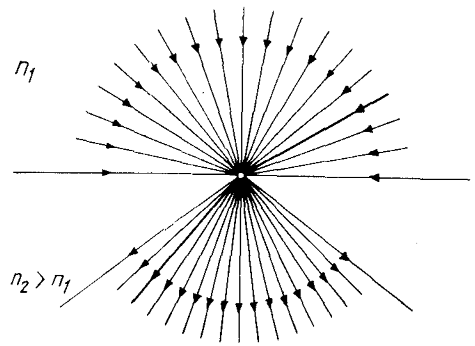
A kérdezett esetekben tehát:

a) $n_1 = 1{,}52$; $n_2 = 1$; $\underline{\alpha_h = 41{,}2°.}$

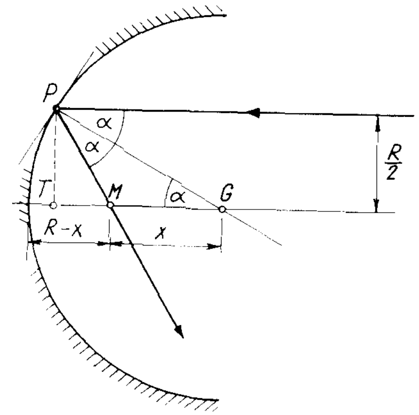
b) $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1$; $\underline{\alpha_h = 48{,}6°.}$

c) $n_1 = 1{,}52$; $n_2 = 1{,}33$; $\underline{\alpha_h = 61{,}2°.}$

10.9. A határfelületen egyedül a merőlegesen érkező fénysugár halad át eredeti irányában, a többi mind megtörik, amint az ábra is mutatja. Kis térszemlélettel az is elképzelhető az ábra alapján, hogy a megtört fénysugarak valamennyien egy <u>kúpfelület belsejében helyezkednek el.</u> A kúp fél nyílásszöge éppen a határszög.



10.10. *a)* A fénysugár az ábrán P pontban éri a tükröt, onnan szabályosan visszaverődik, az M pontban metszi az optikai tengelyt. G a tükör görbületi középpontja (annak a gömbnek a középpontja, amely a tulajdonképpeni tükör). A P pontbeli beesési me-



rőleges át kell, hogy menjen G-n, így a $\overline{PG}$ szakasz éppen a gömb egyik sugara. Legyen T a P pont merőleges vetülete az optikai tengelyen. A feladat feltétele szerint $\overline{PT} = \frac{R}{2}$, és így a PTG derékszögű háromszögből:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PT}}{\overline{PG}} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2};$$

tehát $\alpha = 30°$.

A PMG egyenlő szárú háromszög egyenlő szögei tehát 30°-osak, s így:

$$x = \frac{\frac{R}{2}}{\cos 30°} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{R}{\sqrt{3}}. \left(> \frac{R}{2}! \right)$$

Tehát $R - x = R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) < \frac{R}{2}$.

A kérdezett sugár tehát a tengelyt a fókuszpont és a tökör között metszi el.

b) . . . „Azt a pontot, ahol a homorú tükör optikai tengelyével párhuzamosan beeső fénysugarak a visszaverődés után találkoznak" — szokták mondani. Dehát az előbb kiszámítottuk, hogy az optikai tengelytől $\frac{R}{2}$ távolságra haladó fénysugár visszaverődés után nem megy át az $\frac{R}{2}$ távolságra levő fókuszponton!

(Elárulunk egy titkot: a többi sem!)

Mi tehát a fókuszpont?

Egy torlódási pont. Az a hely, ahol a fénysugarak egymással való metszéspontjai összetorlódnak. Az a hely, amelynek környezetében a legsűrűbben helyezkednek el ezek a metszéspontok. Ennek ellenére, ezen a helyen nincs metszéspont. Lehetséges ez? Lássunk valami hasonló példát. Ha az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ számsorozathoz tartozó pontokat figyeljük a számegyenesen, akkor ezek a pontok az origó (nulla pont) körül torlódnak össze; az origó a torlódási pontjuk, pedig egyik pont sincs az origóban benne! Vagy egy még durvább hasonlat: a tíz percen túl is zárva tartható vasúti sorompónál rengeteg jármű torlódhat össze anélkül, hogy a sorompóba egy is beleszaladna. Helikopterről jól látszik, hogy a leeresztett vasúti sorompó a közúti járművek torlódási pontja s az is, hogy a síneken mégsincs semmilyen jármű. (Vonat is csak nagy sokára jön, de ez már más kérdés.)

A fókuszpontra vonatkozó definíció tehát így tehető pontossá: „Homorú tükör fókuszpontjának nevezzük azt a pontot, amelynek tetszőleges kis környezetében végtelen sok olyan visszavert fénysugár metszi egymást, amelyek eredetileg az optikai tengellyel párhuzamosan haladtak."

Ugyanakkor meg kell említeni, hogy a *parabolatükör* fókuszpontján valóban minden előbb említett fénysugár áthalad, ezért csillagászati tükrös távcsövekben parabolatükröt használnak nagy pontosságú mérésekre.

c) Gyakran tapasztaljuk, hogy ha erősen görbült tükröt rajzolunk, akkor szerkesztésünk pontatlanná válik. A harmadik nevezetes sugár már nem halad át az első kettő metszéspontján. Hogyan tehetjük pontosabbá a szerkesztést?

Úgy, hogyha olyan tükröt rajzolunk, amely alig-alig görbült. Majdnem egyenes. (Sík.) Nem arról van szó, hogy a gömbtükör síktükörré válik. Sokkal inkább arról, hogy a *képpont is torlódási pont*, s a képpont helyének megkeresésekor a fénysugarak valódi metszéspontjának ezt a határértékét keressük. *Pontosan* úgy kaphatjuk meg, hogy egy „egyenes gömbtükörről" veretjük vissza rajzunkon az előírt „játékszabályok" szerint a nevezetes fénysugarakat. Ezek mind *át fognak menni* azon a képponton, amely a valóságos fénysugarak metszéspontjának csupán torlódási pontja.

Természetesen, viszonylag elég pontosan szerkeszthetünk, ha *enyhén görbült* tükröt rajzolunk, ezért a helyes szemlélet megőrzése érdekében a továbbiakban így fogunk eljárni.

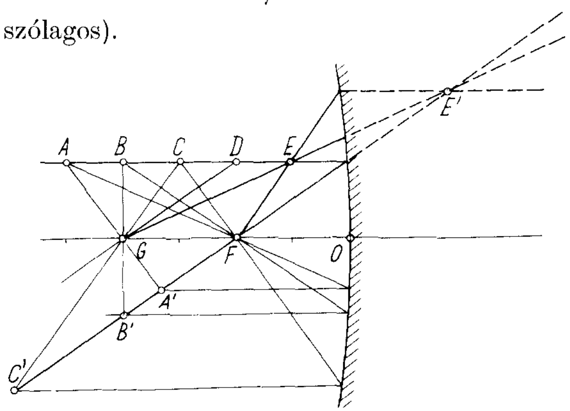
11. $A: t = 5\frac{f}{2}$; $k = \frac{tf}{t-f} = \frac{5}{3}f$; $N = \frac{k}{t} = \frac{2}{3}$ (kicsinyített, valódi).

$B: t = 4\frac{f}{2}$; $k = \frac{t \cdot f}{t-f} = 2f$; $N = \frac{k}{t} = 1$ (egybevágó, valódi).

$C: t = 3\frac{f}{2}$; $k = \frac{t \cdot f}{t - f} = 3f$; $N = \frac{k}{t} = 2$ (nagyított, valódi).

$D: t = 2\frac{f}{2}$; $k = \frac{t \cdot f}{t - f} = \pm\infty$; (nem keletkezik kép).

$E: t = 1\frac{f}{2}$; $k = \frac{t \cdot f}{t - f} = -f$; $N = \frac{k}{t} = -2$ (nagyított, látszólagos).



A D pontból kiinduló, széttartó sugárnyaláb a tükörről úgy verődik vissza, hogy a visszavert fénysugarak e g y m á s s a l párhuzamosak lesznek.

10.12. Adatok: $|N| = 2$; $|k - t| = 15$ cm; $f > 0$;

Keresett: $\frac{1}{f} = ?$

1. Tegyük fel, hogy a kép valódi. Ekkor

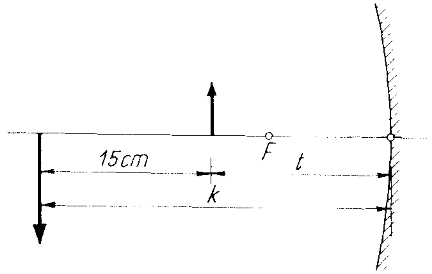
$N = 2$; $k > t$; tehát $k - t = 15$ cm.

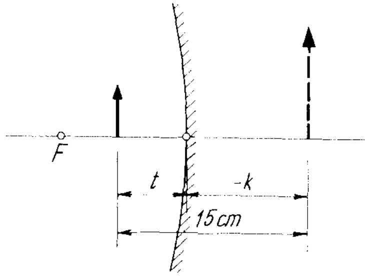
$\frac{k}{t} = 2$ és $k - t = 15$ cm; tehát

$k = 2t$; illetve

$2t - t = 15$ cm; vagyis $t = 15$ cm.

$k = 30$ cm.





$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{15\text{ cm}} + \frac{1}{30\text{ cm}} = \frac{1}{10\text{ cm}} = \frac{1}{0{,}1\text{ m}} = 10\text{ m}^{-1};$$

$\frac{1}{f} = 10$ dioptria.

2. Tegyük fel, hogy a kép látszólagos. Ekkor

$N = -2$; $k < 0$; tehát: $t + (-k) = 15$ cm.

$\frac{k}{t} = -2$ és $t - k = 15$ cm; tehát:

$k = -2t$; illetve:

$t - (-2t) = 15$ cm; vagyis: $t = 5$ cm.

$k = -10$ cm.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{5\ \text{cm}}+\frac{1}{-10\ \text{cm}}=\frac{1}{10\ \text{cm}}=\frac{1}{0{,}1\ \text{m}}=10\ \text{m}^{-1};$$

$$\frac{1}{f}=10\ \text{dioptria}.$$

Tehát a tükör csakis 10 dioptriás lehet.

10.13. Adatok: $N=-2$. (Látszólagos képet látunk!)

$t=30$ cm.

Keresett: $R=?$

Elég, ha a fókusztávolságot meg tudjuk határozni.

Ismert összefüggés:

$$N=\frac{f}{t-f}.$$

Fejezzük ki f-et:

$$f=\frac{tN}{N+1}.$$

Helyettesítsük be az adatokat:

$$f=\frac{30\ \text{cm}\cdot(-2)}{-2+1}=60\ \text{cm}.$$

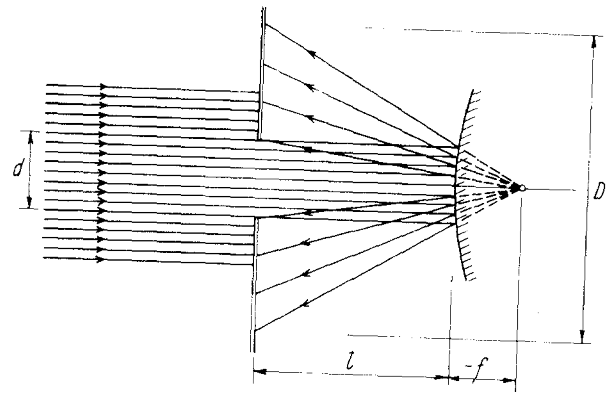
Tehát a görbületi sugár nagysága:

$R=2f$;

$R=120$ cm.

10.14. *1.* Meghatározhatjuk a görbületi sugarat valamilyen geometriai méréssel. Legtöbb esetben azonban a tükör felületéhez vagy nem lehet, vagy nem szabad hozzányúlni, ezért a görbületi sugár mérése nehezen valósítható meg.

2. Közvetlenül a fókusztávolságot határozhatjuk meg különböző optikai módszerekkel. Például úgy, hogy a tükörtől lemérhető l távolságra egy körnvílással ellátott lapot helyezünk el. Ahogyan az ábrán is látható, e környíláson keresztül párhuzamos sugárnyalábot bocsátunk a tükörre. A visszavert nyaláb széttartó lesz, és a fókusztól látszik kiindulni. A lapon a visszaverődés utáni fénykúpnak egy metszete, egy világos körlap lesz látható. Mind a környílás d átmérője, mind a kör alakú fényfolt



D átmérője lemérhető. Az ábráról a következő geometriai összefüggés olvasható le:

$$-f:d=(-f+l):D.$$

Ebből az aránypárból a fókusztávolság kifejezhető:

$$f=\frac{l}{1-\frac{D}{d}}.$$

3. A tükörre egy gyűjtőlencsét fektetve, esetleg olyan leképező rendszerhez jutunk, amely homorú (gyűjtő) tükörként viselkedik. (Elég erős gyűjtőlencsével ez biztos megvalósítható.) Ebben az esetben először valódi képet állítunk elő a lencsével; t és k méréséből f_{lencse} kiszámítható. Másodszor a (lencse + tükör) rendszerrel állítunk elő valódi képet. Újra megmérve t-t és k-t, most a (lencse + tükör) rendszer fókusztávolsága számítható ki. Ez utóbbi a következő módon függ össze a lencse és a tükör fókusztávolságával:

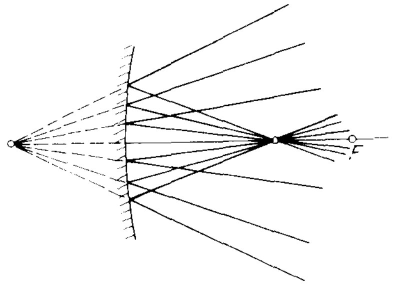
$$\frac{1}{f_{\text{rendszer}}}=2\cdot\frac{1}{f_{\text{lencse}}}+\frac{1}{f_{\text{tükör}}}.$$

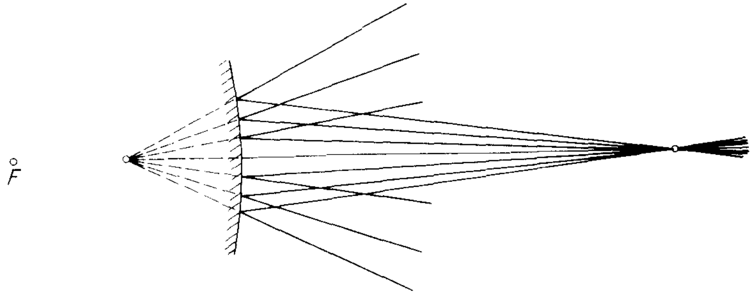
Minthogy f_{rendszer} és f_{lencse} értékeit az előbbi mérésekből meghatároztuk, ezért a fenti összefüggésből $f_{\text{tükör}}$ már kiszámítható.

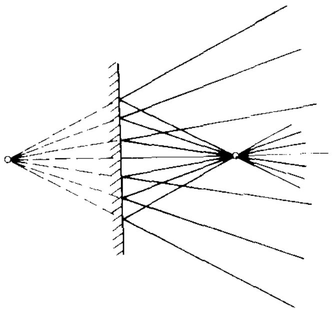
10.15. A feladatot a fénysugarak megfordíthatóságának elve alapján oldjuk meg. Mindhárom esetben annak a tárgynak a helyét keressük, amely tárgyról a tükör mögött 12 cm-re keletkezik látszólagos kép.

a) $t = ?$; ha $k = -12$ cm; $f = +24$ cm.

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f};$$







tehát $t = \dfrac{kf}{k-f} = \dfrac{(-12\text{ cm})\cdot(24\text{ cm})}{-12\text{ cm} - 24\text{ cm}}$;

$\underline{t = 8\text{ cm}.}$

b) $t = ?$; ha $k = -12$ cm; $f = -24$ cm.

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f};$$

tehát $t = \dfrac{kf}{k-f} = \dfrac{(-12\text{ cm})\cdot(-24\text{ cm})}{-12\text{ cm} + 24\text{ cm}}$;

$\underline{t = 24\text{ cm}.}$

c) $t = ?$; ha $k = -12$ cm; $f = \infty$.

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} - \frac{1}{f} = 0;$$

tehát $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{k} = 0$; $\dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{k}$;

$t = -k = -(-12\text{ cm}) = +12$ cm;

$\underline{t = 12\text{ cm}.}$

10.16. A függőlegeshez képest 48,6°-os szögben.

10.17. *a)* t = 30 cm; *b)* t = 10 cm.

10.18. 50 cm-re, ha a kép valódi; és 30 cm-re, ha a kép látszólagos.

10.19. A legegyszerűbb, ha valódi képet állítunk elő a tükörrel, lemérjük a tárgy- és a képtávolságot, majd kiszámítjuk az f-et.

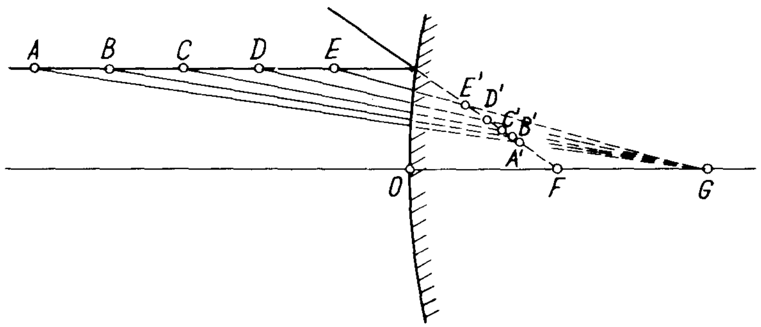
10.20. A tükörtől 20 cm-re.

