MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

Professor Emeritus

1. Konferencia, Előadás

MŰSZAKI FIZIKA I
(Villamosságtan)

Elektromágneses terek

Villamos hálózatok

Elektromágneses térmodellek

függetlenek, külön-külön tárgyalhatók

1. Időben állandó elektromágneses terek

- **nyugvó töltések tere - elektrosztatika,**
  - statikus elektromos tér,
- **állandó áram elektromos tere,**
  - stacionárius áramlási tér,
- **állandó áram mágneses tere,**
  - stacionárius mágneses tér,

csatolt terek

2. Időben változó elektromágneses terek

- **időben lassan változó elektromágneses tér,**
  - örvényáram terek,
- **időben gyorsan változó elektromágneses tér,**
  - elektromágneses hullámok.

Villamos hálózatok

1. Rezisztív hálózatok

• **időben állandó áramú hálózatok**
  - alaptörvények,
  - számítási módszerek,
  - kétkapuk,
    - paraméterek,

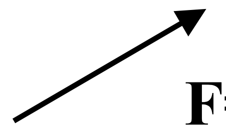
2. Dinamikus hálózatok

• **időben változó áramú hálózatok,**
  - dinamikus elemek karakterisztikái,
  - állapot változós leírás,
  - szinuszos gerjesztésre adott válasz,
  - hálózatok frekvencia függése.

Matematikai összefoglaló

Skaláris és vektormennyiségek

Skaláris mennyiség: jellemzője, nagysága, mértékegysége, (pl. 5A)

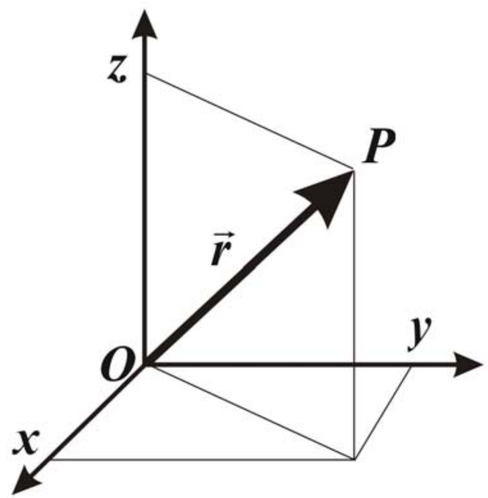
Vektormennyiség: jellemzője, nagysága, iránya, mértékegysége, pl.  **F=3N.**

Vektor

A *P* pont helye az ortogonális, Descartes koordináta rendszerben

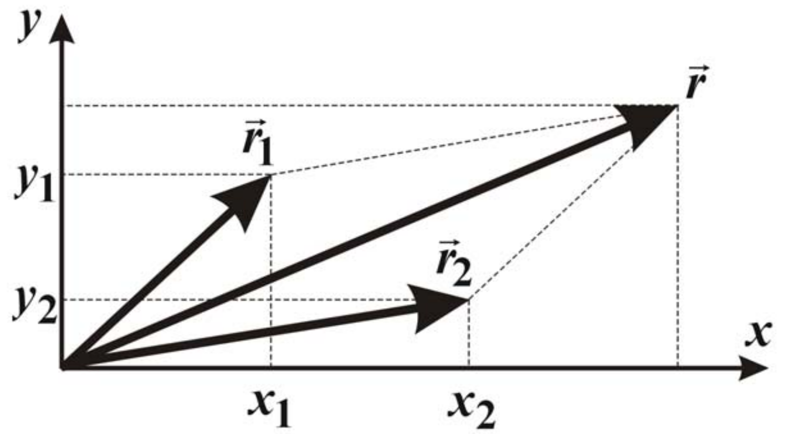
$$P(\vec{r}), \quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$x, y, z - \vec{r}$ **koordináta vetületei**



Két vektor összege

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$



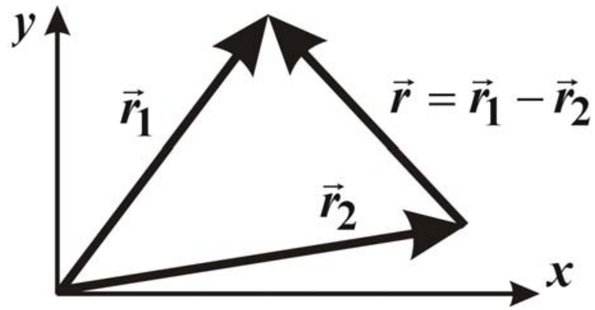
$$\vec{r}_1 = x_1\,\vec{e}_x + y_1\,\vec{e}_y + z_1\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_2 = x_2\,\vec{e}_x + y_2\,\vec{e}_y + z_2\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = \left(x_1 + x_2\right)\vec{e}_x + \left(y_1 + y_2\right)\vec{e}_y + \left(z_1 + z_2\right)\vec{e}_z$$

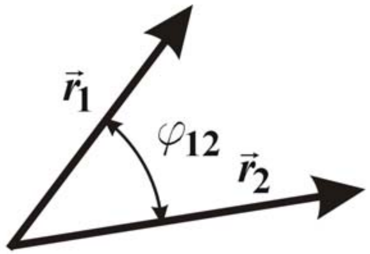
Két vektor különbsége

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

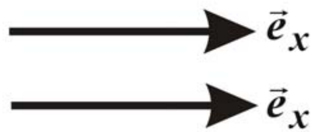


$$\vec{r} = \left(x_1 - x_2\right)\vec{e}_x + \left(y_1 - y_2\right)\vec{e}_y + \left(z_1 - z_2\right)\vec{e}_z$$

<u>Vektorok skaláris szorzata</u>=skaláris mennyiség

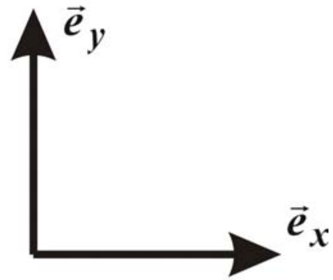


$$\boxed{r \overset{\Delta}{=} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \left|\vec{r}_1\right| \left|\vec{r}_2\right| \cos\varphi_{12}}$$



$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1,$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1.$$



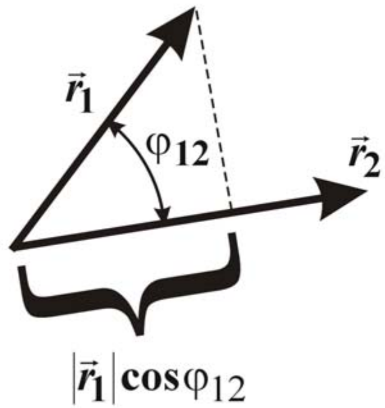
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0,$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0.$$

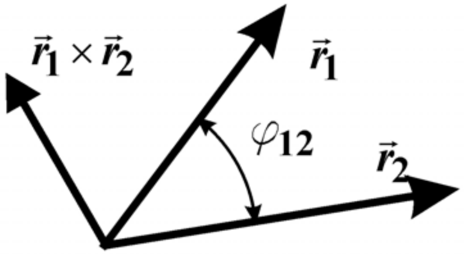
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \left(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z\right) \cdot \left(x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z\right)$$

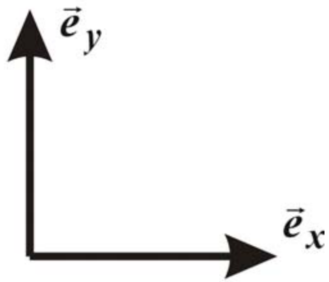
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 = \left|\vec{r}_2\right| \underbrace{\left|\vec{r}_1\right| \cos\varphi_{12}}_{\vec{r}_1 \text{ vetülete}}$$



Vektorok vektoriális szorzata=vektor mennyiség

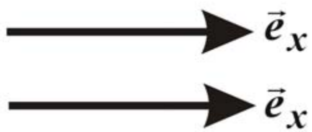




$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y.$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \overset{\Delta}{=} |\vec{r}_1||\vec{r}_2| \sin\varphi_{12}}$$

$$\boxed{\vec{r} \perp (\vec{r}_1, \vec{r}_2)}$$

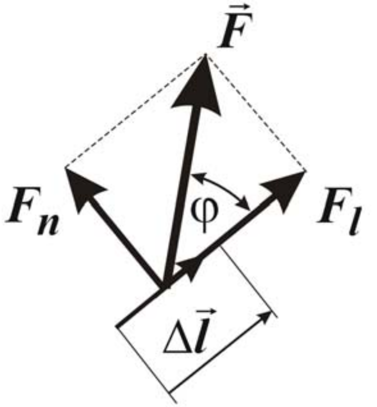


$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0,$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0.$$

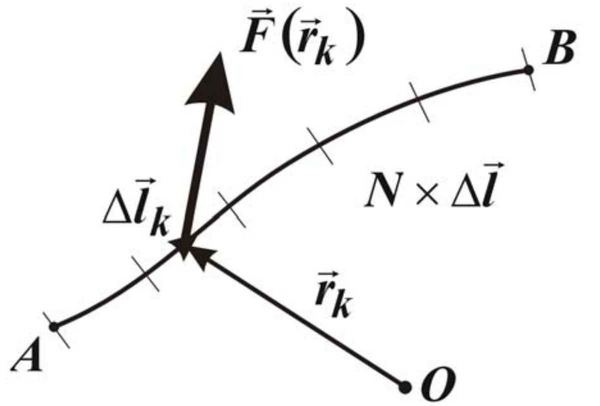
$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x (y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{e}_y (x_1 z_2 - z_1 x_2) + \vec{e}_z (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Vonalintegrál



$$\Delta W = F_l \Delta l$$
$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{l}$$
$$= F \cos\varphi \, dl$$



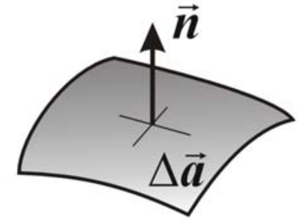
$$W_{AB} = \sum_{k=1}^{N} \Delta W_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_k) \cdot \Delta\vec{l}_k$$

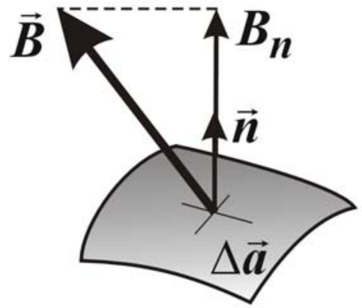
$$W_{AB} = \lim_{\Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_k) \cdot \Delta\vec{l}_k = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F \, dl \, \vec{e}_F \cdot \vec{e}_l = \int_A^B F \cos\varphi \, dl = \int_A^B F_l \, dl$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l} \longrightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \longrightarrow \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Felületi integrál



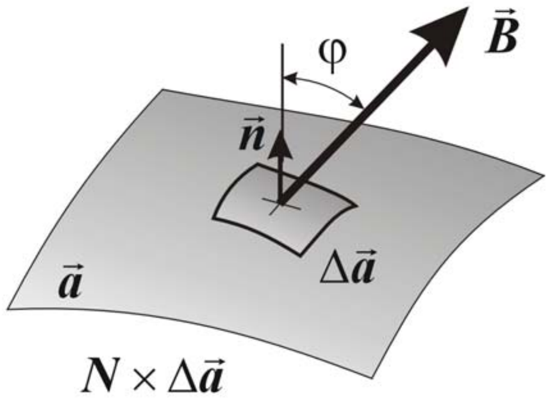


$$\vec{B}\cdot\vec{n}=B_n$$

$$\Delta\Psi=B_n\Delta a=\vec{B}\cdot\Delta\vec{a}$$

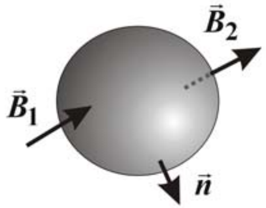
$$\Delta\vec{a}=\Delta a\,\vec{n}$$

$$\Psi=\sum_{k=1}^{N}\Delta\Psi_k=\sum_{k=1}^{N}\vec{B}_k\cdot\Delta\vec{a}_k$$



$$\Psi=\lim_{\Delta a_k\to 0}\sum_{k=1}^{N}\vec{B}_k\cdot\Delta\vec{a}_k=\int_a\vec{B}\cdot d\vec{a}=\int_a\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{a}$$

$$\int_a\vec{B}\cdot d\vec{a}=\int_a B\cos\varphi\,da=\int_a B_n\,da$$

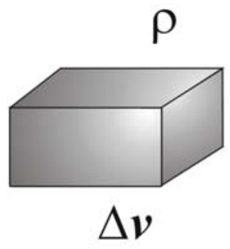


$$\int_a\vec{B}_1\cdot d\vec{a}=-\Psi_1 \qquad \vec{B}_1=\vec{B}_2$$

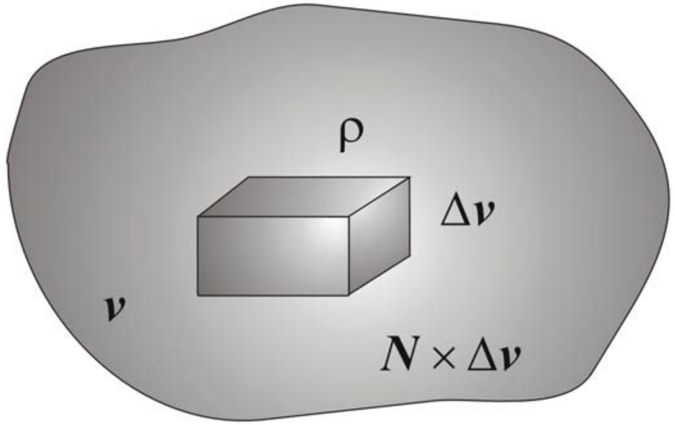
$$\oint_a\vec{B}\cdot d\vec{a}=0$$

$$\int_a\vec{B}_2\cdot d\vec{a}=\Psi_2 \qquad \Psi_1=\Psi_2$$

Térfogati integrál



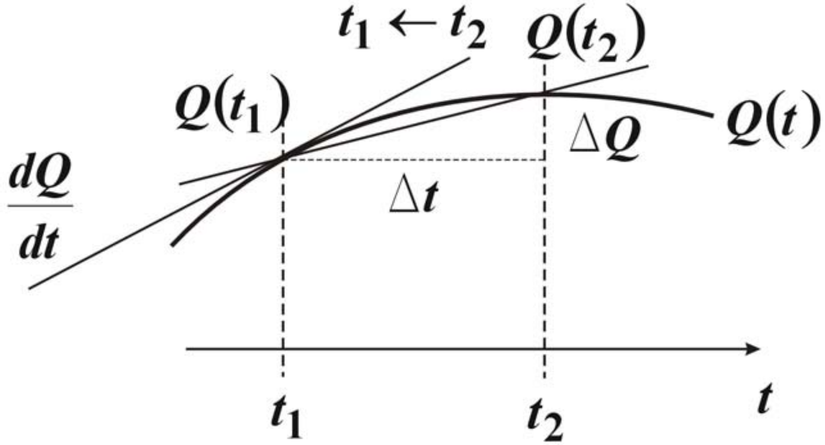
$$m = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \Delta v_k$$



$$\Delta m = \rho \, \Delta v$$

$$m = \lim_{\Delta v_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} \rho(\vec{r}_k) \Delta v_k = \int_v \rho(\vec{r}) \, dv$$

Időszerinti derivált



$$Q(t_1) = Q_1 \qquad Q(t_2) = Q_2$$

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

I. Statikus Elektromos tér

1. Elektrosztatikus tér forrásmennyisége

Elektromos töltés

anyagi természetű

anyagmegmaradás ↔ töltés megmaradás

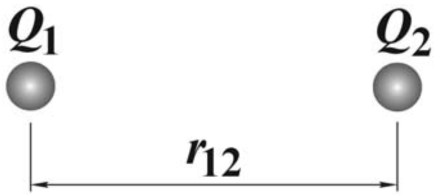
elektron $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$,

$$Q = 1\,pC = 10^{-12}\,C \rightarrow N = \frac{10^{-12}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{7}\ \text{részecske},$$

kvantált, — statisztikus törvényekkel írható le

mértékegysége $[Q] = 1\mathrm{C} = 1\mathrm{As} = 10^{3}\,\mathrm{mC} = 10^{6}\,\mu\mathrm{C} = 10^{9}\,\mathrm{nC} = 10^{12}\,\mathrm{pC}$

jelenléte $\longrightarrow$ erőhatás



$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{|Q_1||Q_2|}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_{12}^2}}$$

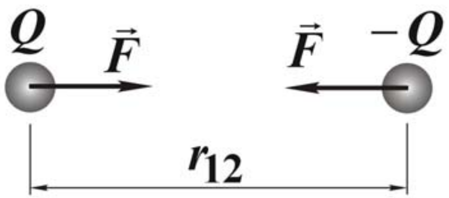
Coulomb törvény

az anyag permittivitása $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

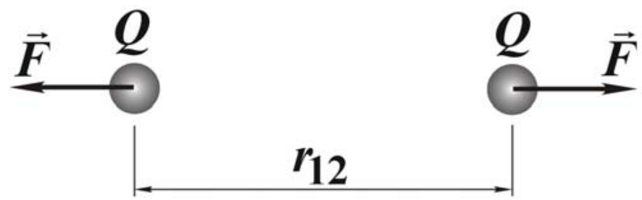
relatív permittivitás ε_r, **levegőben** $\varepsilon_r = 1$

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{4\pi 9}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}}$$

— a vákuum permittivitása



vonzóerő



taszító erő

Töltésmodellek

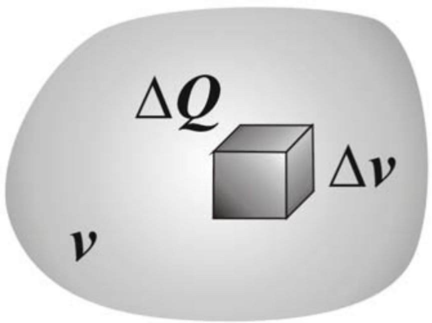
(a) Pontszerű töltés

jelölése: Q 

$Q,\ Q_0$ — **időben állandó**

$Q(t)$ — **időben változó**

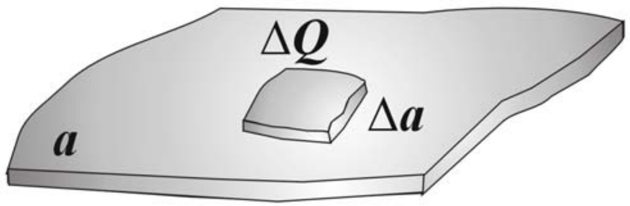
(b) Térfogati töltéssűrűség



$$\boxed{\rho(\vec{r},t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}, \quad [\rho] = 1\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}}$$

A *v* térfogat töltése: $Q(t) = \int_v \rho(\vec{r},t)\,dv$

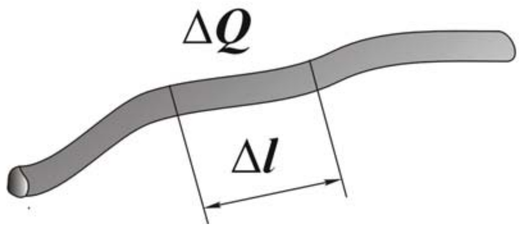
(c) felületi töltéssűrűség



$$\boxed{\sigma(\vec{r},t) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta a}, \quad [\sigma] = 1\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}}$$

Az *a* felület töltése: $Q(t) = \int_a \sigma(\vec{r},t)\,da$

(d) Vonalmenti töltéssűrűség

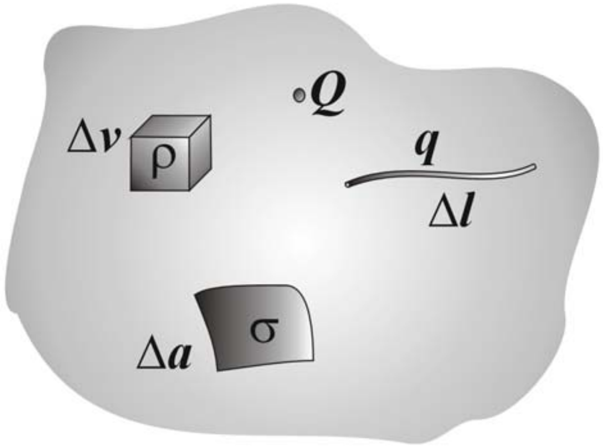


$$q(\vec{r},t) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad [q] = 1\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$$

Az *l* hosszúságú szakasz töltése:

$$Q(t) = \int_l q(\vec{r},t)\,dl$$

(e) A *v* térfogat össztöltése

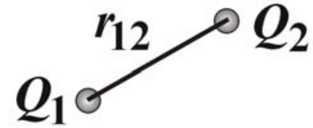


$$Q(t) = \int_v \rho(\vec{r},t)\,dv + \int_a \sigma(\vec{r},t)\,da + \int_l q(\vec{r},t)\,dl + \sum_{k=1}^{N} Q_k$$

2. Statikus elektromos tér intenzitása

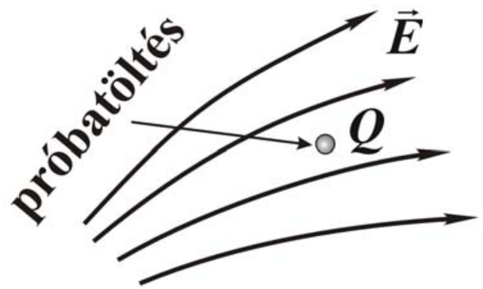
Forrása – elektromos töltés, $Q, \rho(\vec{r})$ (nincs időbeli változás)

Jelenléte – erőhatáson keresztül, Coulomb törvény



$$\left|\vec{F}\right| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\, r_{12}^2}$$

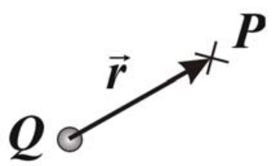
(a) Az elektromos térerősség vektor, $\vec{E}(\vec{r})$



$$\vec{F} = Q\,\vec{E},$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \quad [E] = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}},}$$

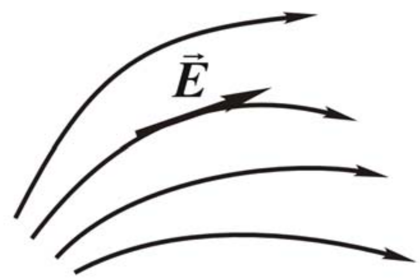
egységnyi töltésre ható erő



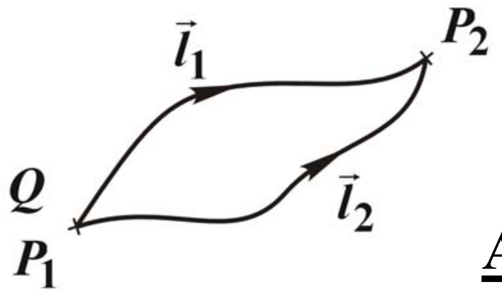
$$\vec{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left|\vec{r}\right|^2}\vec{e}_r$$

