MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

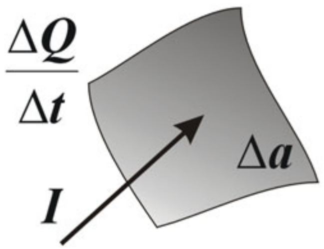
Professor Emeritus

2. Konferencia, Előadás

II. Stacionárius áramlási tér

(Áram elektromos tere)

1. Az áramlási tér forrásmennyisége az elektromos áram

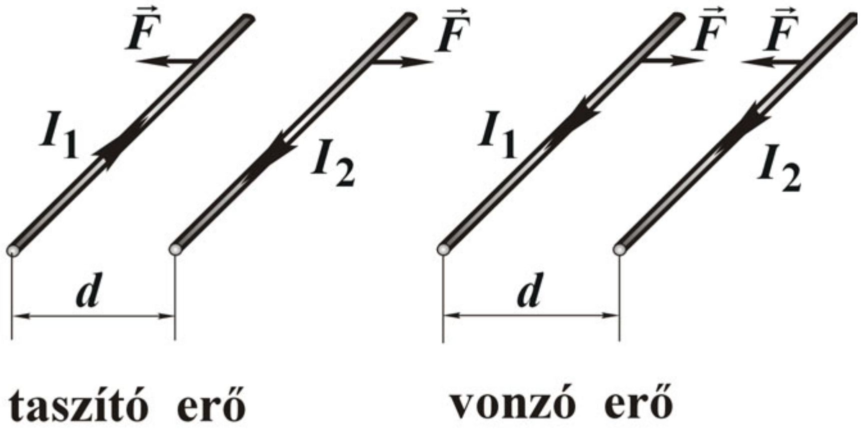


- mozgó töltések, töltések időbeli megváltozása áramot hoz létre,
- a töltéstől függetlenül is értelmezett,

$$\boxed{I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad [I] = 1A}$$

Jelenléte $\leftrightarrow$ erőhatás

$$\left|\vec{F}\right| = \mu \frac{I_1\, I_2}{2\pi}\frac{1}{d}$$



$\mu = \mu_0\, \mu_r$, **permeabilitás**

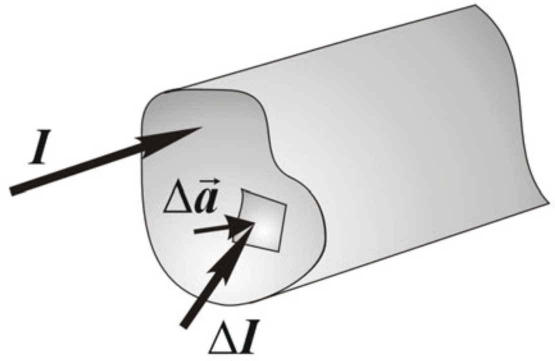
μ_r **– relatív premeabilitás**

levegőben $\mu_r = 1$

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}}$$ **– vákuum permeabilitása**

2. Árammodellek

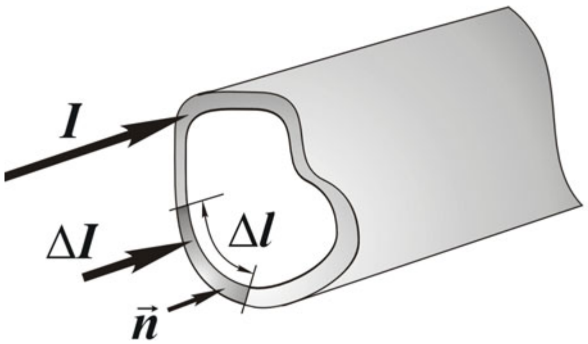
(a) Az áramsűrűség



$$\boxed{J_n(\vec{r}) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta a}, \quad [J] = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}}$$

Az *a* felület árama: $$I = \int_a \vec{J}(\vec{r})\, d\vec{a}$$

(b) Vonalmenti áramsűrűség



$$\boxed{K_n = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad [K_n] = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}$$