10.21. *a)* „Eltűnik" a kép közepe.

b) A kép minden részlete továbbra is látható, azonban csökkent megvilágítással, „halványabban".

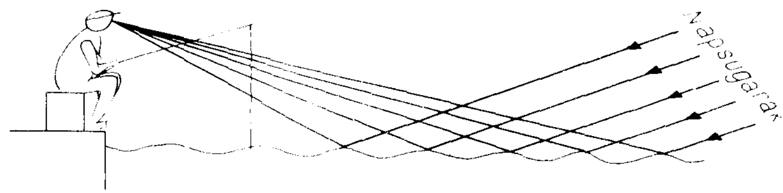
10.22. Az ábrán látható. Valamennyi kép látszólagos.

A: $t = 5 \cdot \frac{-f}{2}$;	$k = \frac{5}{7} f$;	$N = -\frac{2}{7}$.
B: $t = 4 \cdot \frac{-f}{2}$;	$k = \frac{2}{3} f$;	$N = -\frac{1}{3}$.
C: $t = 3 \cdot \frac{-f}{2}$;	$k = \frac{3}{5} f$;	$N = -\frac{2}{5}$.
D: $t = 2 \cdot \frac{-f}{2}$;	$k = \frac{1}{2} f$;	$N = -\frac{1}{2}$.
E: $t = 1 \cdot \frac{-f}{2}$;	$k = \frac{1}{3} f$;	$N = -\frac{2}{3}$.



10.23. A fény visszaverődése a víz felszínén nem „teljes visszaverődés", mivel a ráeső fénynek csak egy része verődik vissza, a többi megtörik, majd elnyelődik a vízben. Az ég, a felhők és minden tárgy tükörképe ezért látszik sötétebbnek, halványabbnak, mint maguk a tárgyak.

10.24. A Balaton felülete a legnagyobb szélcsendben sem tökéletesen sima. A víz mindig hullámzik, fodrozódik kissé. A lemenő nap sugarai már nagyon lapos szögben érik a vizet, s így az egymás utáni hullámok hátán egyre több olyan visszaverődés történik, hogy a visszaverődött fénysugár a megfigyelő szemébe jut. Egy-



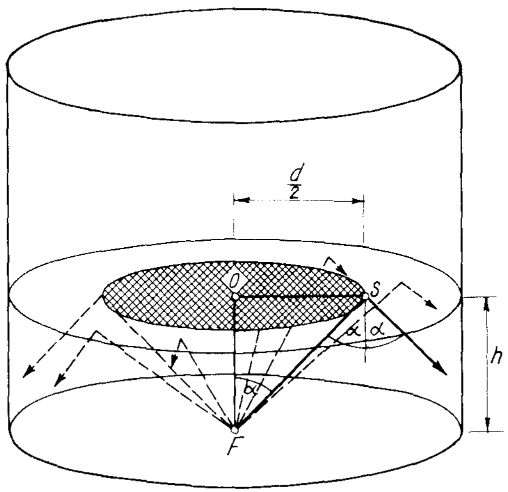
egy visszaverődési hely mint valami csillogó pont látszik, azonban a távolabbi hullámok csillogása összemosódik. A szem már nem képes különválasztani ezeket a csillogó pontokat (amelyek helye még változik is a hullámok mozgása miatt), s egyetlen összefüggő fényes csíkot észlel. Ez a fényes sáv arany-vörös színű, mivel a lemenő Napból a Föld felszíni kormos, poros légrétegeken csak az ilyen vörös színű fénysugarak törnek át. Másrészt ezt az aranysávot természetesen a lemenő Nap irányában látjuk a víz felszínén, mint valami hidat a vízen, amely a megfigyelőtől a lenyugvó Nap felé vezet. Innen kapta a nevét. Hasonló jelenség persze bármely más, elég nagy kiterjedésű víz felszínén is észlelhető, s a fényforrás is lehet akár egy lámpa fénye.

10.25. A papír és a zsír azért átlátszatlanok, mert — bár más-más oknál fogva — a rájuk eső fény mindkettőn diffúz visszaverődést szenved. Ami fény nem verődik vissza, az diffúzan megtörik, és elnyelődik, vagy átmegy. Ha a papírra zsír cseppen, akkor a zsír felszívódva bekerül a papír rostjai közé, csökkenti a diffúz visszaverődés és törés mértékét, megnöveli a szabályosét. A zsírfolt a füzetben azért sötétebb, mert alig van róla diffúz visszaverődés. Ugyanakkor a zsírfoltos papírt a fény felé tartva, a zsírfolt sokkal világosabb lesz, mint környezete (szinte „átlátszóvá" válik), mivel a fény jelentős része szabályosan megtörve, mint valami planparalel (párhuzamos falú) lemezen halad át rajta.

10.26. A közölt adatok ismeretében nem lehet megmondani. Az „optikai sűrűség", amelynek értékét az abszolút törésmutató fejezi ki, nincs közvetlen kapcsolatban az anyagok tömegsűrűségével. Jelen esetben például a benzol az o p t i k a i l a g sűrűbb anyag (törésmutatója 1,5, míg a vízé csak 1,33). A benzolból érkező fénysugár törési szöge a vízben nagyobb lesz, mint a beesési volt, azonban semmi köze sincs ahhoz, hogy melyik közegnek nagyobb a tömegsűrűsége. (A sűrűség szó fizikai és hétköznapi jelentése más vonatkozásban is különböző lehet; elég, ha csak a higany és a szurok „sűrűségének" összehasonlítására gondolunk.)

10.27. Nem látjuk a határfelületet az üvegpohár belső fala és a vele érintkező benzol között. A kísérlet elvégzése azt is jól mutatja, hogy a két törésmutató mennyire másképp függ a megvilágító fény hullámhosszától. A határfelület ugyanis mindig csak egy bizonyos hullámhosszú (színű) fény esetén tűnik el teljesen, míg fehér fény esetén mindig lehet valamennyire látni a pohár belső falát. Azt is érdemes megfigyelni, hogy ha változik a hőmérséklet, akkor más hullámhosszú (színű) fényre tűnik el teljesen a határfelület. Így lehet egy pohár benzol egyben hőmérsékletjelző műszer is.

10.28.



A tárcsának olyan nagynak kell lennie, hogy mindazokat a fénysugarakat, amelyek még nem totálreflektálódnak (nem verődnek t e l j e s e n vissza), törés után elnyelje. Ez azt jelenti, hogy az ábrán α-val jelölt szögnek a teljes visszaverődés határszögének kell lennie.

Egyrészt tehát

$\alpha = \alpha_h$;

és így $\sin\alpha = \sin\alpha_h = \dfrac{1}{1{,}33}$;

vagyis: $\alpha = \alpha_h = 48{,}6°$.

Másrészt, az ábra alapján:

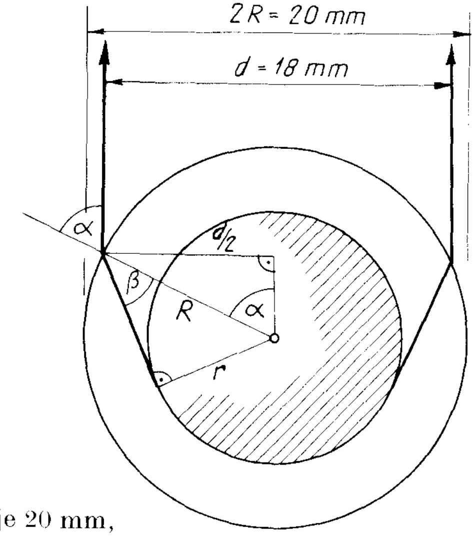
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{h};$$

és így $d = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha = 20\ \text{cm} \cdot \operatorname{tg} 48{,}6°$.

Tehát: $d = 22{,}7$ cm.

10.29. Rajzoljuk le a higannyal telt cső keresztmetszetét! Tüntessük fel az ábrán annak a fénysugárnak az útját, amelynek meghosszabbításában képzeljük a higanyoszlop szélét. Itt az optikai csalódás egyik tipikus esete! A rajz jól mutatja, hogy tulajdonképpen a higanyoszlop hátsó felületéből is látunk valamit, mintegy a „higany mögé" is láthatunk az üvegcsövön keresztül. Ugyanakkor a higanyoszlop valódi átmérője jóval kisebb annál, amilyennek látszik.

Az ábrából leolvashatók a következő geometriai összefüggések:



$$\sin\alpha = \frac{d}{2R};$$

$$\sin\beta = \frac{r}{R}.$$

Ugyanakkor a törés törvényét felhasználva:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{d}{2R}}{\frac{r}{R}} = \frac{d}{2r}.$$

Behelyettesítve a megadott adatokat:

$$1{,}5 = \frac{18\ \text{mm}}{2r};$$

tehát $r = 6$ mm.

Mivel a cső külső átmérője 20 mm,

ezért: $R = 10$ mm;

és így az üvegcső falvastagsága:

$R - r = 4$ mm.

(És ez is csak 1 mm-nek látszott!)

10.30. Ugyanolyan optikai csalódás ez is, mint amit a 10.29. feladatban láttunk. Ott levezettük a következő összefüggést:

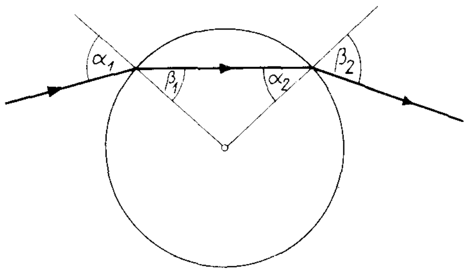
$$n = \frac{d}{2r};$$

n az üveg törésmutatója, $2r$ az üvegcső valódi belső átmérője, d pedig a látszólagos belső átmérő. Fejezzük ki d-t:

$$d = 2r \cdot n.$$

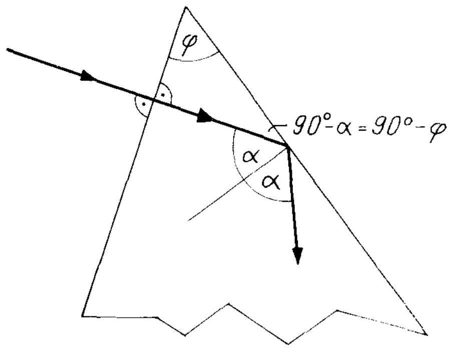
Vagyis a látszólagos belső átmérő (a higany vélt vastagsága) üveg esetén körülbelül másfélszerese a valódi belső átmérőnek. De mi a helyzet akkor, ha a külső átmérő ennél kisebb? Ebben az esetben az üveg falán már sehol sem lehet úgy átlátni, hogy ne a higanyt lássuk. A teljes külső átmérőnek megfelelő vastagságban a higany fényes felülete látszik.

10.31.



Nem tudunk. A fénysugár a gömbben egy húr mentén halad. Geometriailag belátható, hogy a törési szög a gömbbe való belépéskor ugyanannyi, mint a beesési szög a gömbből való kilépéskor ($\beta_1 = \alpha_2$). Ez pedig azt jelenti, hogy a fénysugár ugyanolyan szögben l é p k i a gömbből, mint amekkora szögben belépett a gömbbe ($\beta_2 = \alpha_1$) Tehát szó sem lehet teljes visszaverődésről.

10.32.



Az ábráról leolvasható a következő geometriai összefüggés:

$90° - \alpha = 90° - \varphi$

tehát: $\alpha = \varphi$.

A második lapon akkor nem lép ki a prizmából fénysugár, ha ott t e l j e s e n v i s s z a v e r ő d i k. A teljes visszaverődés feltétele pedig:

$$\sin\alpha \geq \frac{1}{n};$$

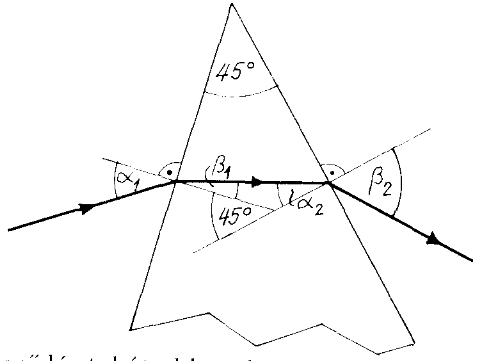
$$\sin\alpha \geq \frac{1}{1{,}6};$$

$$\alpha \geq 38{,}7°;$$

Ezek szerint: $\varphi \geq 38{,}7°$.

A minimális törőszög tehát 38,7°.

10.33. Teljes visszaverődés csak a második lapon léphet fel, mivel itt érkezik a fénysugár o p t i k a i l a g r i t k á b b közeg határához. Készítsünk egy ábrát, amelyen azt az esetet tüntetjük fel, amikor nem lép fel a teljes visszaverődés. Az ábráról leolvashatjuk, hogy:



$\beta_1 + \alpha_2 = 45°$.

Nem lép fel teljes visszaverődés, ha:

$$\sin\alpha_2 < \frac{1}{n};$$

$$\sin\alpha_2 < \frac{1}{1{,}6};$$

$$\alpha_2 = 38{,}7°.$$

Nem lép fel teljes visszaverődés tehát akkor, ha:

$\beta_1 > 6{,}3°$.

Milyen szöggel eshet tehát a prizmára a fénysugár?

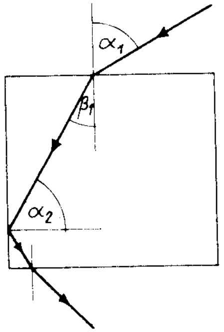
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n = 1{,}6;$$

$$\sin\alpha_1 = 1{,}6 \cdot \sin\beta_1;$$

$$\sin\alpha_1 > 1{,}6 \cdot \sin 6{,}3°;$$

$$\underline{\alpha_1 > 10{,}2°.}$$

10.34. A feladat feltétele úgy is megfogalmazható, hogy a kocka egyik lapján beeső fénysugárnak a szomszédos lapon nem szabad ki lépnie; ha a szomszédos lap felé tart, akkor azon teljesen vissza kell verődnie. Térgeometriai megfontolásokból belátható (ezt most nem tesszük meg), hogy elegendő azt az esetet megvizs-



gálni, amikor a beesési sík párhuzamos a kocka valamelyik lapjával.
Vizsgáljuk tehát ezt a speciális esetet, és rajzoljuk le a kockának a beesési síkkal való metszetét, benne a fénysugár útját.
Leolvasható az ábráról, hogy:

$$\beta_1 + \alpha_2 = 90°. \qquad (1)$$

A teljes visszaverődés feltétele:

$$\sin \alpha_2 \geq \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Írjuk még fel a törés törvényét a belépő fénysugárra:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n. \qquad (3)$$

(1), *(2)* és *(3)* egyszerre csak akkor teljesülhetnek, ha:

$$\cos \beta_1 \geq \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad \sin \beta_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Ebből viszont egyrészt β_1 nagyságára kapunk egy feltételt:

$$\beta_1 \leq 45°;$$

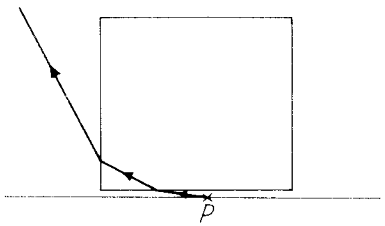
másrészt ($\beta_1 \leq 45°$-ot felhasználva) az üveg törésmutatójának kapjuk lehetséges értékeit:

$$n > \sqrt{2} = 1{,}41.$$

10.35. Mi kell ahhoz, hogy a foltot a kocka oldallapján keresztül láthassuk?

Az, hogy a foltról elinduló fénysugarak a kocka a l a p l a p j á n át megtörve a kockába lépjenek, elérjék a kocka o l d a l l a p j á t, majd azon megtörve, ott újra kilépjenek, s így szemünkbe jussanak. Ez az eset van lerajzolva az ábrán. *P* a papírra rajzolt folt egyik pontja. (Az ábrán a kockát egy kissé a papír fölé rajzoltuk, hogy a *P*-ből kiinduló fénysugár útját könnyebb legyen ábrázolni.)

a) Ha az üvegkockát a száraz papírra tesszük, akkor a *P*-ből kiinduló fénysugár a kocka és a papír közötti vékony levegőrétegben halad. A beesési szög majdnem 90°. Tehát a törési szög, jó



ozelítéssel a teljes vissza
erődés határszöge lesz:

$$\ldots n\ \beta_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};$$

$$\beta_1 = 41{,}8°.$$

z a fénysugár a kockán belül haladva, az oldallapra

$$\alpha_2 = 90° - 41{,}8° = 48{,}2°$$

esési szöggel esik. Ez viszont nagyobb, mint a teljes visszave-
dés határszöge, tehát a fénysugár teljesen visszaverődik, nem
p ki. A foltot oldalról nem lehet látni.

történik, ha a foltra vizet cseppentünk?

kor a kocka és a papír között vékony vízréteg alakul ki, eb-
n halad a P-ből induló fénysugár. A törési szög ismét a teljes
sszaverődés határszöge lesz, csakhogy most

$$\frac{\ldots 90°}{\ldots \beta_1} = \frac{n_{üveg}}{n_{víz}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8};$$

$$\ldots \beta_1 = \frac{8}{9};$$

$$\beta_1 = 62{,}7°.$$

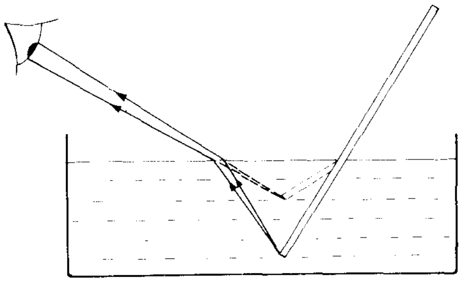
a fénysugár a kockán belül haladva, az oldallapra

$$90° - 62{,}7° = 27{,}3°$$

sési szöggel esik. Mivel ez a szög kisebb, mint az üveg-levegő
árfelülethez tartozó teljes visszaverődési határszög (41,8°),
rt a fénysugár az oldallapon nem verődik teljesen vissza, ha-
a részben megtörik, és kilép. Így válik a folt oldalról is lát-
óvá.