Szemléltetése

elektromos erővonalakkal



(b) Az elektromos feszültség és a potenciál



$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = QU_{12}$$

A feszültség a P_1, P_2 pontok között

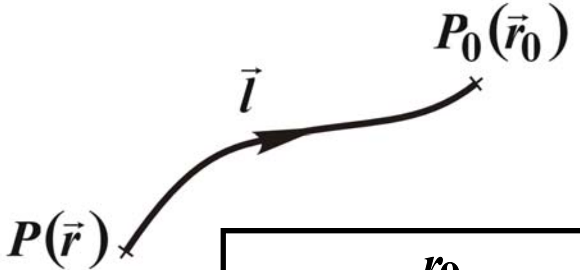
$$\boxed{U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad [U_{12}] = 1\text{V}.}$$

Speciális eset

$$\int_{\substack{P_1 \\ (l_1)}}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{P_1 \\ (l_2)}}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\substack{P_2 \\ (l_2)}}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \qquad \int_{\substack{P_1 \\ (l_1)}}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\substack{P_2 \\ (l_2)}}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

A potenciál, $W(P_0)=W(\vec{r}_0)=0$ **nulla potenciális energia szintű pont**

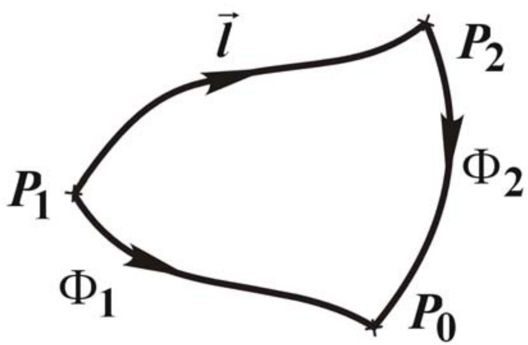


$$W(P,P_0)=Q\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=Q\varPhi(\vec{r})$$

$$\boxed{\varPhi(\vec{r})=\int_r^{r_0}\vec{E}\cdot d\vec{l},}$$

elektromos skalárpotenciál, ha a P_0 pontban $\varPhi(\vec{r}_0)=0$

A feszültség és a potenciál kapcsolata



$$\varPhi_1=\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l},\qquad \varPhi_2=\int_{P_2}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l},$$

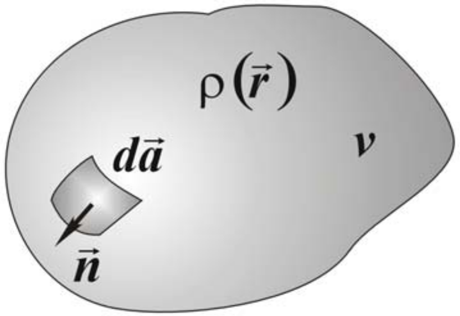
$$U_{12}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{P_0}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U_{12}=\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_{P_2}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l},\qquad \boxed{U_{12}=\varPhi_1-\varPhi_2}$$

3. A statikus elektromos tér gerjesztettsége

Tapasztalati törvény – lineáris, izotrop anyag

(a) Az elektrosztatika Gauss tétele $\oint_a \vec{E} \cdot d\vec{a} = \dfrac{Q}{\varepsilon}$, **ha** $\varepsilon =$ **állandó**



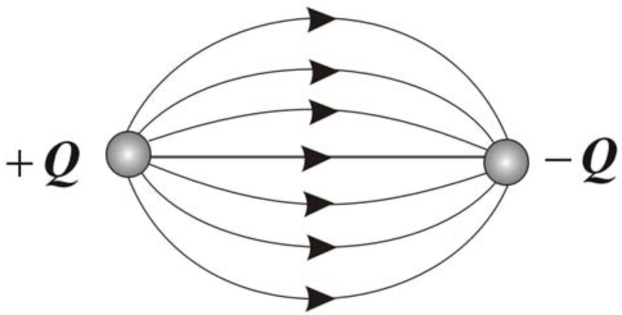
$$\oint_a \varepsilon\, \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q = \int_v \rho(\vec{r})\, dv,$$

$$\boxed{\oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_v \rho(\vec{r})\, dv}$$

(b) Az eltolási vektor

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\, \vec{E}, \quad [D] = 1\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}}$$

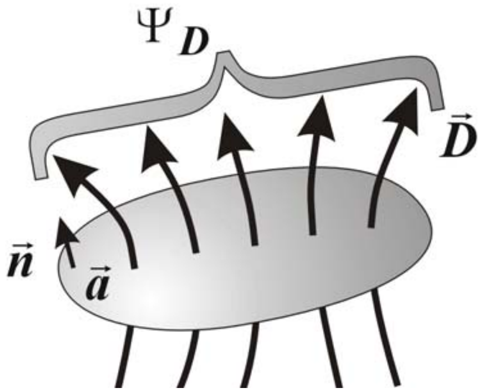
az elektromos tér forrása a töltés



(c) Az elektromos fluxus

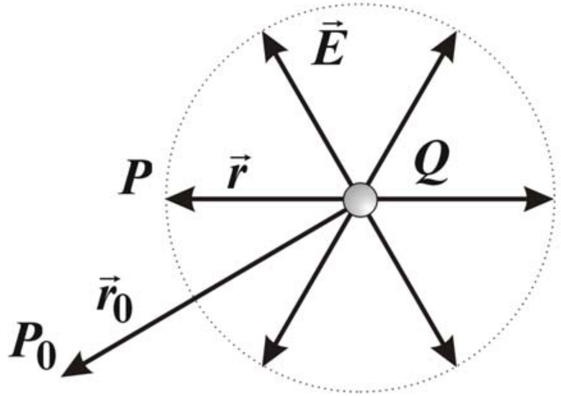
$$\Psi_D = \int_a \vec{D} \cdot d\vec{a},$$

$$[\Psi_D] = 1\,\mathrm{As}$$



4. Egyszerű töltéselrendezések tere és potenciálja

(1) A pontszerű töltés elektromos tere, (gömbszimmetrikus a tér)



Elektrosztatika Gauss tétele *r* sugarú gömb felületre

$$\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int_v \rho\, dv$$

a gömb felülete

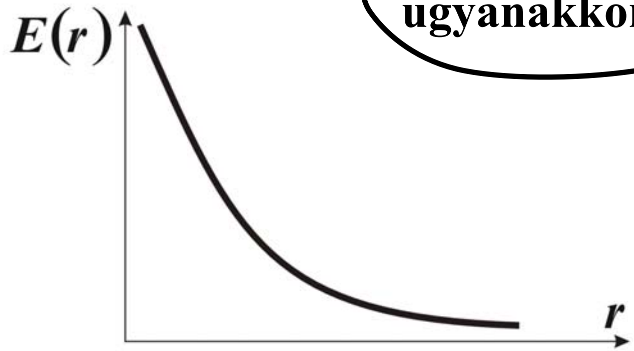
$$\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = \oint_a D\, da = D\oint_a da = D4r^2\pi = Q$$

$\vec{n}\,\|\,\vec{D}$

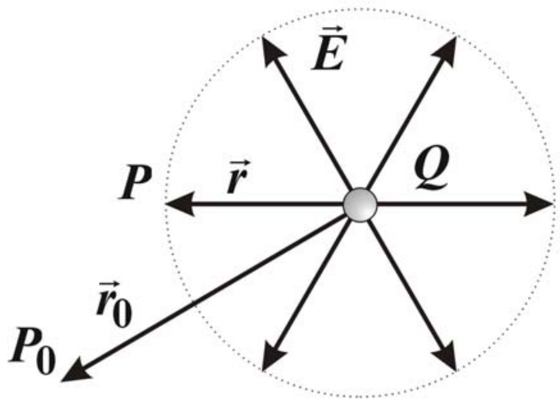
***D* a töltéstől állandó távolságban ugyanakkora**

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}}$$



A pontszerű töltés potenciál eloszlása

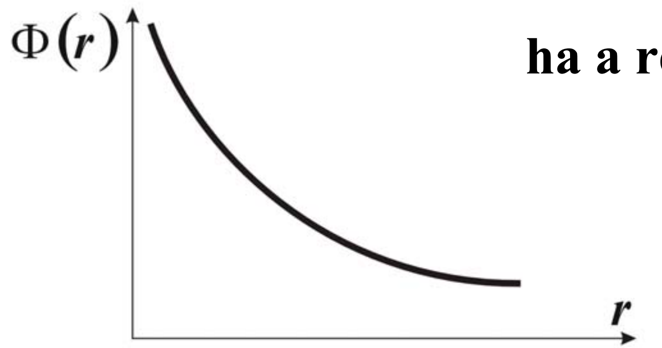


$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$$

ha a referencia pont a a P_0 pontban van

$$\vec{E}\parallel\vec{r}$$

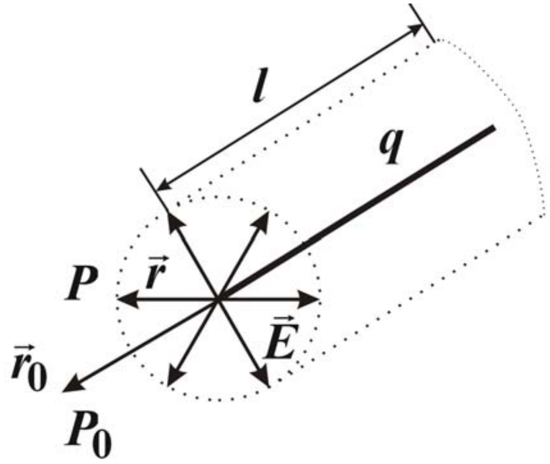
$$\Phi(r)=\int_{P}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r}^{r_0}E\,dr=\int_{r}^{r_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon\,r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r}^{r_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right]$$



ha a referencia pont a végtelenben van, $r_0\to\infty$

$$\boxed{\Phi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}}$$

<u>(2) A vonalszerű töltés elektromos tere,</u> (hengerszimmetrikus a tér)



Elektrosztatika Gauss tétele *r* sugarú henger felületre

$$\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int_v \rho\, dv$$

az *l* hosszúságú henger felülete

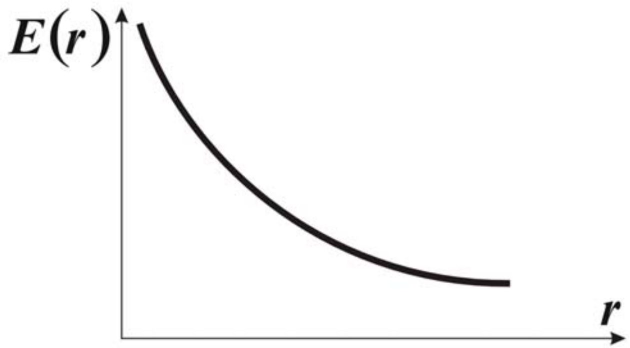
$$\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = \oint_a D\, da = D\oint_a da = D2\pi r l = ql$$

$\vec{n} \parallel \vec{D}$

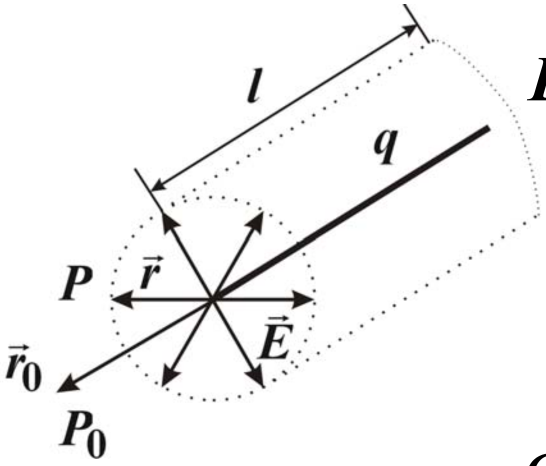
***D* a töltéstől állandó távolságban ugyanakkora**

$$D(r) = \frac{q}{2\pi\, r}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}}$$



A vonalszerű töltés potenciál eloszlása



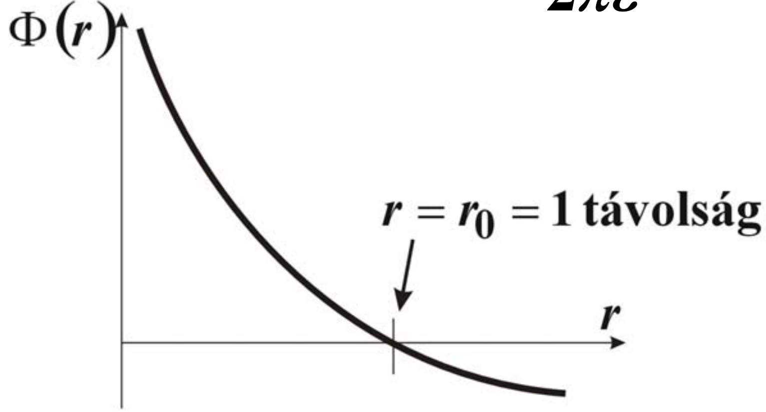
$$E(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

ha a referencia pont a P_0 pontban van,

$$\vec{E}\parallel\vec{r}$$

$$\Phi(r)=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{r_0}E\,dr=\int_r^{r_0}\frac{q}{2\pi\varepsilon r}\,dr=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left[\ln r\right]_r^{r_0}$$

$$\Phi(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left[\ln r_0-\ln r\right]=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_0}{r}$$



ha a referencia pont helye <u>**egységnyi távolságra**</u> **van a vonaltöltéstől,**

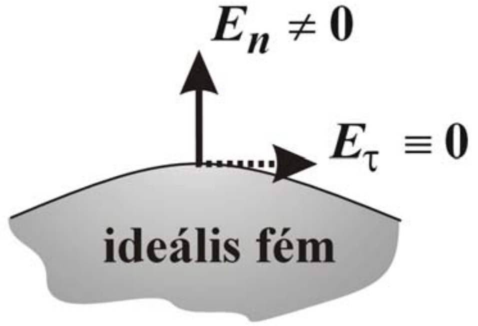
$$r_0=1$$

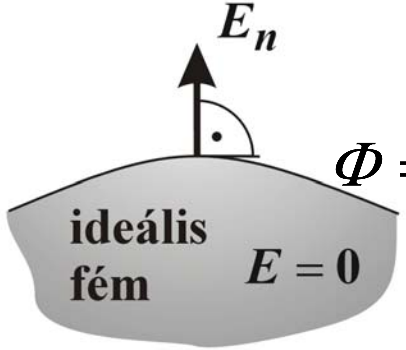
$$\boxed{\Phi(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}}$$

5. Anyag jelenléte elektrosztatikus térben

(A) Vezetők, szigetelők

(a) Ideális fém, **szabad elektronok elmozdulnak, *dW*=0,**

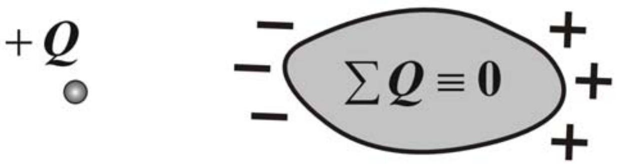




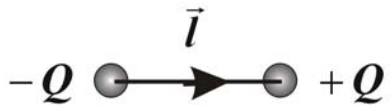
$\Phi = \text{áll}$

ekvipotenciális felület

(b) Influencia, töltésmegosztás



modellezése dipólussal

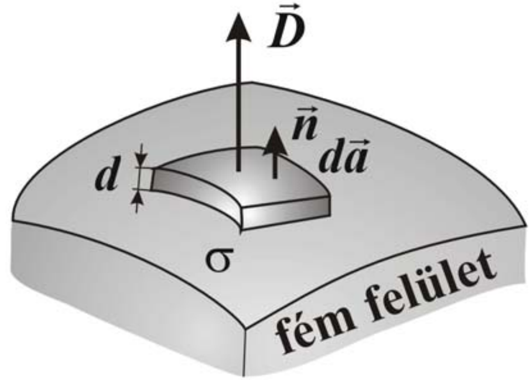


dipólus nyomaték $\boxed{\vec{p} = Q\vec{l}}$

(c) felületi töltéssűrűség

és az eltolási vektor kapcsolata

$$\oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \sum Q$$

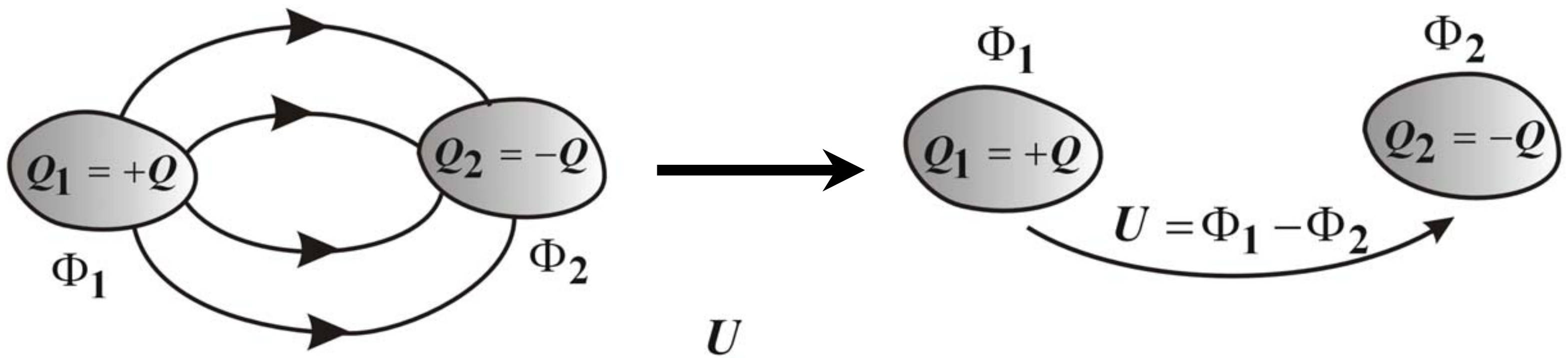


$$d \to 0$$

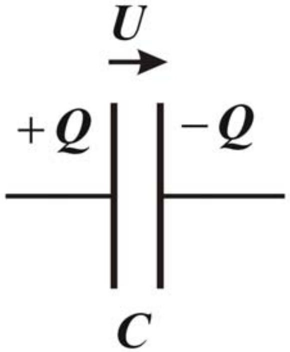
$$D_n \, da = \sigma \, da$$

$$\boxed{|D_n| = \sigma}$$

(d) Kondenzátor, kapacitás



Hálózati modell

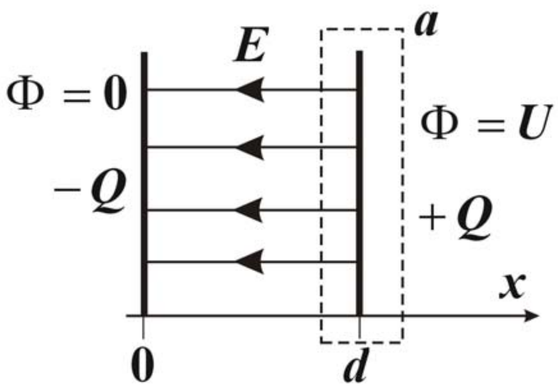


$$\boxed{C = \frac{Q}{U}, \quad [C] = 1\,\frac{\text{As}}{\text{V}} = 1\text{F}}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint\limits_a \vec{D}\cdot d\vec{a}}{\int\limits_l \vec{E}\cdot d\vec{l}} = \frac{\oint\limits_a \varepsilon\,\vec{E}\cdot d\vec{a}}{\int\limits_l \vec{E}\cdot d\vec{l}} = \varepsilon\,K$$

a kapacitás anyagállandó és geometria függő

(e) Síkkondenzátor   A szórt teret elhanyagolva



$$Q = \oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint_a \varepsilon\, \vec{E} \cdot d\vec{a} = \varepsilon \oint_a E\, da = \varepsilon\, E\, a$$

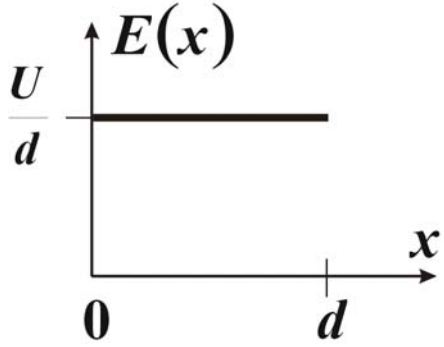
$$\varepsilon = \text{áll},\quad \vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\mathbf{a}}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon\, a}$$

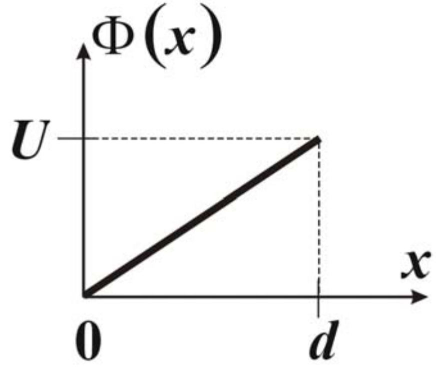
Ha $\Phi(x=0) = 0,\quad \Phi(x) = \int_x^0 -E\, dx = -\frac{Q}{\varepsilon\, a}(-x) = \frac{Q}{\varepsilon\, a} x = Ex$

$$\Phi(x=d) = U = E\, d = \frac{Q}{\varepsilon\, a} d, \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon\, a}{d}$$

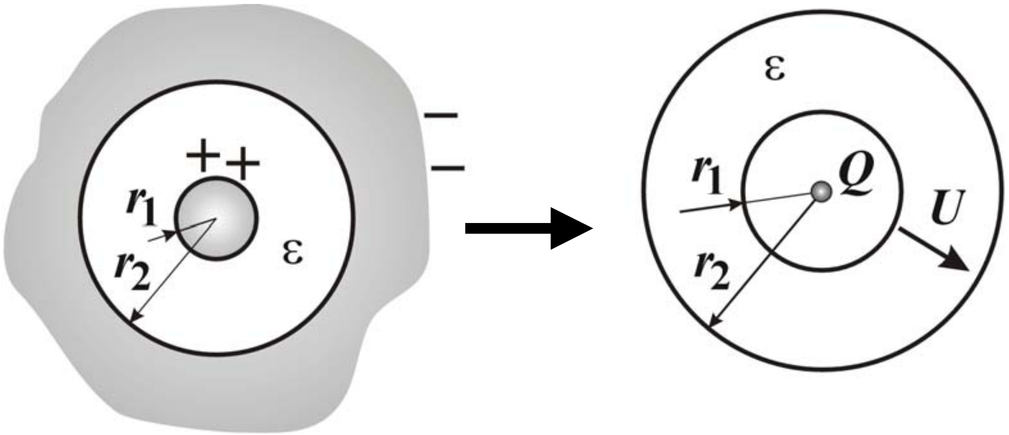
$$\boxed{E = \frac{U}{d},}$$



$$\boxed{\Phi(x) = \frac{U}{d} x}$$



(f) Gömbkondenzátor



A pontszerű töltés potenciálja

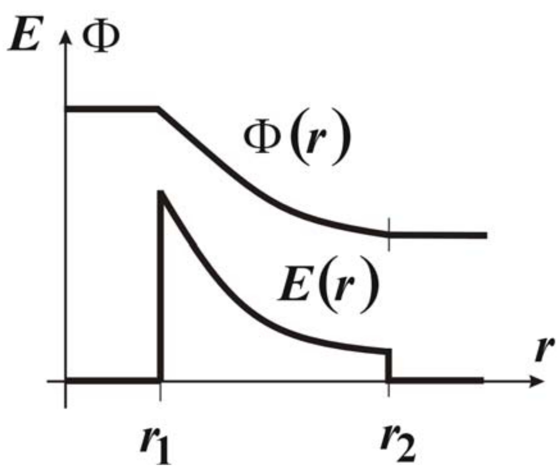
$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