Az *l* vonaldarab árama

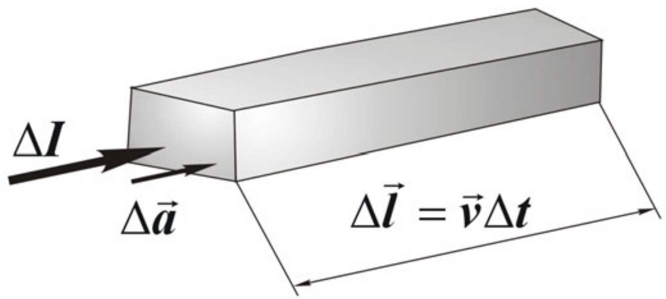
$$I = \int_l \vec{K}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, dl$$

(c) A felület teljes árama

$$I = \int_a J(\vec{r})\, d\vec{a} + \int_l \vec{K}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, dl + \sum_{k=1}^{N} I_k$$

(d) Töltéshordozók árama

$$\vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta a} = \frac{\Delta Q / \Delta t}{\Delta a} = \frac{\rho \Delta v}{\Delta t}\frac{1}{\Delta a}$$



$$\Delta v = \Delta\vec{a} \cdot \Delta\vec{l}$$

$$\vec{J} = \rho \frac{\Delta\vec{l}}{\Delta t} = \rho\, \vec{v}$$

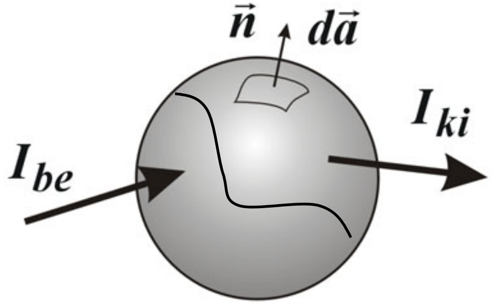
$\rho^{(+)}, \rho^{(-)}$ **töltéshordozók sebessége** $\vec{v}^{(+)}, \vec{v}^{(-)}$

$$\boxed{\vec{J} = \rho^{(+)}\vec{v}^{(+)} + \rho^{(-)}\vec{v}^{(-)}}$$

félvezetők, porleválasztók

3. Az áramlási tér gerjesztettsége és intenzitása

(a) A stacionárius áramlási tér gerjesztettsége



stacionárius áramlás

$$I_{be} - I_{ki} = 0$$

$$I_{be} = -\int_{a_1} \vec{J}_{be}\, d\vec{a},$$

$$I_{ki} = \int_{a_2} \vec{J}_{ki}\, d\vec{a},$$

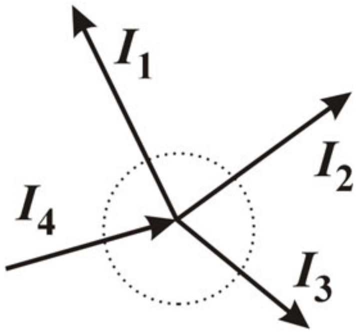
Kirchhoff áramtörvény

$$\boxed{\oint_a \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0,}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

(anyag/töltés megmaradási törvény)



(b) Az áramlási tér intenzitása, az elektromos térerősség

A töltések elmozdulásához

$$W = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{F} = Q\,\vec{E},$$

a munkavégzésből $\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$

Két pont között a feszültség

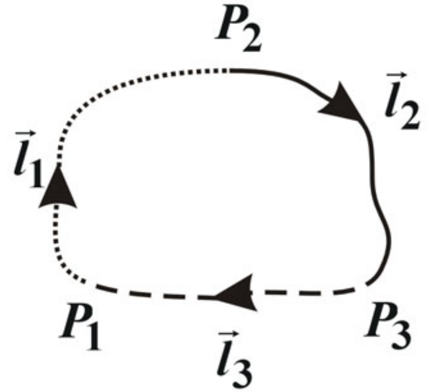
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Phi_A - \Phi_B$$

A potenciál $\quad \Phi_A = \int_A^0 \vec{E} \cdot d\vec{l},$

ahol a "0" pont a referencia pont, a nulla potenciálú pont

Kirchhoff feszültség törvény

(energia megmaradási törvény)



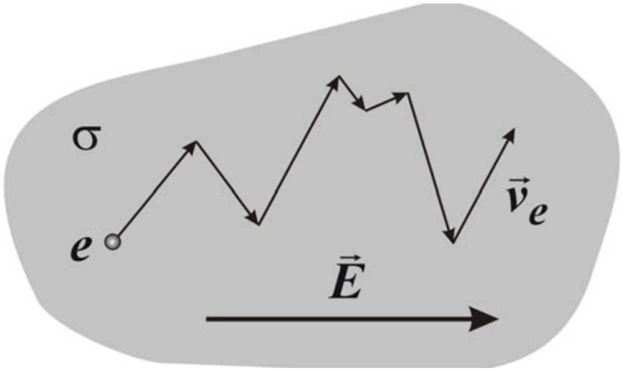
$$\int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{E} \cdot d\vec{l}_3 = 0$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0}$$