A 10.35. feladat megoldásánál kapott eredményt alkalmazva
mondhatjuk, hogy a foltot víz nélkül is lehet látni, ha a
ka anyagának törésmutatója:

$$\sqrt{2} = 1{,}41.$$

10.36. 

A pálca látszólagos megtörése nincs ellentmondásban a fénysugarak törésével, sőt, éppen azzal magyarázható, ahogyan az az ábrán is látható. Mivel a pálca vízbe merülő részének bármely pontjáról kiinduló széttartó fénynyaláb a víz felülete *felé* megtörve jut a szemünkbe, ezért a pálca vízbe merülő részének összes pontja felemelkedve, eredeti helyzeténél magasabban látszik. Ezért tűnik úgy, mintha a pálca a vízben a víz felszíne felé megtört volna. Az lenne a hihetetlen, ha nem így lenne!

Figyelmeztetés!

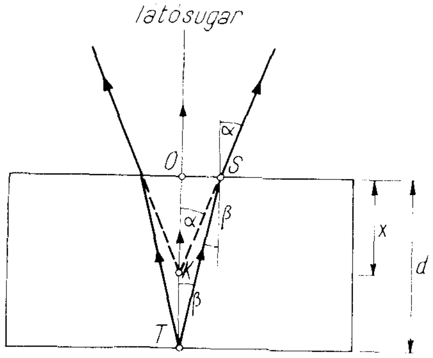
A pálca vízbe merülő része r ö v i d e b b n e k is látszik, mivel minden pontja függőlegesen fölfelé, a h a t á r f e l ü l e t r e m e r ő l e g e s irányban látszik eltolódni. Ezért a rajzon a megtört pálcát mindig úgy kell ábrázolni, hogy a pálca valódi vége és a pálca látszólagos képének vége ugyanazon a függőleges egyenesen legyenek rajta!

10.37. A látósugár annak az igen kis szögű, széttartó sugárnyalábnak a k ö z é p s ő sugara, amely sugárnyaláb a tárgypontról indul ki, majd végül a pupillán át a szembe jut. Készítsük el a feladat ábráját úgy, hogy ezt az igen keskeny sugárnyalábot is jó szélesre rajzoljuk, hogy könnyen felismerhessük a geometriai összefüggéseket. Legyen a nyaláb legszélső sugarának beesési szöge β, törési szöge α. (A fény az üvegből megy a levegőbe!)
Azt kell meghatároznunk, honnan látszik a nyaláb törés után kiindulni. Ezt a pontot, amely így a T pont képe lesz, az ábrán K pont jelöli. Keressük mondjuk a K pont távolságát a d vastagságú üveglemez felszínétől. Tehát: $x = ?$

Az ábráról leolvasható, hogy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{OS}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{OS}}{x};$$

valamint $$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{OS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OS}}{d}.$$



Ezek alapján a keresett távolság:

$$x = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Most használjuk fel, hogy k i s s z ö g ű sugárnyaláb juthat csak a pupillán keresztül a szembe! Ebben az esetben megengedhető a következő közelítés:

$$\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha;$$

tehát

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}.$$

Ezért

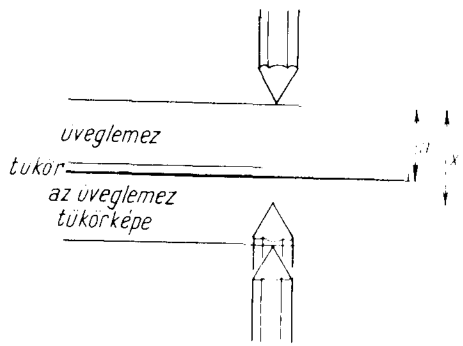
$$x = \frac{d}{n}.$$

Behelyettesítve a megadott adatokat:

$$x = \frac{15\ \text{cm}}{1{,}5} = 10\ \text{cm}.$$

Tehát a szemcse látszólagos képe az üveglemez felszínétől mérve csupán 10 cm mélyen látszik.

10.38. A feladat a 10.37. feladat problémájára vezethető vissza.
Jelöljük a-val a tükröző felület fölötti üveglemez vastagságát! A ceruza hegye ezek szerint a távolságra van a tükörtől, ha hozzáér az üveghez. A tükörképe a tükör mögött lesz, ugyancsak



a távolságra. A tükörkép távolsága az üveg felszínétől tehát $2a$. Minthogy a tükörben az üveg is tükröződik a ceruzával együtt, ezért úgy gondolhatjuk, hogy $2a$ vastagságú üveglemez alján levő tárgyat nézünk. Ez pedig, mint láttuk, felemelkedve látszik, s a látszólagos távolság az üveg felszínétől:

$$x = \frac{d}{n} = \frac{2a}{n}.$$

A feladatban $x = 2$ mm; $n = 1{,}5$; tehát $\underline{a = 1{,}5 \text{ mm}}$.

10.39. *a)* Nem, a távolabbi gyöngébben világít, mivel azoknak a fény sugaraknak, amelyek a távolabbi tükörképet hozzák létre, kétszer is át kell menniük az első ablaktáblán, s eközben a sugarak egy része elnyelődik, illetve visszaverődik.
b) Igen, csak a távolabbi kisebb látószög alatt látszik.
c) Kétszer olyan messze, mint amennyi a két ablaküveg távolsága.

10.40. Soványabbnak. Az alumínium fazék egy hengeres tükör, amely a henger tengelyével párhuzamos szakaszokat mint síktükör tükrözi vissza. Ezért például az orr hossza a tükörképben ugyanannyi, mint a valóságban. Ugyanakkor a vízszintes szakaszokról a fazék mint domború gömbtükör, kicsinyített képet állít elő. A száj rövidebbnek, az arc szélessége keskenyebbnek látszik, mint amilyenek a valóságban. Természetesen kövérebbnek is láthatjuk arcunkat ugyanebben a fazékban, csupán el kell fordítani a fazekat 90°-kal, hogy a henger tengelye vízszintesen álljon. Ekkor a vízszintes méretek tükörképe változatlan, s a függőlegeseké kicsinyített, „összenyomódott". Mindenképpen torz képet kapunk, arcunk valamilyen karikatúráját. („Görbe tükör".)

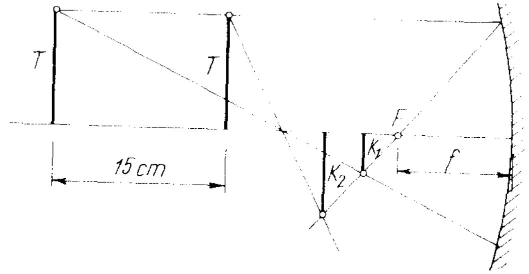
10.41. Adatok: $f > 0$; $K_1 = \dfrac{T}{3}$;

$t_2 = t_1 - 15$ cm; $K_2 = \dfrac{T}{1{,}5}$.

Kérdés: $f = ?$

Számítsuk ki először a nagyításokat!

$$N_1 = \frac{K_1}{T} = \frac{1}{3}; \quad N_2 = \frac{K_2}{T} = \frac{1}{1{,}5}.$$



Használjuk fel a következő összefüggést:

$$N = \frac{f}{t - f}.$$

$$N_1 = \frac{f}{t_1 - f}; \quad N_2 = \frac{f}{t_2 - f};$$

$$\frac{1}{3} = \frac{f}{t_1 - f}; \quad \frac{1}{1{,}5} = \frac{f}{t_1 - 15 \text{ cm} - f}.$$

E két egyenletből t_1 és f meghatározhatók.

$t_1 = 40$ cm;

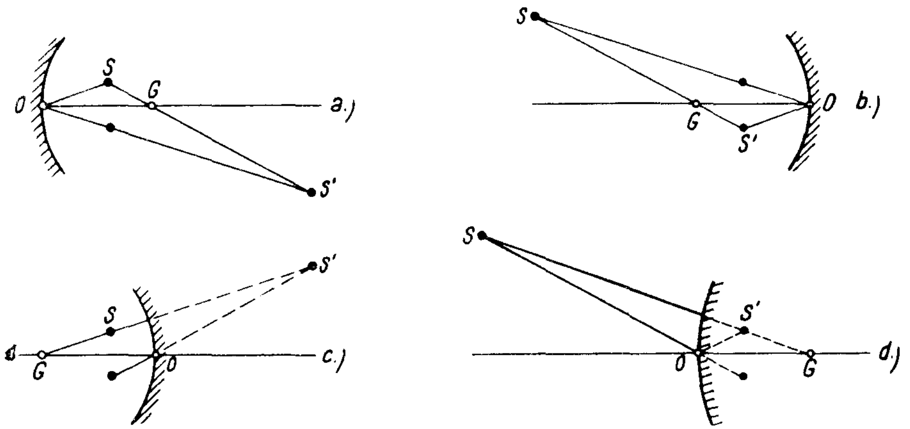
$\underline{f = 10 \text{ cm}}.$

10.42. Ha a kanál külső, d o m b o r ú felülete a tükröző felület, akkor ez, mint domború tükör, előállítja arcunk kicsinyített, egyenes állású, l á t s z ó l a g o s képét. Ha a kanál belső, h o m o r ú felülete tükröz, akkor az arcunkról kicsinyített, fordított állású, v a l ó d i képet állít elő. Ezt a valódi képet *most nem ernyőn* fogjuk fel, hanem közvetlenül szemünkkel figyeljük meg. A két esetben azért látunk körülbelül egyforma nagy képet, mert a fókusztávolság a tárgytávolságnál sokkal kisebb, s így a nagyítás

$$N = \frac{f}{t - f} \approx \frac{f}{t};$$

mindkét esetben körülbelül ugyanakkora.

10.43. A G görbületi (geometriai) középpontot az SS' egyenes tűzi ki az optikai tengelyen.
Az O optikai középpontot úgy kaphatjuk meg, hogy meghúzzuk



valamelyik olyan egyenest, amelyik az egyik pontnak az optikai tengelyre vonatkozó tükörképén és a másik ponton megy át. Ez az egyenes tűzi ki az optikai tengelyen az O pontot.

A tükör domború, ha S és S' az optikai tengelynek ugyanazon az oldalán vannak, és S' a megszerkesztett O és G pontok „között" helyezkedik el. Minden más esetben a tükör homorú.

A fenti állítások helyességét a megszerkesztett ábrákon ellenőrizhetjük. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

11. Optikai lencse

11.1. $\frac{1}{f} = 10\frac{1}{\text{m}}$; $t = 15$ cm; $T = 2$ cm:

$k = ?$ $K = ?$

A leképzés törvénye szerint:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t};$$

ebből:

$$k = \frac{tf}{t-f} = \frac{15\text{ cm}\cdot 10\text{ cm}}{15\text{ cm} - 10\text{ cm}};$$

$\underline{k = 30\text{ cm.}}$

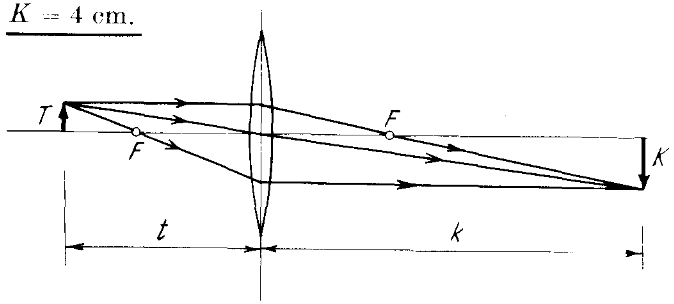
A nagyítás törvénye szerint:

$$\frac{K}{T} = \frac{k}{t};$$

amelyből a kép nagysága:

$$K = \frac{k}{t}\cdot T = \frac{30}{15}\cdot 2\text{ cm};$$

$\underline{K = 4\text{ cm.}}$



11.2. $n = 1{,}5$; $R_1 = R_2 = R = 3$ cm; $f = ?$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right];$$

$$\frac{1}{f} = 0{,}5\,\frac{2}{R};$$

$$\underline{f = R = 3\ \text{cm}.}$$

11.3. $N = 4$; $t + k = 1$ m;

$f = ?$ $t = ?$

A nagyítás:

$$N = \frac{k}{t} = \frac{1\ \text{m} - t}{t};$$

Ebből:

$$t = \frac{1\ \text{m}}{\text{N} + 1} = \frac{1}{5}\ \text{m};$$

$\underline{t = 20\ \text{cm},}$ $\qquad k = 80$ cm.

A leképezés törvénye:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k};$$

és ebből:

$$f = \frac{tk}{t+k} = \frac{20\ \text{cm} \cdot 80\ \text{cm}}{100\ \text{cm}};$$

$$\underline{f = 16\ \text{cm}.}$$

11.4. A leképezés törvényéből:

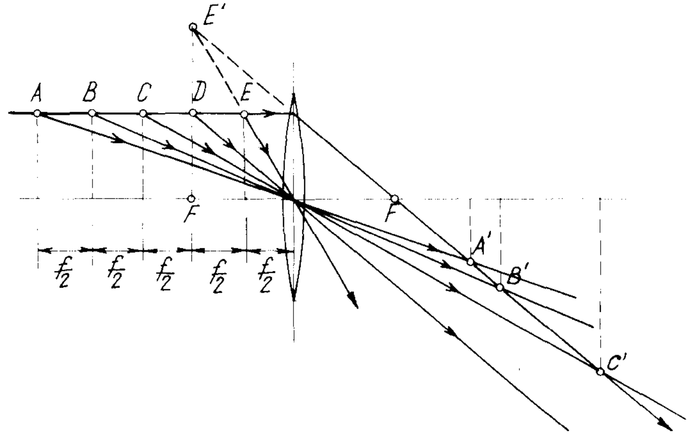
$$k = \frac{tf}{t-f};$$

$$k_\text{A} = \frac{\frac{5}{2}f \cdot f}{\frac{5}{2}f - f} = \frac{5}{3}f \qquad k_\text{B} = \frac{2f \cdot f}{2f - f} = 2f;$$

$$k_\text{C} = \frac{\frac{3}{2}f \cdot f}{\frac{3}{2}f - f} = 3f;$$

$$k_\text{D} = \frac{f \cdot f}{f - f};$$ értelmetlen, a kép a végtelenben van,

$$k_\text{E} = \frac{\frac{1}{2}f \cdot f}{\frac{1}{2}f - f} = -f;$$ a kép látszólagos.

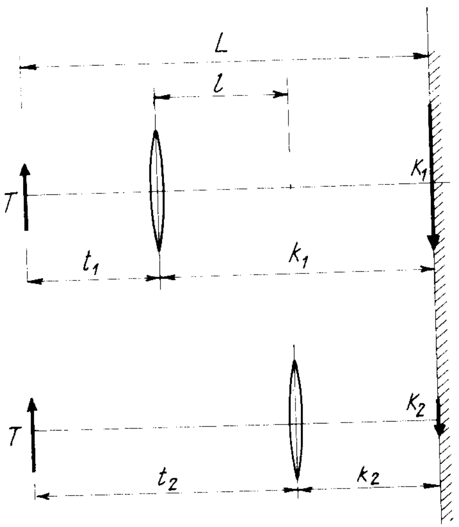


A szerkesztéshez az optikai tengellyel párhuzamos és az optikai középponton áthaladó fénysugarakat használtuk.

11.5. *a)* A leképezési törvény szerint:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}; \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2}.$$

Ha a tárgy és a lencse helyzetét felcseréljük, az ernyőn ismét éles képet kapunk. Ez következik a fénysugár menete megfordíthatóságának elvéből, de a leképezés törvényéből is látszik, mert ha t helyébe k-t és a k helyébe t-t írunk, az egyenletben semmi változás nem történik. Tehát a tárgy és a kép helyzete



felcserélhető. A feladatban a lencse eltolása tulajdonképpen a tárgy és képe helyzetének felcserélését valósítja meg, és így

$t_1 = k_2$; $\quad t_2 = k_1$.

A két tárgytávolság különbsége egyenlő a lencse két helyzetének l távolságával, az összetartozó tárgy- és képtávolságok összege egyenlő a tárgy és az ernyő L távolságával, tehát:

$t_2 - t_1 = l$ és $t_2 + k_2 = L$.