Φ=áll gömbfelület fém elektródával helyettesítve

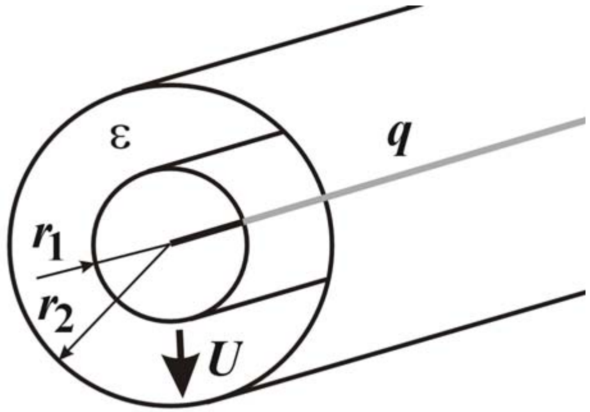
$$U = \Phi(r_1) - \Phi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$\Phi(r) = \frac{U}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r}, \quad r_1 \le r \le r_2$$

$$E(r) = \frac{U}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r^2}, \quad r_1 \le r \le r_2$$



(g) Hengerkondenzátor



vonaltöltés, Φ=áll koncentrikus hengerek,

a felületi töltéssűrűség vonaltöltéssel helyettesítve

$$\text{Ha}\ \ \Phi(r_2)=0,\quad U=\Phi(r_1)-\Phi(r_2)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln(r_2/r_1)}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon}=\frac{U}{\ln(r_2/r_1)},$$

$$\Phi(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r}=\frac{U}{\ln(r_2/r_1)}\ln\frac{r_2}{r},\quad r_1\le r\le r_2$$

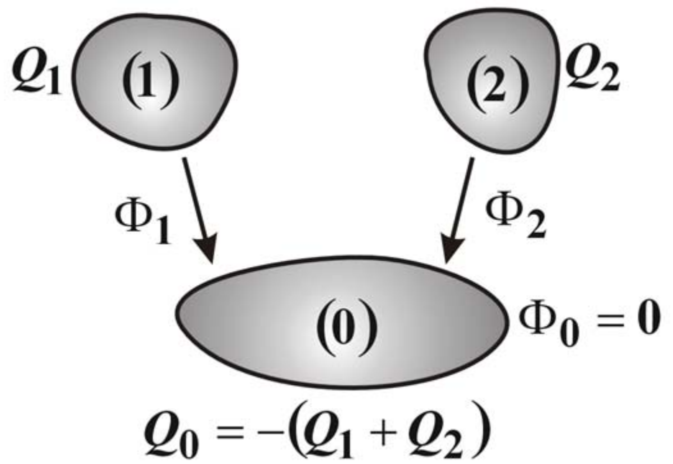
$$E(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}=\frac{U}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r},\quad r_1\le r\le r_2$$

(h) Elektróda rendszerek, részkapacitások

többb mint két elektróda, $\sum Q = 0$

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2$$

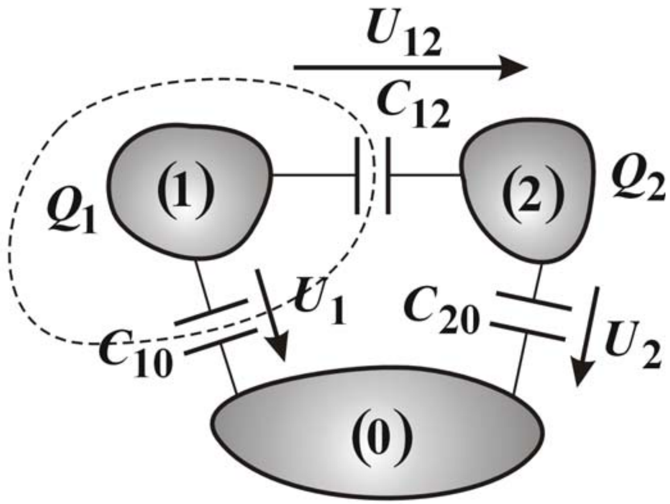
$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$



a potenciál a töltés, a permittivitás és a geometria függvénye

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 \pm c_{12}\Phi_1$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 \pm c_{21}\Phi_2$$



$$Q_1 = (c_{11} + c_{12})\Phi_1 - c_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

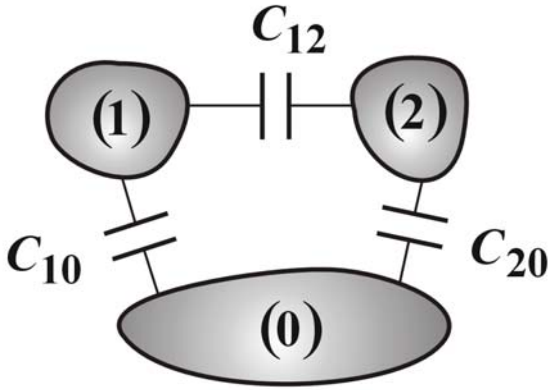
$$Q_2 = -c_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + (c_{22} + c_{21})\Phi_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= C_{10}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) \\ Q_2 &= C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{20}\Phi_2 \end{aligned}}$$

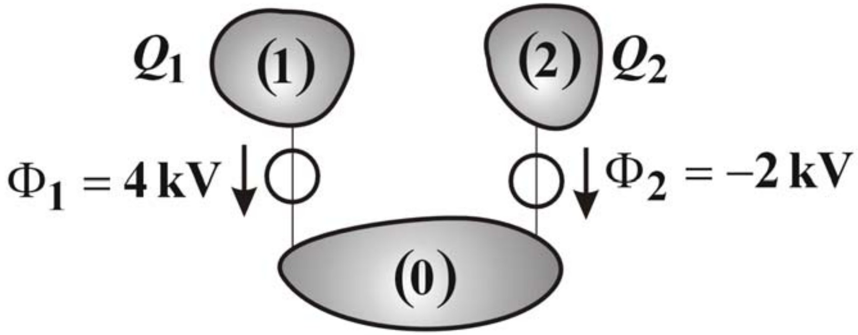
homogén, izotrop anyag $\quad C_{12} = C_{21}$

(i) Illusztrációs példa

$$C_{10} = 0{,}2\,\mu\text{F},\quad C_{20} = 0{,}1\,\mu\text{F},\quad C_{12} = 2\,\mu\text{F}$$



(a) eset

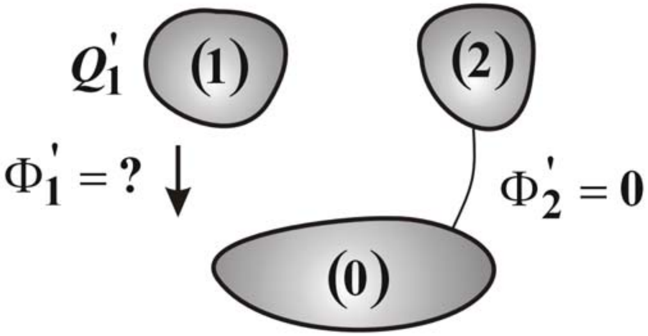


Az elektródákra felvitt töltés

$$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) = 12{,}8\,\text{mC}$$

(b) eset

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{20}\Phi_2 = -12{,}2\,\text{mC}$$



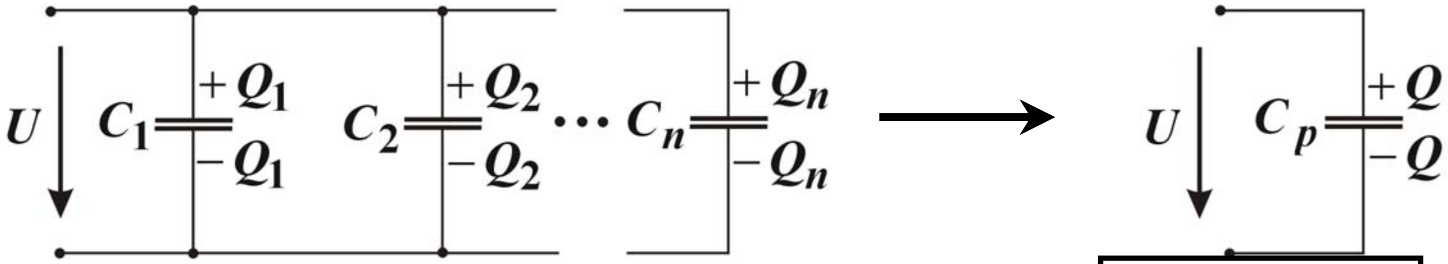
Az (1) elektróda töltése változatlan marad

$$Q_1 = Q_1' = (C_{10} + C_{12})\Phi_1'$$

$$\Phi_1' = \frac{Q_1'}{C_{10} + C_{12}} = 5{,}5455\,\text{kV}.$$

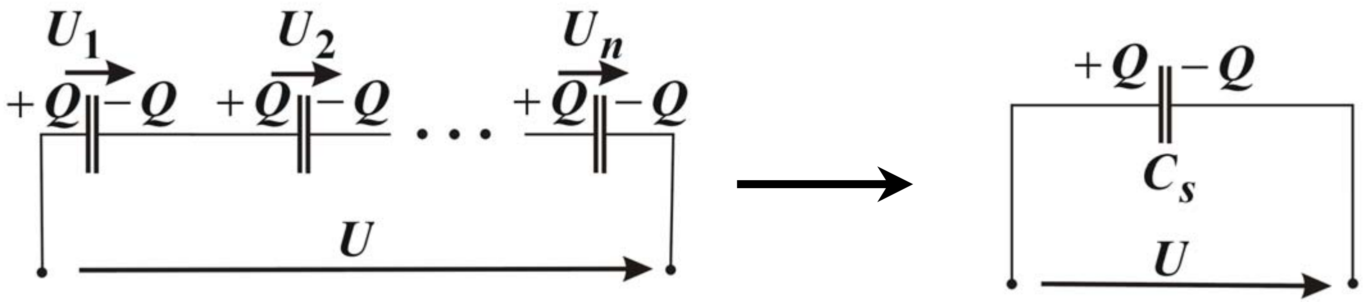
(j) Kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolása

Párhuzamos kapcsolás



$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \sum_{k=1}^{n} C_k U = U \sum_{k=1}^{n} C_k = U C_p, \quad \boxed{C_p = \sum_{k=1}^{n} C_k}$$

Soros kapcsolás

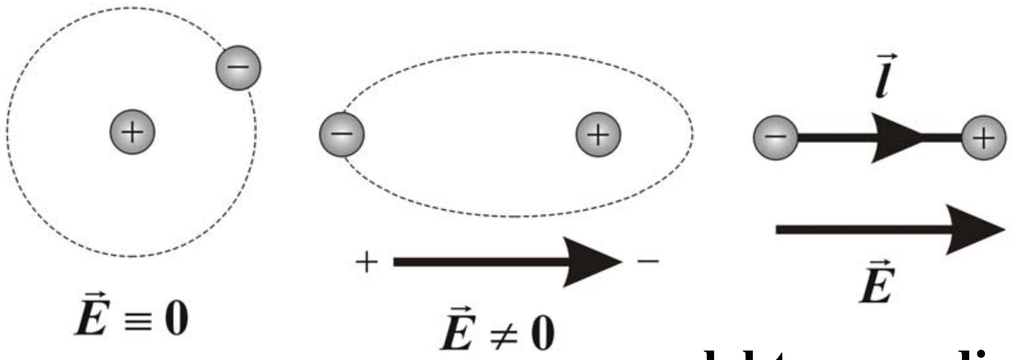


$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q}{C_k} = Q \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} = \frac{Q}{C_s}, \quad \boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}}$$

(B) Szigetelők, dielektrikumok, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$\varepsilon -$ permittivitás

Mikroszkopikus modell - atom



erőhatás

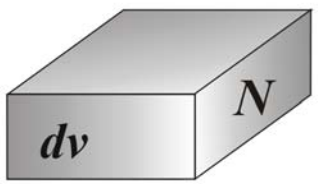
elektromos dipólus

$$\vec{p} = Q\,\vec{l} = \alpha\,\vec{E}$$

dipólus momentum

$\alpha -$ kölcsönhatási együttható

Makroszkopikus modell N- dipólus



$$\vec{p}_i, \quad i = 1,2,\cdots,N, \quad \vec{p}_i \approx \vec{p}_j, \quad \vec{p}_i = \alpha_i \vec{E} \approx \alpha\,\vec{E},$$

Dipólus momentum sűrűség=elektromos polarizáció vektora

$$\vec{P} = \lim_{dv \to 0} \frac{1}{dv} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cong \frac{N\,\vec{p}_i}{dv} \cong \frac{N}{dv} \alpha\,\vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E},$$

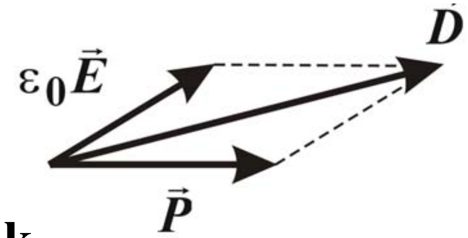
$n_e -$ dipólus sűrűség

$\kappa -$ dielektromos szuszceptibilitás

Elektromos polarizáció vektora $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \, \vec{E}}$

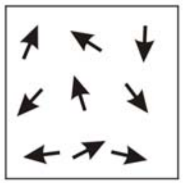
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \kappa, \quad \varepsilon_r > 1,$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E},} \qquad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



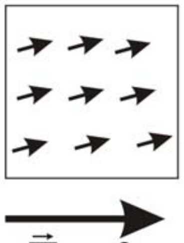
Tipikus anyagok

(i) Nem poláros anyagok



$\vec{E} \equiv 0,$

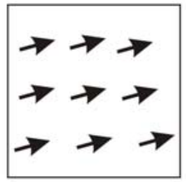
$\vec{P} \equiv 0,$



$\vec{E} \neq 0,$

$\vec{P} \neq 0,$

(ii) Poláros anyagok

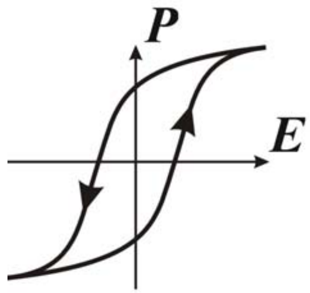


$\vec{E} = 0,$

$\vec{P} \neq 0,$

anyag	ε_r
levegő	1
talaj	~ 3-8
félvezetők	~ 12-16
víz	~ 80

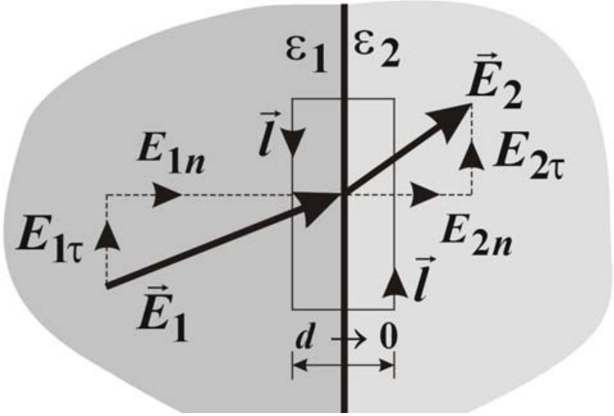
(iii) Ferroelektromos anyagok (hiszterézissel)



6. Folytonossági feltételek

-két szigetelőanyag határfelületén

(a) Az $\vec{E}$ elektromos térerősség viselkedése közeghatáron



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

$$-E_{1\tau} l + E_{2\tau} l + E \cancel{d} = 0$$

$$d \to 0$$

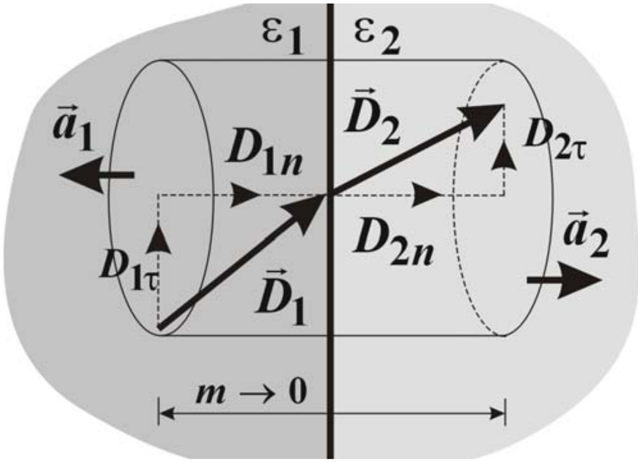
$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

a határfelületen az *E* elektromos térerősség tangenciális komponense folytonos,

$$\boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

a *D* eltolási vektor tangenciális komponensei a permittivitások arányában ugrásszerűen változik

(b) A $\vec{D}$ eltolási vektor viselkedése közeghatáron



ha $m \to 0,\ \ a_1 = a_2 = a,$

$$\oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_v \rho\, dv,$$

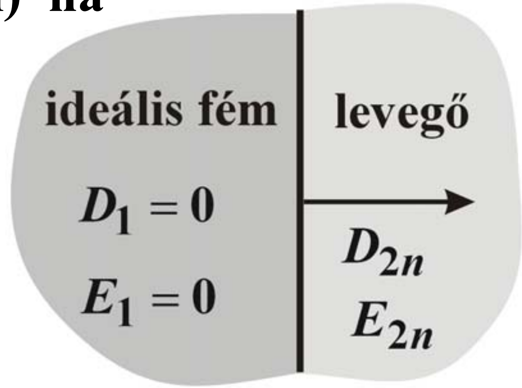
$$-D_{1n}a + D_{2n}a + \cancel{D_n a_{palást}}_{m \to 0} = \sigma\, a$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma,}$$

(i) ha $\sigma = 0$, $\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$ ha a határfelületen a felületi töltésűrűség nulla a D eltolási vektor normális komponense folytonos,

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

(ii) ha

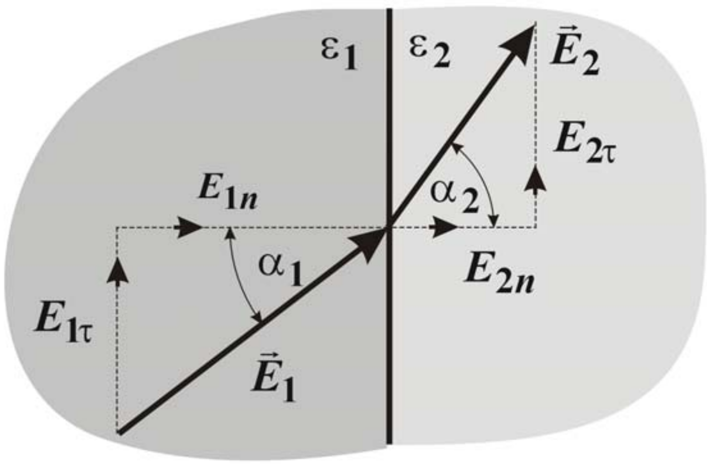


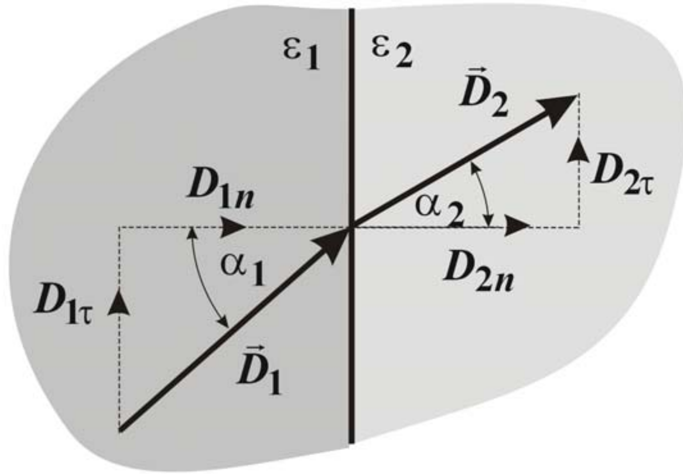
$$D_{2n} = \sigma$$

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

ideális fém felületen a felületi töltéssűrűség megegyezik az eltolási vektor normális komponensével

(c) Töréstörvények





$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} \qquad\qquad D_{1n} = D_{2n} \qquad D_{2\tau} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1\tau}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}\frac{E_{2n}}{E_{2\tau}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_1}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

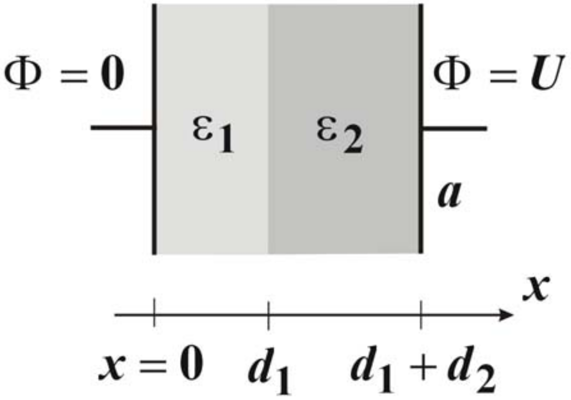
$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}\frac{D_{2n}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1 E_{1\tau}}{\varepsilon_2 E_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

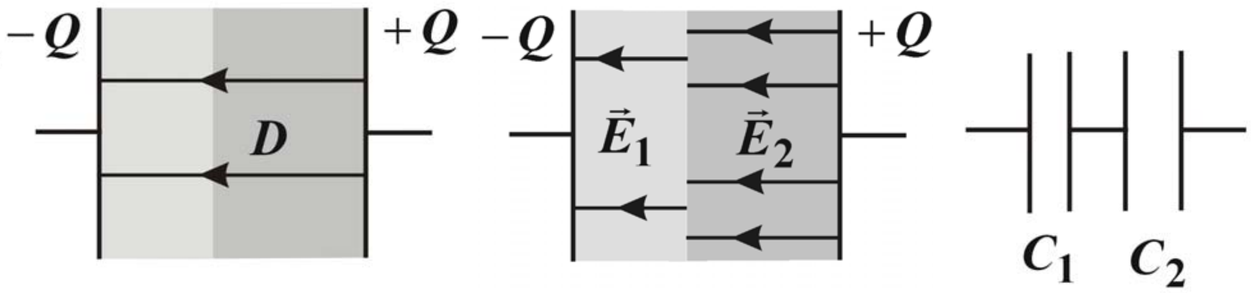
ha $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2, \rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1 \gg \mathrm{tg}\,\alpha_2$

(optikai hullámvezetők)