4. Vezető anyag elektromos térben

(a) Mikroszkopikus – makroszkopikus modell



$\vec{v}_e -$ elektron drifft sebessége

$\vec{v}_e = \mu_e \vec{E}$, $\mu_e -$ elektron mozgékonysága

$$\vec{J} = \rho\, \vec{v}_e = \rho \mu_e \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad [\sigma] = 1 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} = 1 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$$

Anyagok fajlagos vezetőképessége

anyag	σ [S/m]
ebonit	10^{-16}
PVC	10^{-13}
talaj	10^{-2}
aluminium	$35 \cdot 10^{6}$
réz	$57 \cdot 10^{6}$

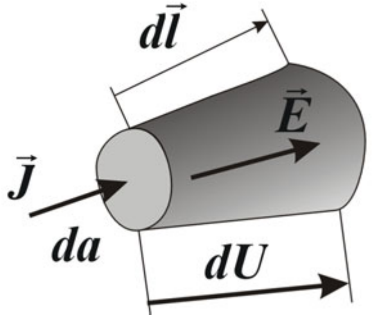
differenciális Ohm törvény (egyszerű alak) $\boxed{\vec{J} = \sigma\, \vec{E}}$

$\frac{1}{\sigma} = \rho$ fajlagos ellenállás

$$[\rho] = 1 \frac{\Omega\, \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

(b) Az ellenállás

$$dU = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\vec{J}}{\sigma} d\vec{l} = \frac{I}{da}\frac{dl}{\sigma} = I\frac{dl}{\sigma da} = I\,dR$$



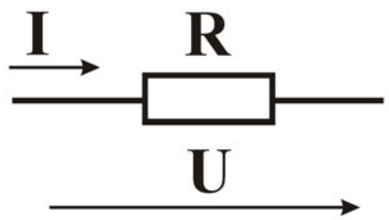
$$\boxed{dR = \frac{dl}{\sigma\, da} = \rho\frac{dl}{da},}$$

$$[\rho] = 1\frac{\Omega\,\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$ **fajlagos ellenállás**

(c) Az Ohm törvény

homogén közeg
állandó keresztmetszet

$$R = \frac{l}{\sigma\, a} = \rho\frac{l}{a}, \quad [R] = 1\,\Omega$$



$$\boxed{U = RI}$$

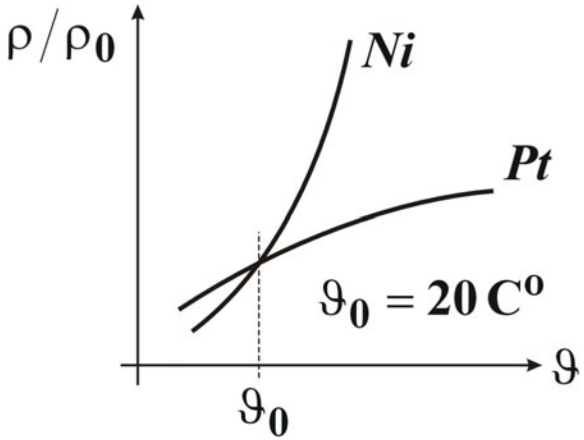
$$\boxed{I = \frac{1}{R}U}$$

$$\boxed{I = GU}$$

R – ellenállás

$$\boxed{\frac{1}{R} = G}$$ **G – konduktancia**

5. A fajlagos ellenállás hőmérséklet függése



(Taylor sor)

(a) kis hőmérséklet változás esetén

$$\rho(\vartheta) = \rho_0\left[1+\alpha_0(\vartheta-\vartheta_0)\right], \qquad \alpha_0\left[\frac{1}{C^o}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_0 - \text{ fajlagos ellenállás,} \\ \alpha_0 - \text{ hőfoktényező,}\end{array}\right\} \vartheta_0 - \text{hőfokon}$$