Felhasználva, hogy $k_2 = t_1$

$t_2 - t_1 = l$ és $t_2 + t_1 = L$.

Ezen egyenletekből:

$$t_2 = \frac{L+l}{2}; \qquad t_1 = \frac{L-l}{2}.$$

Ezt a leképezés törvényébe helyettesítve:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{L-l}{2}} + \frac{1}{\frac{L+l}{2}};$$

ebből a fókusztávolság:

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L};$$

$$f = \frac{100^2\ \text{cm}^2 - 20^2\ \text{cm}^2}{4 \cdot 100\ \text{cm}};$$

$$\underline{f = 24\ \text{cm}.}$$

b) A nagyítás az első esetben:

$$N_1 = \frac{k_1}{t_1};$$

a lencse eltolása után:

$$N_2 = \frac{k_2}{t_2};$$

de $k_2 = t_1$ és $t_2 = k_1$;

vagyis $N_2 = \dfrac{t_1}{k_1}$.

A két nagyítás szorzata:

$$N_1 \cdot N_2 = \frac{k_1}{t_1} \cdot \frac{t_1}{k_1} = 1;$$

$$\underline{\text{tehát } N_1 = \frac{1}{N_2};}$$

c) A nagyítás meghatározás szerint:

$$N = \frac{K}{T};$$

vagyis

$$N_1 = \frac{K_1}{T}; \qquad N_2 = \frac{K_2}{T};$$

az előző, *b)* pontban beláttuk, hogy a két nagyítás szorzata 1, tehát:

$$\frac{K_1}{T} \cdot \frac{K_2}{T} = 1;$$

$$\underline{T = \sqrt{K_1 \cdot K_2}.}$$

1.6. *a)* A két óraüveget összeragasztva, és víz alá helyezve, egy „levegőlencsét" kapunk, víz környezettel. A levegő törésmutatója a vízre vonatkozóan a víz levegőre vonatkozó törésmutatójának reciproka.

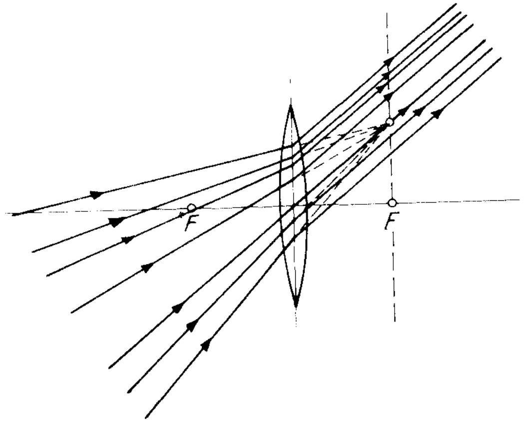
A víz törésmutatója $n_{vl} = 1{,}33 = \dfrac{4}{3}$; tehát $n_{lv} = \dfrac{3}{4}$; és így a vízben levő levegőlencse fókusztávolságára:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{20\text{ cm}}\right);$$

$$f = -40\text{ cm}.$$

Ezt azt jelenti, hogy a vízben levő kétszer domború levegőlencse szórólencseként viselkedik.



b) Miután szórólencsénk van, úgy kaphatunk párhuzamos sugárnyalábot, hogy a lencsére összetartó fénynyalábot bocsátunk, amely a lencse beeső fénysugárral ellentétes oldalán levő fókuszsíkjának valamely pontja felé tart. (Fókuszsík a fókuszpontban az optikai tengelyre merőleges sík.)
A vékony óraüvegnek nincs optikai szerepe a feladatban.

11.7. A lencse fókusztávolságát meghatározó

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

összefüggésben n a lencse anyagának a lencse környezetére vonatkozó törésmutatója. Ha a lencsét levegőből vízbe helyezzük, a lencse környezete megváltozik, vagyis megváltozik a törésmutató, és vele együtt a fókusztávolság is.
A lencse anyagának, az üvegnek a vízre vonatkozó törésmutatója egyenlő a fény két közegbeli sebességének hányadosával:

$$n_{üv} = \frac{c_v}{c_ü}.$$

Az üvegnek a levegőre vonatkozó törésmutatója, vagy röviden az üveg törésmutatója (abszolút törésmutató):

$$n_ü = \frac{c_l}{c_ü}.$$

A víznek a levegőre vonatkozó törésmutatója, a víz törésmutatója:

$$n_v = \frac{c_l}{c_v}.$$

A két abszolút törésmutató hányadosa:

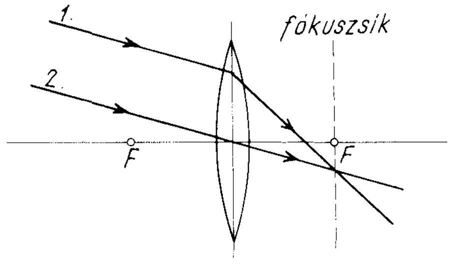
$$\frac{n_ü}{n_v} = \frac{\dfrac{c_l}{c_ü}}{\dfrac{c_l}{c_v}} = \frac{c_v}{c_ü} = n_{üv},$$

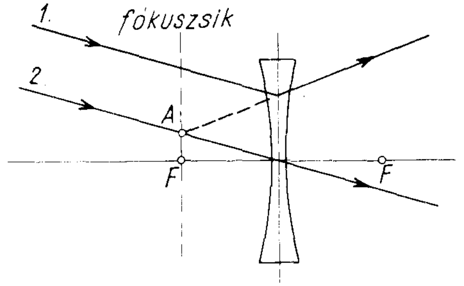
tehát az üvegnek a vízre vonatkozó törésmutatója egyenlő az üveg és a víz törésmutatójának a hányadosával.
A víz törésmutatója $n_v = 1{,}33 > 1$;

$$\text{tehát: } n_{üv} = \frac{n_ü}{n_v} < n_ü.$$

A lencse vízbehelyezésekor, tehát a lencsének a környezetére vonatkozó törésmutatója csökken, vele együtt csökken a fókusztávolság reciproka, tehát *a fókusztávolság növekszik.*

11.8. A szerkesztésnél azt használjuk fel, hogy a lencsére párhuzamosan érkező fénysugarak a f ó k u s z s í k b a n egyesülnek. Egy lehetséges szerkesztés a következő: az adott 1. fénysugárral párhuzamos 2. fénysugár útját ismerjük, mert az optikai középpont felé tart, és így irányváltozás nélkül jut át a lencsén. A 2. fény-



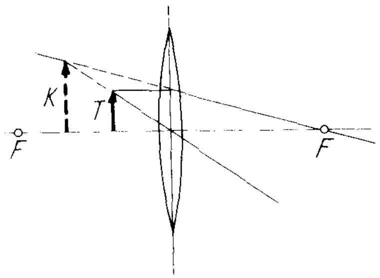


sugár A pontban metszi a fókuszsíkot. Az 1. fénysugár is át kell, hogy menjen ezen a ponton.
Az ábrán gyűjtő- és szórólencse esetében is látható a szerkesztés.

11.9. Ha a tárgy a gyűjtőlencse és fókuszpontja között van, a kép látszólagos, és a lencsének ugyanazon az oldalán keletkezik, amelyik oldalon a tárgy van. Ezt a látszólagos képet nézzük a lencse túlsó feléről, amikor a lencsét nagyítóként használjuk.

$D = 20\frac{1}{\mathrm{m}}$; $\quad t = 4\ \mathrm{cm}$; $\quad N = ?$

$\frac{1}{f} = D = 20\frac{1}{\mathrm{m}}$; $\quad f = 5\ \mathrm{cm}$.



A leképezési törvény:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

alapján $k = \frac{ft}{t-f}$.

A nagyítás $N = \frac{k}{t} = \frac{\frac{ft}{t-f}}{t} = \frac{f}{t-f}$;

$$N = \frac{5\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm} - 5\ \mathrm{cm}} = -5;$$

tehát a bélyeget 5-ször nagyobbnak látjuk a nagyító alatt. A negatív előjel a kép látszólagos jellegét mutatja.

11.10. Az emberi szem leegyszerűsített modellje a következő: a fény a pupillán keresztül egy változtatható fókusztávolságú lencsére jut, amely a mögötte meghatározott, állandó távolságban levő ideghártyára képezi le azt a tárgyat, amit nézünk. A képtávolság állandó. A tárgyak viszont különböző távolságban vannak a szemlencsétől. Hogy az éles kép mindig az ideghártyán keletkezzék, a lencse fókusztávolsága változik (a függesztő izomrostok domborúbbá vagy laposabbá alakítják). A szem fókusztávolsága olyan határok között változik, hogy körülbelül 10 cm-től a végtelenig élesen láthatjuk a tárgyakat. A szemnek ezt a tulajdonságát a l k a l m a z k o d ó - k é p e s s é g n e k (a k k o m o d á c i ó n a k) nevezzük. Azt a távolságot, amelyhez a szem megerőltetés nélkül alkalmazkodik, a t i s z t a l á t á s t á v o l s á g á n a k nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a szem számára a legkedvezőbb a tiszta látás távolságához való alkalmazkodás. Legkevésbé fárasztó az olvasás, ha a könyvet a tiszta látás távolságában tartjuk a szemünktől.

Ha a csillagos égboltra nézünk:
$t_1 = \infty$, a szemlencse erőssége, dioptriája D_1; ha a könyvet nézzük: $t_2 = 0{,}25$ m, a szemlencse erőssége D_2.
Mindkét esetre felírva a leképezés törvényét:

$$D_1 = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k};$$

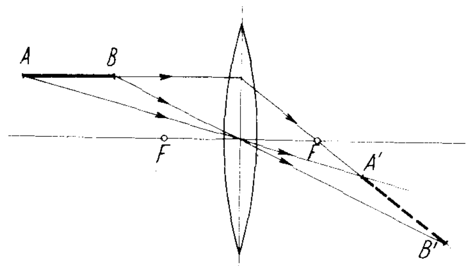
$$D_2 = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k}.$$

A szemlencse dioptriájának megváltozása:

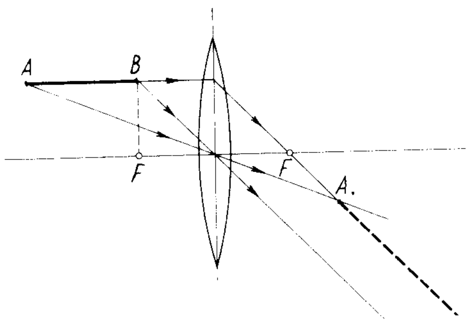
$$D_2 - D_1 = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{0{,}25\ \mathrm{m}} - \frac{1}{\infty} = 4\frac{1}{\mathrm{m}} - 0;$$

$$D_2 - D_1 = 4\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

11.11. A szerkesztéshez A és B pontokon áthaladó, az optikai tengellyel párhuzamos sugarat és az optikai középponton áthaladó fénysugarakat használtuk.
A kép valódi, az optikai tengellyel szöget bezáró egyenes szakasz, amely az AB fénysugár lencsén megtört folytatásán fekszik.

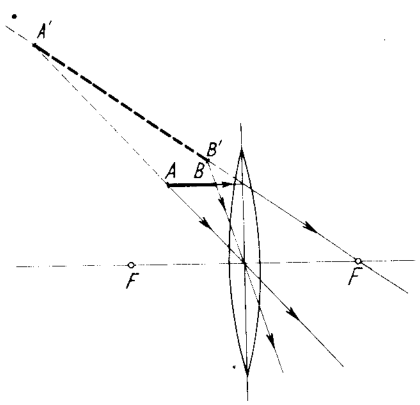


11.12.



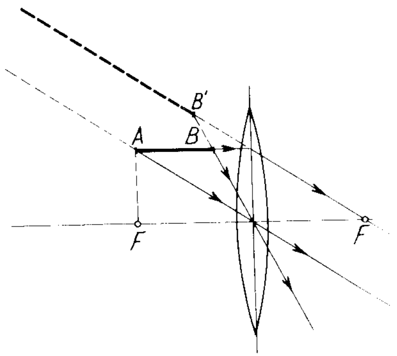
A szerkesztést ugyanúgy hajtottuk végre, mint a 11.11. feladatban.
Az AB szakasz képe most is valódi, de nem véges szakasz, hanem egy félegyenes. B pont képe B' a végtelenben van.

11.13.



A szerkesztést hasonlóan lehet végrehajtani, mint a 11.11. feladatban. A kép is hasonló tulajdonságú, csak látszólagos.

11.14.



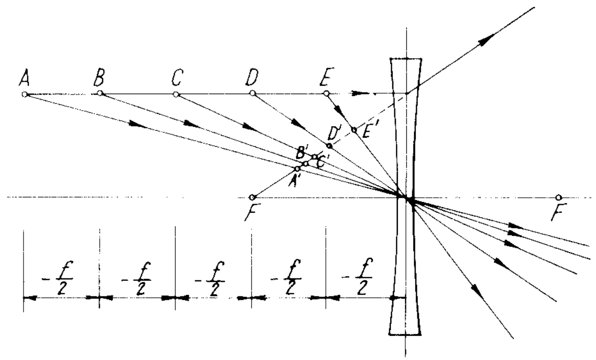
Ha az előző feladatbeli A pont közeledik a fókuszhoz, képe, az A' pont egyre távolodik a lencsétől. Határesetben, ha A a fókuszpontba jut, A' a végtelenben van.

11.15. $K = 42{,}9$ cm. A képpont az optikai tengelytől 7,1 cm-re fekszik.

11.16. $n = 2$.

11.17. $k_A = \frac{5}{7}f$; $k_B = \frac{2}{3}f$; $k_C = \frac{3}{5}f$; $k_D = \frac{1}{2}f$; $k_E = \frac{1}{3}f$.

$f < 0$, tehát az összes kép virtuális.



11.18. *a)* $f = 5$ cm,
b) $n = 1{,}6$.

11.19. *a)* $t = 24$ cm;
b) $t = 12{,}6$ cm;
c) $t = 72$ cm;
d) $t = 6$ cm.

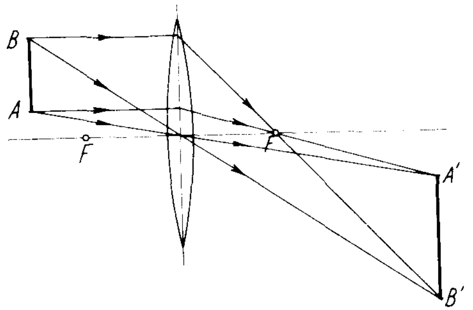
11.20. $f = 10$ cm; $N = 2$.

11.21. $T = \sqrt{K_1K_2}$; $L \geq 4f$.

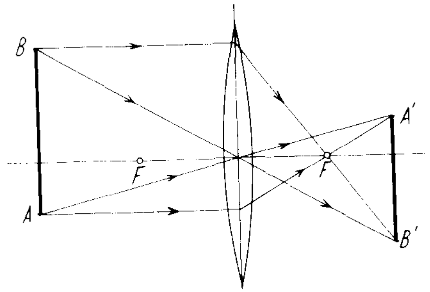
11.22. *a)* a tárgynak letakart részéről nem kapunk képet.
b) az egész tárgyról éles képet kapunk, de a megvilágítás gyengébb lesz.

11.23. $\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ s; tehát az expozíciós idő nem lehet több, mint $\frac{1}{400}$ másodperc.

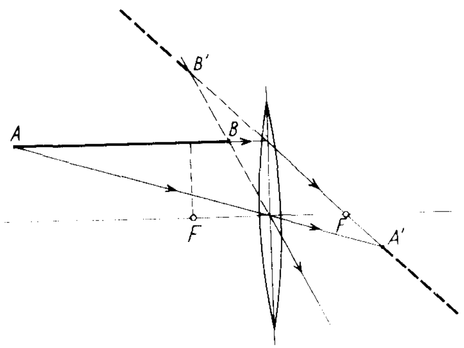
11.24.



11.25.



11.26.



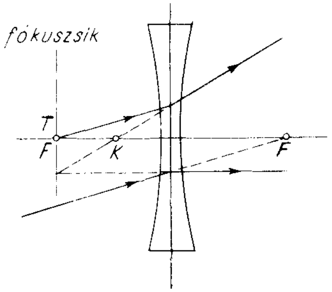
11.27. A szórólencse fókusztávolsága negatív (látszólagos fókusz), ezért a fókuszpontban levő tárgypont tárgytávolsága $t = -f$. A leképezés törvénye szerint:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-f} + \frac{1}{k};$$

amelyből

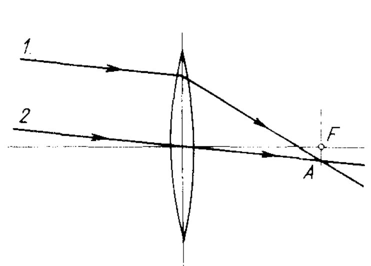
$$k = \frac{f}{2} < 0;$$

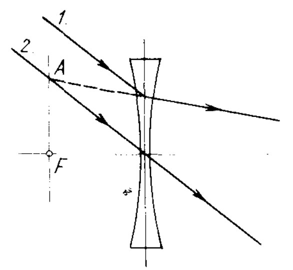
tehát a kép látszólagos, a tárgyoldalon keletkezik a lencsétől $\frac{f}{2}$ távolságban.



