

1. A minőségbiztosítás statisztikai alapjai

A minőségbiztosítási intézkedések csak a valóságnak megfelelő ismeretek alapján lehetnek sikeresek. A valóság leírásához legtöbbször adatok tömege szükséges, amit nehéz áttekinteni, és helyes következtetéseket levonni belőle. Pedig a minőségbiztosítással összefüggő kérdésekben ezekből az adatokból kell iránymutató választ kapni, információt szerezni.

Anélkül, hogy a vizsgált adatok fajtáját vagy fizikai jellegét ismernénk, tisztán a folyamatok belső ingadozása, értékértéktartása vagy eltolódása alapján messzemenő következtetéseket tehetünk, illetve a valóban szükséges beavatkozásokra találhatunk rá. Akár a külső körülmények jellemzőit, akár a termelési folyamatok paramétereit, akár a végtermék minőségi értékeit tekintjük, azok közel azonos körülmények között is véletlenszerű ingadozásokat, sztochasztikus eltéréseket mutatnak.

Egy vizsgálati minta vagy a teljes sokaság méréses vizsgálatával meghatározhatók a tétel tulajdonságai, s nincs hatékonyabb döntés-előkészítés a beavatkozás érdekében, mint e tények ismerete. Kérdések sokasága válaszolható meg az adatok megfelelő kiértékelésével a matematikai statisztika eszköztárával.

2. Statisztikai minta feldolgozásának alapfogalmai

2.1. Valószínűségelméleti alapfogalmak

Ahhoz, hogy a különböző matematikai módszereket alkalmazni lehessen, a valóság eseményeit meg kell figyelni, és számszerű vagy logikai értékekre kell leképezni. Ennek a megfigyelésnek az általános módszere a mérés. A valószínűségelmélet a kísérlet szó alatt - a szokásosnál tágabb értelemben - a véletlen tömegjelenség megfigyelését érti. Valamely kísérlet egy lehetséges kimenetelét elemi eseménynek nevezzük. Az éppen tárgyalt kísérlettel kapcsolatos elemi események, vagyis a kísérletek lehetséges kimeneteleinek összességét az elemi események terének, vagy eseménytérnek nevezzük.

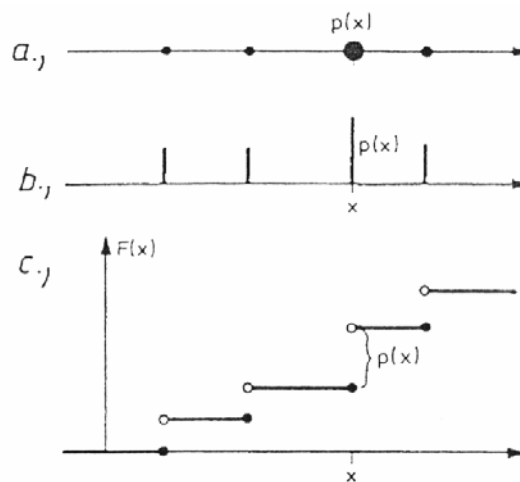
2.2. Sűrűség- és eloszlásfüggvény fogalma, ábrázolásuk

A valószínűségi változó értékét számegegyesen is ábrázolhatjuk. Diszkrét valószínűségi változó esetén ez pontokként, folytonos valószínűségi változó esetén egy vagy több intervallumként jelenik meg. Mivel a számegegyesre a valószínűségi változó összes lehetséges értékét felvisszük, az ábrázolt valószínűségek összegzett értéke 1-et ad, hiszen a biztos esemény valószínűsége a valószínűségi változó összes lehetséges értékén oszlik el. Ezt az eloszlást szemléltethetjük úgy, mint egységnyi tömegű anyag elosztását a számegegyesen. Az egy helyre koncentrálódó (diszkrét valószínűségi változó) vagy szétterülő anyag (folytonos valószínűségi változó esetén) a vizsgált ér-

ték tapasztalt, vagy várható előfordulását adja. Ha ezt függvényként ábrázoljuk, a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét kapjuk (diszkrét $p(x_i)$ -vel, folytonos $f(x)$ -el jelölve).

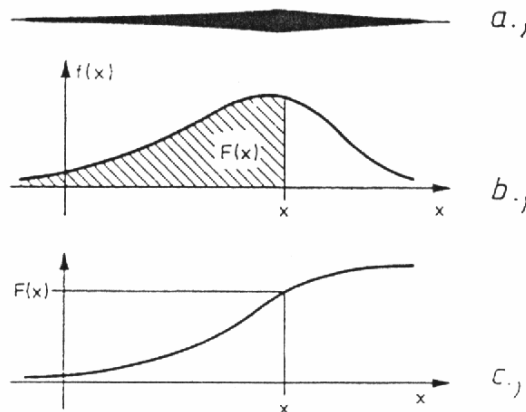
A folytonos valószínűségi változók esetén a gyakorlatban általában nem egy konkrét érték felvételének valószínűségét kell meghatározni (mivel annak valószínűsége általában 0), hanem egy adott határnál kisebb vagy nagyobb, esetleg egy intervallumban lévő érték felvételének lehetősége válik érdekessé. Az eloszláshoz ezért egy olyan függvény rendelhető, amelynek bármely x értékéhez a nála kisebb valószínűségi változókhoz tartozó valószínűségek összege tartozik.

$$F(x) = P(\xi < x)$$



1. ábra. Diszkrét eloszlás szemléltetése

a) a biztos esemény megoszlása a számegeyenesen, b) a sűrűségfüggvény, c) az eloszlásfüggvény



2. ábra. Folytonos eloszlás szemléltetése

a) a biztos esemény megoszlása a számegeyenesen, b) a sűrűségfüggvény, c) az eloszlásfüggvény

Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye. A nevezetes eloszlásfüggvények értékeit táblázatokban vagy nomogramokban foglalják össze. Ezek segítségével határozható meg pl. az $a < \xi < b$ esemény valószínűsége

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a)$$

2.3. A valószínűségi változók paraméterei és jellemzői

A jellegzetes elvi eloszlásokra és a vizsgálatoknál értelmezett teljes sokaságra vonatkozó sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény konstansait, illetve az ezekből származtatott értékeket paramétereknek nevezzük. A gyakorlatban mérésekkel és megfigyelésekkel ezekre az értékekre akarunk következtetni. A megvizsgált mintából kapott sokszor kisszámú értékből a paraméterekre való következtetésként kapott értékeket jellemzőknek szokták nevezni.

2.3.1. Várható érték - számtani átlag

A várható érték megmutatja azt az értéket, amelytől pozitív és negatív irányban kiegyenlített értéket kapunk, ha az egyes valószínűségi változók távolságával súlyozva vesszük a sűrűségfüggvény értékeit. Az így kiszámított várható értéket nem biztos, hogy a valószínűségi változó felveszi, így esetenként egyáltalán nem "várható". Folytonos eloszlás esetén, ha az egyetlen intervallum felett van értelmezve a várható érték valódi valószínűségi változót ad. Értéke folytonos eloszlásfüggvény esetén:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) d\xi$$

Diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$M(x_i) = \sum_i x_i p_i$$

Adott véges minta esetén, mely diszkrét értékekből áll a várható értékre való következtetést a számtani közép (átlag) alapján tehetjük meg.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^k \frac{g_j}{n} x_j^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k g_j \cdot x_j^*$$

A második sorban olyan gyakorlati esetre vonatkozik a számítás, amikor a megfigyeléseinket egyenlő osztásközökbe soroljuk, és a tapasztalt értékek helyett az osztásközök középpértékeivel számolunk. Ennek megfelelően

- g_j - a j -edik osztásközbe eső megfigyelések gyakorisága,
- n - a minta méretét meghatározó darabszám
- k - az osztásközök száma.

2.3.2. Medián - tapasztalati medián

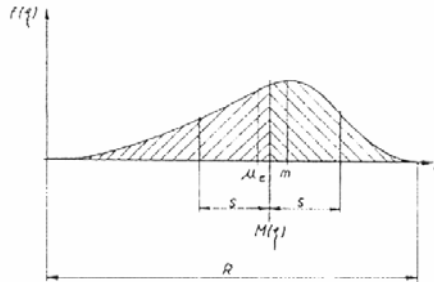
A medián az az érték, amelynél nagyobb értéket a valószínűségi változó ugyanolyan valószínűséggel vesz fel, mint kisebbet. A mediánt μ_e -vel jelölve ez a következőt jelenti:

$$F(\mu_e) = 0,5$$

A tapasztalati medián: a nagyság szerint rendezett mintaelemek közül a középső. Páros mintaelemszám esetén a két középső érték számtani közepe (átlaga).

2.3.3. Módusz - tapasztalati módusz

A módusz a valószínűségi változó legnagyobb valószínűségű értéke (a sűrűségfüggvény maximum-helye). A tapasztalati módusz a legnagyobb gyakoriságú osztály osztásközepe.