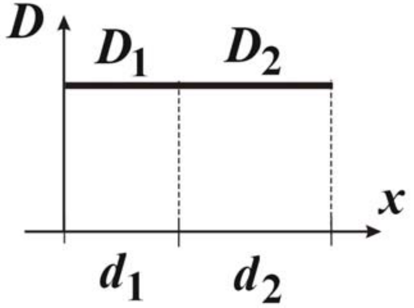
(d) Következmények

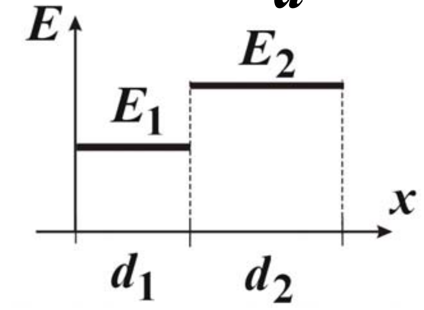
(i) Keresztirányú rétegezés $\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \quad D_{1n} = D_{2n}$





$$\sigma = \frac{Q}{a} = D_1 = D_2 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1$$

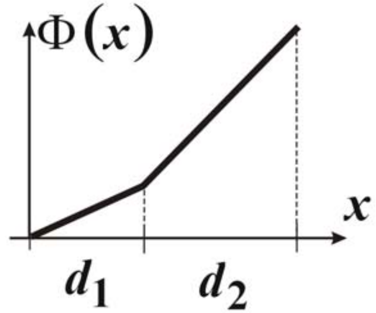




$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_1 (d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2)$$

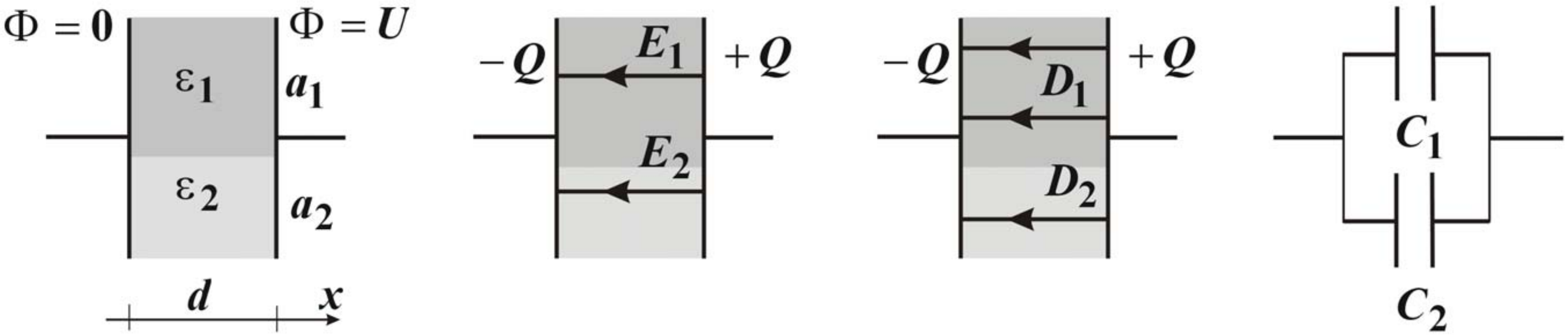
$$Q = E_1 \varepsilon_1 a = \frac{\varepsilon_1 a}{d_1 + d_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2} U = CU,$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} E_1 x, & 0 < x < d_1, \\ E_1 d_1 + E_2 x, & d_1 < x < d_1 + d_2. \end{cases}$$

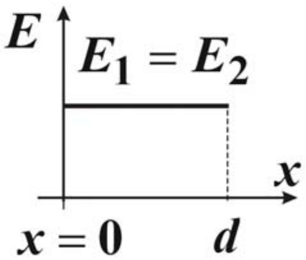


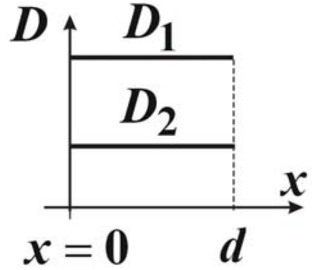
$$C = \frac{a}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}.$$

(ii) Hosszirányú rétegezés $\quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2, \;\; E_{1\tau} = E_{2\tau}$



$$E = E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$





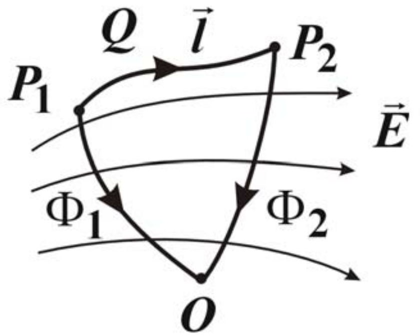
$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_1 E_1,$$
$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_2 E_2.$$

$$Q = \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = \frac{U}{d}\left(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2\right) = CU$$

$$C = \frac{\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2}{d} = \frac{\varepsilon_1 a_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 a_2}{d} = C_1 + C_2$$

7. Energiaviszonyok elektromos térben

1. Töltésre ható erő, munkavégzés

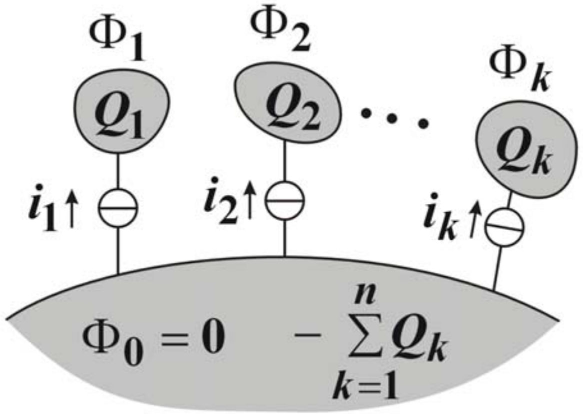


$$\vec{F} = Q\,\vec{E} \qquad W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = Q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = QU_{12}$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$$

2. Töltésrendszer energiája

az elektródák össztöltése nulla, $\sum_{k=0}^{n} Q_k = 0$



a k-adik elektróda pillanatnyi teljesítménye

$$p_k = \Phi_k\, i_k = \Phi_k \frac{dq_k}{dt}$$

a rendszer összteljesítménye

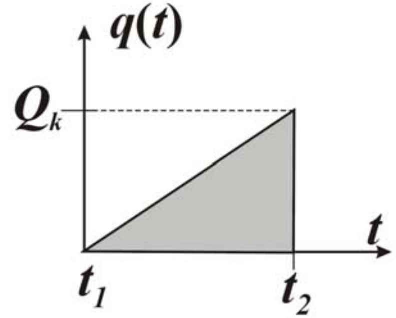
$$p = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{dq_k}{dt}$$

Az elektródák teljesítménye a t_1 pillanatban nulla, $q_k(t_1) = 0$,

Az elektródák teljesítménye a t_2 pillanatban, feltöltött állapotban, $q_k(t_2) = Q_k$.

A rendszer energiája $$W = \int_{t_1}^{t_2} p\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \frac{dq_k}{dt} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{Q_k} \Phi_k dq_k$$

Ha az elektródák töltése
és potenciálja lineárisan nő

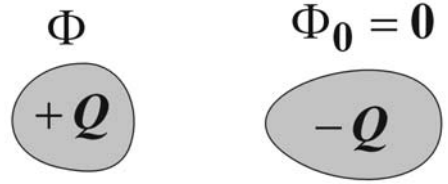


Az n elektródából álló elektróda rendszer energiája $$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k Q_k}$$

3. Elektródarendszer energiája és a kapacitások

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Phi_k\, Q_k}$$

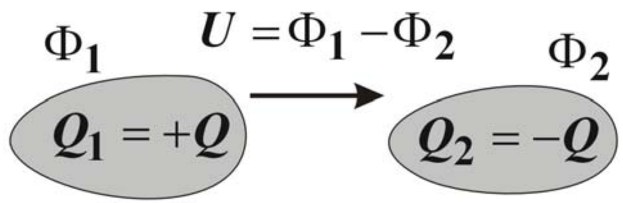
(i) Ha *n*=1,

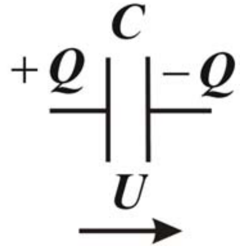


referencia elektróda

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q \Phi.}$$

(ii) Ha *n*=2, és a referencia elektróda töltése és potenciálja nulla



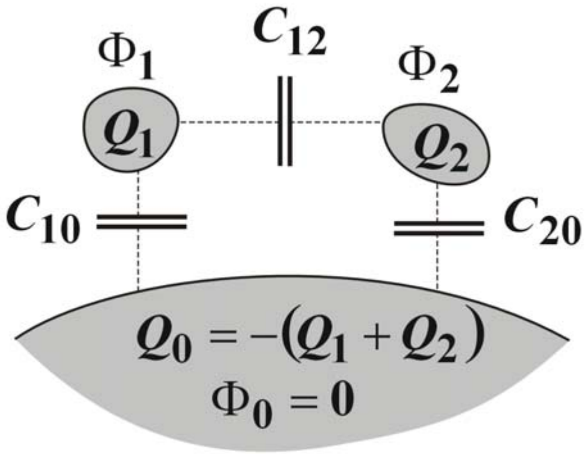


$$Q = CU$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 Q - \Phi_2 Q\right) = \frac{1}{2} Q\left(\Phi_1 - \Phi_2\right) = \frac{1}{2} QU.$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

(iii) Ha *n*=2, és a referencia elektróda töltése nem nulla



$$C_{12} = C_{21}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\Phi_k Q_k = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2\right)$$

$$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)$$

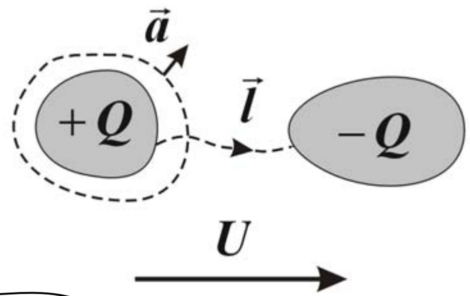
$$Q_2 = C_{20}\Phi_2 + C_{21}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\Phi_1\left[C_{10}\Phi_1 + C_{12}\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\Phi_2\left[C_{20}\Phi_2 + C_{21}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right)\right]$$

4. Az elektromos tér energiasűrűsége

Homogén, izotrop anyag, lineáris eset



$$W = \frac{1}{2} QU, \qquad Q = \oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint_a \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{a} \cdot d\vec{l} = dv$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\oint_a \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{a} \right) \left(\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = \frac{1}{2} \oint_a \int_l \varepsilon \left| \vec{E} \right|^2 d\vec{a} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon \left| \vec{E} \right|^2 dv$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon \left| \vec{E} \right|^2 dv} \qquad W = \int_v w \, dv, \quad [w] = 1 \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}^3}$$

energia sűrűség $\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon \left| \vec{E} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{\left| \vec{D} \right|^2}{\varepsilon}}$

5. Elektromos erőhatás és virtuális munka elve

A betáplált energia=a tér belső energia megváltozása+a tér munkavégzése

$$\boxed{dW_{gen} = dW_{belső} + \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

(i) ha $Q = \text{áll},\ \ dW_{gen} = 0, \rightarrow dW_{belső} + \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0,$ $\boxed{F_s = -\frac{dW_{belső}}{ds},}$

(ii) ha $U = \text{áll},\ \ dW_{belső} = 0,\ \rightarrow dW_{gen} = \vec{F} \cdot d\vec{s},$ $\boxed{F_s = \frac{dW_{gen}}{ds}.}$

Két elektróda $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

(i) $Q = \text{áll},\ \ F_s = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{1}{2}(CU)^2 - \frac{1}{C^2}\frac{dC}{ds} = \frac{1}{2}U^2 \frac{dC}{ds},$

(ii) $U = \text{áll},\ \ F_s = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = \frac{1}{2}U^2 \frac{dC}{ds},$

a kétféle közelítés azonos eredményre vezet

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan mutatható ki az elektromos töltés jelenléte, ismertesse a töltésmodelleket;
2. Ismertesse az elektromos térerősség fogalmát;
3. Adja meg a statikus elektromos térben a feszültség és a potenciál fogalmát és kapcsolatát;
4. Ismertesse az elektrosztatika Gauss tételét;
5. Ismertesse a töltésmegosztás jelenségét;
6. Ismertesse a kapacitás fogalmát;
7. Ismertesse az kondenzátor energiájára vonatkozó összefüggéseket;
8. Adja meg az elektromos tér energiasűrűségét a térjellemzőkkel.

Irodalom

•Iványi Miklósné, Fizika I–Villamosságtan, (Jegyzet) 2006: www.e-oktat.pmmk.pte.hu
•Alvin Hudson, Rex Nelson: Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994, ISBN 963 577 197 5
•Hevesi Imre, Elektromosságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
•Fodor György, Elméleti elektrotechnika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

Professor Emeritus

1. Konferencia, gyakorlat

Gy.1. Gyakorlat feladatai

A gyakorlat célja: a különböző töltéssűrűségek és az elektróda töltése közti kapcsolat felismerése, meghatározása. Egy pontszerű v. vonalszerű töltésmodell által keltett elektromos tér, potenciál, ill. feszültség meghatározása, a nullapotenciálú hely szerepe a potenciál kialakításában, kapcsolat a térerősség és a potenciál, ill. feszültség között.

[1] Egy $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú gömbfelületen $\sigma = 12\,\mathrm{pC/m^2}$ nagyságú felületi töltéssűrűség helyezkedik el egyenletes eloszlásban. Határozza meg, mekkora a gömb töltése.

$$Q = \sigma \cdot 4 r_0^2 \pi = 12 \cdot 10^{-12} 4\pi \cdot 0{,}1^2 = 1{,}5080 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} = 1{,}5080\,\mathrm{pC},$$

[2] Egy $l = 1{,}6\,\mathrm{m}$ hosszú, $r_0 = 0{,}42\,\mathrm{mm}$ sugarú rúdon $Q = 32\,\mathrm{nC}$ töltés helyezkedik el. Határozza meg a rúd egységnyi hosszúságú szakaszán a töltéssűrűséget.

$$q = Q/l = 32 \cdot 10^{-9}/1{,}6 = 20 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} = 20\,\mathrm{nC},$$

[3] Egy *r*=20 cm sugarú tárcsa egyik felületén egyenletes eloszlásban σ=3 mC/m^2 felületi töltéssűrűség helyezkedik el. Határozza meg a tárcsa felületén lévő össztöltést.

$$Q = r^2 \pi\sigma = 0{,}2^2 \pi 3 \cdot 10^{-3} = 3{,}7699 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C} = 0{,}37699\ \mathrm{mC},$$

[4] Egy *r*=15 cm sugarú gömb belsejében ρ=6 mC/m^3 térfogati töltéssűrűség helyezkedik el egyenletes eloszlásban. Határozza meg a gömb össztöltést.

$$Q = 4/3 r^3 \pi\rho = 4/3 \cdot 0{,}15^3 \pi 6 \cdot 10^{-6} = 8{,}4823 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} = 84{,}823\ \mathrm{nC},$$

[5] Mekkora az a Q pontszerű töltés, amely a tőle $r_1 = 1{,}2\ \mathrm{cm}$ és $r_2 = 2{,}4\ \mathrm{cm}$ távolságra lévő pontok között $U_{12} = 10\ \mathrm{kV}$ feszültséget hoz létre levegőben.

$$U_{12} = \Phi_{P1} - \Phi_{P2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$$Q = \frac{U_{12} 4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{10 \cdot 10^3 4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}}{\left(\frac{1}{1{,}2 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{2{,}4 \cdot 10^{-2}}\right)} = 8{,}2639 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{C} = 82{,}639\ \mathrm{pC}$$

[6] **Mekkora Φ potenciált hoz létre a $Q = 2\ \mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés, a tőle $r_1 = 25\,\text{cm}$ távolságra lévő pontban, ha a nullapotenciálú helyet a töltéstől $r_2 = 50\,\text{cm}$ távolságban definiáljuk. A szigetelőanyag relatív permittivitása $\varepsilon_r = 2$.**

$$\Phi(r_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{2\cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 2}\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}5}\right) = 18000\,\text{V} = 18\,\text{kV}$$

[7] **Mekkora annak a q vonalszerű töltésnek a nagysága, amely tőle $r_1 = 35\,\text{cm}$ távolságban $\Phi_1 = 38\,\text{kV}$ nagyságú potenciált hoz létre az $r_2 = 60\,\text{cm}$ távolságra elhelyezett referencia ponthoz képest. A szigetelőanyag relatív permittivitása $\varepsilon_r = 3{,}4$.**

$$\Phi_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1},\ q = \frac{\Phi_1 2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{38\cdot 10^3 2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3{,}4}{\ln\frac{60}{35}} = 1{,}3317\cdot 10^{-5}\ \text{C/m} = 13{,}317\ \mu\text{C/m},$$

[8] **Határozza meg a $q = 2\ \mu\text{C/m}$ nagyságú vonalszerű töltéstől $r_1 = 15\ \text{cm}$ és $r_2 = 45\ \text{cm}$ távolságban lévő pontok között levegőben fellépő U_{12} feszültséget.**

$$U_{12} = \Phi_{P1} - \Phi_{P2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \ln\frac{45}{15} = 3{,}9550 \cdot 10^4\ \text{V} = 39{,}550\ \text{kV},$$

[9] **Határozza meg a $Q = 3\ \mu\text{C}$ nagyságú töltéstől $r_1 = 25\ \text{cm}$ távolságban az E_1 elektromos térerősség értékét, ha a szigetelőanyag levegő.**

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{0{,}25^2} = 518400\ \text{V/m} = 5{,}184\ \text{kV/cm'}$$

[10] **Határozza meg a $q = 4\ \mu\text{C/m}$ nagyságú vonalszerű töltéstől $r_1 = 5\ \text{cm}$ távolságban az E_1 elektromos térerősség értékét, ha a teret kitöltő szigetelőanyag levegő.**

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{0{,}05} = 1440000\ \text{V/m} = 14{,}4\ \text{kV/cm}$$

[11] Mekkora az a Q pontszerű töltés, amely tőle $r_1 = 24\,\text{cm}$ távolságban $E_1 = 5\,\text{kV/cm}$ elektromos térerősséget hoz létre az $\varepsilon_r = 2{,}4$ relatív permittivitású szigetelőanyagban.

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r_1^2},$$

$$Q = E_1 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_1^2 = 5\cdot 10^5 \cdot 4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 2{,}4\cdot 0{,}24^2 = 7{,}68\cdot 10^{-6}\,\text{C} = 7{,}68\,\mu\text{C},$$

[12] Az $\varepsilon_r = 3{,}2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban mekkora q vonalszerű töltés hoz létre tőle $r_1 = 18\,\text{cm}$ távolságban $E_1 = 32\,\text{kV/cm}$ elektromos térerősséget.

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r_1}$$

$$q = E_1 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_1 = 32\cdot 10^5 \cdot 2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3{,}2\cdot 0{,}18 = 1.0240\cdot 10^{-4}\,\text{C} = 102{,}40\,\mu\text{C},$$

[13] Mekkora U_{12} feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású közegben az a q vonalszerű töltés a tőle $r_1 = 12\,\text{cm}$ és $r_2 = 18\,\text{cm}$ távolságban lévő pontok között, amely az r_1 távolságban lévő pontban $E_1 = 23\,\text{kV/cm}$ nagyságú elektromos térerősséget kelt.

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1},\; U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1},\; \frac{q}{2\pi\varepsilon} = E_1 r_1,$$

$$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = E_1 \cdot r_1 \ln\frac{r_2}{r_1} = 23 \cdot 10^5 \cdot 0{,}12 \ln\frac{0{,}18}{0{,}12} = 1{,}1191 \cdot 10^5\,\text{V} = 111{,}91\,\text{kV},$$

[14] Mekkora U_{12} feszültséget kelt az $\varepsilon_r = 1{,}6$ relatív permittivitású közegben az a q vonalszerű töltés a tőle $r_1 = 18\,\text{cm}$ és $r_2 = 24\,\text{cm}$ távolságban lévő pontok között, amely az r_2 távolságban lévő pontban $E_2 = 18\,\text{kV/cm}$ nagyságú elektromos térerősséget hoz létre.

$$E_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_2},\ \frac{q}{2\pi\varepsilon} = E_2 r_2,$$

$$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = E_2 \cdot r_2 \ln\frac{r_2}{r_1} = 18\cdot 10^5 \cdot 0{,}24 \ln\frac{0{,}24}{0{,}18} = 1{,}2428\cdot 10^5\ \mathrm{V} = 124{,}28\,\mathrm{kV},$$

[15] Mekkora E_1 elektromos térerősséget hoz létre a tőle $r_1 = 15\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontban az a Q pontszerű töltés, amely a r_1 és $r_2 = 42\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontok között $U_{12} = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget generál.

$$U_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon} = \frac{U_{12}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}},$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1^2} = \frac{U_{12}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\frac{1}{r_1^2} = \frac{12\cdot 10^5}{\left(\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}42}\right)}\frac{1}{0{,}15^2} == 1{,}2444\cdot 10^7\ \mathrm{V/m} = 124{,}44\,\mathrm{kV/cm}$$

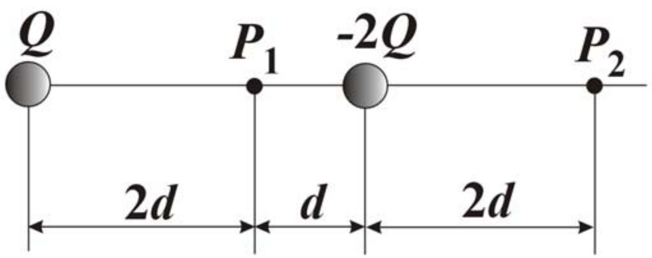
[16] **Mekkora E_1 elektromos térerősséget hoz létre az a q vonalszerű töltés a tőle $r_1 = 24\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő pontban, amely az r_1 és $r_2 = 16\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő pontok között $U_{12} = 26\,\mathrm{kV}$ feszültséget állít elő.**

$$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2},\quad \frac{q}{2\pi\varepsilon} = \frac{U_{12}}{\ln\frac{r_1}{r_2}},$$

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1} = \frac{U_{12}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\frac{1}{r_1} = \frac{26\cdot 10^5}{\ln\frac{0{,}24}{0{,}16}}\frac{1}{0{,}24} = 2{,}6718\cdot 10^7 = 267{,}18\,\mathrm{kV/cm}.$$

A gyakorlat célja: a szuperpozíció elvet alkalmazva több töltés által keltett potenciál, feszültség, ill. térerősség meghatározása. Vegyük figyelembe, hogy a potenciál, ill. a potenciálkülönbséggel adódó feszültség skaláris mennyiség, míg a térerősség vektor mennyiség, ezért vektoriálisan kell a szuperpozíciót alkalmazni. A kapacitás fogalma, az elektróda töltése, feszültsége és kapacitása közti kapcsolat.