A szerkesztésnél a következő nehézség adódik: a tárgypont az optikai tengelyen van, és így azok a fénysugarak, melyeket a szerkesztésben használni szoktunk (optikai tengellyel párhuzamos sugár, optikai középponton áthaladó sugár, a fókuszponton keresztül érkező sugár), mind egybeesnek az optikai tengellyel, tehát nem jelölik ki metszéspontjukkal a képpontot. Ezért egy, a tárgypontból kiinduló tetszőleges sugár menetének szerkesztésével juthatunk csak célhoz. A szerkesztést a 11.8. feladat megoldásában megbeszéltek szerint végeztük.

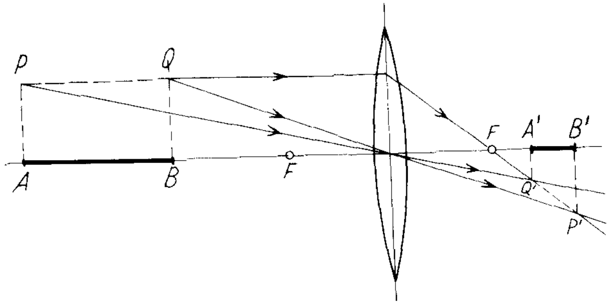
11.28. A 11.8. feladatban adott volt a lencse, helyzete, egyik optikai tengelye és a lencse fókuszpontjai. Meg kellett szerkeszteni egy nem speciális fénysugár menetét a lencsén való törés után. A szerkesztésnél azt használtuk ki, hogy a lencsére párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse fókuszsíkjában metszik egymást a lencsén való áthaladás után.
Most bizonyos értelemben fordított a feladat. Ismerjük egy nem speciális sugár menetét, a lencse helyzetét és a lencse optikai



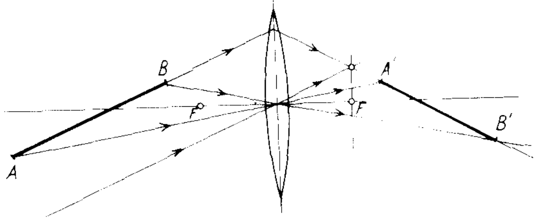


tengelyét, keressük a fókuszpontokat. A párhuzamos sugaraknak a fókuszsíkban történő találkozását használjuk fel most is. Az adott 1. fénysugárral párhuzamos és az optikai középponton áthaladó 2. fénysugár a lencsén irányváltozás nélkül halad át. Az 1. és 2. sugár A metszéspontja a fókuszsíkban van. A fókuszsík merőleges az optikai tengelyre, tehát A-ból az optikai tengelyre bocsátott merőleges kijelöli az egyik fókuszpontot az optikai tengelyen. A másik fókuszpont a lencse túloldalán, a lencsére szimmetrikusan helyezkedik el.

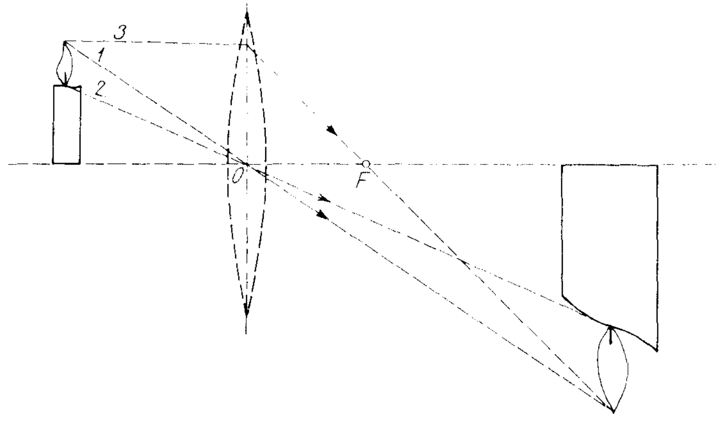
11.29. Toljuk el a fénycsövet PQ helyzetbe úgy, hogy PA és QB merőleges legyen az optikai tengelyre. A PQ szakasz képét megszerkesztjük, amint azt a 11.11. feladatban megbeszéltük. Mivel az optikai tengelyre merőleges egyenesen levő pontok képei is egy, az optikai tengelyre merőleges egyenesen helyezkednek el, ezért a PQ pontok $P'Q'$ képeinek az optikai tengelyre eső merőleges $A'B'$ vetületei az AB pontok képei is egyben.

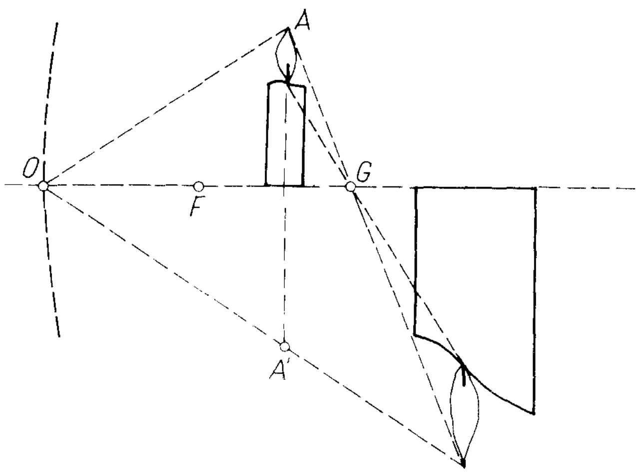


11.30. Egy lehetséges megoldás a következő: először megszerkesztjük az AB irányú sugár menetét, a vele párhuzamos és az optikai középponton átmenő fiktív fénysugár segítségével, ahogy a 11.8. feladatban megbeszéltük, majd A-ból B-ből induló és az optikai középponton áthaladó sugarak segítségével kijelöljük A és B, A' és B' képét.



11.31. *a)* A kép csak valódi lehet, mert fordított állású. Válasszunk ki a tárgyon két pontot, majd kössük össze képeikkel. (Például a láng hegyét és alját.) Ezek az egyenesek 1., 2. a lencsén irányváltozás nélkül áthaladó sugarak, és így metszéspontjuk a lencse optikai középpontja. Ezen a ponton áthaladó, a gyertyával párhuzamos síkban helyezkedik el a lencse. Erre a síkra merőleges egyenes az optikai tengely. Az egyik fókuszpontot most már a gyertya valamely pontjából az optikai tengellyel párhuzamosan induló fénysugár (3) jelöli ki.





b) Csak homorú tükörről lehet szó, mert a kép nagyobb, mint a tárgy. A tárgy és kép két megfelelő pontjának metszéspontja ki jelöli a geometriai középpontot. Ezen a ponton áthaladó, a gyertyára merőleges egyenes az optikai tengely. A tárgynak erre az egyenesre tükrözött képének és a tükör által előállított képnek megfelelő pontjait összekötő egyenes az optikai tengelyen ki metszi az optikai középpontot, mert az optikai középpontba érkező fénysugár az optikai tengelyre szimmetrikusan reflektálódik. A tükör az optikai középpontban az optikai tengelyre merőlegesen áll. A fókuszpont az optikai és geometriai középpontok közötti távolság felezőpontja.

11.32 A leképezés törvényéből:

$$k = \frac{tf}{t-f}.$$

A valódi kép ($k > 0$) távolsága a tárgytól:

$$d = t + k = t + \frac{tf}{t-f} = \frac{t^2}{t-f};$$

$$d = \frac{t^2}{t-f}.$$

Ezt átalakítva:

$$t^2 - dt + df = 0.$$

Ezt a t-ben másodfokú egyenletet megoldva:

$$t = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2}.$$

Valós megoldás csak akkor van, ha:

$$d^2 - 4df \geq 0;$$

$$d \geq 4f.$$

Vagyis a valódi kép legkisebb távolsága a tárgytól $4f$. Ez abban az esetben következik be, amikor a tárgytávolság:

$$t = \frac{4f \pm \sqrt{16 f^2 - 4(4f)f}}{2} = 2f;$$

$$\underline{t = 2f.}$$

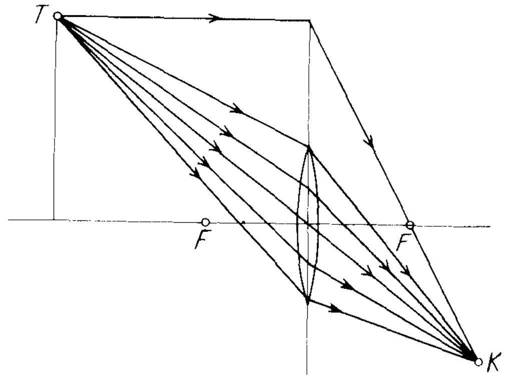
Tehát a tárgyat a gyűjtőlencsétől a kétszeres fókusztávolságban kell elhelyezni, hogy valódi képe a legközelebb legyen hozzá.

11.33. A csillárról a padlón előállított kép valódi. Az előző feladatban beláttuk, hogy a tárgy és valódi képe között $4f$ a legkisebb távolság. Ezért a csillár és a padló közötti távolság legalább $4f$ kell, hogy legyen.

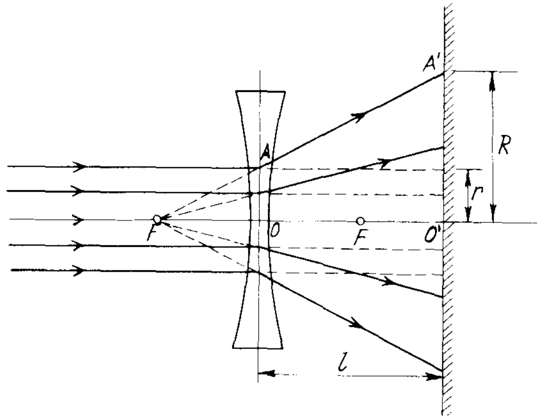
Vagyis $d \geq 4f$ és így $\underline{f \leq \frac{d}{4}}$

a feltétele annak, hogy a képet elő tudjuk állítani.

11.34. A kép szerkesztéséhez a jellegzetes fénysugarakat használhatjuk, függetlenül attól, hogy a képalkotásban részt vesznek-e. A leképezést ténylegesen létrehozó nyalábot a lencse átmérője határozza meg.



11.35. A szórólencsére az optikai tengellyel párhuzamosan érkező nyaláb a lencsén szóródik, széttartóvá lesz. A nyaláb a lencsén túl



úgy terjed, mintha a beeső fény felőli oldalon levő fókuszból indulna. Mindez az ábrán is jól látható. A FOA és $FO'A'$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{f+l}{f} = \frac{R}{r}.$$

Ebből: $f = \dfrac{l \cdot r}{R - r}$;

$\underline{f = 25 \text{ cm}.}$

11.36. Ha a világító pont, a tárgy „nagyon messze" van a lencsétől, képe a lencse túlsó oldalán levő fókuszpontba keletkezik. A tárgy közelítésekor a képe távolodik a lencsétől és vagy az ernyő előtt, vagy utána keletkezik.

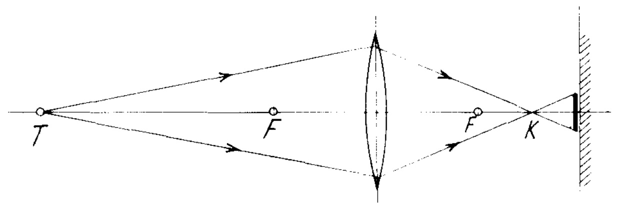
Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a kép az ernyő előtt, az ernyő és a lencse között van. Az ábrán egy ilyen esetet tüntettünk fel, megrajzolva a leképezésben szerepet játszó teljes sugárnyalábot. Az ábráról világosan látszik, hogy a megvilágított folt az ernyőn akkor egyenlő átmérőjű a lencsével, amikor a kép a lencse és az ernyő közti távolság felében keletkezik. A leképezés törvényét felírva erre az esetre:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{f};$$

és ebből: $t = \dfrac{df}{d - 2f}$.

A tárgytávolság most csak pozitív lehet ezért:

$d \geqq 2f$



kell, hogy legyen. A $d = 2f$ esetnek a $t = \infty$ tárgytávolság felel meg. Ha $d > 2f$;

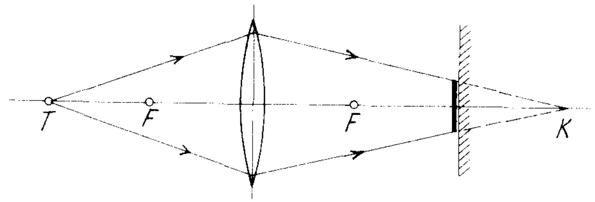
akkor a

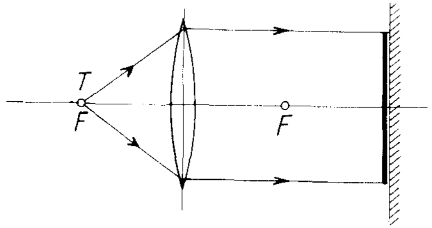
$$t = \frac{df}{d - 2f} = \frac{f}{1 - \frac{2f}{d}}$$

kifejezésben $\dfrac{2f}{d} < 1$;

és így $1 - \dfrac{2f}{d} < 1$; de pozitív,

tehát: $t > f$.





Abban az esetben, ha a kép helye az ernyő mögött véges távolságban van, az ernyőt összetartó sugárnyaláb éri. A megvilágított kör átmérője kisebb, mint a lencséé. Határesetben, amikor a kép a végtelenbe van, a lencsét párhuzamos nyaláb hagyja el, és így ilyenkor is egyenlő nagy a megvilágított kör a lencsével. Ekkor a tárgy a lencse fókuszpontjában van, és az ernyő távolságára nincs kikötés.
Tovább közeledve a világító tárggyal a lencséhez, a lencsét egyre széttartóbb nyaláb hagyja el, tehát az ernyőn levő világos folt is egyre növekszik.

Összefoglalva, ha az ernyő távolsága a lencsétől nem kisebb, mint $2f$, az ernyőn a megvilágított folt nagysága a lencse nagyságával két esetben egyenlő:

az első esetben $t = \dfrac{df}{d - 2f} > f$;

a második esetben $t = f$.

A megvilágítás akkor erősebb, amikor a fényforrás közelebb van a lencséhez, ekkor ugyanis nagyobb térszögben terjedő nyaláb érkezik a lencsére, és ezen keresztül az ernyőre.

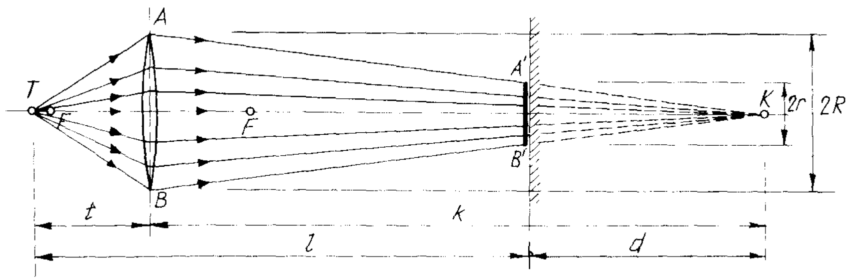
11.37. Az ernyőn keletkező megvilágított kör az *a)* és *b)* ábrának megfelelően kétféle módon jöhet létre:

a) A fényforrás képe az ernyő mögött keletkezne, ha az ernyő nem lenne a nyaláb útjában. A leképezés törvénye alapján:

$$k = \frac{tf}{t - f}.$$

A $KAB\triangle$ és $KA'B'\triangle$ hasonlósága miatt:

$$\frac{2R}{2r} = \frac{k}{d}; \quad \left(d = k - (l - t)\right).$$



Ezen egyenletek az $l = 95$ cm; $f = 16$ cm; $2R = 10$ cm; $2r = 2{,}5$ cm értékeket leírva és az egyenletrendszert megoldva a tárgy távolságára:

$t_1 = 80$ cm;

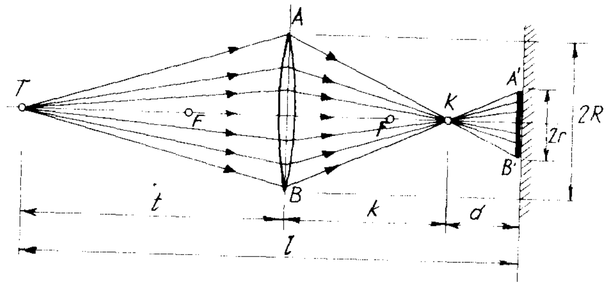
$t_2 = 19$ cm.

értékeket kapjuk.

b) A fényforrás képe a lencse és az ernyő között keletkezik. A leképezés törvénye, $KAB\triangle$ és $KA'B'\triangle$ hasonlósága alapján:

$$k = \frac{tf}{t - f};$$

$$\frac{2R}{2r} = \frac{k}{d}; \quad \left[d = l - (k + t)\right].$$



Ezen egyenleteket megoldva:

$t_2 = 69$ cm;

$t_3 = 22$ cm.

11.38. A leképezés törvénye szerint:

$$t_1 = \frac{k_1 \cdot f}{k_1 - f}.$$

$$\left(k_1 = 4\ \text{m} = 400\ \text{cm}; \quad f = \frac{1}{D} = \frac{1}{5}\ \text{m} = 20\ \text{cm}\right)$$

$t_1 = 21{,}05$ cm.