3. ábra: A várható érték, a terjedelem, a medián és a módusz elhelyezkedése egy sűrűségfüggvényen

2.3.4. Terjedelem

A terjedelem (R) a valószínűségi változó szóródásának értéke, a valószínűségi változó legnagyobb és legkisebb értékének különbsége.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

2.3.5. A szórás - a tapasztalati szórás

A szórásnégyzet a várható értéktől való eltérés négyzetének várható** értéke:

$$D^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x - M(x))^2 \cdot f(x) d\xi = M((x - M(x))^2)$$

A szórásnégyzet az eloszlás vagy a sokaság tulajdonsága, a sűrűségfüggvény lapultságát adja.

Mivel a becsléssel meghatározott számtani közép már némi torzítást okoz, mely eltérés a valószínűségi változótól különösen kis egyedszámú minták esetén lehet jelentős, a további torzítást az ún. korrigált szórás alkalmazásával lehet elkerülni:

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Használatos a relatív szórás (variációs együttható) (V%, vagy CV%) is, mely a szórás átlagra fajlagosított értéke

$$CV = \frac{s_x}{\bar{x}}, \text{ illetve } \frac{D(x)}{M(x)}$$

2.4. Leíró statisztika, grafikus ábrázolások

2.4.1. Adatok megjelenítése

Az adatok a jelmodell típusa szerint vagy folyamatosan (pl. diagramok), vagy diszkrét számokkal adhatók meg. Mivel a számoszlopokból nehéz következtetéseket levonni, gyakran képszerű ábrázolásra törekszünk. A vizsgált jelenség logikáját követve lehet, hogy egyszerűen egy számejegyesre vetítjük az értékeket, hogy eloszlásuk láthatóvá váljék.

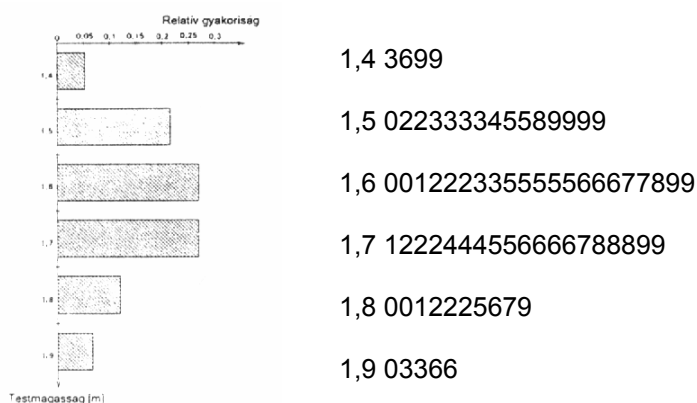
Tekintsünk egy 74 adatot tartalmazó adatsort, melynek értékei az alábbiak.

1,68 1,85 1,74 1,76 1,60 1,65 1,66 1,62 1,53 1,74 1,77 1,69 1,82 1,65 1,67 1,49 1,81 1,80 1,67
 1,52 1,76 1,72 1,80 1,55 1,43 1,58 1,96 1,69 1,82 1,65 1,55 1,59 1,59 1,53 1,78 1,72 1,86 1,96
 1,79 1,75 1,74 1,63 1,76 1,62 1,59 1,60 1,82 1,59 1,93 1,76 1,53 1,63 1,78 1,72 1,61 1,54 1,89
 1,53 1,90 1,93 1,65 1,50 1,65 1,52 1,62 1,66 1,49 1,79 1,87 1,78 1,66 1,75 1,71 1,46

Átlag	1,69	Minimum	1,43
Medián	1,68	Maximum	1,96
Módusz	1,76	Az adatok összege	125,01
Tapasztalati szórás	0,12682	Az adatok száma	74
Variancia	0,09952	Megbízhatósági tartomány	0,014743
Terjedelem	0,53	Kurtózis	-0,6105
		Ferdeség	0,150289

4. ábra. Adatsor és a fontosabb egyértékű statisztikái

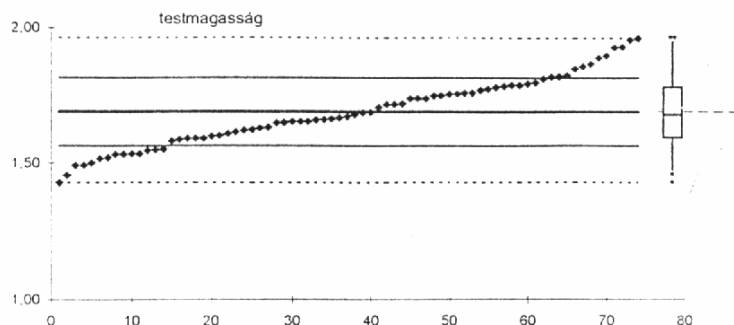
Az adatok egyszerű felvételezését és azonnali áttekinthetőségét segíti az ún. stem-and-leaf ábrázolás, mely a fenti adatsorra az alábbi ábrán látható.



5. ábra. Stem-and-leaf ábrázolás és az adatok relatív gyakorisági diagramja

Ha egy folyamat bizonyos időpontokra jellemző értékeit vesszük fel, célszerű lehet az időtengely menti ábrázolás is. A minőségbiztosítási feladatok során gyakori, hogy az adatokat úgy kell megjeleníteni, hogy az időtengely mentén egy-egy pontba egy kis minta értékeit, vagy az abból számolt statisztikai jellemzőket kell feltüntetni (pl. ellenőrző vagy szabályozókártyák).

Tegyük fel, hogy az adatok mérései a felvételezés során egységnyi időközönként történtek, ekkor időrendben, illetve az adatok nagyságrendbe állítása után az értékek az alábbi ábrán láthatók.



6. ábra. Az adatok időrendi és nagyságrendi ábrázolása

2.4.2. A relatív gyakoriságokat ábrázoló diagramok

Nagyszámú adat feldolgozásánál elterjedt ábrázolás az osztásközökbe sorolt adatokból képzett oszlopdiagram (relatív gyakorisági diagram). Az osztályok kijelölésével az adatok felvétele is egyszerűbb, ugyanakkor durva osztásközök választása esetén veszíthetnek információtartalmukból (pl. a folytonos valószínűségi változót diszkrété tesszük a besorolással).

Ha egy adatsor áll rendelkezésünkre, az alábbi lépésekkel készíthetjük el a relatív gyakoriság diagramját:

- a terjedelem meghatározása
- a felbontás, az osztályszélesség, illetve az osztályok számának meghatározása
- osztályba sorolással a gyakoriságok megállapítása (pl. vonalkázással)
- oszlopdiagram rajzolás a relatív gyakoriságokból
- az eloszlás jellemzőinek kiszámítása, illetve leolvasása (átlag, módusz, medián, terjedelem, szórás...)

Általában akkor szemléletes és használható a diagram, ha az osztásközök száma 6 fölött és 20 alatt van. Ez azonban függ az eloszlás jellegétől is. Az osztásközök számát célszerűségi szempontokból úgy választjuk meg, hogy az egyes osztásközökbe kellően sok egyedi eset essék, de az osztásközök információromboló hatása még ne érvényesüljön túlságosan. Erre a gyakorlat az alábbi összefüggést használja

$$\sqrt[3]{n} \leq k \leq \sqrt{n}$$

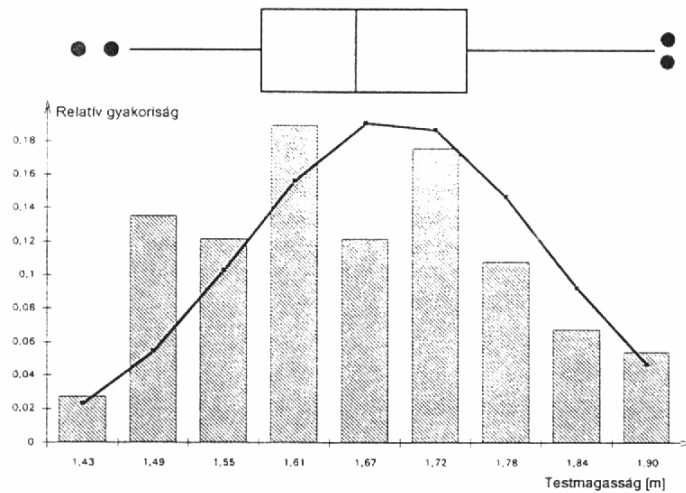
ahol: n a vizsgálatok,

k az osztásközök száma.

Fontos gyakorlati szempont, hogy jól kezelhető osztásközöket (viszonylag kerek osztáshatárok és -közepek) célszerű választani, hisz hatékony és gyors adat-felvételezés csak így képzelhető el.