[1] Határozza meg, mekkora Φ potenciált hoz létre az ábrán látható két pontszerű töltés a P_1 pontban, ha az $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású szigetelőanyagban a nulla potenciálú helyet a P_2 pontban rögzítettük, és $Q = 4\,\mu\text{C}$, $d = 24\,\text{cm}$.



$$\Phi_1 = \Phi_1(Q) + \Phi_1(-2Q) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{5d}\right) - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\, d}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) = \frac{4\cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3\cdot 0{,}24}\left(\frac{5-2-20+10}{10}\right) =$$

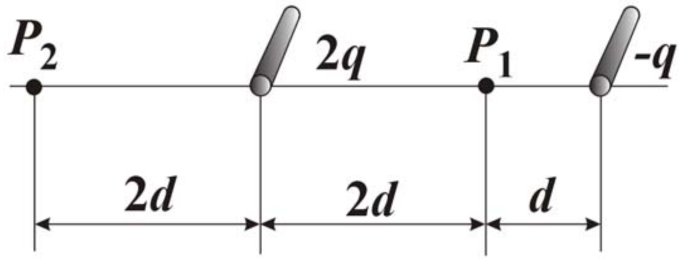
$$= -3{,}5000\cdot 10^{4}\ \mathrm{V} = -35{,}000\ \mathrm{kV},$$

[2] Határozza meg, mekkora E elektromos térerősséget hoz létre az előző példában vázolt két pontszerű töltés a P_1 pontban.

$$E_1 = E_1(Q) + E_1(-2Q) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(2d)^2} + \frac{2}{d^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\, d^2}\left(\frac{1}{4} + 2\right) =$$

$$= \frac{4\cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3\cdot (0{,}24)^2}\frac{9}{4} = 468750\ \mathrm{V/m} = 4{,}68750\ \mathrm{kV/cm},$$

[3] Határozza meg, mekkora Φ potenciált hoz létre az ábrán látható két vonalszerű töltés a P_1 pontban, ha az $\varepsilon_r = 2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban a nulla potenciálú helyet a P_2 pontban rögzítettük, és $q = 5\,\mu\mathrm{C/m}$, $d = 18\,\mathrm{cm}$.



$$\Phi_1 = \Phi_1(2q) + \Phi_1(-q) = \frac{2q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2d}{2d} - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{5d}{d} =$$

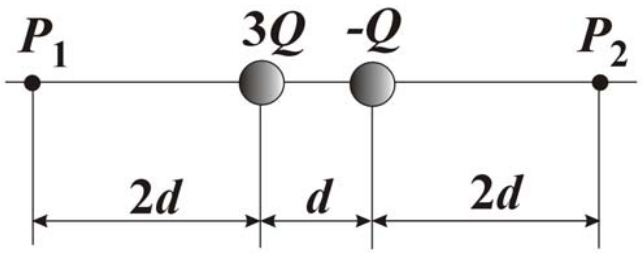
$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln 5 = -\frac{5\cdot 10^{-6}}{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi}2}\ln 5 = -8{,}0472\cdot 10^{3}\,\mathrm{V} = -8{,}0472\,\mathrm{kV},$$

[4] Határozza meg, mekkora E elektromos térerősséget hoz létre az előző példában vázolt két vonalszerű töltés a P_2 pontban.

$$E_2 = E_2(2q) - E_2(-q) = \frac{2q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{2d} - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{5d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon d}\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi} 2 \cdot 0{,}18} \frac{4}{5} = 2{,}2222 \cdot 10^3 \,\mathrm{V/m} = 0{,}022222 \;\mathrm{kV/cm},$$

[5] Határozza meg, mekkora Φ potenciált hoz létre az ábrán látható két pontszerű töltés a P_1 pontban, ha az $\varepsilon_r = 4$ relatív permittivitású szigetelőanyagban a nulla potenciálú helyet a P_2 pontban rögzítettük, és $Q = 2\,\mu\mathrm{C}$ és $d = 32\,\mathrm{cm}$.



$$\Phi_1 = \Phi_1(3Q) + \Phi_1(-Q) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{3d}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{3d} - \frac{1}{2d}\right) =$$

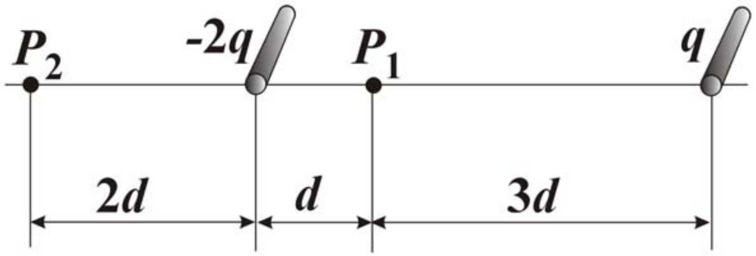
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon d}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)4 = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 4 \cdot 0{,}32}\frac{1}{6}4 = 9{,}375 \cdot 10^3 \text{ V} = 9{,}375\,\text{kV},$$

[6] Határozza meg, mekkora E elektromos térerősséget hoz létre az előző példában vázolt két pontszerű a P_1 pontban.

$$E_1 = E_1(3Q) - E_1(Q) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{3}{(2d)^2} - \frac{1}{(4d)^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon d^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{16}\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 4 \cdot (0{,}32)^2}\frac{11}{16} = 3{,}0212 \cdot 10^4 \text{ V/m} = 0{,}30212\ \text{kV/cm},$$

[7] **Határozza meg, mekkora Φ potenciált hoz létre az ábrán látható két vonalszerű töltés a P_1 pontban, ha az $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású szigetelőanyagban a nulla potenciálú helyet a P_2 pontban rögzítettük, és $q = 5\,\mu\text{C/m}$, $d = 18\,\text{cm}$.**



$$\Phi_1 = \Phi_1(q) + \Phi_1(-2q) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{6d}{3d} - \frac{2q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2d}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}(\ln 2 - 2\ln 2) =$$

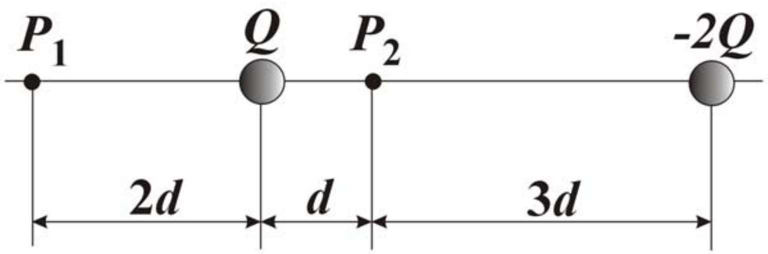
$$= \frac{5\cdot 10^{-6}}{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}3}(-\ln 2) = -2{,}0794\cdot 10^{4}\ \text{V} = -20{,}794\ \text{kV},$$

[8] **Határozza meg, mekkora E elektromos térerősséget hoz létre az előző példában vázolt két vonalszerű töltés a P_1 pontban.**

$$E_1 = E_1(q) + E_1(-2q) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{3d} + \frac{2q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon d}\left(\frac{1}{3} + 2\right) =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3 \cdot 0{,}18}\frac{7}{3} = 3{,}8889 \cdot 10^5 \text{ V/m} = 3{,}8889 \text{ kV/cm},$$

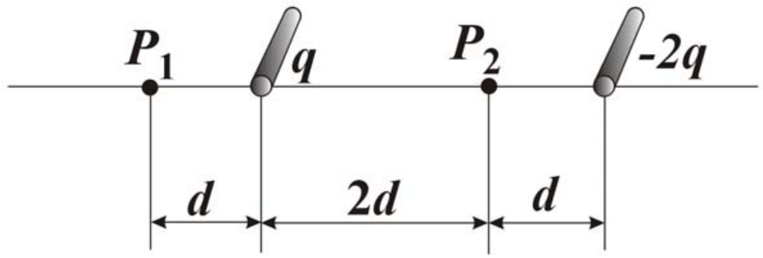
[9] Határozza meg mekkora feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban az ábrán látható két pontszerű töltés a P_1 és a P_2 pontok között, ha $Q = 3\ \mu\text{C}$ és $d = 20\,\text{cm}$.



$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{Q}{2d} - \frac{2Q}{6d}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{Q}{d} - \frac{2Q}{3d}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r d}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{6} - 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3\cdot 10^{-6}}{4\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}2\cdot 0{,}2}\left(-\frac{1}{6}\right) = -1{,}1250\cdot 10^4\,\mathrm{V} = 11{,}250\,\mathrm{kV},$$

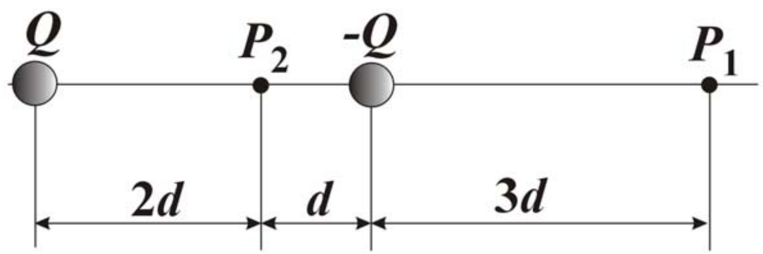
[10] Határozza meg mekkora feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású szigetelőanyagban az ábrán látható két vonalszerű töltés a P_1 és a P_2 pontok között, ha $q = 2\,\mu\mathrm{C/m}$ és $d = 24\,\mathrm{cm}$.



$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{2d}{d} - \frac{2q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{d}{4d} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\ln 2 - 2\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{2\cdot 10^{-6}}{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}3}\left(\ln 2 - 2\ln\frac{1}{4}\right) = 1{,}2477\cdot 10^{5}\ \mathrm{V} = 124{,}77\,\mathrm{kV},$$

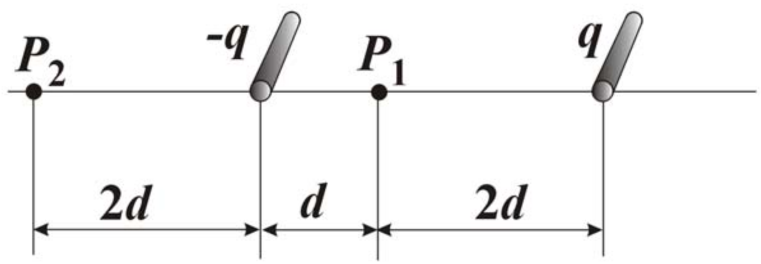
[11] Határozza meg mekkora feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 4$ relatív permittivitású szigetelőanyagban az ábrán látható két pontszerű töltés a P_1 és a P_2 pontok között, ha $Q = 5\,\mu\mathrm{C}$ és $d = 15\,\mathrm{cm}$.



$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{6d} - \frac{Q}{3d}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{2d} - \frac{Q}{d}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon d}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 4 \cdot 0{,}15}\left(\frac{1}{3}\right) = 25000\,\mathrm{V} = 25{,}000\,\mathrm{kV},$$

[12] Határozza meg mekkora feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 1{,}5$ relatív permittivitású szigetelőanyagban az ábrán látható két vonalszerű töltés a P_1 és a P_2 pontok között, ha $q = 3\,\mu\mathrm{C/m}$ és $d = 12\,\mathrm{cm}$.



$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{5d}{2d} - \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2d}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{5}{4} =$$

$$= \frac{3\cdot 10^{-6}}{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}1{,}5}\ln\frac{5}{4} = 8{,}0332\cdot 10^{3}\,\mathrm{V} = 8{,}0332\,\mathrm{kV},$$

[13] Mekkora annak a légszigetelésű síkkondenzátornak a kapacitása, amelynek $a = 12\ \mathrm{cm}^2$ felületű lemezei $d = 3{,}2\ \mathrm{cm}$ távolságban helyezkednek el.

$$C = \varepsilon_0\frac{a}{d} = \frac{10^{-9}}{4\pi 9}\frac{12\cdot 10^{-4}}{3{,}2\cdot 10^{-2}} = 3{,}3157\cdot 10^{-13}\ \mathrm{F} = 0{,}33157\,\mathrm{pF},$$

[14] Egy $C = 3{,}6\,\mathrm{nF}$ kapacitású síkkondenzátor egyik lemezén $Q = 3\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú töltés helyezkedik el. Mekkora a lemezek között fellépő feszültség.

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{3{,}6\cdot 10^{-9}} = 833{,}3333\,\mathrm{V},$$

[15] Mekkora annak a kondenzátornak a kapacitása, amelyre $U = 15\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolva a lemezekre $Q = \pm 24\ \mu\mathrm{C}$ töltést viszünk fel.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{24 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{3}} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 1{,}6\,\mathrm{nF}$$

[16] Mekkora töltést viszünk annak a $C = 12\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású síkkondenzátor lemezeire, amelyet $U = 16\,\mathrm{kV}$ feszültségre kapcsolunk.

$$Q = CU = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 10^{3} = 192 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C} = 0{,}192\ \mu\mathrm{C},$$

[17] Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a kapacitása, amely lemezeinek távolságát kétszeresére növeljük.

$$C_1 = \varepsilon \frac{a}{d},\ C_2 = \varepsilon \frac{a}{d/2},\ C_2 / C_1 = 1/2,$$

[18] Mekkorára változik annak a kondenzátornak a töltése, amelynek a feszültségét felére csökkentjük.

$$Q_1 = CU_1,\ Q_2 = CU_2,\ U_2 = U_1/2,\ Q_2 = Q_1/2,$$

[19] Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a töltése, amelynek ugyanakkora feszültség mellett a lemezeinek távolságát felére csökkentjük.

$$Q_1 = C_1 U = \varepsilon \frac{a}{d} U \text{,} \; Q_2 = \varepsilon \frac{a}{d/2} U = 2Q_1 \text{,}$$

[20] Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a feszültsége, amelynek ugyanakkora töltés mellett a lemezeinek távolságát kétszeresére növeljük.

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = Q \frac{d}{\varepsilon a} \text{,} \; U_2 = \frac{Q}{C_1} = Q \frac{2d}{\varepsilon a} = 2U_1 \text{,}$$

[21] Határozza meg a légszigetelésű síkkondenzátornak $d = 1{,}2\ \mathrm{cm}$ távolságra lévő lemezei között az elektromos térerősség értékét, ha a lemezekre $U = 12\ \mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.

$$E = U / d = \frac{12 \cdot 10^3}{0{,}12} = 10^5\ \mathrm{V/m} = 1\ \mathrm{kV/cm} \text{,}$$

[22] Két elektródából és a földből álló rendszer részkapacitásai $C_{10} = 2\ \mu\text{F}$, $C_{12} = 15\ \mu\text{F}$, $C_{20} = 3\ \mu\text{F}$. Mekkora lesz az elektródák Q_1, ill. Q_2 töltése, ha az 1. elektróda és a föld közé $U_1 = 12\,\text{kV}$, a 2. elektróda és a föld közé $U_2 = -6\,\text{kV}$ feszültséget kapcsolunk.

$$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}\left(\Phi_1 - \Phi_2\right) =$$

$$= 2\cdot 10^{-6} 12\cdot 10^{3} + 15\cdot 10^{-6}\left(12+6\right)\cdot 10^{3} = 0{,}294\cdot 10^{-6}\ \text{C} = 0{,}294\ \mu\text{C},$$

$$Q_2 = C_{20}\Phi_1 + C_{12}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) =$$

$$= -3\cdot 10^{-6} 6\cdot 10^{3} + 15\cdot 10^{-6}\left(-6-12\right)\cdot 10^{3} = -0{,}288\cdot 10^{-6}\ \text{C} = -0{,}288\ \mu\text{C},$$

[23] Két elektródából és a földből álló rendszer részkapacitásai $C_{10} = 2\ \mu\text{F}$, $C_{12} = 12\ \mu\text{F}$, $C_{20} = 5\ \mu\text{F}$. Az egyik elektróda és a föld közé $U_1 = 10\,\text{kV}$, a másik elektróda és a föld közé $U_2 = 6\,\text{kV}$ feszültséget kapcsolunk. Határozza meg az elektródák töltését.

$$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}\left(\Phi_1 - \Phi_2\right) =$$

$$= 2\cdot 10^{-6} 10\cdot 10^{3} + 12\cdot 10^{-6}\left(10-6\right)\cdot 10^{3} = 0{,}068\cdot 10^{-6}\ \text{C} = 0{,}068\ \mu\text{C},$$

$$Q_2 = C_{20}\Phi_2 + C_{12}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) =$$

$$= 5 \cdot 10^{-6} 6 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-6}\left(6 - 10\right) \cdot 10^3 = -0{,}018 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = -0{,}018\ \mu\mathrm{C},$$

A gyakorlat célja: Folytonossági feltételek elektromos térben, pontszerű és vonalszerű töltések között fellépő erőhatás, a kondenzátor energiája.

[1] Két $\varepsilon_{1r} = 2$ és $\varepsilon_{2r} = 3{,}6$ relatív permittivitású közeg közös határfelületén az 1. közegben az elektromos térerősség vektor normális komponense $E_{1n} = 4{,}3\,\mathrm{kV/cm}$. Mekkora lesz a 2. közegben az elektromos térerősség vektor E_{2n} normális komponense.

$$D_{1n} = D_{2n}, \rightarrow E_{2n} = E_{1n}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 4{,}3\frac{2\cdot\varepsilon_0}{3{,}6\cdot\varepsilon_0} = 2{,}3889\,\mathrm{kV/cm},$$

[2] Két $\varepsilon_{1r} = 2{,}2$ és $\varepsilon_{2r} = 3{,}6$ relatív permittivitású közeg közös határfelületén az 1. közegben az eltolási vektor tangenciális komponense $D_{1t} = 4{,}3\ \mu\mathrm{As/cm}$. Mekkora lesz a 2. közegben az eltolási vektor D_{2t} tangenciális komponense.

$$E_{1t} = E_{2t}, \rightarrow D_{2t} = D_{1t}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 4{,}3\frac{3{,}6\cdot\varepsilon_0}{2{,}2\cdot\varepsilon_0} = 7{,}0364\,\mathrm{kV/cm},$$

[3] Határozza meg, mekkora elektromos energiát tárol a $C = 3\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátor ha $Q = \pm 3\ \mu\mathrm{C}$ töltést viszünk a lemezekre.

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\left(3 \cdot 10^{-6}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5000 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Ws} = 1{,}5\ \mu\mathrm{Ws},$$

[4] Mekkora elektromos energiát tárol az a kondenzátor, amely elektródái $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültség hatására $Q = \pm 3{,}2\ \mu\mathrm{C}$ töltéssel töltődik fel.

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}3{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{3} = 0{,}0192\ \mathrm{Ws} = 19{,}2\ \mathrm{mWs},$$

[5] Mekkora F erő hat azon $q = 3\ \mu\mathrm{C/m}$ vonalszerű töltés $l = 1{,}2\ \mathrm{m}$ hosszúságú szakaszára, amelyet $E = 12\ \mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térbe helyezünk.

$$F = QE = q \cdot l \cdot E = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}2 \cdot 12 \cdot 10^{5} = 0{,}0045\ \mathrm{N} = 4{,}5\ \mathrm{mN},$$

[6] Mekkora erővel hat a $Q = 3{,}5\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú pontszerű töltés a tőle $r = 18\ \mathrm{cm}$ távolságra elhelyezett $Q_0 = 15\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú próbatöltésre.

$$F = Q_0 E = Q_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} = 15 \cdot 10^{-6} \frac{3{,}5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{0{,}18} = 2{,}6250\ \text{N}$$

[7] Mekkora az az E elektromos tér, amely $F = 0{,}2\ \text{N}$ erőhatást gyakorol a $Q = 2{,}4\ \mu\text{C}$ nagyságú töltésre.

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{0{,}2}{2{,}4 \cdot 10^{-6}} = 8{,}3333 \cdot 10^{4} = 0{,}83333\ \text{kV/cm}$$

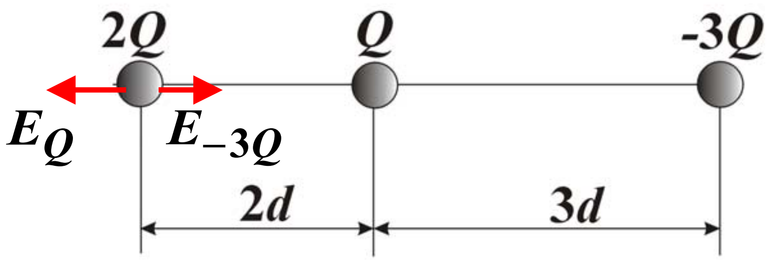
[8] Mekkora az a Q pontszerű töltés, amelyre $E = 2\ \text{kV/cm}$ nagyságú elektromos térben $F = 30\ \text{mN}$ nagyságú erő hat.

$$Q = \frac{F}{E} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{5}} = 1{,}5000 \cdot 10^{-7}\ \text{C} = 150\ \text{nC}$$

[9] Mekkora az a q vonalszerű töltés, amelynek $l = 1{,}2\ \text{m}$ hosszúságú szakaszára az $E = 12\ \text{kV/cm}$ nagyságú elektromos térben $F = 30\ \text{mN}$ nagyságú erő hat.

$$q = \frac{Q}{l} = \frac{F}{l \cdot E} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 12 \cdot 10^{5}} = 2{,}0833 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m} = 20{,}833\ \ \mathrm{nC/m}.$$

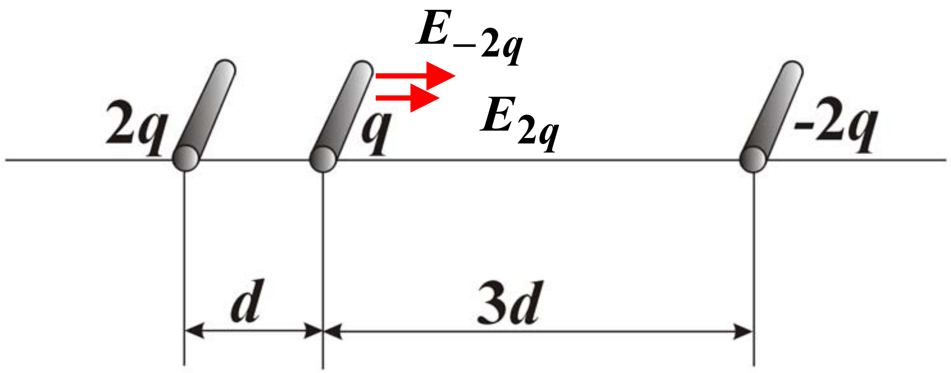
[10] Határozza meg, mekkora erő hat az ábrán látható elrendezésben a 2Q nagyságú töltésre, ha $Q = 3{,}2\ \mu\mathrm{C}$ és $d = 24\ \mathrm{cm}$.



$$F_{2Q} = 2Q \cdot \left(E_Q - E_{-3Q}\right) = 2Q \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{(2d)^2} - \frac{3Q}{(5d)^2}\right) =$$

$$= 2\frac{\left(3{,}2 \cdot 10^{-6}\right)^2}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 0{,}24^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{25}\right) = 0{,}6720\ \mathrm{N},$$

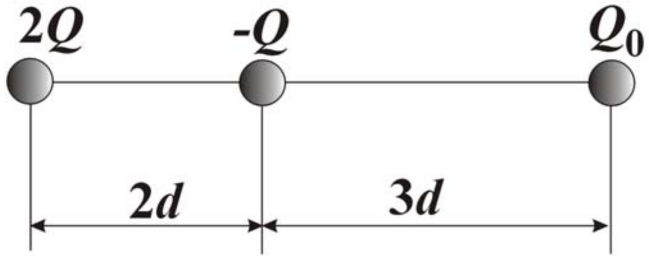
[11] Határozza meg, mekkora erő hat az ábrán látható elrendezésben a q vonalszerű töltés 1,5 m hosszú szakaszára, ha $q = 4{,}2\,\mu C/m$ és $d = 16\,cm$.



$$F_q = q \cdot l\left(E_{2q} + E_{-2q}\right) = q \cdot l\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{2}{d} + \frac{2}{3d}\right) = \frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon d}\left(2 + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\left(4{,}2 \cdot 10^{-6}\right)^2 1{,}5}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 0{,}16}\frac{8}{3} = 7{,}9380\ \text{N},$$

[12] Határozza meg, mekkorára kell választani a Q_0 töltést ahhoz, hogy az ábrán látható töltéselrendezésben a $2Q$ töltésre ne hasson erő, ha $Q = 16\,\mu C$ és $d = 32\,cm$.



$$F_{2Q} = 2Q\cdot\left(E_{-Q} - E_{Q_0}\right) = 0,\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(2d)^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(5d)^2},\ Q_0 = Q\frac{25}{4} = 100\mu C,$$

[13] Határozza meg, mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy a $Q = 2\,\mu C$ nagyságú pontszerű töltést a $\Phi_1 = 10\,kV$ potenciálú helyről a $\Phi_2 = 3\,kV$ potenciálú helyre mozdítsuk el.

$$W = QU = Q(\Phi_1 - \Phi_2) = 2\cdot 10^{-6}(10-3)\cdot 10^3 = 0{,}0140\ Ws = 14{,}0\ mWs,$$

[14] Határozza meg, hányszorosára változik a $C = 12\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátorra kapcsolt feszültséget $U_1 = 10\,\mathrm{kV}$-ról $U_2 = 21\ \mathrm{kV}$-ra növeljük.

$$W_1 = \frac{1}{2}CU_1{}^2,\ W_2 = \frac{1}{2}CU_2{}^2,\ W_2 / W_1 = U_2^2 / U_1^2 = 21^2 \big/ 10^2 = 4{,}41,$$

[15] Határozza meg, hányszorosára változik a $C = 16\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátorra kapcsolt feszültséget $U_1 = 2\,\mathrm{kV}$-ról $U_2 = 8\ \mathrm{kV}$-ra csökkentjük.

$$W_2 / W_1 = U_2^2 / U_1^2 = 8^2 \big/ 2^2 = 0{,}1322,$$

[16] Határozza meg, hányszorosára változik a $C = 6\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátor töltését felére csökkentjük.