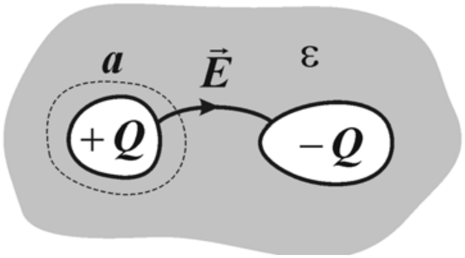
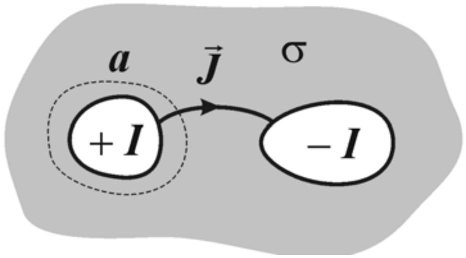
$$\boxed{R(\vartheta) = R_0\left[1+\alpha_0(\vartheta-\vartheta_0)\right]\ , \quad R_0 = R(\vartheta_0).}$$

(b) nagy hőmérséklet változás esetén

$$\rho(\vartheta) = \rho(\vartheta_0)\left(1+\alpha(\vartheta-\vartheta_0)+\beta(\vartheta-\vartheta_0)^2+\gamma(\vartheta-\vartheta_0)^3+\cdots\right)$$

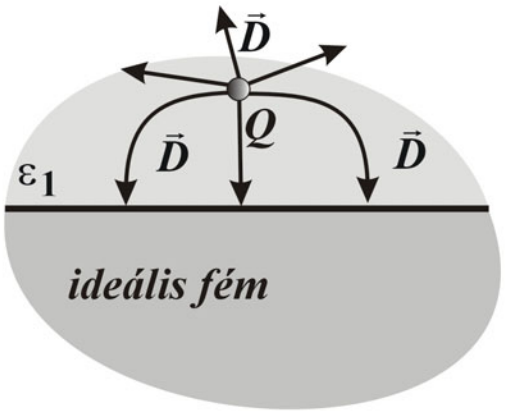
$$[\alpha] = 1\frac{1}{^oC} \qquad [\beta] = 1\frac{1}{^oC^2} \qquad [\gamma] = 1\frac{1}{^oC^3}$$

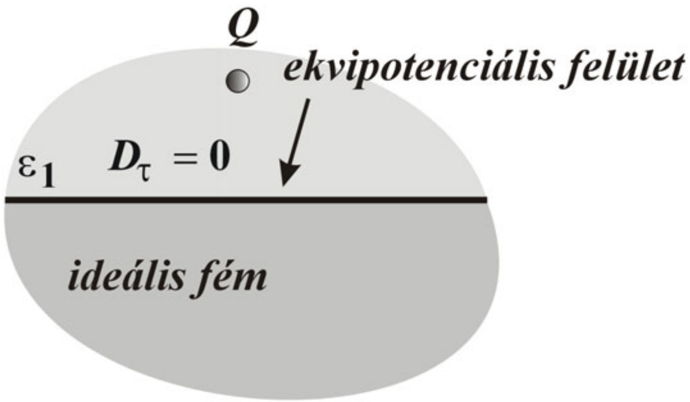
6. Analógia a statikus és a stacionárius elektromos tér között

Statikus elektromos tér	Stacionárius elektromos tér	
		**Analógia**
$\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q$	$\oint_a \vec{J}\cdot d\vec{a} = I$	$\vec{D} \leftrightarrow \vec{J}$
$\int_A^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \Phi_A$	$\int_A^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \Phi_A$	$\vec{E} \leftrightarrow \vec{E}$ $\quad U \leftrightarrow U$ $\Phi \leftrightarrow \Phi$
$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$	$\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$	$\varepsilon \leftrightarrow \sigma$
$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{U}\oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{U}\varepsilon\oint_a \vec{E}\cdot d\vec{a}$	$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{U}\oint_a \vec{J}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{U}\sigma\oint_a \vec{E}\cdot d\vec{a}$	$\boxed{\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$