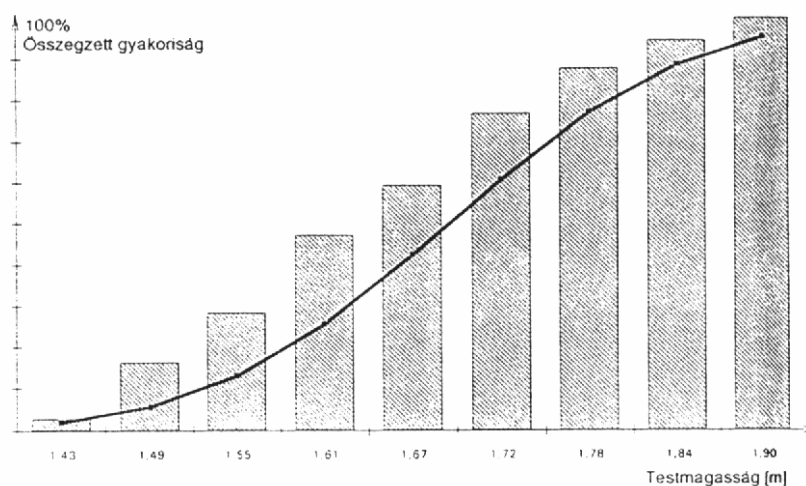
Szellemes adatmegjelenítési módszer az ún. box-plot megjelenítés, ahol egy dobozt rajzolunk, amelyre az alábbiak jellemzők:

- dobozt kettéosztó vonal a medián,
- a doboz széleit a kvartilisok (a nagyság szerinti adatsor középső $n/2$ db adata által kijelölt két érték)
- a vonalakat a szélsőértékek előtti harmadik adatig, de maximum a doboz szélességének 1,5-szereséig húzhatjuk meg.
- a vonalakon kívül eső értékeket egyenként berajzoljuk.

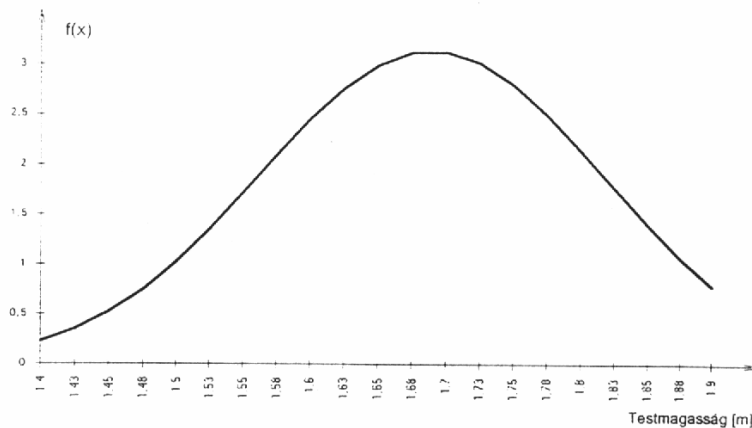


7. ábra. Oszlopdiaagram és a hozzá tartozó box-plot

Ismert eloszlású valószínűségi változó elméleti eloszlása a paraméterek becslése alapján (általában az átlag és a szórás ismerete esetén) is megszerkeszthető. Amennyiben adott valószínűségi változónál kisebb vagy nagyobb érték valószínűsége érdekel, a legjobban használható ábrázolás az eloszlási diagram, melyet az adatok alapján az összegzett gyakorisággal közelíthetünk.



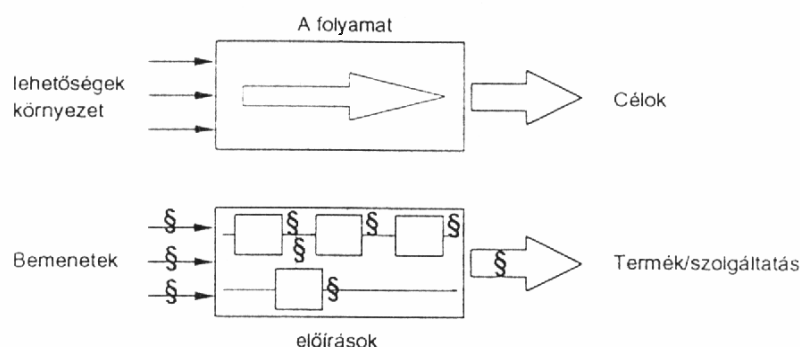
8. ábra. Az adatsor sűrűségfüggvénye a becsült paraméterek alapján



9. ábra. Az összegzett gyakorisági és az elméleti eloszlásfüggvény értékei

3. Folyamatoknál alkalmazott statisztikai módszerek

A minőség változását általában sokkal könnyebb észlelni, mint a hiba okát, jellegét és kiterjedését behatárolni. Ezért rendkívül fontos, hogy a szabványok olyan mondatait, mint "a szállítónak biztosítani kell, hogy ... a folyamatokat szabályozott körülmények között hajtsák végre" konkrét tevékenységre lehessen váltani. A folyamatok műszaki ismeretén kívül ilyen esetben a statisztika törvényszerűségeit hívhatjuk segítségül.



A folyamatokkal kapcsolatosan két kiindulási pontból fogalmazhatjuk meg a statisztika segítségével megválaszolható kérdéseket:

1. Mekkora biztonsággal tartja a vizsgált minőségi paraméter az előírt tűrésmezőt,
2. valamint, hogy a folyamat mennyire tekinthető azonosnak korábbi önmagával, vagyis nem következett-e be olyan változás, ami miatt a folyamat előzetesen tervezhető tulajdonságai kiszámíthatatlanná válnak.

Az első kérdés megválaszolásához a folyamatok megfelelőségére (alkalmasságára: vagyis képességére és beállítottságára) értelmezett mutatószámokat (C_m , C_{mk} , C_p , C_{pk}) alkalmazzák, a második kérdésre pedig a különböző szabályozókártyák technikáján keresztül szokták a választ keresni.

3.1. A folyamatok megfelelősége (alkalmassága)

Mielőtt a minőséget vizsgálni lehetne, előbb létre kell hozni. Ahhoz, hogy a termék az elvárásoknak megfeleljen a termelő berendezések olyan állapota és a beállítások olyan pontossága szükséges, hogy azok hatására az egyes munkadarabok az előírásokban (műszaki rajzokban, szabványokban stb.) meghatározott minőségi követelményeknek megfelelően készülhessenek el. Olyan gyártási módszereket és eljárásokat kell alkalmazni, hogy selejt ne is keletkezzen.

Mindehhez a gyártási folyamatokban előállított termékek minőségét meghatározó tényezők és hatások ismerete szükséges. A lehetőségek korlátait és a leghatékonyabb minőségjavítási módszereket felmérve lehet a fenti célnak megfelelni.

A gyártási folyamatok esetében az alábbi elvárásokat kell szem előtt tartani:

- A műveleteknek és a folyamat egészének el kell érnie a kitűzött minőségi jellemzőket és funkcióképességet.
- A folyamat ellenőrizhetőségét biztosítva lehet a szükséges átláthatóságot elérni.
- Hatékony beavatkozási, módosítási, vezérlési módszereket kell feltárni, hogy a gyártási feltételek változása esetén a minőségi jellemzők értékét állandó szinten lehessen tartani.
- A fenti célokat a lehető legkisebb erőforrás ráfordítással kell elérni.

3.2. A probléma jellege

A termelő folyamatok technológiai értékeire és a gyártott termékek minőségi paramétereire mindig valamekkora szórás jellemző. Az egy-egy gépen gyártott termékek minőségjellemzőinek ingadozását a munkadarabok valamely előírt értékhez viszonyított véletlen és determinisztikus eltéréseinek összege adja meg. A determinisztikus eltérések egy részét általában kompenzálni lehet. Az előállított munkadarabok méreteingadozásainak véletlenszerű eltéréseit matematikai módszerekkel határozhatjuk meg (szórás, terjedelem...).

3.3. A feladat megoldásának eszközei

Alapkövetelményként azt jelöljük meg, hogy az egy gépre vagy folyamatra jellemző szórás, mint a termékjellemzők és a folyamat jellemzője, adott határok között legyen. A lényeges jellemzők ingadozása alapján lehet meghatározni a folyamat megfelelőségét. E követelmény megvalósítására a statisztikai folyamatszabályozás (e szavak angol kezdőbetűiként adódik a közkeletűen használt SPC) módszereit alkalmazzuk.

A folyamat megfelelőségének elemzése során a minőség létrehozásának feltételei közül két lényeges tényezőt vizsgálunk.

- az előállítási műveletben használt berendezések (általában gépek, berendezések) korlátait, ami mindig valamilyen koncentrált körülmények között, általában a folyamatok beindítása előtt ad számot arról, milyen pontosságot várhatunk el,
- és a folyamat minőség szempontjából korlátot jelentő sajátosságait, ami az időben megjelenő külső zavaró hatásokat is magán viseli.