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},\ W_2 = \frac{1}{2}\frac{(Q/2)^2}{C},\ W_2 / W_1 = (Q / 2)^2 \big/ Q^2 = 1 / 4,$$

[17] Határozza meg, hányszorosára változik a síkkondenzátor energiája, ha állandó feszültség mellett a lemezek távolságát felére csökkentjük.

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 U^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon a}{d}U^2,\ W_2 = \frac{1}{2}C_2 U^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon a}{d/2}U^2,\ W_2/W_1 = 2,$$

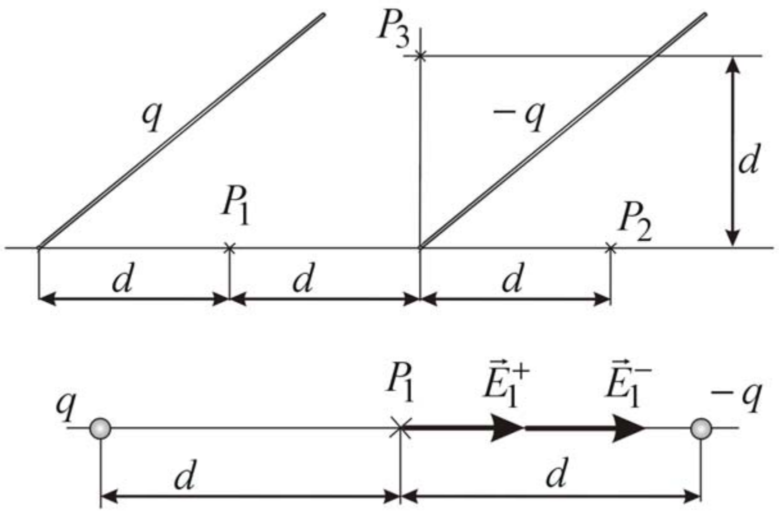
[18] Mekkora elektromos energiát tárol az $\varepsilon_r = 2{,}8$ relatív permittivitású szigetelőanyag egységnyi térfogata $E = 16\,\mathrm{kV/cm}$ elektromos térerősség esetén.

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{10^{-9}}{4\pi 9}2{,}8\cdot\left(16\cdot 10^5\right)^2 = 11{,}3177\ \mathrm{Ws/m^3},$$

Gy.2. Gyakorló feladatok

1. Feladat

Az ábrán látható két párhuzamos, végtelen hosszúnak tekinthető vonalszerű töltés vonal menti töltéssűrűsége q=2μC/m, távolsága 2d=20 cm. Határozza meg a P_1, P_2 és a P_3 pontokban az elektromos térerősség abszolút értékét, valamint a P_1,P_2 pontok potenciáljait, ha a P_3 pontot tekintjük referencia pontnak. Adja meg a P_1,P_2 pontok között fellépő feszültséget.



Megoldás

A vonalszerű töltés tere $E(r)=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r}$

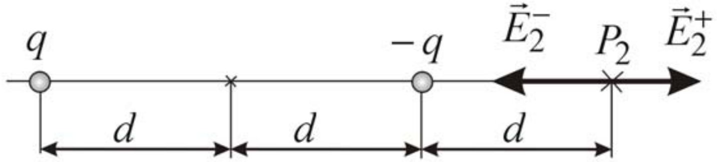
(i) A P_1 pontban

$$E_1^+=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d}=E_1^-$$

$$E(P_1)=E_1^+ + E_1^- = 2\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d}$$

$$E(P_1)=\frac{q}{\pi\varepsilon}\frac{1}{d}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{\pi\dfrac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}2}=36\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}=360\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}=3{,}60\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

(ii) A P_2 pontban

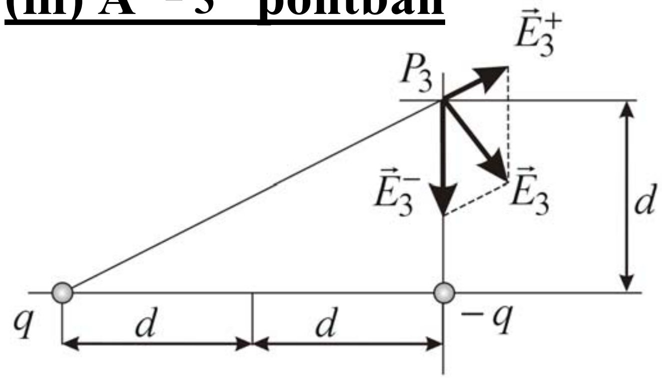


$$E_2^+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{3d},$$

$$E_2^- = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d},$$

$$E(P_2) = E_2^- - E_2^+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{3d}\right) = \frac{q}{\pi\varepsilon}\frac{1}{3d} = 12\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1{,}2\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

(iii) A P_3 pontban



$$E_3^+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{5}d}, \quad E_3^- = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d}$$

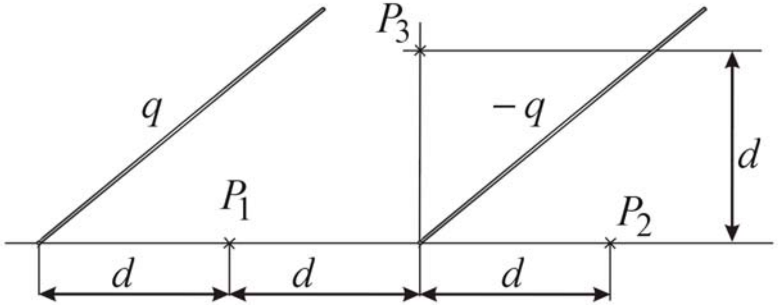
$$E_x^+ = E_3^+\frac{2d}{\sqrt{5}d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{2}{5d}, \quad E_y^+ = E_3^+\frac{d}{\sqrt{5}d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{5d}$$

$$E_y^- = 0, \quad E_y^- = -E_3^- = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d}$$

$$E_x = E_x^+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{2}{5d}, \quad E_y = E_y^+ + E_y^- = \frac{q}{2\pi\varepsilon d}\left(\frac{1}{5} - 1\right) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{4}{5d}$$

$$E(P_3) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{2}{5d}\sqrt{1+4} = \frac{36}{\sqrt{5}}10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1{,}609\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

(iv) A potenciálok



A vonalszerű töltés potenciálja

$$\Phi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$\Phi(P_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{5}d}{d} - \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{d}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt{5} = 28{,}9699\ \mathrm{kV}$$

$$\Phi(P_2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{5}d}{3d} - \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{d}{d} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{5}}{3} = -10{,}5802\ \mathrm{kV}$$

(v) A feszültség

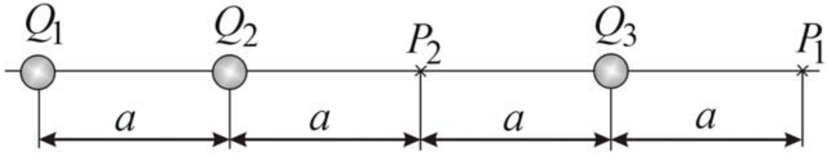
$$U(P_1, P_2) = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt{5} - \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln 3 = 39{,}5500\ \mathrm{kV}$$

2. Feladat

Három pontszerű töltés az ábrán látható módón helyezkedik el. Határozza meg az elektromos térerősséget a P_2 P_1, pontokban, és a két pont közötti feszültséget, ha

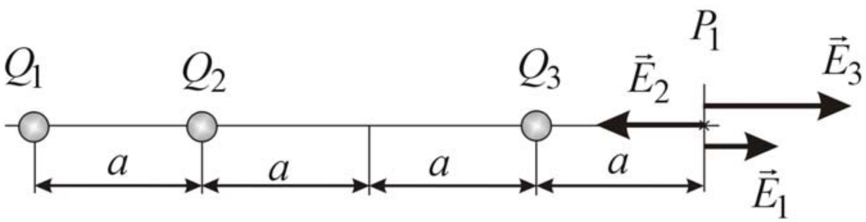
$a = 12\,\text{cm}$ $\quad Q_1 = 2\,\mu\text{C}$

$Q_2 = -3\,\mu\text{C}$ $\quad Q_3 = 1\,\mu\text{C}$



Megoldás **A pontszerű töltés tere** $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$

(i) A P_1 pontban



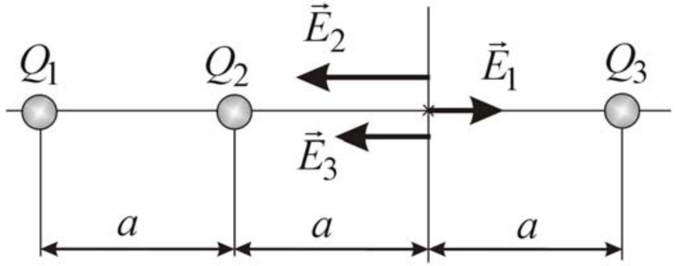
$$E(P_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(4a)^2} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(2a)^2} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}$$

$$E(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{Q_1}{16} - \frac{Q_2}{4} + Q_3\right)$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}\left(12\cdot 10^{-2}\right)^2}\left(\frac{2}{16} - \frac{3}{4} + 1\right)$$

$$= 3{,}3750\cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 234375\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 2{,}34375\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

(ii) A P_2 pontban



$$E(P_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(2a)^2} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2} - \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}$$

$$= -21{,}87500\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

(iii) A feszültségés a potenciálok

$$U(P_1, P_2) = \Phi(P_1) - \Phi(P_2)$$

$$\Phi(P_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{4a} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{3a} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} = \frac{10^{-6}}{4\pi\dfrac{10^{-9}}{4\pi 9}10^{-1}}\left(\frac{2}{4} - \frac{3}{3} + 1\right) = 4{,}5\cdot 10^4\,\mathrm{V}$$

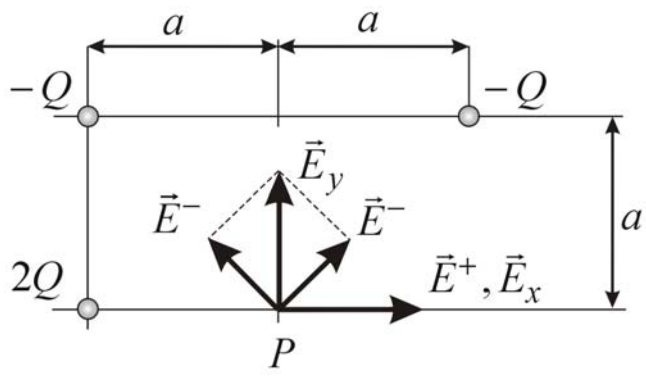
$$\Phi(P_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{2a} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} = \frac{10^{-6}}{4\pi\dfrac{10^{-9}}{4\pi 9}10^{-1}}\left(\frac{2}{2} - 3 + 1\right) = -9\cdot 10^4\,\mathrm{V}$$

$$U(P_1, P_2) = 4{,}5\cdot 10^4 - \left(-9\cdot 10^4\right) = 13{,}5\cdot 10^4 = 135\mathrm{kV}$$

3. Feladat

Három pontszerű töltés az ábrán látható módon helyezkedik el. Határozza meg a P pontban az elektromos térerősséget, valamint a potenciál értéket, ha $Q = 2\mu C \quad a = 20 cm$

Megoldás



$$E^- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} \qquad E_y = E^-\sqrt{2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\sqrt{2}}{4a^2}$$

$$E_x = E^+ = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a^2}$$

$$E(P) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^2} \sqrt{4 + 1/8}$$

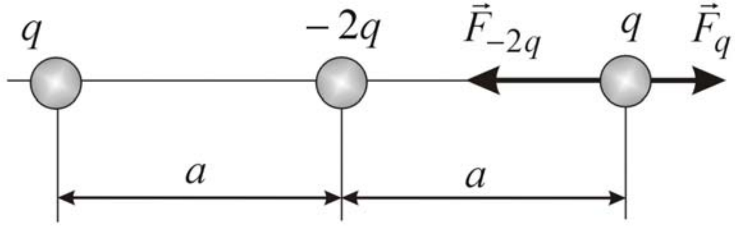
$$E(P) = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 4 \cdot 10^{-2}} \sqrt{4{,}125} = 9{,}1395 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 9{,}1395 \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

$$\Phi(P) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a} - 2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\Phi(P) = 2 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{0{,}2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5{,}2721 \cdot 10^4 \ \mathrm{V} = 52{,}721 \,\mathrm{kV}$$

4. Feladat

Határozza meg mekkora erő hat az ábrán látható elrendezés jobboldali vonal menti töltéssűrűségének egységnyi hosszú szakaszára, ha



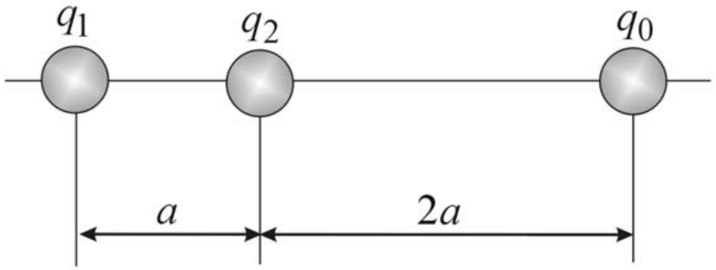
$$a = 15\,\mathrm{cm} \qquad q = 2\,\mu\mathrm{C/m}$$

Megoldás

$$F = \left(-\frac{2q^2}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{2a}\right) = \frac{4\cdot 10^{-12}}{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}0{,}15}(-2+0{,}5) = 720\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

5. Feladat

Az ábrán három végtelen hosszúnak tekinthető párhuzamos vonaltöltés látható. Mi a feltétele annak, hogy a q_0 töltésre ne hasson erő?



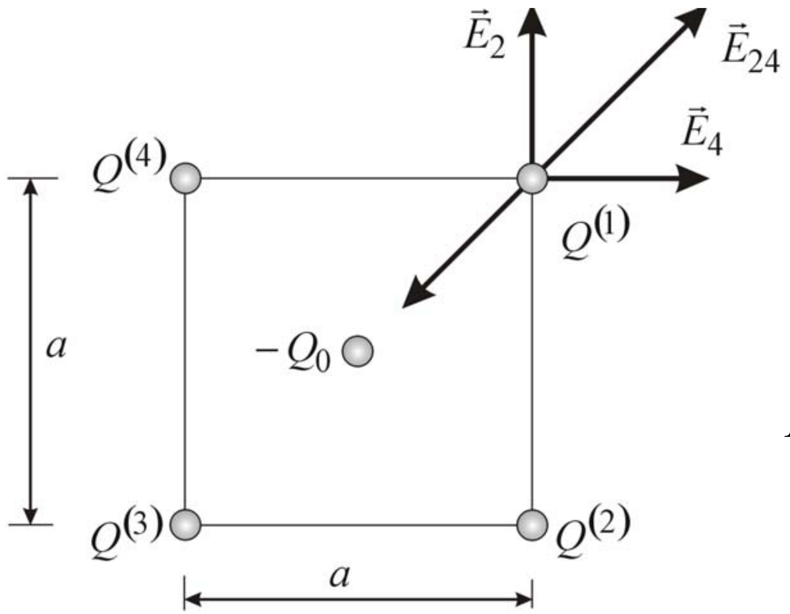
Megoldás $E_1 - E_2 = 0 \quad E_1 = E_2$

$$E_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{a}, \quad E_2 = \frac{q_2}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{2a}$$

$$q_1/q_2 = 1/2$$

6. Feladat

Az ábrán látható négyzet sarokpontjaiban négy egyforma nagyságú és előjelű pontszerűnek tekinthető töltés helyezkedik el. Mekkora negatív töltést kell a négyzet középpontjában elhelyezni, hogy egyik töltésre se hasson erő?



Megoldás

$$F = Q^{(1)} E_{2,3,4}$$

$$E_{2,3,4} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\sqrt{2}}{a^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}a\right)^2}\right] - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(\sqrt{2}a/2\right)^2} = 0$$

$$Q_0 = \frac{Q}{2}\left[\sqrt{2} + 1/2\right] = 0{,}957Q$$

7. Feladat

Határozza meg a síkkondenzátor kapacitását, ha a lemezek távolsága d=0,5 cm, a lemezek felülete pedig a=2,5 cm és a szigetelőanyag levegő, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Megoldás

$$C = \frac{\varepsilon a}{d} = \frac{10^{-9}}{4\pi 9}\frac{2{,}5\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-10}}{72\pi} = 4{,}4231\cdot 10^{-13}\,\mathrm{F} = 0{,}4423\,\mathrm{pF}$$

8. Feladat

Adja meg annak a síkkondenzátornak a geometriai adatait, amely C=5 pF kapacitás érték mellett $E_{\max} = 10\mathrm{kV/cm}$ villamos szilárdságú szigetelőanyag esetén $\varepsilon_r = 1$. U=2 kV feszültséget bír el,

Megoldás

$$d = \frac{U}{E_{\max}} = \frac{2\cdot 10^{3}}{10\cdot 10^{5}} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2\mathrm{mm}$$

$$a = \frac{Cd}{\varepsilon} = \frac{5\cdot 10^{-12}\,2\cdot 10^{-3}}{10^{-9}/4\pi 9} = 36\pi\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}0011\,\mathrm{m}^2 = 11\,\mathrm{cm}^2$$

9. Feladat

Mekkora maximális töltés vihető egy $r_0 = 2m$ sugarú, levegőben magában álló gömbre, ha a megengedett maximális térerősség $E_{max} = 10\text{kV/cm}$.

Megoldás

$$Q = 4\pi r_0^2 \varepsilon E = 4\pi 4 \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 10^5 = \frac{4}{9} 10^{-4}\text{C} = 0{,}44 \cdot 10^{-4}\text{C}$$

10. Feladat

Egy gömbkondenzátor belső sugara $r_1 = 1{,}5\text{cm}$, külső sugara $r_2 = 3\text{cm}$.

(a) Mekkora maximális feszültség kapcsolható az elektródák közé, ha az elektródák közötti szigetelőanyagban (levegő) a megengedett maximális térerősség $E_{max} = 10\text{kV/cm}$,

(b) Adja meg az elrendezés C kapacitását.

Megoldás

(a) $$E_{max} = E(r_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r_1^2} \qquad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = E_{max} r_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= 10^6 \cdot 1{,}5^2 \left(\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{3}\right) = 10^6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}5 \cdot 10^6 = 500\,\text{kV}$$

(b) $$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi 10^{-9}}{4\pi 9}\left(\frac{1}{\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-2}} - \frac{1}{3\cdot 10^{-2}}}\right) = \frac{1}{3} \cdot 10^{-11} = 3{,}3\,\text{pF}$$

11. Feladat

Két gömb alakú elektróda sugara $r_0 = 1{,}5\text{cm}$, középpontjaik távolsága d=20 cm ($d >> r_0$).

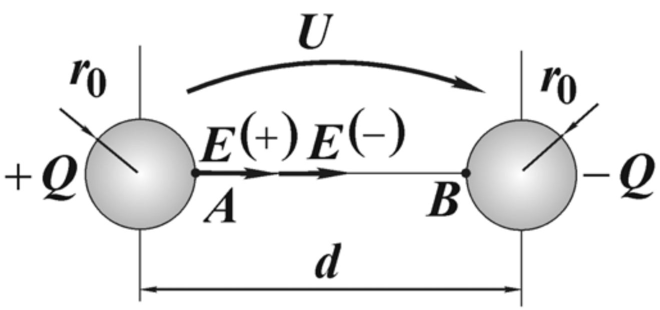
(a) Mekkora villamos szilárdságú legyen az elektródák közötti szigetelőanyag, hogy az elektródák közé kapcsolt U=10 kV feszültség hatására még ne üssön át?

(b) Határozza meg az elrendezés kapacitását.

Megoldás

(a) $U = \Phi(A) - \Phi(B),$

$$\Phi(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d - r_0}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right) = -\Phi(B)$$



$$U = 2\Phi(A) = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right) = 10^4 V,$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon} = \frac{U}{2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)} = \frac{10^4}{2\left(\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-2}} - \frac{1}{20\cdot 10^{-2}}\right)} = 81{,}0811$$

$$E_{\max} = E_A = E^{(+)} + E^{(-)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{d^2}\right) = \frac{U}{2(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d})}\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{d^2}\right)$$

$$= \frac{10^4}{2(\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-2}} - \frac{1}{20\cdot 10^{-2}})}\left(\frac{1}{1{,}5^2\cdot 10^{-4}} + \frac{1}{20^2\cdot 10^{-4}}\right)$$

$$= 3{,}5833 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m} = 3{,}5833\,\mathrm{kV/cm}$$

(b)

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)} = \frac{2\pi 10^{-9}}{4\pi 9}\frac{1}{\left(\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-2}} - \frac{1}{20\cdot 10^{-2}}\right)} = 9{,}0090\cdot 10^{-13} = 0{,}9\mathrm{pF}$$

12. Feladat

Egy koaxiális kábel külső sugara $r_2 = 10\text{cm}$. Mekkoraára válasszuk a belső elektróda r_1 sugarát, hogy U=10 kV mellett a fellépő maximális térerősség minimális legyen. mekkora ez a térerősség, ha $\varepsilon_r = 1$.