Az ernyőt távolabb helyezve, $k = 420$ cm;

$$t_2 = \frac{k_2 \cdot f}{k_2 - f};$$

$t_2 = 21$ cm;

tehát diapozitívet (a tárgyat) $t_1 - t_2 = 0{,}05$ cm-rel közelebb kell vinni a lencséhez.

11.39. Amíg a planparalel üveglemez nincs a tárgy és a lencse között, a kép a lencsétől a leképezés törvénye alapján:

$$k_1 = \frac{t_1 \cdot f}{t_1 - f} = \frac{30\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm}}{30\ \text{cm} - 20\ \text{cm}};$$

távolságban keletkezik.
A 10.37. feladat megoldásában láttuk, hogy d vastagságú, n törésmutatójú üveglemezen keresztül nézve, az üveglemez túlsó oldalán levő pontszerű tárgy az üveglemez felszínétől mérve $\frac{d}{n}$ távolságra látszik. Így a tárgyat $d - \frac{d}{n}$ távolsággal közelebb levőnek észleljük. Ez akkor is igaz, ha a tárgy nem közvetlenül a lemez túlsó oldalán van.
Feladatunkban a kis átmérőjű lencse, mint a 10.37. feladatban az emberi szem a tárgyat $d - \frac{d}{n}$ távolsággal közelebbinek „észleli", az üveglemez közbeiktatása után. Más szóval az új tárgytávolság:

$$t_2 = t_1 - \left(d - \frac{d}{n}\right) = 30\ \text{cm} - \left(15\ \text{m} - \frac{15\ \text{cm}}{1,5}\right);$$

$t_2 = 25$ cm.

Az új képtávolság:

$$k_2 = \frac{t_2 \cdot f}{t_2 - f} = \frac{25\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm}}{25\ \text{cm} - 20\ \text{cm}};$$

$k_2 = 100$ cm.

Tehát a kép $k_2 - k_1 = 40$ cm-rel távolabb került a lencsétől.

12. Összetett optikai rendszerek

12.1. A Holdról nézve az égbolt teljesen *sötét fekete*. A csillagok éjjel-nappal fénylő pontok, a Nap (és a Föld) fénylő gömb. Ugyanilyennek látszik az ég a világűr bármely helyéről. A légkörrel rendelkező bolygók felszínéről nézve az ég színét a légkörön létrejött fényszóródás szabja meg.

12.2. *a)* Borotválkozáshoz homorú tükröt használnak, amely a fókusztávolságánál közelebb levő arcról egyenes állású, nagyított virtuális képet állít elő. (Kedvező felhasználás esetén a tiszta látás távolságában.)
b) A visszapillantó tükör domború, amelyen a gépkocsivezető a mögötte közlekedő kocsikat kicsinyítve, virtuális képen látja. (Előnye, hogy a gépkocsi mögötti térrész eléggé nagy látószögű darabjának tükörképét látja a vezető.)
c) A távcsőben homorú tükröt használnak, amely viszonylag nagy átmérőjű sugárnyalábot gyűjt össze.
d) A fényszóróban is homorú tükör van, amely a fókuszpontban levő fényforrás fényét lehetőleg párhuzamos, illetve közel párhuzamos nyalábban veri vissza.
e) A vetítőlámpa izzója mögött homorú tükör van.

12.3. Egyetlen szórólencse a valódi tárgyról csak látszólagos, ernyőn fel nem fogható képet állít elő. Más eszközzel (tükörrel, vagy lencsével) együtt alkalmazva lehetséges, hogy a másik eszköz a tárgyról érkező fénysugarakat olyan összetartó nyalábban „vetíti" a szórólencsére, hogy az — noha az érkező nyaláb nyílásszögét megnöveli — még mindig összetartó nyalábot enged tovább, és ezért valódi kép jön létre.

12.4. *a)* A fény sebessége vákuumban — hullámhosszától, rezgésszámától függetlenül — $c \approx 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) A törésmutató és terjedési sebesség összefüggése alapján:

$$n = \frac{c}{c_ü};$$

$$c_ü = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{1,5};$$

$$c_ü = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

c) A fény hullámhossza, sebessége és rezgésszáma között az összefüggés:

$$\lambda = \frac{c}{f};$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{5 \cdot 10^2 \text{ nm}} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}};$$

$$f = 6 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}.$$

d) A fény rezgésszáma bármilyen közegben ugyanannyi, mint vákuumban. Esetünkben a fény rezgésszáma üvegben is:

$$f = 6 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}.$$

e) A fény hullámhossza újabb közeg határfelületén megváltozik. Esetünkben a fény hullámhossza üvegben:

$$\lambda_ü = \frac{c_ü}{f} = \frac{2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{6 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}} = 3,33 \cdot 10^{-7} \text{ m};$$

$$\lambda_ü = 333 \text{ nm}.$$

f) A fény színét a rezgésszám határozza meg. A rezgésszám vákuumban és üvegben ugyanannyi; a fény színe nem változik meg, ha vákuumból üvegbe lép.

12.5. Az S pont a lencse leképezése szempontjából virtuális tárgypontnak tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a leképezési törvény alkalmazása szempontjából a tárgytávolságot negatív előjellel kell vennünk (a szokásos előjelválasztási megállapodásnak megfelelően). A lencse fókusztávolsága:

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

A leképezési törvényt alkalmazva:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f};$$

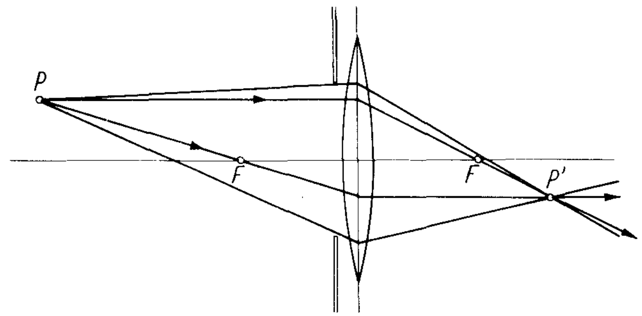
$$k = \frac{ft}{t - f} = \frac{25 \text{ cm } (-30 \text{ cm})}{-30 \text{ cm} - 25 \text{ cm}};$$

$$k = 13,6 \text{ cm}.$$

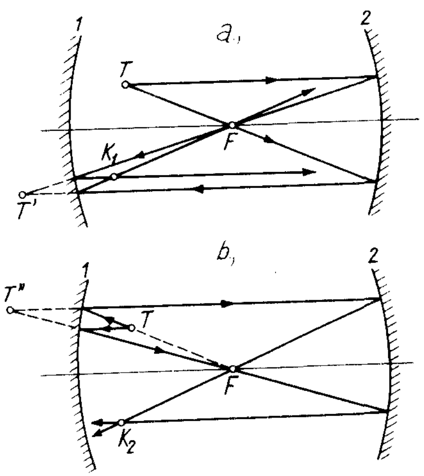
Valódi kép keletkezik, a gyűjtőlencse közelében, attól 13,6 cm-re, az S pont oldalán.

12.6. *a—b)* A P pont P' képének szerkesztését, valamint a leképezést létrehozó sugárnyalábot az ábra mutatja.

c) Ha a fényrekeszt szűkítjük, a leképező nyaláb nyílásszöge kisebb lesz, a P' pontban gyengébb lesz a megvilágítás. (Ugyanakkor azonban „élesebb”, pontszerűbb képet kapunk, mert a fényrekesz alkalmazásával egyes leképezési hibák csökkenthetők.)



12.7. Az ábra külön mutatja azt az esetet, amikor a T tárgypontból a távolabbi tükör felé induló fénysugarakkal kezdjük a szerkesztést, és külön a másik lehetőséget, amikor a fénysugarak először a közelebbi tükörről verődnek vissza. A rajz elkészítésekor még nem tudhatjuk, hogy K képpontok egybeesnek-e vagy nem;



illetve, hogy lehet-e egynél több megoldás.
A leképezési törvény alkalmazása érdekében jelöljük a tükrök fókusztávolságát f-fel; az 1. tükörtől mért távolságokat 1-es, a 2-től mért távolságokat 2-es indexszel; a két tükör távolságát $2f$-fel.
A *b)* eset első illetve második leképezésére alkalmazzuk a leképezési törvényt, felhasználva a szokásos előjel-megállapodásokat.

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{t}=\frac{1}{f};$$

$$k_1=\frac{tf}{t-f}. \tag{1}$$

Mivel $t > 0$; $f > 0$ és $t < f$;
ezért a tört számlálója pozitív, nevezője negatív, tehát $k_1 < 0$; az első képpont virtuális. A második leképezésre a tárgytávolság:

$2f + |k_1| = 2f - k_1$.

A leképezési törvény alapján:

$$\frac{1}{k_2}+\frac{1}{2f-k_1}=\frac{1}{f};$$

$$k_2=\frac{f\,(2f-k_1)}{f-k_1}. \tag{2}$$

Helyettesítsük *(2)*-be *(1)*-et:

$$k_2 = 2f - t. \tag{3}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy a K_2 végső képpontnak az 1. tükörtől mért távolsága t, vagyis a kétszeres visszaverődés utáni képpont ugyanabban az optikai tengelyre merőleges síkban van, mint az eredeti T tárgypont — a szándékosan torzított rajzzal ellentétben.

Az *a)* esetben az első visszaverődés a 2. tükörről történik. Ekkor a tárgytávolság: $2f - t$.
A leképezési törvény alapján:

$$\frac{1}{k_2'}+\frac{1}{2f-t}=\frac{1}{f};$$

$$k_2'=\frac{f\,(2f-t)}{f-t}. \tag{4}$$

Mivel $f > 0$; $2f > t$; és $f > t$;
ezért a hányados pozitív, $k_2' > 0$, az első leképezés T' képpontja valódi kép. Ezenkívül — az ábra *a)* része alapján — azt várjuk, hogy k_2' nagyobb legyen, mint $2f$. Ez valóban igaz, mert:

$2f - t > 2f - 2t = 2\,(f - t)$;

$$\frac{2f-t}{f-t} > 2;$$

$$f\,\frac{2f-t}{f-t} > 2f.$$

Az 1. tükrön létrejött, második visszaverődés szempontjából T' virtuális tárgy, ezért a tárgytávolságot negatív előjellel kell figyelembe venni:

$-(k_2' - 2f)$.

A leképezési törvényt alkalmazva:

$$\frac{1}{k_1'}+\frac{1}{-(k_2'-2f)}=\frac{1}{f};$$

$$k_1'=f\,\frac{k_2'-2f}{k_2'-f}. \tag{5}$$

Helyettesítsük *(5)*-be *(4)*-et:

$$k_1' = t. \tag{6}$$

Ez azt jelenti, hogy a kétszeres tükrözés után létrejött kép az *a)* esetben is ugyanolyan messze van az 1. tükörtől, mint a tárgy.

Megjegyzések

1. Eddigi megfontolásainkból még nem következik az, hogy az *a)* illetve *b)* megfontolás alapján kapott K_1 és K_2 képpontok valóban egybe is esnek. Ez utóbbi állítást azonban igazolhatjuk, ha az *a)* és *b)* esetre a kétszeres visszaverődés során létrejött nagyítást is kiszámítjuk.

2. A megoldás során kihasználtuk, hogy a T tárgypont közelebb van az 1. tükörhöz, mint a 2.-hoz. Mivel a két tükör teljesen azonos (az F pontra nézve a rendszer szimmetrikus), a 2. tükörhöz közelebbi T pontra ugyanúgy elvégzett meggondolás ugyanezt az eredményt szolgáltatja. Ezt mutatja az is, hogy a (3)-ban, illetve (6)-ban foglalt eredmény független attól, hogy T az 1. vagy 2. tükörhöz van-e közelebb.

3. A $t = f$ különleges eset (amikor T a közös fókuszra illeszkedő, az optikai tengelyre merőleges síkban van) külön diszkussziót igényel. Ennek elvégzését az olvasóra bízzuk.

12.8. *a)* A leképezési törvény alapján:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f};$$

$$k = \frac{tf}{t-f} = \frac{50\text{ cm}\cdot 5\text{ cm}}{50\text{ cm} - 5\text{ cm}};$$

$$\underline{k = 5{,}56\text{ cm}.}$$

b) Ha a minimális fényképezési távolság kisebb az előbbi t-nél, közgyűrű alkalmazásával kell a képtávolságot megnövelni.

$$k' = \frac{t'f}{t'-f} = \frac{15\text{ cm}\cdot 5\text{ cm}}{15\text{ cm} - 5\text{ cm}} = 7{,}50\text{ cm}.$$

A szükséges közgyűrű minimális vastagsága:

$$d = k' - k = 7{,}50\text{ cm} - 5{,}57\text{ cm};$$

$$\underline{d = 1{,}94\text{ cm}.}$$

12.9. A tiszta látás távolsága az a minimális tárgytávolság, amelyről megerőltetés nélkül éles képet állít elő a szem. A távollátó szem tiszta látásának távolságát gyűjtőlencse alkalmazásával lehet csökkenteni.

Legyen t_1 a szemüveg nélküli, t_2 pedig a szemüveggel való nézéshez tartozó tiszta látás távolsága, f_1 a szem, f_2 pedig a szem + szemüveg rendszer megfelelő fókusztávolsága. Felhasználva, hogy a képtávolság a szemben mindkét esetben azonos:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_1}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_2}. \qquad (2)$$

Ezenkívül a szem (D_1) és a szemüveg (D') dioptriájára vonatkozóan:

$$D_1 + D' = D_2;$$

$$D' = D_2 - D_1 = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}; \qquad (3)$$

ahol az f_1 és f_2 távolságokat méterben kell behelyettesíteni. Helyettesítsük (1)-et és (2)-t a (3)-ba:

$$D = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{t_1} - \frac{1}{k} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} = \frac{0{,}5\text{ m} - 0{,}25\text{ m}}{0{,}5\text{ m}\cdot 0{,}25\text{ m}} = 2\,\frac{1}{\text{m}};$$

$$\underline{D = 2\text{ dioptria}.}$$

12.10. A távcső nagyítása:

$$N = \frac{f_1}{f_2};$$

ahol f_1 az objektív (lencse vagy tükör), f_2 pedig a szemlencse fókusztávolsága. A tükör görbületi sugara:

$$r = 2f_1 = 2f_2\cdot N = 2\cdot 5\text{ cm}\cdot 30 = 300\text{ cm};$$

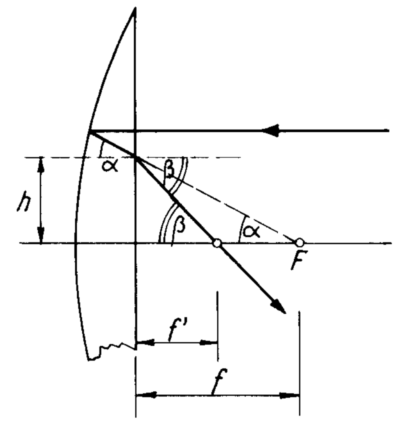
$$\underline{r = 3\text{ m}.}$$

12.11. A szemlencsére írt szám ennek, mint egyszerű nagyítónak a nagyítását jelenti (ha a nagyítóba végtelenre akkomodált szemmel nézünk). Tehát $N_1 = \frac{d}{f_1}$; ahol $d = 25$ cm a tiszta látás távolsága, f_1 pedig a szemlencse fókusztávolsága. Az objektív foglalatára írt szám azt mutatja, hogy a szemlencse nagyításának hányszorosa a mikroszkóp nagyítása. (Ez az N_2 szám ezért így számítható ki: $N_2 = \frac{l}{f_2}$; ahol l a mikroszkóp optikai tubushossza, vagyis az objektív és a szemlencse egymás felé eső fókuszpontjainak távolsága — általában 16 cm —, f_2 pedig az objektív fókusztávolsága.) Esetünkben tehát $N = 5\cdot 40 = 200$ a mikroszkóp nagyítása.

12.12. A fényforrásról (tárgyról) azért jön létre két valódi kép, mert két külön leképező rendszer alakul ki azáltal, hogy a homorú tükörbe kevés vizet öntünk.