Az objektív értékeléshez két fogalmat vezetünk be:

- A képesség a termelő berendezések, vagy a folyamat adottságairól (lehetőségeiről) ad tájékoztatást. Számszerűsített értéként a vizsgált objektumra jellemző valószínűségi változó szórását és az előírt tűrésmező értékének viszonyítását szokták használni.
- A berendezések, vagy a folyamat beállítottsága (szabályozottsága) a pontos "célzás" és az odafigyelés jellemzője, mely megmutatja, hogy az előírt érték körül ingadozik-e a vizsgált jellemző. Objektív meghatározására a vizsgálati értékek centrális jellemzőinek (pl. számtani közép, medián...) és az előírt (névleges) határérték különbségét szokták megadni**.

A gyártási folyamat jellemzőit az előírásoknak megfelelőnek nevezzük, ha a használt eszközök és a folyamat tartósan képesek az előírások vagy az elvárások szerinti termékeket előállítani. A folyamat jellemzőinek megfelelősége a berendezés és a folyamat előírás szerinti képessége és szabályozottsága esetén várható.

3.4. A megoldás útja

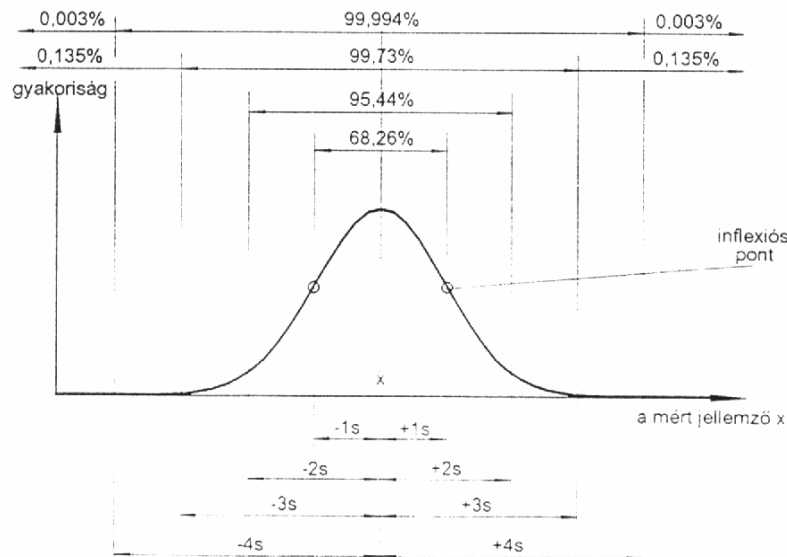
Olyan gépeket és olyan technológiákat kell alkalmazni, amelyek biztonsággal képesek betartani az előírásokat. Ennek ellenőrzésére a legyártott tételeken erre a célra kidolgozott és megtervezett megfelelőségi (alkalmassági) vizsgálatokat kell végeznünk. A gépek és a folyamatok képességének és szabályozottságának vizsgálata a berendezések vásárlásakor, a gyártás megkezdésekor, illetve rendszeresen a gyártási folyamat során végezhető el.

A tapasztalati szórás egy gép vagy egy folyamat jellemzőinek ingadozását írja le. Minél nagyobb a mért értékek ingadozása, annál nagyobb a tapasztalati szórás. A tapasztalati szórás a méretállandósági vizsgálatok legfontosabb jellemzője.

Az egy gépen készült munkadarabok minőségi jellemzőire (pl. méreteire) véletlenszerű eltérések jellemzők. Ha a mért értékek gyakoriságát a vizsgált minőségi jellemző mentén diagramba vesszük fel, legtöbbször egy szimmetrikus haranggörbét kapunk. Ez mindig fellép, ha sok egymástól független hatás alakítja ki a végső jellemző ingadozását, ami zavartalan termelés és megfelelően nagy darabszámok esetén általában biztosított. A normáeloszlási vagy Gauss-görbét a (görbe

helyét kijelölő) várható érték és (a szétterülésére jellemző) szórás egyértelműen meghatározza. Mivel gazdasági okok miatt legtöbbször nem végezhetünk nagy számú mérést, csupán szűrőpróbaszerű mérésekre hagyatkozunk, amelyekből mint tapasztalati adatokból az átlag és a tapasztalati szórás segítségével becsülhetők az eloszlás paraméterei.

Egy normálosztású szűrőpróba sorozat átlagértékének és szórásának ismeretében kellő pontossággal megadható azon darabok száma, melyek két adott határérték közé esnek. Az ábrán a munkadarabok pl. 99,994%-a a $\pm 4s$ szórás által határolt tartományba esik.



10. ábra. A normálosztás

Nem normálosztású sokaságok esetén ezek a százalékok a normálosztásétól eltérőek.

4. A különböző mintavételezésekkel levonható következtetések

A folyamatok minőségi sajátosságai különböző mintavételezések mellett vizsgálhatók. A mintavételezés egyben azt is eldönti, hogy milyen következtetéseket tehetünk a vizsgálati eredmények alapján:

1. Milyen a gyártásnál használt termelő berendezés (gép) képessége?
2. Milyen a gyártásnál használt termelő berendezés (gép) beállítottsága (szabályozottsága)?
3. Milyen a termékek tulajdonságingadozása, ha egy hosszabb folyamatból származnak (a folyamat képessége)?
4. Mennyire állandó a minőségi jellemző átlagértéke hosszabb távon?

Mintavételezések	Berendezés	Folyamat
Képesség	Rövid idő alatt vett nagy mennyiségű minta szóródása	A folyamat különböző szakaszaiból vett minta szóródása
Szabályozottság	Rövid idő alatt vett nagy mennyiségű minta átlagának helyzete	A folyamat különböző szakaszaiból vett minta átlagának mozgása

4.1. A termelő berendezés (gép) képessége

Ha egy termelő berendezés képességeire vagyunk kíváncsiak, a mintavételezést egyetlen időpontban egy helyről és lehetőleg minden külső módosító tényezőt kizárva végezzük. Az erre a vizsgálatra alkalmas nagy elemszámú minta kiértékelésénél elsősorban a szóródás mértéke a meghatározó. A szórás és a névleges érték körül kijelölt tűrésmező megadott viszonya a berendezés alkalmasságát vagy alkalmatlanságát dönti el:

$$C_m = \frac{FTH - ATH}{6s} \stackrel{?}{\leq} 1\frac{1}{3}$$

Mivel normális eloszlású valószínűségi változó esetén (az elosztás jellegét minden folyamatnál ellenőrizni kell) a várható érték körül kijelölt háromszoros szóráshatárok (a két oldalon ez 6s) a teljes valószínűség 99,73%-át tartalmazzák, a berendezést általában akkor szokták a kijelölt műveletre alkalmasnak nevezni, ha a kijelölt határok közötti különbség 8s. Mivel a termékekkel kapcsolatos elvárások nem egyformák, egyes igényesebb esetekben ez pl. akár 10s is lehet. A berendezés okozta ingadozás azért nem lehet nagyobb a tűrésmezőhöz képest, mert a minőségjellemző nem fog pontosan a középérték körül ingadozni. Ahhoz, hogy az elkészült darabok döntő része az előírt határok közé essék, az előírt határoknál kisebb gyakorlati terjedelem kijelölése szükséges. Ez azt jelenti, hogy egy termelőfolyamat biztonságos kézben tartása érdekében a berendezés munkatartománya [működési szórástartomány] a tűrések csak bizonyos százalékát használhatja ki.

Ha ez nem teljesül, akkor

- vagy alkalmasabb eszközt (karbantartás, korszerűbb berendezés...) kell választani,
- vagy a tűréshatárokat kell realisabban megválasztani.

4.2. Berendezések szabályozottsága (a beállítás értékelése)

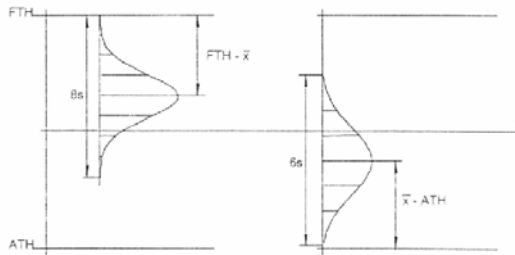
A berendezések helyes beállítottságát az mutatja, hogy a gyártott termékek vizsgált jellemzője milyen érték körül szóródik. Ha a névleges érték körül, úgy a beállítás helyes. Minél távolabb van az előírt középértéktől, annál kevésbé szabályozott a berendezés.

Ennek jellemzésére mintát veszünk a gyártási folyamatból. A berendezés pillanatnyi szabályozottságát akkor ismerhetjük meg, ha a mintát adott körülmények között a külső változásoktól mentesítve vesszük. Ezt az egymás után gyártott termékek bevizsgálásával érhetjük el (a mintavétel tehát hasonló a berendezés képességének vizsgálatakor említettel).