Megoldás

$$U = \Phi(r_1) - \underbrace{\Phi(r_2)}_{0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}, \qquad E_{\max} = E(r_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1} = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r_1}$$

$(E_{\max})_{\min}$ ha a nevező maximális, ui. ha $r_2 = r_1$, ill. $r_1 = 0$ esetén a nevező nulla.

A nevező maximális, szélső értéke

$$\frac{d}{dr_1}\left(r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{d}{dr_1}\left(r_1(\ln r_2 - \ln r_1)\right) = (\ln r_2 - \ln r_1) - r_1\frac{1}{r_1} = \ln\frac{r_2}{r_1} - 1 = 0$$

$$\mathrm{r}_1 = \frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{e}} = 0{,}368\,\mathrm{r}_2,$$

$$(E_{\max})_{\min} = \frac{U}{r_1} = \frac{10^4}{0{,}368 \cdot 0{,}1} = 2{,}7174 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m} = 2{,}7174\,\mathrm{kV/cm}$$

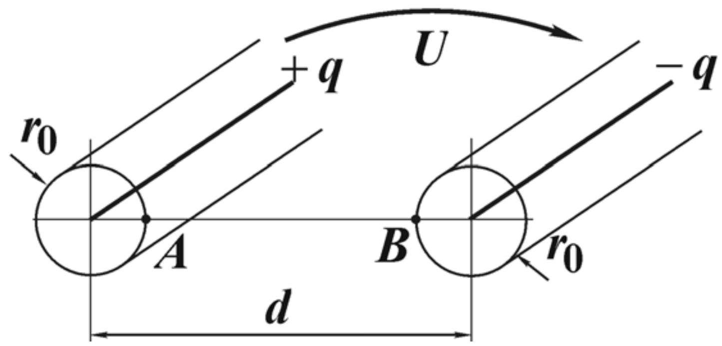
13. Feladat

Két egymással párhuzamos $r_0 = 2\text{cm}$ sugarú fémhenger tengelyeinek távolsága d=15 cm ($d >> r_0$).

(a) Mekkora maximális feszültség kapcsolható az elektródák közé, ha a szigetelőanyagban a megengedett maximális térerősség 10kV/cm.

(b) Határozza meg az elrendezés l=15 m hosszúságú szakaszának kapacitását.

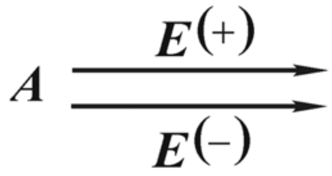
Megoldás



(a) $$U = \Phi(A) - \underbrace{\Phi(B)}_{ref.\ pont} = \Phi(A)$$

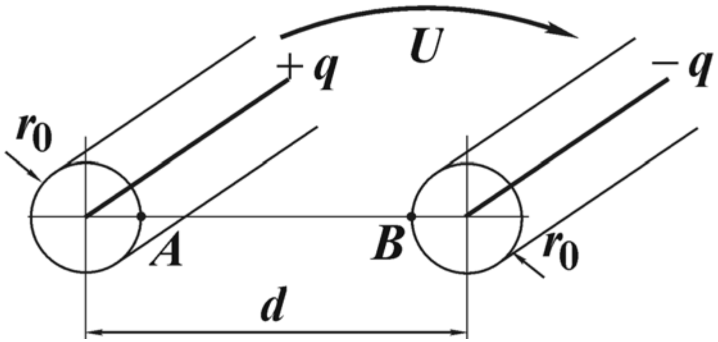
$$\Phi(A) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{d - r_0}{r_0} - \ln\frac{r_0}{d - r_0} \right)$$

$$= 2\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d - r_0}{r_0} \approx \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$$



$$E_{max} = E(A) = E^{(+)} + E^{(-)}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d - r_0} \right) \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d} \right) = 10^6 \, V/m$$



$$E_{\max} = E(A) = E^{(+)} + E^{(-)}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d - r_0}\right) \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d}\right) = 10^6\,\mathrm{V/m}$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon} = \frac{E_{\max}}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d}} = \frac{10^6}{\frac{1}{2\cdot 10^{-2}} + \frac{1}{15\cdot 10^{-2}}} = 1{,}7647\cdot 10^4$$

$$U = \frac{E_{\max}}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d}} \ln\frac{d}{r_0} = 1{,}7647\cdot 10^4 \ln\frac{15}{2} = 3{,}5557\cdot 10^4\,\mathrm{V} = 35{,}557\,\mathrm{kV}$$

(b) $$U = \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{\frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}} = \frac{\pi\varepsilon\, l}{\ln(d/r_0)} = \frac{\pi 10^{-9}\cdot 15}{4\pi 9\cdot \ln(15/2)} = 2{,}0679\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 20{,}679\mathrm{nF}$$

Gy.3. Gyakorló feladatok

[1] **Egy $r_0 = 10\,\text{cm}$ sugarú gömbfelületen $\sigma = 12\,\text{pC}$ nagyságú felületi töltéssűrűség helyezkedik el egyenletes eloszlásban. Határozza meg, mekkora a gömb töltése.**

[2] **Egy $l = 1{,}6\,\text{m}$ hosszú, $r_0 = 0{,}42\,\text{mm}$ sugarú rúdon $Q = 32\,\text{nC}$ töltés helyezkedik el. Határozza meg a rúd egységnyi hosszúságú szakaszán a töltéssűrűséget.**

[3] **Egy $r_1 = 12\,\text{cm}$ sugarú tárcsa egyik felületén $Q = 1{,}8\,\text{nC}$ töltés helyezkedik el egyenletes eloszlásban. Határozza meg a tárcsa felületi töltéssűrűségét.**

[4] **Mekkora az a Q pontszerű töltés, amely a tőle $r_1 = 1{,}2\,\text{cm}$ és $r_2 = 2{,}4\,\text{cm}$ távolságra lévő pontok között $U_{12} = 10\,\text{kV}$ feszültséget hoz létre levegőben.**

[5] **Mekkora Φ potenciált hoz létre a $Q = 2\,\mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés, a tőle $r_1 = 25\,\text{cm}$ távolságra lévő pontban, ha a nullapotenciálú helyet a töltéstől**

$r_2 = 50\,\text{cm}$ távolságban definiáljuk. A szigetelőanyag relatív permittivitása $\varepsilon_r = 2$.

[6] **Mekkora annak a q vonalszerű töltésnek a nagysága, amely tőle $r_1 = 35\,\text{cm}$ távolságban $\Phi_1 = 38\,\text{kV}$ nagyságú potenciált hoz létre az $r_2 = 60\,\text{cm}$ távolságra elhelyezett referencia ponthoz képest. A szigetelőanyag relatív permittivitása $\varepsilon_r = 3{,}4$.**

[7] **Határozza meg a $q = 2\,\mu\text{C/m}$ nagyságú vonalszerű töltéstől $r_1 = 15\,\text{cm}$ és $r_2 = 45\,\text{cm}$ távolságban lévő pontok között levegőben fellépő U_{12} feszültséget.**

[8] **Határozza meg a $Q = 3\,\mu\text{C}$ nagyságú töltéstől $r_1 = 25\,\text{cm}$ távolságban az E_1 elektromos térerősség értékét, ha a szigetelőanyag levegő.**

[9] **Határozza meg a $q = 4\,\mu\text{C/m}$ nagyságú vonalszerű töltéstől $r_1 = 5\,\text{cm}$ távolságban az E_1 elektromos térerősség értékét, ha a teret kitöltő szigetelőanyag levegő.**

[10] **Mekkora az a Q pontszerű töltés, amely tőle $r_1 = 24\,\mathrm{cm}$ távolságban $E_1 = 5\,\mathrm{kV/cm}$ elektromos térerősséget hoz létre az $\varepsilon_r = 2{,}4$ relatív permittivitású szigetelőanyagban.**

[11] **Az $\varepsilon_r = 3{,}2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban mekkora q vonalszerű töltés hoz létre tőle $r_1 = 18\,\mathrm{cm}$ távolságban $E_1 = 32\,\mathrm{kV/cm}$ elektromos térerősséget.**

[12] **Mekkora U_{12} feszültséget hoz létre az $\varepsilon_r = 3$ relatív permittivitású közegben az a q vonalszerű a tőle $r_1 = 12\,\mathrm{cm}$ és $r_2 = 18\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontok között, amely az r_1 távolságban lévő pontban $E_1 = 23\,\mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térerősséget kelt.**

[13] **Mekkora U_{12} feszültséget kelt az $\varepsilon_r = 1{,}6$ relatív permittivitású közegben az a q vonalszerű töltés a tőle $r_1 = 18\,\mathrm{cm}$ és $r_2 = 24\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontok között,**

amely az r_2 távolságban lévő pontban $E_2 = 18\,\mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térerősséget hoz létre.

[14] **Mekkora E_1 elektromos térerősséget hoz létre a tőle $r_1 = 15\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontban az a Q pontszerű töltés, amely a r_1 és $r_2 = 42\,\mathrm{cm}$ távolságban lévő pontok között $U_{12} = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget generál.**

[15] **Mekkora E_1 elektromos térerősséget hoz létre az a q vonalszerű töltés a tőle $r_1 = 24\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő pontban, amely az r_1 és $r_2 = 16\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő pontok között $U_{12} = 26\,\mathrm{kV}$ feszsültséget állít elő.**

[16] **Két $q = \pm 2\mu C / m$ nagyságú párhuzamos vonaltöltés egymástól $d = 24\,\mathrm{cm}$ távolságra helyezkedik el. Mekkora E elektromos térerősséget hoznak létre a vonaltöltések tengelyeit összekötő egyenes felezőpontjában.**

[17] **Két $Q = \pm 16\,\mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés egymástól $d = 16\,\text{cm}$ távolságban helyezkedik el. Mekkora E elektromos térerőssége lép fel a két töltést összekötő egyenes mentén a pozitív töltéstől $d/2$ távolságra.**

[18] **Három egyforma $Q = 2\,\mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés egy egyenlő oldalú háromszög három csúcspontjában helyezkedik el. Mekkora az E elektromos térerősség (a) a háromszög oldalfelező pontjában, (b) a háromszög súlypontjában.**

[19] **Mekkora annak a légszigetelésű síkkondenzátornak a kapacitása, amelynek $a = 12\,\text{cm}^2$ felületű lemezei $d = 3{,}2$ cm távolságban helyezkednek el.**

[20] **Egy $C = 3{,}6\,\text{nF}$ kapacitású síkkondenzátor egyik lemezén $Q = 3\,\mu\text{C}$ nagyságú töltés helyezkedik el. Mekkora a lemezek között fellépő feszültség.**

[21] **Mekkora annak a síkkondenzátornak a kapacitása, amelyre $U = 15\,\text{kV}$ feszültséget kapcsolva a lemezekre $Q = \pm 24\,\mu\text{C}$ töltést viszünk fel.**

[22] **Mekkora töltést viszünk annak a $C = 12\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású síkkondenzátor lemezeire, amelyet $U = 16\,\mathrm{kV}$ feszültségre kapcsolunk.**

[23] **Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a kapacitása, amely lemezeinek távolságát kétszeresére növeljük.**

[24] **Mekkorára változik annak a kondenzátornak a töltése, amelynek a feszültségét felére csökkentjük.**

[25] **Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a töltése, amelynek ugyanakkora feszültség mellett a lemezeinek távolságát felére csökkentjük.**

[26] **Mekkorára változik annak a síkkondenzátornak a feszültsége, amelynek ugyanakkora töltés mellett a lemezeinek távolságát kétszeresére növeljük.**

[27] **Határozza meg a légszigetelésű síkkondenzátornak $d = 1{,}2\,\mathrm{cm}$ távolságra lévő lemezei között az elektromos térerősség értékét, ha a lemezekre $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.**

[28] **Két gömb alakú elektróda sugara $r_0 = 2\,\text{cm}$, középpontjaik távolsága $d = 32\,\text{cm}$, ($d >> r_0$). Mekkora töltést viszünk az elektródákra, ha $U = 12\,\text{kV}$ feszültségre kapcsoljuk. A szigetelőanyag levegő.**

[29] **Két $r_0 = 1{,}5\,\text{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda $\varepsilon_r = 3{,}2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban helyezkedik el. Középpontjaik távolsága $d = 20\,\text{cm}$ ($d >> r_0$). Határozza meg az elektromos térerősség értékét abban a pontban, amely a két középpontot összekötő egyenesen és ugyanakkor az egyik elektróda felületén helyezkedik el, ha az elektródák töltése $\pm 2\,\mu\text{C}$.**

[30] **Két gömb alakú elektróda sugara $r_0 = 3\,\text{cm}$, középpontjaik távolsága $d = 45\,\text{cm}$ ($d >> r_0$). Az elektródák közé $U = 12\,\text{kV}$ feszültséget kapcsolunk. Határozza meg a középpontokat összekötő egyenes felezőpontjában az elektromos térerősség értékét, ha a szigetelőanyag levegő.**

[31] **Két $r_0 = 1{,}2\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda $\varepsilon_r = 1{,}6$ relatív permittivitású szigetelőanyagban, egymástól $d = 32\,\mathrm{cm}$ távolságra helyezkedik el, $d \gg r_0$. Határozza meg az elrendezés kapacitását.**

[32] **Két $r_0 = 1{,}8\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda középpontjainak távolsága $d = 24\,\mathrm{cm}$, $(d \gg r_0)$. Mekkora feszültség kapcsolható az elektródák közé, ha a teret kitöltő szigetelőanyagban az elektromos térerősség maximális értéke $E_{\max} = 10\,\mathrm{kV/cm}$ lehet.**

[33] **Két gömb alakú elektróda sugara $r_0 = 1{,}2\,\mathrm{cm}$, középpontjaik távolsága $d = 20\,\mathrm{cm}$, $(d \gg r_0)$. Mekkora lesz az elektródákon ébredő maximális térerősség értéke, ha az elektródákra $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.**

[34] **Határozza meg két $r_0 = 1{,}4\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda középpontjainak távolságát, ha azokat $U = 21\,\mathrm{kV}$ feszültségre kapcsolva $Q = \pm 20\,n\mathrm{C}$ töltést viszünk az elektródákra.**

[35] **Határozza meg a szabad térben magában álló $r_0 = 1{,}2\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb kapacitását.**

[36] **Határozza meg annak a szabad térben magában álló $r_0 = 1{,}4\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb potenciálját, amelyre $Q = 2\ \mu\mathrm{C}$ töltést viszünk fel.**

[37] **Két párhuzamos tengelyű hengeres vezető sugara $r_0 = 2\,\mathrm{cm}$, tengelyeik távolsága $d = 32\,\mathrm{cm}$, $(d >> r_0)$. Mekkora töltést viszünk a hengeres elektróda $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ hosszúságú szakaszára, ha $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültségre kapcsoljuk. A szigetelőanyag levegő.**

[38] **Két $r_0 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ sugarú párhuzamos tengelyű hengeres elektróda $\varepsilon_r = 3{,}2$ relatív permittivitású szigetelőanyagban helyezkedik el. Tengelyeik távolsága $d = 20\,\mathrm{cm}$ $(d >> r_0)$. Határozza meg az elektromos térerősség értékét abban a pontban amely a két tengelyt összekötő egyenesen és ugyanakkor az egyik elektróda felületén helyezkedik el, ha az $l = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ hosszú hengeres elektródák töltése $\pm 2\ \mu\mathrm{C}$.**

[39] **Két párhuzamos tengelyű, hengeres elektróda sugara $r_0 = 3\,\text{cm}$, tengelyeinek távolsága $d = 45\,\text{cm}$ $(d >> r_0)$. Az elektródák közé $U = 12\,\text{kV}$ feszültséget kapcsolunk. Határozza meg a tengelyeket összekötő egyenes felezőpontjában az elektromos térerősség értékét, ha a szigetelőanyag levegő.**

[40] **Két $r_0 = 1{,}2\,\text{cm}$ sugarú párhuzamos tengelyű hengeres elektróda $\varepsilon_r = 1{,}6$ relatív permittivitású szigetelőanyagban, helyezkedik el, tengelyeinek távolsága $d = 32\,\text{cm}$, $d >> r_0$. Határozza meg az elrendezés $l = 3{,}2\,\text{m}$ hosszúságú szakaszának kapacitását.**

[41] **Két $r_0 = 1{,}8\,\text{cm}$ sugarú párhuzamos tengelyű hengeres elektróda tengelyeinek távolsága $d = 24\,\text{cm}$, $(d >> r_0)$. Mekkora feszültség kapcsolható az elektródák közé, ha a teret kitöltő szigetelőanyagban az elektromos térerősség maximális értéke $E_{\max} = 10\,\text{kV/cm}$ lehet.**

[42] **Két párhuzamos tengelyű hengeres elektróda sugara $r_0 = 1{,}2\,\mathrm{cm}$, tengelyeinek távolsága $d = 20\,\mathrm{cm}$, $(d >> r_0)$. Mekkora lesz az elektródákon ébredő maximális térerősség értéke, ha az elektródákra $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.**

[43] **Határozza meg két párhuzamos tengelyű $r_0 = 1{,}6\,\mathrm{cm}$ sugarú hengeres elektróda tengelyeinek d távolságát, ha azokra $U = 100\,\mathrm{V}$ feszültségre kapcsolva az elektródák $l = 2{,}8\,\mathrm{m}$ hosszúságú szakaszára $Q = \pm 3\,\mathrm{nC}$ töltést viszünk.**

[44] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 2\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 5\,\mathrm{cm}$, a két elektróda közötti teret $\varepsilon_r = 2{,}4$ relatív permittivitású közeg tölti ki. A koaxiális kábelre $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolva határozza meg az elektródák töltését.**

[45] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 6\,\mathrm{cm}$, a két elektróda közötti teret $\varepsilon_r = 3{,}2$ relatív permittivitású közeg tölti ki. Határozza meg az elrendezésben ébredő**

maximális térerősség értékét, ha az elektródák közé $U = 18\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.

[46] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 3{,}2\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 8\,\mathrm{cm}$, a két elektróda közötti teret $\varepsilon_r = 2{,}8$ relatív permittivitású közeg tölti ki. Határozza meg az elrendezés kapacitását.**

[47] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 1{,}8\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 4{,}2\,\mathrm{cm}$. Határozza meg az elektródák közé kapcsolható maximális feszültséget, ha a teret kitöltő szigetelőanyag $E_{\max} = 28\,\mathrm{kV/m}$ villamos térerősséget bír el átütés nélkül.**

[48] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 0{,}8\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 3{,}6\,\mathrm{cm}$, a két elektróda közötti teret $\varepsilon_r = 1{,}2$ relatív permittivitású közeg tölti ki. A koaxiális kábelre $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolva határozza meg az r_2 sugarú elektróda falán fellépő elektromos térerőssé értékét.**

[49] **Határozza meg mekkora elektromos energiát tárol a $C = 3\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátor ha $Q = \pm 3\ \mu\mathrm{C}$ töltést viszünk a lemezekre.**

[50] **Mekkora elektromos energiát tárol az a kondenzátor amely elektródái $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültség hatására $Q = \pm 3{,}2\ \mu\mathrm{C}$ töltéssel töltődik fel.**

[51] **Mekkora F erő hat azon $q = 3\ \mu\mathrm{C/m}$ vonalszerű töltés $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ hosszúságú szakaszára, amelyet $E = 12\,\mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térbe helyezünk.**

[52] **Mekkora erővel hat a $Q = 3{,}5\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú pontszerű töltés a tőle $r = 18\,\mathrm{cm}$ távolságra elhelyezett $Q_0 = 15\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú próbatöltésre.**

[53] **Mekkora az az E elektromos tér, amely $F = 0{,}2\,\mathrm{N}$ erőhatást gyakorol a $Q = 2{,}4\ \mu\mathrm{C}$ nagyságú töltésre.**

[54] **Mekkora az a Q pontszerű töltés, amelyre $E = 2\,\mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térben $F = 30\,\mathrm{mN}$ nagyságú erő hat.**

[55] **Mekkora az a q vonalszerű töltés, amelynek $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ hosszúságú szakaszára az $E = 12\,\mathrm{kV/cm}$ nagyságú elektromos térben $F = 30\,\mathrm{mN}$ nagyságú erő hat.**

[56] **Határozza meg mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy a $Q = 2\,\mu\mathrm{C}$ nagyságú pontszerű töltést a $\Phi_1 = 10\,\mathrm{kV}$ potenciálú helyről a $\Phi_2 = 3\,\mathrm{kV}$ potenciálú helyre mozdítsuk el.**

[57] **Határozza meg hányszorosára változik a $C = 12\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátorra kapcsolt feszültséget $U_1 = 10\,\mathrm{kV}$-ról $U_2 = 21\,\mathrm{kV}$-ra növeljük.**

[58] **Határozza meg hányszorosára változik a $C = 16\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátorra kapcsolt feszültséget $U_1 = 22\,\mathrm{kV}$-ról $U_2 = 8\,\mathrm{kV}$-ra csökkentjük.**

[59] **Határozza meg hányszorosára változik a $C = 6\,\mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorban a tárolt elektromos energia, ha a kondenzátor töltését felére csökkentjük.**

[60] **Határozza meg hányszorosára változik a síkkondenzátor energiája, ha állandó feszültség mellett a lemezek távolságát felére csökkentjük.**

[61] **Oldja meg az előző feladatot, ha a kondenzátor töltését tartjuk állandónak.**

[62] **Mekkora erőhatás lép fel két $r_0 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ sugarú gömb alakú elektróda között, ha középpontjaik távolsága $d = 28\,\mathrm{cm}$, és az elektródák közé $U = 18\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.**

[63] **Mekkora erőhatás lép fel két párhuzamos tengelyű $r_0 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ sugarú hengeres elektróda $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ hosszú szakasza között, ha középpontjaik távolsága $d = 28\,\mathrm{cm}$, és az elektródák közé $U = 18\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.**

[64] **Egy koaxiális kábel belső elektródájának sugara $r_1 = 0{,}8\,\mathrm{cm}$, külső elektródájának belső sugara $r_2 = 3{,}6\,\mathrm{cm}$, a két elektróda közötti teret $\varepsilon_r = 1{,}2$**

relatív permittivitású közeg tölti ki. Határozza meg mekkora erőhatás lép fel a hengerkondenzátor külső elektródáján, ha a koaxiális kábelre $U = 12\,\mathrm{kV}$ feszültséget kapcsolunk.