1. Az egyik az eredeti tükör vízzel nem fedett része. (Ez olyan leképezést hoz létre, mint az eredeti homorú tükör.)

2. A másik leképező rendszer olyan síkdomború vízlencsének tekinthető, amelynek domború oldala a víz felé tükröz. Ilyen leképező eszköz fókusztávolságára vonatkozó összefüggést nem tanultunk. Az ábra alapján figyeljük meg ezért, hogy ha az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénysugár a vízlencse síkfelületére merőlegesen érkezik, ott törés nélkül halad tovább, majd a lencse homorú, tükröző oldalára jut, ahonnan visszaverődés után F felé (a gömbtükör fókusza felé) indul. Közben azonban a síkfelületen megtörik, és F'-n halad át. A geometriai összefüggések alapján, felhasználva a fénytörés törvényét; a gömbtükörre vonatkozó $f = \frac{r}{2}$ összefüggést; továbbá, hogy az előforduló szögek a valóságban igen kicsik, tehát $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ és $\sin\beta \approx \approx \operatorname{tg}\beta$:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{f} = \frac{2h}{r};$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n .$$

$$\frac{h}{f'} = \operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta = n\sin\alpha \approx$$

$$\approx n\operatorname{tg}\alpha = n\frac{2h}{r} .$$

Ebből:

$$f' = \frac{r}{2n} .$$

Ezek után írjuk fel egyrészt a tükörre, illetve a leképező rendszerre a leképezési törvényeket; másrészt használjuk fel a tükör fókusztávolsága és görbületi sugara közötti összefüggést; végül a vízlencse fókusztávolságára kapott összefüggést. A feladat kérdéseire az így előállított egyenletrendszer megoldása alapján válaszolhatunk:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{f'}; \qquad (2)$$

$$f_1 = \frac{r}{2}; \qquad (3)$$

$$f' = \frac{r}{2n} . \qquad (4)$$

Ebből:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_1} = \frac{2}{r}; \qquad (5)$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k_2} = \frac{2n}{r} . \qquad (6)$$

$$r = (2n-2)\frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2}, \qquad (7)$$

$$t = (n-1)\frac{k_1 k_2}{k_1 - n k_2} . \qquad (8)$$

Az adatok behelyettesítéséhez külön meg kell gondolnunk, hogy a két képtávolság közül melyik jelenti k_1-et, illetve k_2-t. Az *(5)* és *(6)* egyenletet összevetve látható, hogy *(6)* jobboldali része nagyobb *(5)* jobb oldalánál, mert $n > 1$. Ezért kell, hogy *(6)* bal oldali része is nagyobb legyen *(5)* bal oldalánál, amiből következik, hogy:

$$\frac{1}{k_2} > \frac{1}{k_1} .$$

Mivel mindkét kép valódi ($k_1 > 0$ és $k_2 > 0$):

$k_1 > k_2$.

Tehát $k_1 = 54$ cm; $k_2 = 36$ cm.

(Ugyanerre jutunk akkor is, ha *(7)*-re tekintettel felhasználjuk, hogy $r > 0$; $n > 1$; $k_1 > 0$; $k_2 > 0$, tehát szükséges, hogy $k_1 > k_2$ legyen. Ekkor azonban célszerű megvizsgálnunk, hogy *(8)* is teljesül e $k_1 > k_2$ esetén, mert ellenkező esetben nem kaphatunk megoldást. Mivel $n = \frac{4}{3}$:

$$n \cdot k_2 = \frac{4}{3} \cdot 36 = 48 < 54 = k_2 \ ;$$

tehát teljesül, hogy $t > 0$ legyen, a feladatnak megfelelően.)

Behelyettesítve *(7)*-be:

$$r = (2n - 2) \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 - k_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{54 \text{ cm} \cdot 36 \text{ cm}}{54 \text{ cm} - 36 \text{ cm}} \ ;$$

$$\underline{r = 72 \text{ cm}.}$$

Ezek után *(8)* numerikus eredménye pl. *(5)*-ből egyszerűbben is számítható:

$$t = \frac{k_1 r}{2k_1 - r} = \frac{54 \text{ cm} \cdot 72 \text{ cm}}{2 \cdot 54 \text{ cm} - 72 \text{ cm}} \ ;$$

$$\underline{t = 108 \text{ cm}.}$$

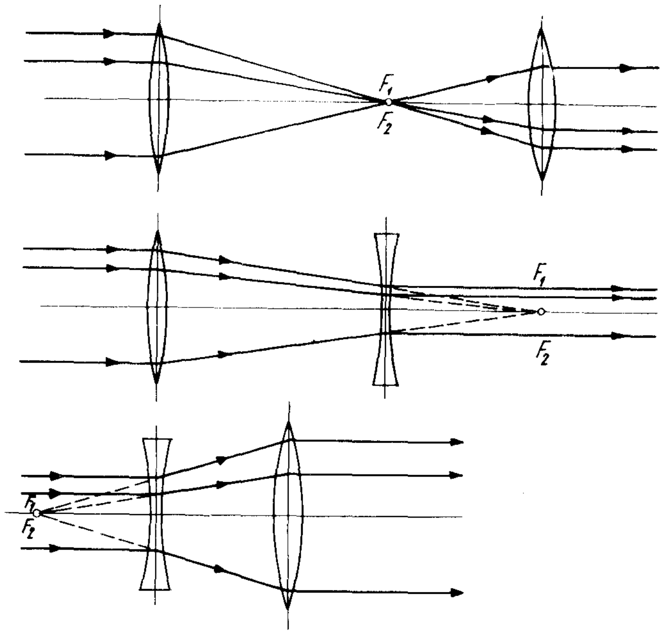
12.13. A tárgyak színe attól függ, hogy a ráeső fényből milyen színű (hullámhosszúságú) fénysugarakat nyelnek el, illetve vernek vissza. Az (fehér fényben) ibolyaszínű tárgy a sárga fényt nyeli el, a visszaverődött többi fény keveréke adja az ibolyaszínt. A nátriumlámpa fényét tehát a (fehér fényben) ibolyaszínű tárgy teljesen elnyeli, ezért feketének látszik. A többi tárgy a ráeső — monokromatikus — sárga fényt kisebb-nagyobb mértékben visszaveri, más színű megvilágítás viszont nincs, tehát ,,erősebb'' vagy ,,gyengébb'' sárgának látjuk.

12.14. Az *a)*, *b)*, *d)*, *e)* és *f)* esetekben a leképező eszközök látszólagos képeket állítanak elő; a *c)* esetben szereplő vetítőgép azonban valódi képet hoz létre az ernyőn. A *g)* esetben a felvevő kamera optikája is valódi képet állít elő a vidikonernyőn, míg a vevőkészülék képernyőjén nem fény, hanem elektronsugár közvetítésével keletkezik a kép.

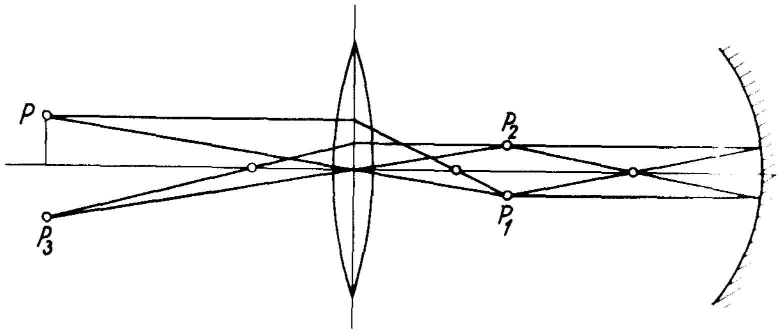
Szemünk ideghártyáján azonban minden esetben valódi kép jön létre, függetlenül attól, hogy az egyes eszközök önmagukban a tárgyról milyen képet állítanak elő.

12.15. $\underline{D = -2{,}25 \text{ dioptria}.}$

12.16. A megoldásokat az ábra mutatja. A két lencsének minden esetben kell, hogy közös fókusza legyen.



12.17. Először a lencse állítja elő a P pont képét (P_1), erről mint tárgyról a tükör alkot képet (P_2), majd a tükör adta képet újra a lencse képezi le (P_3). A végső kép éppen a P pont alatt, az optikai tengely másik oldalán, attól szintén 2 cm távolságra lesz. A szerkesztést az ábra mutatja.



12.18. $f = 40$ cm (gyűjtőlencse).

12.19. $f = \frac{R}{2n} = 6$ cm.

12.20. *a)* $f_1 = 36$ cm; $f_2 = 4$ cm.

b) $f_1 = 45$ cm; $f_2 = -5$ cm.

12.21. $\lambda_v = 450$ nm;

$c_v = 2{,}25 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

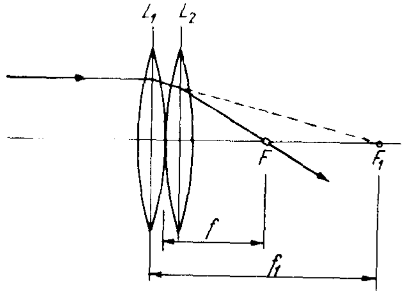
$f = 5 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$.

Színe vízben ugyanolyan, mint vákuumban.

12.22. A fehér fény több különböző hullámhosszú fény keveréke lehet csak.

12.23. A fényképezőgép lencséje meghatározott távolságban levő tárgyakról állít elő valódi képet a film síkjában. Még ha figyelembe is vesszük, hogy a gép a fényrekesz alkalmazása következtében bizonyos „mélységélességet" tesz lehetővé (tehát nemcsak a leképezési törvénynek megfelelően számítható tárgytávolság esetén éles a kép, hanem ennél kisebb, illetve nagyobb távolságban levő tárgyakról is viszonylag éles leképezés jön létre), a fókusztávolságnál kisebb tárgytávolság esetén valódi kép semmiképpen sem keletkezhet. Ezért a légy képe, körvonala nem látszik a fényképen.
Az objektíven levő légy a filmre jutó fénymennyiséget csökkentheti, és ezzel a jó minőségű kép létrejöttét zavarhatja.

12.24. Az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénysugár L_1-en áthatolva F_1-be jutna, ha L_2 nem volna ott. Mivel L_2-n is megtörik a fény, ezért F_1 helyett F-en halad át a fénysugár. Az L_2 lencse szempontjából a jelenséget úgy foghatjuk fel, hogy L_2 az F_1 virtuális tárgyról hoz létre valódi képet F-ben. A leképezési törvényt alkalmazva:



$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_2};$$

ahol $t = f_1$, $k = f$, f_2 pedig az L_2 fókusztávolsága. Behelyettesítve:

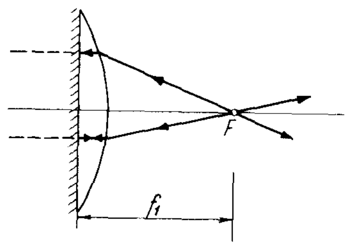
$$-\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2};$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

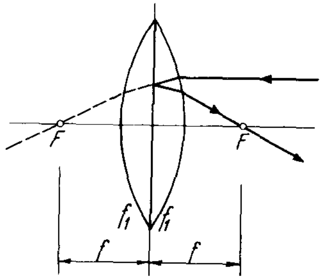
Mivel $D = \frac{1}{f}$

$$D = D_1 + D_2.$$

12.25. A Nap sugarai párhuzamosan esnek a „tükrös lencsére", ezért a lencséből kilépő sugarak *a rendszer fókuszsíkjában* (az optikai tengelyre merőleges, a fókuszpontra illeszkedő síkban) levő ponton haladnak át. A feladat tehát a „tükrös lencse" fókusztávolságának kiszámítását kívánja meg.



A fókuszpont helyének meghatározásához gondoljuk meg, hogy ha az eredeti lencse F_1 fókuszába helyezett fényforrás fénye esik a lencsére (a domború oldal felől), a fénysugár a lencse sík lapján az optikai tengellyel párhuzamosan, tehát a síkra merőleges irányban lépne ki a lencséből. Mivel a lencse sík lapjához most síktükör illeszkedik, a lencsében érkező fény merőlegesen



jut a tükörre, és így „önmagában” verődik vissza, azaz visszafelé is F_1-en halad át. Ez azt jelenti, hogy a „tükrös lencse” egy olyan homorú gömbtükörrel egyenértékű, amelynek geometriai középpontja F_1-ben volna, görbületi sugara pedig $r = f_1$. A gömbtükörre ismert összefüggés alapján a „tükrös lencse” fókusztávolsága:

$$f = \frac{r}{2} = \frac{f_1}{2} = \frac{50\ \text{cm}}{2};$$

$$\underline{f = 25\ \text{cm}.}$$

Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a síkdomború lencséhez gondolatban egy vele teljesen azonos lencsét illesztünk a síktükör helyett, az ábra második részének megfelelően. Ekkor a síktükörről visszaverődő fénysugárnak a tükör síkjára vonatkozó szimmetrikus menete jön létre a két azonos lencséből álló lencserendszeren. Felhasználva a lencserendszer dioptriájára vonatkozó összefüggést:

$$D = D_1 + D_2;$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{f_1};$$

$$f = \frac{f_1}{2}.$$

(Ahogyan azt előbb is kaptuk).

12.26. A balról érkező fénysugarak az első lencsén áthaladva, annak jobb oldali fókuszpontjában gyűlnek össze. Ez a pont a második lencse szempontjából tárgypontnak tekinthető, amelyre a tárgytávolság $t_2 = 5$ cm, ezért a leképezési törvény alapján:

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{f_2};$$

$$k_2 = \frac{t_2 f_2}{t_2 - f_2} = \frac{5\ \text{cm} \cdot (-20\text{cm})}{5\ \text{cm} - (-20\text{cm})} = -4\ \text{cm}.$$

A második lencse a ráeső nyalábot úgy teszi széttartóvá, mintha a tőle balra 4 cm-re levő pontból indulnának ki. Ez a pont azonban éppen a harmadik lencse (bal oldali) fókuszpontja, ezért *a fénysugarak a harmadik lencsét párhuzamos nyalábban hagyják el.*

12.27. A 12 dioptriás szemüveg a hiányzó szemlencsét csak annyiban pótolja, hogy a nagyon messze levő tárgyról előállít képet az ideghártyán. Ez azt jelenti, hogy a szemüveg fókusza ekkor az ideghártyán van, és akkora a képtávolság, mint a 12 dioptriás lencse fókusztávolsága:

$$k = f_1 = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{12}\,\text{m}.$$

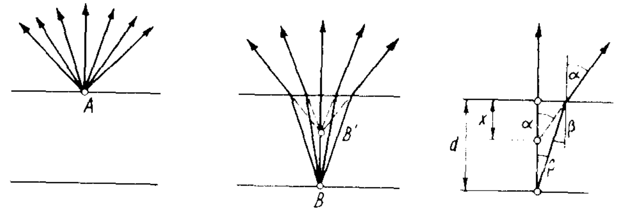
A 25 cm-es tárgytávolsághoz szükséges szemüvegre:

$$D_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t_2} = \frac{12}{\text{m}} + \frac{1}{0{,}25\ \text{m}} = 16\,\frac{1}{\text{m}};$$

$$\underline{D_2 = 16\ \text{dioptria}.}$$

12.28. A tubus belső felének matt fekete felülete elnyeli a ráeső fényt. Ha a cső belső felülete a fényt visszaverné, ezzel — mint egy oldalról odahelyezett görbe felületű tükör — elrontaná a lencserendszerekkel biztosított leképezést.

12.29. Ha a lemez felső részén levő karcolást állítjuk élesre a mikroszkóppal, az A-ból induló fénysugarak hozzák létre a képet a mikroszkópban (a tárgypont A). Amikor a mikroszkópon át a B pontot akarjuk élesen látni, a B-ből induló sugarak úgy érkeznek a mikroszkóp objektívjére, mintha B'-ből indulnának ki (a leképezés szempontjából B' a tárgypont). A feladat szerint $x = 2$ mm.



A fénytörés törvénye alapján:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Mivel a mikroszkópba igen kis nyílásszögű sugárnyaláb jut be, az α és β szögek is kicsik. Ezért:

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{x};$$

$$\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{d}.$$

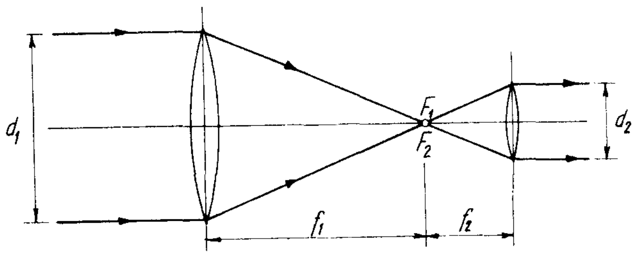
Behelyettesítve:

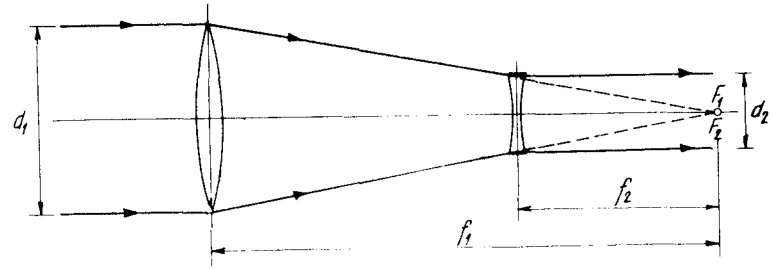
$$n = \frac{d}{x} = \frac{3\ \text{mm}}{2\ \text{mm}}.$$

$$n = \frac{3}{2}.$$

12.30. A távcső nagyítása (mindkét típus esetében):

$$N = \frac{f_1}{f_2}.$$





Az ábra alapján, a megfelelő derékszögű háromszögek hasonlóságát felhasználva, mindkét esetben:

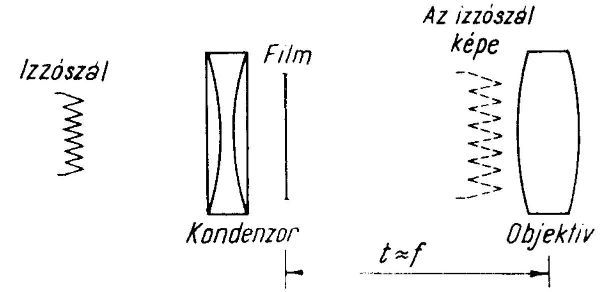
$$\frac{d_1}{2} : f_1 = \frac{d_2}{2} : f_2.$$

Ebből:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{f_1}{f_2} = N.$$

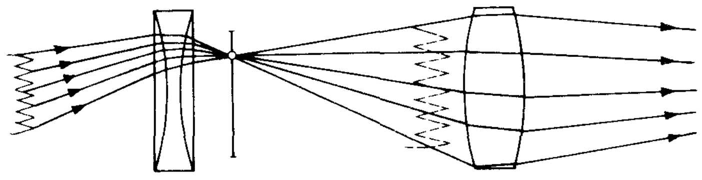
12.31. Erős nappali (vagy mesterséges) fény hatására szemünk nyílása (pupillája) ösztönösen kis átmérőjűvé húzódik össze, ezért kevesebb fény jut az ideghártyára a szemtengely irányából. (Ezzel a pupilla, mintegy szabályozza, védi az ideghártyát a túl nagy ingerhatástól.) Ilyen módon viszont a csillag amúgy is gyenge fényéből kevesebb jut a szembe, annyira, hogy már nem vált ki külön idegingert. (Ehhez még az is hozzájárul, hogy erősebb fényhatásra az ideghártya is alkalmazkodik valamennyire: „eltompul", és ezért a viszonylag kisebb hatásokat már nem érzékeli.) A távcsövön át nézve, az égboltnak jóval kisebb darabját látjuk, mint szabad szemmel, ezért a légkörön szóródó napfényből kisebb fénymennyiség jut szemünkbe, tehát viszonylag nagyobb pupillanyílással nézhetünk. Ugyanakkor a távcső teleszkopikus sugármenete miatt (l. 12.30. feladat) a figyelési irányban a csillag fényéből lényegesen több jut a szembe, mintha szabad szemmel néznénk, hiszen a távcső a beérkező, nagy átmérőjű sugárnyaláb fényét vékony nyalábbá „koncentrálja" annyira, hogy az mind a szemünkbe juthasson.
A jelenséget természetesen nagyobb távcsővel is csak akkor észlelhetjük, ha nem a Nap irányába (vagy ahhoz közeli irányba) nézünk.