A minta átlagát és szórását használjuk fel a relatív elhelyezkedésének megítélésére. Képezzünk statisztikai mutatót az átlag, a kijelölt határok távolsága és a szórás háromszorosából:

$$C_{mk1} = \frac{\bar{x} - ATH}{3s}, \text{ illetve } C_{mk2} = \frac{FTH - \bar{x}}{3s}$$

A C_{mk} mutató az átlagérték előírt tűréshatáron belüli helyét veszi figyelembe. A felvetett probléma szempontjából a két érték közül jelentősége a kisebb (kritikus) C_{mk} értéknek van.



11. ábra: Eloszlások elhelyezkedése a tűrésmezőn belül

$$C_{mk} = \min(C_{mk1}, C_{mk2})$$

A berendezésekkel szemben megfogalmazott elvárás lehet pl. a mérethelyesség érdekében $C_{mk} \geq 1,33$.

Ez a határérték számszerűen megegyezik ugyan az előzőekben megfogalmazott paraméterrel, de a két elvárás tartalmilag eltérő. Ha azonban C_{mk} értékére ugyanaz a számszerű elvárás, mint a C_m -re vonatkozóan, és a beállítottságra (C_{mk} -ra) teljesül is ez, úgy biztosak lehetünk abban, hogy a képességre vonatkozó érték is jó.

4.3. A folyamat képessége

A folyamat fogalmába a gyártási körülmények legtöbbjét beleérthetjük. A folyamatokat gépek, anyagok, a gépkezelők, módszereik és munkakörnyezetük összhatásaként foghatjuk fel. Magukban foglalják a hosszabb idő alatt bekövetkező változásokat, amelyeket akár a termelő berendezés, akár a dolgozó, akár külső körülmények (hőmérséklet, klíma...) okoznak, és sokszor tartalmazzák a nyersanyagból következő és több gyártóberendezés okozta ingadozásokat is. A folyamatok paraméterállandósága az időben hosszú távon lezajló hatások mértékét tükrözi. Vizsgálatára elterjedten alkalmazzák pl. a gépiparban a különböző műszakokból 10-25-ször, $n=5$ mérésből álló szűrőpróbák vételét.

A kijelölt tűréstartomány és a minta kiértékelésekor meghatározott tapasztalati szórás aránya ismét megfelelő mérőszám. A minta egyaránt tartalmazza a termelő berendezések és a gyártási folyamat ingadozásait, így a vele szemben megfogalmazott elvárásoknak enyhébbnek, így a határértéknek is kisebbnek kell lennie, mint a berendezés képességét minősítő értéknek (az előbbi $C_m=1,33$ helyett általában $C_p=1$). A folyamatok paraméterállandóságát csak akkor tudjuk meghatározni, ha a termelőfolyamat már statisztikailag ellenőrzött, azaz csak véletlen szórások léphetnek fel.

A folyamat képességének (paraméterállandóságának) C_p mutatója csak a szórást veszi figyelembe. Az egyszerre vett nagyobb minta és a sok kis részletben vett minta esetére eltérő számolási módot alkalmazunk.

$$C_p = \frac{FTH - ATH}{6s} = \frac{FTH - ATH}{6s/c_4}$$

\bar{s} - a szűrőpróbák átlagos szórása

c_4 - a (kis) mintanagyságot figyelembe vevő korrigáló tényező.

4.4. A folyamatok szabályozottsága

A termelés során változó körülmények nemcsak egy nagyobb tétel összesítésében mutatkozó szórásnövekedésben tükröződnek, hanem az egy gépen hosszútávon egymás után gyártott termékek átlagos termékjellemzőinek mozgásában (eltolódásaiban) is. Ha a gyártási folyamat során sok kisméretű mintából határozzuk meg az aktuális átlagos értéket, azzal az eltolódásoknak az értéke meghatározható.

A hosszabb távon jelentkező eltolódások a folyamat szabályozatlanságára utalnak, ezért statisztikai mutatót használunk objektív elemzésére.

A folyamat szabályozottságát megmutató C_{pk} figyelembe veszi az átlagérték tűréshatáron belüli helyét.

$$C_{pk1} = \frac{\bar{x} - ATH}{3s/c_4}, \text{ illetve } C_{pk2} = \frac{FTH - \bar{x}}{3s/c_4}$$

\bar{x} - a szűrőpróbák átlagértékeinek átlaga.

Itt is döntő a kisebb C_{pki} a kritikus érték.

$$C_{pk} = \min(C_{pk1}, C_{pk2})$$

A folyamat paraméterállandóságával szembeni követelmény általában legalább $C_{pk}=1$.

A mintavételezés említett formájával a hosszú távú átlageltolódásokon kívül más információkhoz is juthatunk, ha az adatokat megfelelően értékeljük ki és rendezzük el. A folyamat ingadozásainak jellegét is megismerhetjük, ha az adatokat ellenőrző (szabályozó) kártyákon vezetjük. Az így kapott kiértékelő lapokról a pillanatnyi (gép)képességről és szabályozottság mértékéről egyaránt becslést készíthetünk, valamint a középértékek és a szóródás időbeli lezajlásából is gyakorlati következtetések vonhatók le. Pl. a középértékek tendenciózus vagy periodikus ingadozása is megismerhető, ami egyszerű logikai elemzés után általában látványos mértékű minőségjavítást tesz lehetővé.

5. A statisztikai folyamatszabályozás (SPC) és a folyamat javításának lépései

5.1. A statisztikai folyamatszabályozás (SPC) fogalma, célrendszere

A statisztikai folyamatszabályozás célja a megkövetelt minőségi szint biztosítása. Eszköztára a folyamat jellemzésére (mérésére és elemzésére) alkalmas statisztikai módszerek. Ha az alkalmazási terület egy technológiai folyamat, akkor a statisztikai folyamatszabályozás célja a folyamat paramétereinek helyesbítése, általában a termékek mintavételes ellenőrzési eredményei alapján.

A statisztikai folyamatszabályozás fontosabb feladatai az alábbiak:

- a megfogalmazott, vagy megfogalmazható elvárások értékelése,
- a minőségre befolyást gyakorló hatások azonosítása, jelentőségük felmérése,
- a folyamatképesség meghatározása, adott termelőeszközök és -rendszerek minőségi szempontú tartalékainak feltárása,
- adott termelőeszközökön az elvárható minőségi szint meghatározása,
- a minőségköltségek csökkentése a selejt-, és az ellenőrzési költségek csökkentésén keresztül,
- az üzemeltetési költségek csökkentése azzal, hogy eredményei lehetővé teszik a váltási folyamatok optimalizálását.

5.2. A statisztikai folyamatszabályozás (SPC) bevezetésének feltételei

A statisztikai folyamatszabályozás működtetéséhez a termelőhelyeken a folyamathoz illeszkedő szervezeti, dokumentációs rendszer, kidolgozott módszerek és a résztvevők megfelelő képzettsége szükséges.

A statisztikai folyamatszabályozás bevezetése során szükséges lépések részben a folyamat tervezésének és szervezésének fázisára, részben a gyártási folyamat szakaszára esnek. Tartalmi szempontból mindkét esetben az alábbi lépéseket kell végiggondolni:

A folyamat modellezése, aminek részletei:

- a folyamat céljának meghatározása,
- a tevékenységi folyamat mozzanatainak, géplépcsőinek meghatározása,
- a követelmények lebontása a résztvékenységek szintjére,
- a követelmények meghatározásának modellezése.

Ezek alapján a részműveletekre az összes elérhető paraméter összegyűjthető.

A kritikus műveletek és paraméterek kijelölése után a kiválasztott műveleteknél és vizsgálati paraméterek esetében a javítási stratégia kialakítása következik. Ez részben a lehetséges beavatkozások okozati elemzéséből áll. Ez többek között azért szükséges, mert csak olyan paramétert érdemes követni, melyre hatással tudunk lenni. A szabályozás kifejezés utalás a beavatkozás jellegré is: a folyamat valamely kimeneti jellemzője alapján visszacsatolás történik a folyamatra.

6. Az ellenőrző (szabályozó) kártyák

6.1. Az általános meghatározás

Az ellenőrző (szabályozó) kártya olyan grafikus módszer, amely statisztikai módszerek alkalmazásával mutatja meg egy folyamatról, hogy ellenőrzött ("kézben tartott") állapotban van-e. Az elemzés a termék vagy a folyamat szabályozandó jellemzőjének időbeli eloszlását állapítja meg és értékeli ki.

Az EOQ szótár szerint: az ellenőrző kártya alsó és felső ellenőrző határokkal rendelkező kártya, amelyen minták vagy részcsoportok sorozatának valamilyen statisztikai értékeit ábrázolják. A kártya gyakran megadja a középvonalat, amelynek segítségével megállapítható az ábrázolt értékek változásának mértéke és iránya (trendje).