Megoldások

[1] $\boldsymbol{Q = \sigma \cdot 4 r_0^2 \pi = 12 \cdot 10^{-12} 4\pi \cdot 0{,}1^2 = 1{,}5080 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} = 1{,}5080\,\mathrm{pC}.}$

[2] $\boldsymbol{q = Q/l = 32 \cdot 10^{-9}/1{,}6 = 20 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} = 20\,\mathrm{nC}.}$

[3] $$\sigma = \frac{Q}{r_1^2 \pi} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-9}}{0{,}12^2 \pi} = 3{,}9789 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2} = 39{,}789\,\mathrm{nC/m^2}.$$

[4] **Minthogy,** $U_{12}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$**, rendezés után**

$$Q=\frac{U_{12}4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)}=\frac{10\cdot10^3 4\pi\,\dfrac{10^{-9}}{4\pi9}}{\left(\dfrac{1}{1{,}2\cdot10^{-2}}-\dfrac{1}{2{,}4\cdot10^{-2}}\right)}=8{,}2639\cdot10^{-11}\ \mathrm{C}=82{,}639\ \mathrm{pC}.$$

[5] $\Phi(r_1)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)=18000\ \mathrm{V}=18\ \mathrm{kV}$

[6] **Minthogy,** $\Phi_1=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$**, rendezés után**

$$q=\frac{\Phi_1 2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}=\frac{38\cdot10^3 2\pi\,\dfrac{10^{-9}}{4\pi9}\,3{,}4}{\ln\dfrac{60}{35}}=1{,}3317\cdot10^{-5}\ \mathrm{C/m}=13{,}317\ \mu\mathrm{C/m}.$$

[7] $$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{2\pi\,\frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \ln\frac{45}{15} = 3{,}9550\cdot 10^4\ \mathrm{V} = 39{,}550\ \mathrm{kV}.$$

[8] $$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1^2} = \frac{3{,}6\cdot 10^{-6}}{4\pi\,\frac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}25^2} = 518400\ \mathrm{V/m} = 5{,}184\ \mathrm{kV/cm}.$$

[9] $$E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} = \frac{4\cdot 10^{-6}}{2\pi\,\frac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}05} = 1440000\ \mathrm{V/m} = 14{,}4\ \mathrm{kV/cm}.$$

[10] **Minthogy** $E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r_1^2}$**, rendezés után**

$$Q = E_1 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_1^2 = 5\cdot 10^5\cdot 4\pi\,\frac{10^{-9}}{4\pi 9}\,2{,}4\cdot 0{,}24^2 = 7{,}68\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = 7{,}68\ \mu\mathrm{C}.$$

[11] **Minthogy** $E_1 = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{1}{r_1}$**, rendezés után**

$$q = E_1 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_1 = 32\cdot 10^5 \cdot 2\pi\,\frac{10^{-9}}{4\pi 9}\,3{,}2\cdot 0{,}18 = 1.0240\cdot 10^{-4}\ \mathrm{C} = 102{,}40\ \mu\mathrm{C}.$$

[12] **Minthogy** $E_1 = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r_1}$**, és** $U_{12} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$**, a térerősség ismeretében a feszültség meghatározható,**

$$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = E_1\cdot r_1\ln\frac{r_2}{r_1} = 23\cdot 10^5\cdot 0{,}12\ln\frac{0{,}18}{0{,}12} = 1{,}1191\cdot 10^5\ \mathrm{V} = 111{,}91\,\mathrm{kV}.$$

[13] **Minthogy** $E_2 = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r_2}$**, a térerősség ismeretében a feszültség**

$$U_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = E_2\cdot r_2\ln\frac{r_2}{r_1} = 18\cdot 10^5\cdot 0{,}24\ln\frac{0{,}24}{0{,}18} = 1{,}2428\cdot 10^5\ \mathrm{V} = 124{,}28\,\mathrm{kV}.$$

[14] **Az** $U_{12}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$ **feszültség ismeretében a térerősség meghatározható**

$$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1^2}=\frac{U_{12}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\frac{1}{r_1^2}=\frac{12\cdot 10^5}{\left(\frac{1}{0{,}15}-\frac{1}{0{,}42}\right)}\frac{1}{0{,}15^2}=.$$

$$=1{,}2444\cdot 10^7\ \mathrm{V/m}=124{,}44\,\mathrm{kV/cm}$$

[15] **Az** $U_{12}=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_1}{r_2}$ **feszültség ismeretében a térerősség**

$$E_1=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1}=\frac{U_{12}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\frac{1}{r_1}=\frac{26\cdot 10^5}{\ln\frac{0{,}24}{0{,}16}}\frac{1}{0{,}24}=2{,}6718\cdot 10^7=267{,}18\,\mathrm{kV/cm}.$$

[16] **Mindkét töltés hatását figyelembe véve az egyes töltések által keltett elektromos térerősségek vektoriálisan szuperponálódnak. Minthogy a kijelölt pont mindkét töltéstől azonos távolságra van, a térerősség komponensek abszolút értékei**

azonosak, $E^+ = E^- = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\dfrac{1}{d/2}$**, így a keresett térerősség**

$$E = E^+ + E^- = 2\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d/2} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}12} = 6\cdot 10^5\ \mathrm{V/m} = 6\,\mathrm{kV/cm}.$$

[17] **Az előző feladathoz hasonlóan, a** $+Q$ **töltés keltette elektromos térerősség** $E^+ = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{(d/2)^2}$**, a negatív töltés által keltett térerősség** $E^- = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{(3d/2)^2}$**. A két térerősség komponens vektori eredője**

$$E = E^+ - E^- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(d/2)^2}\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{16\cdot 10^{-6}}{4\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}08^2}\frac{8}{9} = 2\cdot 10^7\ \mathrm{V/m} = 200\,\mathrm{kV/cm}.$$

[18] **(a) Az oldalfelező pontban az oldalvonalon lévő töltések által keltett tér nulla, minthogy azok egyformanagyságúak és egyenlő távolságra vannak a vizsgált ponttól. Így a jelen esetben csak az oldallal szemben lévő töltés kelt elektromos**

teret, amely merőleges lesz az oldalvonalra és nagysága

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{4\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{a^2\frac{3}{4}} = 24000\ \mathrm{V/m} = 0{,}24\ \mathrm{kV/cm}.$$

(b) Az egyenlő oldalú háromszög középpontjában, a csúcspontokban elhelyezett, azonos előjelű töltések azonos nagyságú, a töltéstől a pont felé mutató elektromos térerősség komponenseket hoznak létre. Ezek vektori eredője nulla.

[19] $$C = \varepsilon_0 \frac{a}{d} = \frac{10^{-9}}{4\pi 9} \frac{12\cdot 10^{-4}}{3{,}2\cdot 10^{-2}} = 3{,}3157\cdot 10^{-13}\ \mathrm{F} = 0{,}33157\ \mathrm{pF}.$$

[20] $$U = \frac{Q}{C} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{3{,}6\cdot 10^{-9}} = 833{,}3333\ \mathrm{V}.$$

[21] $$C = \frac{Q}{U} = \frac{24\cdot 10^{-6}}{15\cdot 10^{3}} = 1{,}6\cdot 1\,\text{-}^{-9}\ \mathrm{F} = 1{,}6\ \mathrm{nF}.$$

[22] $Q = CU = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 10^{3} = 192 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C} = 0{,}192\ \mu\mathrm{C}$.

[23] **Minthogy** $C_1 = \varepsilon \frac{a}{d}$, **és** $C_2 = \varepsilon \frac{a}{d/2}$, **így** $C_2 / C_1 = 1/2$, **tehát felére csökken a kapacitása.**

[24] **Az előző feladathoz hasonlóan** $Q_1 = CU_1$, **és** $Q_2 = CU_2$, **de mivel** $U_2 = U_1 / 2$, **így** $Q_2 = Q_1 / 2$.

[25] **Minthogy** $Q_1 = C_1 U = \varepsilon \frac{a}{d} U$, **így** $Q_2 = \varepsilon \frac{a}{d/2} U = 2Q_1$.

[26] **Mivel** $U_1 = \frac{Q}{C_1} = Q \frac{d}{\varepsilon a}$, **így** $U_2 = \frac{Q}{C_1} = Q \frac{2d}{\varepsilon a} = 2U_1$.

[27] $E = U / d = \frac{12 \cdot 10^{3}}{0{,}12} = 10^{5}\ \mathrm{V/m} = 1\ \mathrm{kV/cm}$.

[28] **Minthogy $d >> r_0$, az elektródák töltését egy-egy, a gömb középpontjában elhelyezett $\pm Q$ töltéssel modellezzük. A $+Q$ töltésű elektróda felületén a potenciál értéke $\Phi_1 \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)$, a negatív töltésű elektróda felületén a potenciál értéke $\Phi_2 \approx \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)$, így a két elektróda között fellépő feszültség $U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)$, ahonnan az elektródákra vitt töltés**

$$Q = \frac{U 2\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)} = \frac{12\cdot 10^3 2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}}{\left(\frac{1}{0{,}02}-\frac{1}{0{,}32}\right)} = 1{,}4222\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} = 0{,}14222\ \mathrm{nC}.$$

[29] **A középpontokat összekötő egyenes és a pozitív töltésű elektróda felületén lévő pontban a pozitív töltés által keltett térerősség $E^+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_0^2}$, ugyanebben a pontban a negatív töltés $E^- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{d^2}$ elektromos teret kelt. Minthogy a térerősség vektor mennyiség, a két komponens vektoriálisan összegeződik, azaz**

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{d^2}\right) = \frac{2\cdot 10^{-6}}{4\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}3{,}2}\left(\frac{1}{0{,}015^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right) = .$$

$$= 2{,}5141\cdot 10^7 \text{ V/m} = 251{,}41\,\text{kV/cm}$$

[30] **Az elektródákra kapcsolt** $U = 2\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{d}\right)$ **feszültség ismeretében az elektródák töltése meghatározható, ahonnan a térerősség**

$$E = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(d/2)^2} = \frac{U}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)}\frac{1}{(d/2)^2} = \frac{12\cdot 10^3}{\left(\frac{1}{0{,}03} - \frac{1}{0{,}45}\right)}\frac{1}{0{,}225^2} = .$$

$$= 7{,}619\cdot 10^3\ \mathrm{V/m} = 761{,}9\ \mathrm{kV/cm}$$

[31] **Minthogy** $U = 2\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{d}\right)$**, az elektródák kapacitása**

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)} = \frac{2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}1{,}6}{\left(\frac{1}{0{,}012} - \frac{1}{0{,}32}\right)} = 1{,}1082\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 1{,}1082\ \mathrm{pF}.$$

[32] **Minthogy a maximális térerősség az egyik elektróda felületén a középpontokat összekötő egyenes metszéspontjában lép fel** $E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{d^2}\right)$**, ahonnan az elektródákra kapcsolható maximális feszültség**

$$U = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right) = 2\frac{E_{\max}}{\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{d^2}\right)}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right) =$$

$$= 2\frac{10^6}{\left(\frac{1}{0{,}018^2} + \frac{1}{0{,}24^2}\right)}\left(\frac{1}{0{,}018} - \frac{1}{0{,}24}\right) = 3{,}3299 \cdot 10^4 = 33{,}299\,\mathrm{kV}$$

[33] **Az előző feladathoz hasonlóan az elektródákra kapcsolt** $U = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)$ **feszültség ismeretében az elektródák töltése meghatározható és így a fellépő**

maximális térerősség

$$E_{\max}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{d^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{U}{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)}\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{d^2}\right)=$$

.

$$\frac{1}{2}\frac{12\cdot 10^3}{\left(\frac{1}{0{,}012}-\frac{1}{0{,}2}\right)}\left(\frac{1}{0{,}012^2}+\frac{1}{0{,}2^2}\right)=5{,}0301\cdot 10^5=5{,}0301\,\mathrm{kV/cm}$$

[34] **Az elektródákra kapcsolt** $U=2\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{d}\right)$ **feszültség és a Q töltés ismeretében a két gömb alakú elektróda középpontjainak távolsága meghatározható**

$$d=\frac{Qr_0}{Q-2\pi\varepsilon r_0U}=\frac{2\cdot 10^{-8}0{,}014}{2\cdot 10^{-8}-21\cdot 10^3 2\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}0{,}014}=0{,}0764\,\mathrm{m}=7{,}64\,\mathrm{cm}.$$

[35] **Minthogy a gömb feszültsége a végtelen távoli referencia ponthoz képest $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_0}$, a kapacitása**

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon r_0 = 4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 0{,}012 = 1{,}3333 \cdot 10^{-12} = 1{,}3333\,\mathrm{pF}.$$

[36] **A gömb alakú elektróda potenciálja**

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_0} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}}\frac{1}{0{,}014} = 1{,}2857\cdot 10^{6}\ \mathrm{V} = 1{,}2857\,\mathrm{kV}.$$

[37] **Az elektródákra kapcsolt feszültséggel $\pm q$ vonalmenti töltéssűrűséget viszünk az elektródákra, amely töltéssűrűségeket a $d >> r_0$ feltétel miatt a hengeres vezetők tengelyeiben helyezünk el. Ezen két töltés terében a $+q$ töltésű elektróda Φ_1 potenciálja, ha a nulla potenciálú helyet a $-q$ töltésű elektróda felületére választjuk $\Phi_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0} + \frac{-q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_0}{d} = \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$, amely egyben az**

elektródák között fellépő $U = \Phi_1$ feszültséget adja. Innen az elektródák l hosszúságú szakaszán elhelyezkedő töltés

$$Q = q \cdot l = \frac{U\pi\varepsilon l}{\ln \frac{d}{r_0}} = \frac{12 \cdot 10^3 \pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 1{,}2}{\ln \frac{0{,}32}{0{,}02}} = 1{,}4427 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} = 0{,}14427\ \mu\mathrm{C}.$$

[38] **A hengeres elektródák tengelyeiben elhelyezett $q = Q/l$ vonaltöltések elektromos terei vektoriálisan összegeződnek, azaz**

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{d}\right) = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2{,}5} \frac{1}{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 3{,}2}\left(\frac{1}{0{,}015} + \frac{1}{0{,}2}\right) = .$$

$$= 2{,}7750 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m} = 2{,}7750\,\mathrm{kV/cm}$$

[39] **Az elektródákra kapcsolt $U = \frac{q}{\pi\varepsilon} \ln \frac{d}{r_0}$ feszültség ismeretében az elektródák tengelyeiben elhelyezett vonaltöltések meghatározhatók, és a tengelyeket**

összekötő egyenes felezőpontjában az elektromos térerősség komponensek vektori eredője

$$E = 2\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{d/2} = \frac{U}{\ln d/r_0}\frac{1}{d/2} = \frac{12\cdot 10^3}{\ln\frac{0{,}45}{0{,}03}}\frac{1}{0{,}225} = 1{,}9694\cdot 10^4\ \mathrm{V/m} = 19{,}694\,\mathrm{kV/cm}.$$

[40] **Minthogy az elektródákra kapcsolt U feszültséggel az elektródákra felvitt töltést a hengeres elektródák tengelyeiben elhelyezett $\pm q$ vonalmenti töltéssűrűséggel modellezzük, így az elektródák között fellépő feszültség $U = \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$, ahonnan az elrendezés kapacitása**

$$C = \frac{ql}{U} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r_0}} = \frac{\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}1{,}6\cdot 3{,}2}{\ln\frac{0{,}32}{0{,}012}} = 4{,}3315\cdot 10^{-11}\ \mathrm{F} = 43{,}315\,\mathrm{pF}.$$

[41] **Az elektródákra kapcsolt U feszültséggel az elektródák tengelyeiben elhelyezett $\pm q$ vonalmenti töltéssűrűséggel modellezzük a felvitt töltéseket. Ezen**

töltéssűrűségek $E_{\max} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{d}\right) = 10\,\mathrm{kV/cm} = 10\cdot 10^5\ \mathrm{V/m}$ **maximális térerősséget hoznak létre az egyik elektróda felületén. Az elektromos térerősség ismeretében a töltéssűrűségek meghatározhatók és így az elektródákra kapcsolható feszültség**

$$U = \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0} = \frac{2E_{\max}}{\left(\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{d}\right)}\ln\frac{d}{r_0} = \frac{2\cdot 10^6}{\left(\dfrac{1}{0{,}018}+\dfrac{1}{0{,}24}\right)}\ln\frac{0{,}24}{0{,}018} = .$$

$$= 9{,}3180\cdot 10^4\ \mathrm{V} = 93{,}18\,\mathrm{kV}$$

[42] **Az elektródákra kapcsolt** $U = \dfrac{q}{\pi\varepsilon}\ln\dfrac{d}{r_0}$ **feszültség ismeretében az elektródák tengelyeiben elhelyezett vonalmenti töltéssűrűség meghatározható, és így az**

egyik elektródán ébredő maximális térerősség

$$E_{\max}=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{d}\right)=\frac{U}{2\ln\frac{d}{r_0}}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{d}\right)=$$

.

$$=\frac{12\cdot 10^3}{2\ln(0{,}2/0{,}012)}\left(\frac{1}{0{,}012}+\frac{1}{0{,}2}\right)=1{,}8838\cdot 10^5\ \mathrm{V/m}=1{,}8838\ \mathrm{kV/cm}$$

[43] **Az elektródák $Q=q\cdot l$ töltése és $U=\frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$ feszültsége ismeretében az l hosszúságú szakasz kapacitása meghatározható $C=\frac{Q}{U}=\frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r_0}}$, ahonnan némi számolással az elektródák tengelyeinek távolsága kiadódik**

$$d=r_0 e^{\frac{\pi\varepsilon l}{Q/U}}=0{,}016e^{\frac{\pi\frac{10^{-9}}{4\pi 9}2{,}8}{3\cdot 10^{-9}/100}}=0{,}2138\ \mathrm{m}=21{,}38\ \mathrm{cm}.$$

[44] **Minthogy az elektródák töltését a tengelyben elhelyezett vonaltöltés modellezi, így az elektródákra kapcsolt feszültség $U = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$, ahonnan az elektródák egységnyi hosszúságú szakaszának töltése**

$$q = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\dfrac{10^{-9}}{4\pi 9}2{,}4\cdot 12\cdot 10^3}{\ln\dfrac{5}{2}} = 1{,}7462\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/m} = 1{,}7462\ \mu\mathrm{C/m}.$$

[45] **Az $U = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$ ismeretében a belső elektróda töltése meghatározható. A maximális térerősség a belső elektróda felületén keletkezik**

$$E_{\max} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1} = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r_1} = \frac{18\cdot 10^3}{\ln(0{,}06/0{,}015)}\frac{1}{0{,}015} = .$$

$$= 8{,}6562\cdot 10^5\,\mathrm{V/m} = 8{,}6562\,\mathrm{kV/cm}$$

[46] **Minthogy az elektródák között fellépő feszültség** $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$**, az elrendezés egységnyi hosszúságú szakaszának kapacitása**

$$C = \frac{Q/l}{U} = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9} 2{,}8}{\ln(0{,}08/0{,}032)} == 1{,}6977 \cdot 10^{-10} = 169{,}77\,\mathrm{pF}.$$

[47] **Minthogy a maximális elektromos térerősség a belső elektróda felületén lép fel** $E_{\max} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1}$**, a belső elektróda tengelyében elhelyezett vonaltöltés meghatározható, így az elektródákra kapcsolható maximális feszültség**

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = E_{\max} r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} = 28 \cdot 10^3 \cdot 0{,}018 \ln \frac{0{,}042}{0{,}018} = 427{,}0381\,\mathrm{V} = 0{,}427\,\mathrm{kV}.$$

[48] **Az elektródákra kapcsolt** $U = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$ **feszültség ismeretében a külső elektródán fellépő elektromos térerősség**

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r_2} = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)}\frac{1}{r_2} = \frac{12\cdot 10^3}{\ln(0{,}036/0{,}008)}\frac{1}{0{,}036} = .$$

$$= 2{,}2162\cdot 10^5\,\mathrm{V/m} = 2{,}2162\,\mathrm{kV/cm}$$

[49] $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\left(3\cdot 10^{-6}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 10^{-6}} = 1{,}5000\cdot 10^{-6}\ \ \mathrm{Ws} = 1.5\ \ \mu\mathrm{Ws}.$

[50] $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}3{,}2\cdot 10^{-6}\cdot 12\cdot 10^3 = 0{,}0192\ \mathrm{Ws} = 19{,}2\ \ \mathrm{mWs}.$

[51] $F = QE = q\cdot l\cdot E = 3\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}2\cdot 12\cdot 10^5 = 0{,}0045\ \mathrm{N} = 4{,}5\,\mathrm{mN}.$

[52] $$F = Q_0 E = Q_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} = 15 \cdot 10^{-6} \frac{3{,}5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \frac{10^{-9}}{4\pi 9}} \frac{1}{0{,}18} = 2{,}6250\ \mathrm{N}.$$

[53] $$E = \frac{F}{Q} = \frac{0{,}2}{2{,}4 \cdot 10^{-6}} = 8{,}3333 \cdot 10^{4} = 0{,}83333\ \mathrm{kV/cm}.$$

[54] $$Q = \frac{F}{E} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{5}} = 1{,}5000 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} = 150\ \mathrm{nC}.$$

[55] $$q = \frac{Q}{l} = \frac{F}{l \cdot E} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 12 \cdot 10^{5}} = 2{,}0833 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m} = 20{,}833\ \ \mathrm{nC/m}.$$

[56] $$W = QU = Q(\Phi_1 - \Phi_2) = 2 \cdot 10^{-6}(10 - 3) \cdot 10^{3} = 0{,}0140\ \mathrm{Ws} = 14{,}0\ \ \mathrm{mWs}.$$

[57] **Minthogy** $W_1 = \frac{1}{2} C {U_1}^2$, $W_2 = \frac{1}{2} C {U_2}^2$, **a kondenzátor energiája** $W_2 / W_1 = U_2^2 / U_1^2 = 21^2 \big/ 10^2 = 4{,}41$**-szeresre nő.**

[58] **Az előző feladathoz hasonlóan a kondenzátor energiája** $W_2 / W_1 = U_2^2 / U_1^2 = 8^2 \big/ 2^2 = 0{,}1322$**-szeresére csökken.**

[59] **Minthogy** $W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, $W_2 = \frac{1}{2} \frac{(Q/2)^2}{C}$, **a kondenzátor energiája** $W_2 / W_1 = (Q/2)^2 \big/ Q^2 = 1/4$ **részére csökken.**

[60] **Minthogy a síkkondenzátor kapacitása** $C = \frac{\varepsilon a}{d}$, **a tárolt energia** d **lemeztávolság esetén** $W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon a}{d} U^2$, **míg** $d/2$ **lemeztávolság esetén**

$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon a}{d/2} U^2$, azaz a kondenzátor energiája $W_2 / W_1 = 2$-szeresére nő.

[61] **Állandó töltés esetén $W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon a / d}$, míg $W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon a} \frac{d}{2}$, és ezzel a térrész energiája felére csökken.**

[62] **Minthogy a két gömbelektróda kapacitása $C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{x}}$, a virtuális munka elve alapján $F = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{dx} \left(\dfrac{2\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{x}} \right) = -\frac{1}{2} U^2 \dfrac{2\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{x} \right)^2} \frac{1}{x^2}$, azaz a gömbelektródákat összehúzza.**

[63] **Minthogy a hengeres elektródák kapacitása** $C=\dfrac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{x}{r_0}}$**, a virtuális munka elve alapján** $F=\frac{1}{2}U^2\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2}U^2\frac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{x}{r_0}}\right)=-\frac{1}{2}U^2\dfrac{\pi\varepsilon}{\left(\ln\frac{x}{r_0}\right)^2}\frac{1}{x}$**, azaz a hengeres vezetőket összehúzza.**

[64] **Az előző feladatokhoz hasonlóan a hengerkondenzátor kapacitása** $C=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$**, valamint a virtuális munka elve alapján a külső elektródára ható erő**

$$F=\frac{1}{2}U^2\frac{dC}{dr_2}=\frac{1}{2}U^2\frac{d}{dr_2}\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)=-\frac{1}{2}U^2\frac{2\pi\varepsilon}{\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\frac{1}{r_2}.$$