12.32. A vetítőlámpa izzószálát a vetítőgép kondenzora az objektívre képezi le. Mivel ez a kép az objektív fókusztávolságán belül van,



ezért erről az objektív nem tud valódi képet létrehozni. A vetítendő film síkja közvetlenül a kondenzor után, az objektívtől kb. fókusztávolságnyira helyezkedik el, így az elég messze levő ernyőn pontosan a film éles képe fog megjelenni.

12.33. Pontszerű fényforrást használva, a film minden pontján csak egy-egy fénysugár haladna át. Ahhoz pedig, hogy az objektív leképezhesse a film pontjait az ernyőn, arra van szükség, hogy a film minden pontjáról egy-egy *széttartó sugárnyaláb* induljon ki az objektív felé. Az ábrán ezt a helyzetet tüntettük fel, de a filmnek csupán egyetlenegy, kiválasztott pontján áthaladó fénysugarakat rajzoltuk meg. A film többi pontjának leképezése is pontosan így történik. Látható, hogy a pontból az objektív felé tartó sugárnyaláb nyílásszöge az izzószál nagyságától függ. Kisebb fényforrás, kisebb: nyílásszög. Kisebb nyílásszög: kevésbé fényerős kép a vásznon!



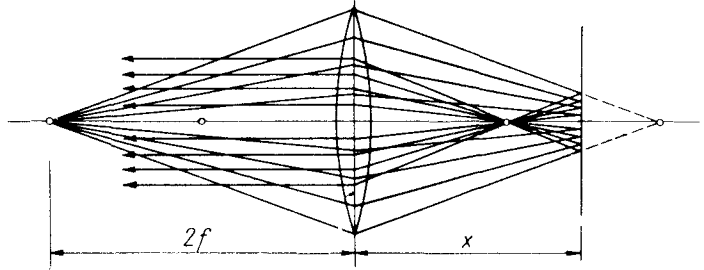
12.34. A vetített kép megvilágítása növelhető azáltal, hogy a hátrafelé tartó fénysugarakat a tükör visszaveri. Ezeknek a visszavert fénysugaraknak ugyanúgy át kell menniük a kondenzoron, filmen és objektíven, mint az eredetileg is jó irányba tartó fénysugaraknak. E célból a legegyszerűbb az, ha a homorú tükröt úgy helyezzük el, hogy a vetítőlámpa izzószála körülbelül a tükör görbületi középpontjának környékére kerüljön, vagyis a tükör az izzószáltól kb. $2f$ távolságra legyen. Így még azt is elkerülhetjük, hogy az izzószálról a tükör olyan helyen adjon képet, hogy azt a vetítőrendszer esetleg a vászonra vetítse, s ezáltal elrontsa a képmező egyenletes megvilágítását.

12.35. Azért, mert ez az eszköz éppen nem szórja a fényt, hanem a fényforrásból kilépő széttartó sugárnyalábot közel párhuzamos fénysugarak nyalábjává rendezi. (A katonai fényszórókban pl. parabolatükröt használnak, ennek fókuszában helyezik el a pontszerű fényforrást.) Az autólámpa fényszórója annál rosszabb, minél inkább szétszórja az izzó fényét.

12.36. A fényrekesz („blende") egy változtatható átmérőjű, kör alakú nyílás, mellyel az objektív hatásos nyílásszögét és így a leképező fénynyaláb nyílásszögét lehet változtatni. Ha csökkentjük a fényrekesz átmérőjét (vagyis például 5,6 helyett 8, vagy 11, vagy még nagyobb számmal megjelölt blendét állítunk be), akkor nő a mélységélesség, mivel keskenyebb nyalábok hozzák létre a képet. Ugyanakkor csökken a film megvilágítása, ezért — hogy ne legyen a film „alexponált" — növelnünk kell az expozíciós időt (például 1/100-ról 1/50-re, vagy 1/25-re).

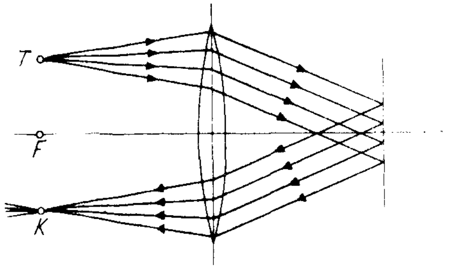
12.37. A lencse tengelyén, tőle $2f$ távolságban levő fényforrás képe a másik oldalon, szintén $2f$ távolságra keletkezik az optikai tengelyen. De most csak *keletkezne* a kép, mivel a jól elhelyezett síktükörrel megfordítjuk a nyalábot. Úgy fordítjuk meg, hogy a fókuszpontban egyesüljön, vagyis a visszavert sugarak mind a fókuszponton menjenek át. Ekkor a lencsét a fókuszpontból „kiinduló" sugarak érik, tehát párhuzamos nyaláb lép ki a másik oldalon. Az ábráról leolvasható, hogy a lencse és a tükör távolsága:

$\underline{x = 1{,}5\ f.}$



12.38. A fókuszsíkban levő pontszerű fényforrásból kiinduló nyaláb a lencséből kilépve párhuzamos nyalábbá válik. Ezt a síktükör a visszaverődés törvényének megfelelően, párhuzamos nyalábként veri vissza. A visszavert párhuzamos nyaláb újra a lencsén halad át, s abból kilépve összetartó nyalábbá válik. Valamenynyi sugár a fókuszsík ugyanazon pontján fog áthaladni. Ez lesz a K képpont.

Az ábráról látható, hogy a képpont ugyanolyan távolságra helyezkedik el az optikai tengelytől, mint amilyen távolságra a másik oldalon a tárgypont volt.



Érdemes felfigyelni arra is, hogy ha a síktükör elég messze van a lencsétől, akkor a visszavert nyaláb esetleg el sem éri a lencsét. Sőt az is előfordulhat, hogy már a síktükröt sem éri el a lencséből kilépő párhuzamos sugárnyaláb. Ezekben az esetekben nem keletkezik kép.

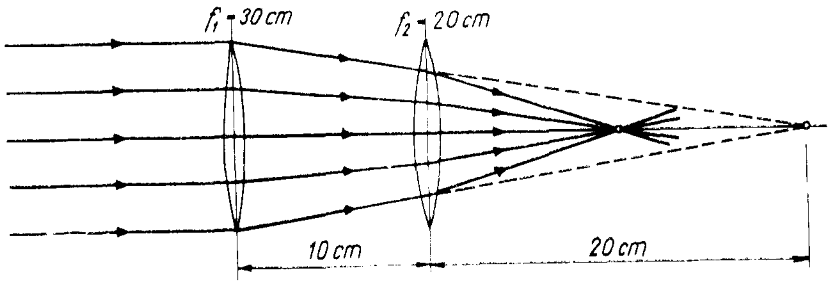
12.39. Távoli fényforrásról közel párhuzamos fénysugarak érkeznek. Számoljunk most azzal a közelítéssel, hogy ezek a fénysugarak pontosan párhuzamosak. A 30 cm fókusztávolságú lencse, amelyikkel először találkoznak, ezeket a sugarakat fókuszpontjában gyűjtené össze. 10 cm-rel hátrább azonban ott van a 20 cm fókusztávolságú lencse. Erre esik az összetartó nyaláb. Áthaladás után még jobban összetartóvá válik. A képpont helyét a leképezési törvényből számíthatjuk ki:

$f = 20$ cm; $t_2 = -20$ cm (virtuális tárgy):

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{20\ \text{cm}} - \frac{1}{-20\ \text{cm}} = 2 \cdot \frac{1}{20\ \text{cm}};$$

$k_2 = 10$ cm.

Az ernyőt tehát a második lencsétől 10 cm-re kell elhelyezni.



12.40. Először a gyűjtőlencse alkot képet:

$f_1 = 20$ cm; $t_1 = 30$ cm.

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{20\ \text{cm}} - \frac{1}{30\ \text{cm}} = \frac{10\ \text{cm}}{20\ \text{cm} \cdot 30\ \text{cm}};$$

$k_1 = 60$ cm.

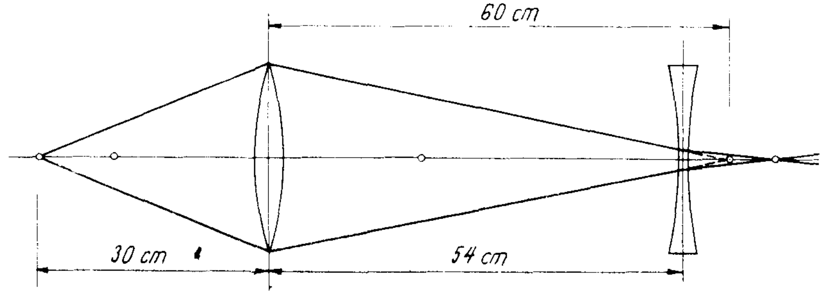
Ez a kép a szórólencsének virtuális tárgya, mivel a szórólencsét összetartó nyaláb éri el. A nyaláb a szórólencse mögött 6 cm-rel egyesülne. Tehát:

$f_2 = -12$ cm; $t_2 = 54$ cm $- 60$ cm $= -6$ cm.

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{-12\ \text{cm}} - \frac{1}{-6\ \text{cm}} = -\frac{1}{12\ \text{cm}} + \frac{1}{6\ \text{cm}};$$

$k_2 = 12$ cm.

A lencserendszer tehát a fényforrás valódi képét állítja elő, a szórólencsétől 12 cm-re.



.41. Prizmával azért lehet színképet előállítani, mert az anyagok törésmutatója függ a megvilágító fény hullámhosszától. A prizmára fehér fénynyalábot bocsátva, a különböző hullámhosszú fénysugarak különböző szögben törnek meg. A prizmát elhagyó fény útjába helyezett ernyőn egyetlen színkép jelenik meg. Legtöbb esetben a legnagyobb hullámhosszú fény (a vörös) törik meg a legkevésbé.

Optikai ráccsal azért lehet színképet előállítani, mert a fénynek az optikai rácson történő elhajlása függ a fény hullámhosszától. Az optikai rácsra fehér fénynyalábot bocsátva, a különböző hullámhosszú fénysugarak különböző szögekben hajlanak el. Az optikai rácsot elhagyó fény útjába helyezett ernyőn egy fehér foltot látunk a fény eredeti irányában, valamint ettől jobbra és balra, teljesen szimmetrikusan egymást követő színképeket. Minden esetben a legkisebb hullámhosszú fény (az ibolya) hajlik el a legkevésbé.

12.42. A hanglemez reflexiós optikai rácsként viselkedik. Mivel azonban elég kis rácsállandóra van szükség, ezért a lemezt úgy kell tartani, hogy a ráeső, majd visszaverődés után szemünkbe jutó fénysugarak a felületet elég lapos szög alatt érjék illetve hagyják el. Ekkor szép színképet, esetleg színképeket láthatunk. A jelenség annál jobban megfigyelhető, minél sűrűbb már eleve a hanglemez barázdáltsága.

12.43. Akkor, ha additíve összekeverve egy bizonyos aránynál fehér kapható belőlük. (Más arányban keverve ugyanezt a két színt, természetesen nem lesz az eredő szín fehér.) Additív színkeverést legegyszerűbben úgy hajthatunk végre, hogy a kétféle színű fényforrás fényét ugyanarra a fehér felületre vetítjük. A megfelelő arány a megvilágítások kölcsönös változtatásával állítható elő. A festékporok, színes folyadékok összekeverése nem additív színkeverés. Ezért nem csodálható az, hogy hiába kiegészítő színek a vörös és a zöld, sohasem lesz fehér az összekevert vörös és zöld festékkel festett víz. A színes televízió képernyőjén látható színek additív keverékszínek.

12.44. Feketének látszik. Azokat a fénysugarakat, amelyet a zöld üveg átenged, a vörös bor elnyeli. Azokat, amelyeket a vörös bor visszaverne, a zöld üveg nem engedi át. A színeknek azt a keverését, amely ilyen „kivonó" módon történik, szubsztraktív színkeverésnek nevezzük. Ezt legegyszerűbben úgy hajthatjuk végre, hogy a két összekeverendő színű színszűrőt egy fehér fényt kibocsátó fényforrás elé tesszük egymás után, s a két színszűrőn átmenő fényt egy fehér felületre vetítjük. Amilyen színűnek akkor a fehér felület látszik, az a szín a két összetevő szín szubsztraktív keveréke. Ez a fajta színkeverés a festékek, folyadékok keverése, s a színes fényképezésnél használt keverés is. Szubsztraktív keveréssel sohasem állítható elő fehér szín, mint ahogy additív keveréssel sem lehet előállítani a feketét.

13. Ismétlő feladatcsoportok I.

A.1. $t = 2{,}5$ s.

A.2. $\dfrac{V'}{V} = 0{,}57$.

A.3. $v = 5{,}06\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 1{,}58$ s.

A.4. *a)* $f_v = 60$ cm; *b)* $f_m = -172$ cm.

A.5. 240 000.

A.6. *a)* $v_1 = 6{,}34\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; *b)* $v_2 = 6{,}02\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

B.1. *a)* $t = 20$ s; *b)* $s = 200$ m; *c)* $v = 20\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

B.2. $f = 0{,}14\ \text{s}^{-1}$

B.3. *a)* $F_s = 0{,}5$ N. *b)* $F_s = 1$ N.

B.4. $D = 10$ dioptria.

B.5. $\varrho = 1{,}5 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

B.6. Lefelé; $a = g\left(1 + \dfrac{M}{m}\sin\alpha\right)$.

C.1. $t = 1{,}5$ min.

C.2. $F_1 = 825$ N; $F_2 = 425$ N.

C.3. $v' = 0{,}24\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; tehát a sebesség $0{,}56\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ értékkel csökken.

C.4. $d \geq 4{,}54$ cm.

C.5. $\beta = 1310\ \text{s}^{-2}$.

C.6. Igen. A légellenállás elhanyagolásával az emelkedés és esés együttes ideje 4,08 másodpercnek adódik.

14. Ismétlő feladatcsoportok II.

D.1. a) $v_{max} = 0{,}4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$;

b) $a_{max} = 0{,}62\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

D.2. a) $c_ü = 200\,000\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$;

b) $\lambda = 333\ \text{nm} = 3{,}33 \cdot 10^{-7}$ m.

D.3. $W = 3000$ J.

D.4. $L = 100$ cm.

D.5. a) $a = 12{,}25\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ függőlegesen lefelé.

b) $a = 64\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ függőlegesen felfelé.

D.6. $s = 45$ cm.

E.1. $F_1 = 1098$ N; $F_2 = 776$ N.

E.2. $K = 3$ mm.

E.3. *a)* $\omega \approx 4{,}47\ \mathrm{s}^{-1}$.

b) $\beta \approx 10\ \mathrm{s}^{-2}$.

E.4. $F_{\text{átl}} = 2\ \mathrm{N}$.

E.5. $F_1 = 2{,}4 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$; $F_2 = 3{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$.

E.6. $F = 27{,}5\ \mathrm{N}$.

F.1. $s = 26{,}7\ \mathrm{m}$.

F.2. $k = 6{,}67\ \mathrm{cm}$.

F.3. $\mu = 0{,}125$.

F.4. $a = -3{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $v_0 = 13{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

F.5. *a)* $y = -2{,}5\ \mathrm{cm}$; *b)* $v = -0{,}54\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; *c)* $a = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

F.6. $v = 2{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.