Az ellenőrző (szabályozó) kártyák segítségével a véletlen ingadozások és szokatlan értékváltozások választhatók külön, lehetőséget teremtve a hiba elhárítását célzó beavatkozásra.

6.2. Az ellenőrző kártyák fontosabb fajtái

A vizsgált és minősített termékjellemző - az információ árnyaltsága - szerint az ellenőrző (szabályozó) kártya lehet:

1. méréses ellenőrző (szabályozó) kártya és
2. minősítéses ellenőrző (szabályozó) kártya.

Az első esetben méréssel kapunk adatokat és azok paramétereit jelenítjük meg az ellenőrző (szabályozó) kártyán. A minősítéses ellenőrző (szabályozó) kártyák a legtöbb esetben egy minősítési rendszer szerint jó vagy rossz egyedek számát határozzák meg. Ezért ezeket gyakran nevezik arány- vagy százalékkártyáknak is.

6.2.1. A méréses ellenőrző kártyák és a rajtuk megjeleníthető statisztikai jellemzők

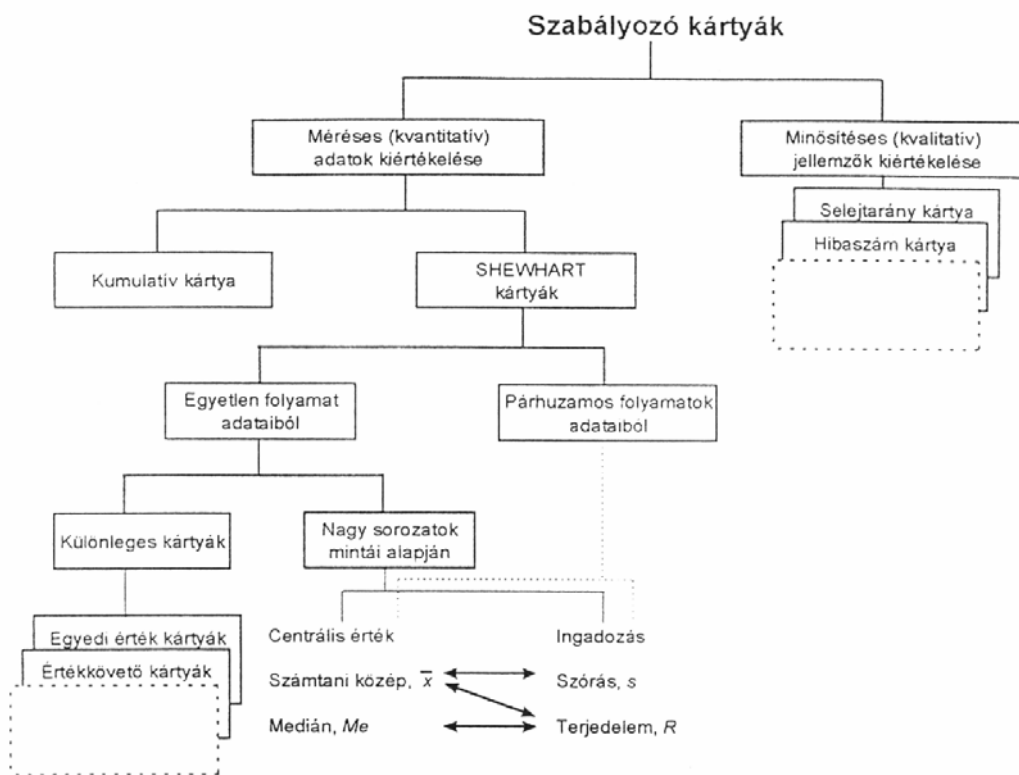
A szabályozó kártya, mint folyamatelemző eljárás - bizonyos feltételek fennállása esetén – elterjedt módszerként áll rendelkezésünkre. Ilyen feltétel, hogy a folyamat nagyszámban vizsgálható mérhető paramétereket biztosítson, a folyamat remélt állandósága mellett, és ebből a folyamatból meghatározott kismintát érdemes vizsgálatra kivenni. Az eredmények előre elkészített nyomtatványokon vezethetők.

Ha a fenti feltételek teljesülnek, a méréssel kapott vizsgálati eredményeknek általában két tulajdonságát kísérik figyelemmel, melyet a statisztikai minta többféle jellemzőjével írhatunk le:

- a minta centrális (közép) értéke, melyet az átlaggal (számtani középpel), vagy a mediánnal határozzuk meg,
- a minta szóródása, melyet a tapasztalati szórással (s), vagy a minta terjedelmével (R) jellemzünk.

A többféle lehetőségnek az ad értelmet, hogy míg az átlag és a tapasztalati szórás hatékonyabb becslést ad az eloszlás várható értékére és szórására, meghatározásuk hosszadalmasabb, mint a másik két jellemzőnek.

Ezek alapján az elterjedt kártyák az alábbiak:



6.2.2. A minősítéses ellenőrző kártyák és a rajtuk megjeleníthető statisztikai jellemzők

A minősítéses adatok ellenőrző kártyáit az ún. alternatív kimenetelű ellenőrzés esetén használják, amelynek során minden egyes ellenőrzött mintaelemet vagy megfelelőnek vagy hibásnak (jórossz) minősítenek.

A minta jellemzői alapján a folyamat centrális jellemzőit és a folyamathatárokat a különböző eloszlások statisztikáit alapul véve, becsléssel határozzuk meg, attól függően, hogy a selejtes darabokat vagy a hibaszámot választottuk a minőség jellemzőjéül.

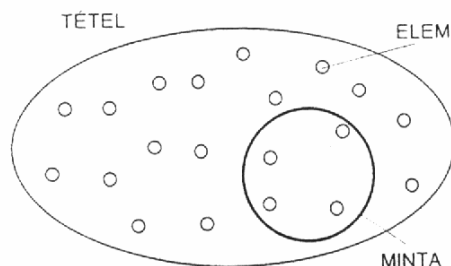
A minősítéses kártyák használata során a minősítés alapján a hibák vagy a mintákban levő hibás termékek részarányát, illetve számát határozzák meg. A kapott értékeket pontként jelölik meg a kártyán, és az egyes pontokat egyenes vonalakkal kötik össze. A felső határ fölé kerülő pontok a minőség romlását, az alsó határ alatti adatok a javulást jelzik.

7. A mintavételezési eljárások

Közel azonos kimenetelű folyamatok esetében felvetődik annak lehetősége, hogy a teljes mennyiség végigvizsgálása helyett a sokaság meghatározott részét megvizsgálva vonjunk le következtetéseket a minőségre vonatkozóan. A legjellegzetesebb azonos kimenetelű folyamatok között említhetjük az ismétlődő szolgáltatásokat, a sorozatgyártást és a homogén anyagok termelését, vagy az azonos szempontok szerint megítélhető nagytömegű termékeket.

A részleges vizsgálat nemcsak gazdasági előnyök miatt vetődik fel, hanem a teljes sokaságnak csak valamekkora hányadát tudjuk megvizsgálni akkor is, ha a vizsgálat következtében a termék sérül, hisz ekkor a teljes tétel minőségromlását okozná az információszerzés. Növeli a módszer jelentőségét az a felismerés is, hogy a teljes tétel átvizsgálásával járó nagyobb biztonság sem 100%-os, hisz a vizsgálatok során elkövetett mérési és vizsgálati hibák számottevő mértékűek lehetnek. Ez alól csak néhány magas automatizáltságú vizsgálati eljárás tekinthető kivételnek.

A vizsgált termékek összessége az ún. tétel. A tétel statisztikai egységekből (eset, darab, alkatrész, termék) áll, melyeket együtt vizsgálunk és feltehetően homogének. Az elem maga a statisztikai egység, az elemek összessége a sokaság. A tétel egyfajta sokaság, de a tétel elemeinek különböző tulajdonságai is külön sokaságokat alkotnak.



12. ábra Az elem, sokaság és a minta összefüggése

A tétel egészének vagy nagy részének vizsgálata a legtöbb esetben túl sokba kerülne és homogénnek tekinthető sokaság esetén nem nyújtana arányosan több információt. Ezért csak a mintát, a tétel elkülönített részét vizsgáljuk.

A minta elnevezést az iparban sokszor az ömlesztett, cseppfolyós vagy gáznemű anyagokból vett részre alkalmazzák, ezért néha a vizsgálatra különválasztott részhalmozatot próbának is nevezik. A matematikai statisztikában inkább a minta kifejezést használják, mert a próba szónak más jelentése is van.

A vizsgált termékek hibái lehetnek:

- kritikus hibák (a termék nem használható)
- jelentős hibák (a használhatóság lényegesen csökken)
- lényegtelen hibák (a használhatóságot nem befolyásolja jelentősen)



13. ábra A vizsgált termékek hibái

Természetesen a fenti csoportokba való besorolást a követelmények határozzák meg. A minta nagysága és a mintavételezési módszer megválasztása is a vizsgált hiba súlyosságától függ. Kritikus hiba esetében minden darabot meg kell vizsgálni, nincs szükség statisztikai módszerekre.

A legtöbb terméket több jellemző (hiba) szerint vizsgáljuk, ezeket a legtöbbször függetlennek tekinthetjük. Ha egy darabot egy vagy több hiba egyaránt használhatatlanná tesz, célszerű a minősítéses ellenőrzést alkalmazni.

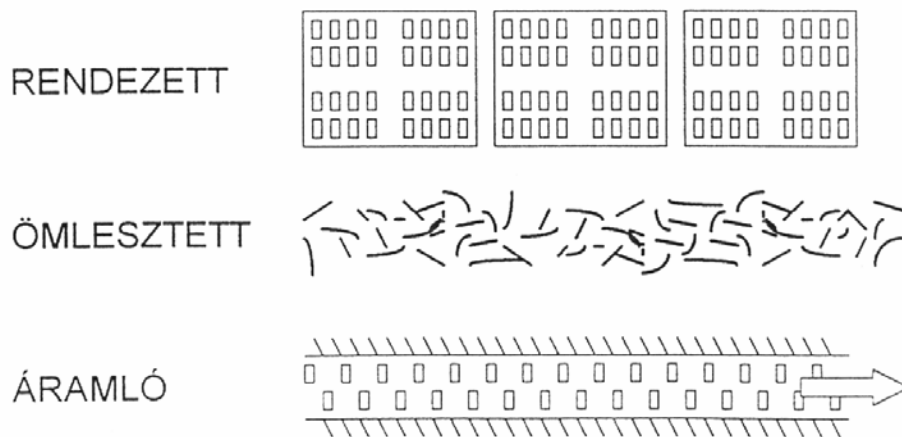
A termék sok tulajdonsága közül ki kell választanunk azt, amelyet vizsgálunk, amelynek meg kell felelnie a pontosan meghatározott követelményeknek. Ez a jellemző lehet mérhető vagy minősíthető (osztályokba sorolható). Ez a besorolás értelmezhető ipari hardver termékeken éppúgy, mint a feldolgozott anyagoknál, a szolgáltatások minősítésénél vagy szoftver jellegű termékeknél.

A mintavételezés alapján való döntés esetében biztosítani kell, hogy a tétel azonos elemei egyforma eséllyel kerüljenek a mintába. Ez gyakran meghatározza a mintavétel módszerét.

A tétel megjelenési formája (elhelyezkedése, hozzáférhetősége) alapvetően befolyásolja a mintavétel módját meghatározó mintavételi tervet. A vizsgált tétel megjelenési formája pl. a darabos termékek esetében lehet:

- rendezett (könnyű számozni, elkülöníteni, pl. kiserelt termékek),
- ömlesztett (nehéz elkülöníteni, sorszámolni, pl. csavarok),
- áramló (az elkészítés sorrendjében érkeznek pl. szalagon gyártva).

A rétegezett mintavétel akkor alkalmazandó, ha a tétel sokasága valamilyen szempontból nem tekinthető homogénnek. Ha például több gépen vagy több dolgozó készíti a tétel elemeit, a teljes sokaságot jobban reprezentálja a minta, ha annak megoszlását a különbözőképpen gyártott elemek között nem bízzuk a véletlenre. Ha eltér az egyes gépeken vagy az egyes dolgozók által készített darabok jellemzőinek megoszlása, az ún. keverékeloszlás jellemzőinek alapján kell a mintanagyságot felosztanunk.



14. ábra A rendezett, az ömlesztett és az áramló minta

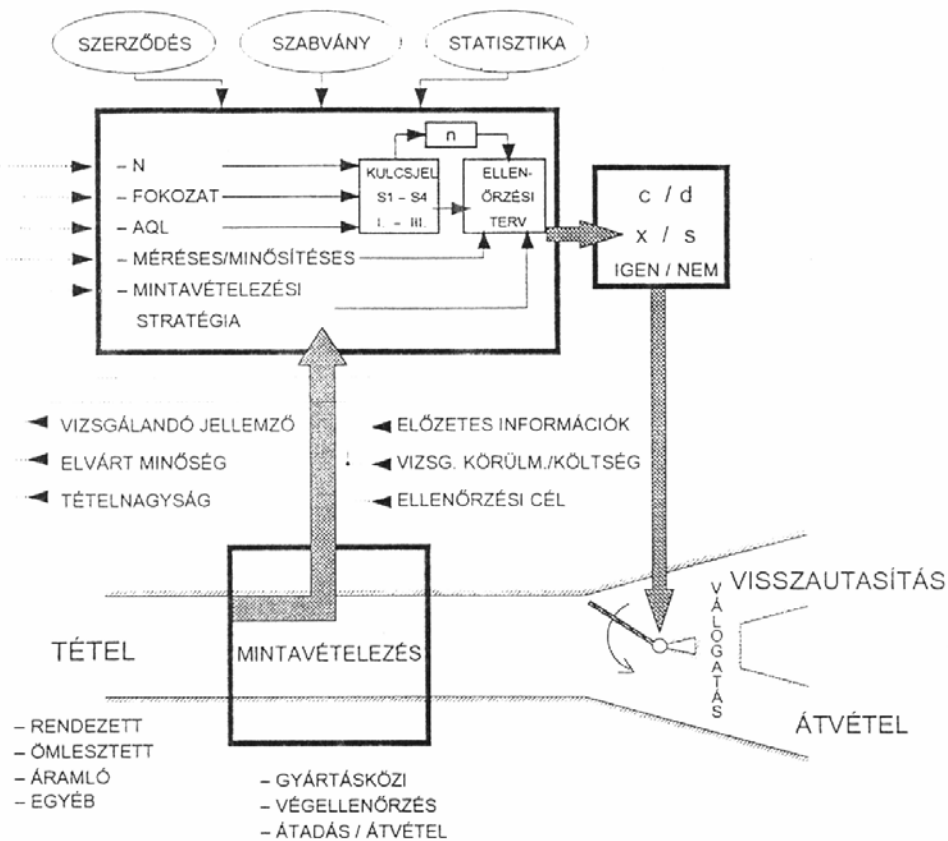
Ha a vizsgálandó, homogénnek tekinthető sokaság csoportokra van osztva, akkor általában először véletlenszerűen vagy reprezentatív módon választanak a csoportok közül. A kiválasztott csoportokból a fenti eljárások valamelyikével mintát veszünk, vagy a teljes csoportot megvizsgáljuk. Ez a kétszintű eljárás a csoportos mintavétel. Ha például a termék sok gépen készül, homogénnek tekinthető körülmények között, módunkban áll csak egyes, kiválasztott gépek által gyártott darabokat ellenőrizni. A fentiekben túl további mintavételi eljárásokat is alkalmazhatunk.

A mintaelemek függetlensége miatt a kivett mintaelemet vissza kellene tennünk a tételbe. Ez az ún. visszatevéses mintavétel nem változtatja a hibaszázalékot. Így elvileg egy darab többször is a mintába kerülhet, de a tétel nagyságához képest kis minta esetében ennek kicsi a valószínűsége. Gyakoribb a visszatevés nélküli mintavétel, melynél nem tesszük vissza a vizsgált elemet. Több információt ad, és a tételhez képest kis mintaszám esetében gyakorlatilag nem változtatja a hibaszázalékot.

A minta elkülönítésének fajtái: véletlen, rendszeres és szándékos mintavétel. A mintavétel módjának biztosítani kell az egyes minősítések statisztikai szempontból nézve független és reprezentatív jellegét. Ehhez a kísérleteket azonos körülmények között, egymástól függetlenül kell végezni. Véletlen mintavétel esetében a vizsgálandó darabot véletlenszerűen választjuk ki, ez kizárja a mintavevő szubjektív megítélését.

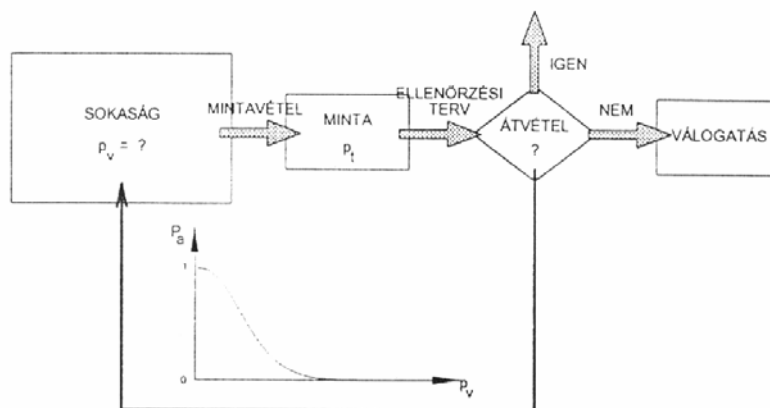
A vizsgálati rend kialakításának alapvető szempontja a tétel- és mintanagyság összefüggése és az ún. mintavételi terv megválasztása. A mintavételi terv a vizsgálandó elemek kiválasztási menetét, a minta nagyságát és a minták mérése vagy minősítése alapján a tétel minősítésének módját tartalmazza. A minőségügy területén az átadás-átvételi pontokon kiemelt jelentősége van annak, hogy a minta alapján döntsünk a tétel átvételéről vagy visszautasításáról, ezért ezzel a területtel külön is foglalkozunk.

Ezekben az esetekben egy mintavételi eljárás (terv) alapján a tétel meghatározott valószínűséggel megfelelőnek vagy nem megfelelőnek minősül, vagyis átvesszük vagy visszautasítjuk. E kétkimenetű döntés miatt az egyes mintavételi tervek statisztikailag is értékelhetők.



15. ábra A mintavételi tervek meghatározó tényezői

Az átvétel valószínűsége a tétel tényleges hibaszázalékának függvényében ábrázolható, vagyis meghatározható egy függvény, mely adott hibatartalom esetén megadja, hogy a mintavételi terv előírásait követve mekkora az esélye a tétel átvételének. Ez az ún. átvételi jelleggörbe (OC görbe, operation characteristic).



16. ábra A mintavételes vizsgálatok stratégiája

Az ideális természetesen az lenne, ha a mintavételezési terv az általunk határként kijelölt hibaszint felett a tételt mindig visszautasítaná, alatta pedig elfogadná (vagyis, hogy az OC görbe adott szinten ugrásfüggvényként viselkedjen), de ezt csak hibamentes vizsgálat mellett a teljes tétel bevizsgálásával érhetnénk el. Belátható, hogy a minta nagysága alapvető kérdés. A reprezentativitás biztosítása nem enged túl kis mintaméretet. Lényeges lehet azonban a vizsgálat költségessége és

időigénye is. A minta nagyságát meghatározhatjuk matematikai úton is, de alapvetően a döntés megbízhatósága és a kis költség közötti középutat kell megtalálnunk. Célszerű ún. szigorúsági fokozatokat alkalmazni. A gazdaságilag elfogadható minta aránya a tétel nagyságától is függ.

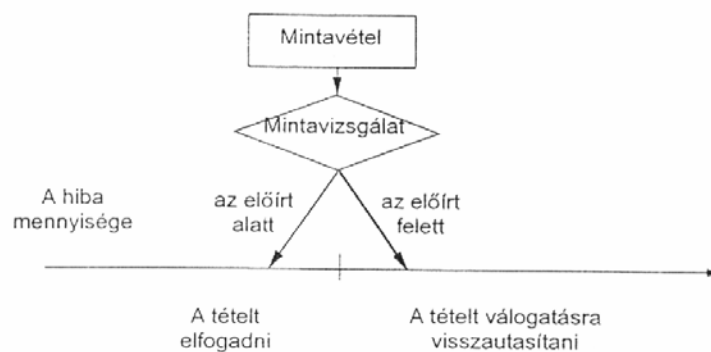
Mivel a mintavételi terv szerinti döntés statisztikai megalapozású, kétfajta hibát követhetünk el. Az elsőfajú hiba az, ha megfelelő tételeket visszautasítunk. A másodfajú hiba esetében a nem megfelelő tételt is elfogadjuk. A mintavételi terv kialakításának célja ezen két hibafajta valószínűségének egy adott érték alá szorítása.

A hatékonyságot növeli, ha minél több meglévő információt használunk fel. Ennek megfelelően folyamatos, többszöri szállítás esetén a korábbi tételek eredményeit lehet a szigorúsági fok meghatározásánál segítségül hívni. Folyamatos átadás esetén az eredményekről minőségi naplót vezetnek, és a korábbi vizsgálatok eredménye alapján a szigorúsági fokozatok közötti áttérésre pl. az alábbi szabályokat alkalmazhatják:

- normális -> szigorított: ha 5 egymást követő tételből 2 nem felel meg
- szigorított -> normális: ha 5 egymást követő tétel megfelel
- normális -> enyhített: ha 10 egymást követő tétel megfelel
- enyhített -> normális: ha az első tétel nem felel meg.

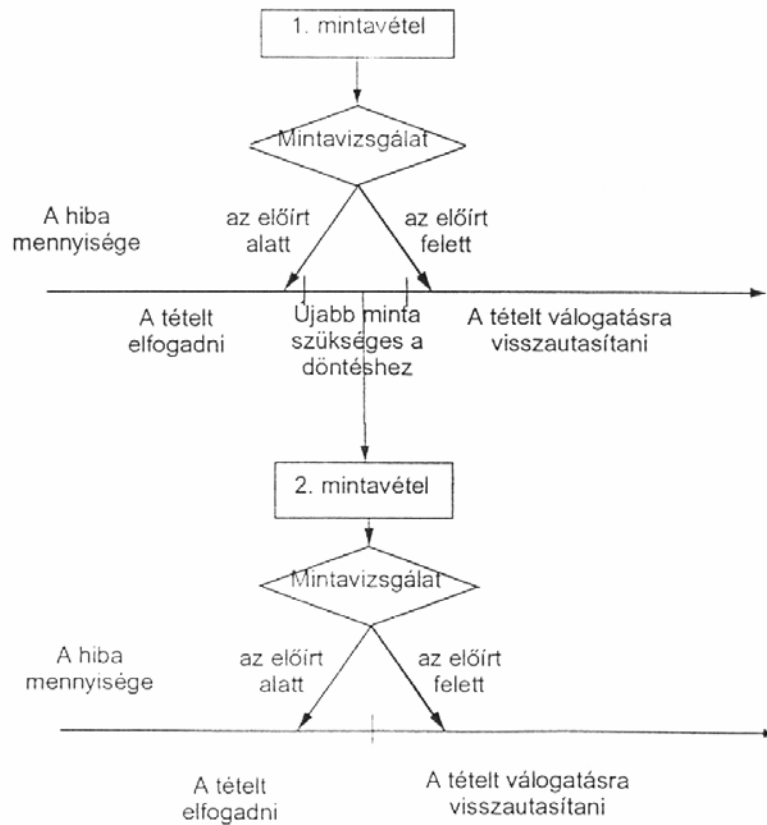
A mintavételezés stratégiáját a köztes információk felhasználásához éppúgy kapcsolhatjuk, mint a leginkább gazdaságos mintaméret meghatározásához. A mintavételi stratégiák a vizsgálandó elemek egy vagy többlépcsős kivételét és vizsgálatát foglalják magukban.

Az egyszeres mintavételi terv lényege, hogy a fentiek alapján meghatározott elemszámú mintát veszünk, majd ennek alapján döntünk.



17. ábra Az egyszeres mintavételi terv folyamatábrája

A két- és többszörös mintavételi terv elve: az első mintavétel kimenetelétől függően vagy végső döntésre jutunk, vagy egy további, nem feltétlen azonos elemszámú mintát veszünk.



18. ábra A két- és többszörös mintavételi tervek folyamatábrája

A kétszeres mintavételi tervek alkalmazása esetében az eljárás hasonló. A tétel az első minta alapján megfelelő, ha az abban talált hiba mértéke nem nagyobb egy előírt megengedhetőnél. Ha a hibaarány ennél nagyobb, de egy másik, ennél magasabb előírásnál kisebb, a második mintarészt is ki kell venni. A két mintarészben talált hibák száma együttesen sem lehet több a megengedhető hibaértéknél.

A kétlépcsős tervek alkalmazását bonyolultabb voltuk mellett az indokolja, hogy nagyszámú tétel minősítésénél a kétszeres mintavétel összes ellenőrzendő elemszámának várható értéke kisebb, mint az egyszeres mintavétel esetében.

A többlépcsős tervek elve azonos a kétlépcsős tervekével. Alkalmazásukkal tovább csökkenthető a megvizsgált elemek átlagos száma, de elvégzésük még bonyolultabb és több időt vesz igénybe.

Ha a minta egy elemének vizsgálata egyszerű, gazdaságos lehet a többfokozatú mintavételi terv. Használható ilyen esetben a szekvenciális mintavételi terv is, melyben a minta mérete előre nem kötött. Az egyes darabok vizsgálata után döntünk, hogy minősítjük-e a tételt vagy újabb mintaelemet veszünk-e ki.

8. Felhasznált irodalmak

TÜV Rheinland oktatási anyaga

Vetier András: Valószínűségszámítás TK. 1981.

Lukács Ottó: Matematikai statisztika MK. 1976.

Reimann J., Tóth J.: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika TK. 1985.

Kemény S.: Mérési eredmények kiértékelése Mérnöki Továbbképző Int. 1982.