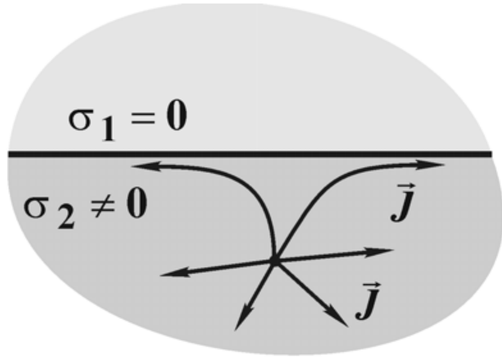
Ellentétek

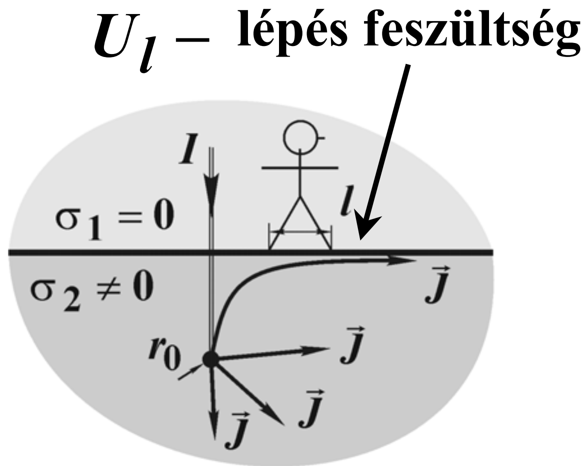
Ideális fém és szigetelő határfelülete





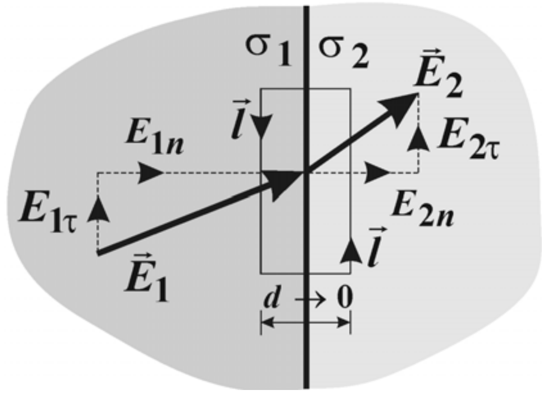
Vezető és szigetelő közeg határfelülete





7. Folytonossági feltételek -két vezető közeg határfelületén

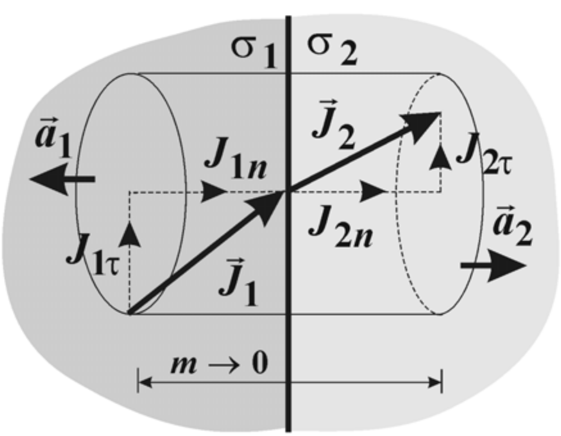
(a) Az $\vec{E}$ elektromos térerősség viselkedése közeghatáron



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad -E_{1\tau} l + E_{2\tau} l + E \cancel{d} = 0 \quad d \to 0$$

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}} \qquad \boxed{\frac{J_{1\tau}}{J_{2\tau}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

(b) A $\vec{J}$ áramsűrűség vektor viselkedése közeghatáron

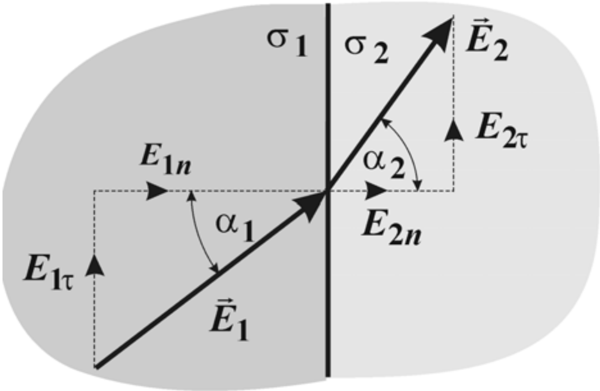


$$\oint_a \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0 \quad \text{ha } m \to 0, \quad a_1 = a_2 = a,$$

$$-J_{1n} a + J_{2n} a = 0$$

$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}} \qquad \boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

(c) Töréstörvények



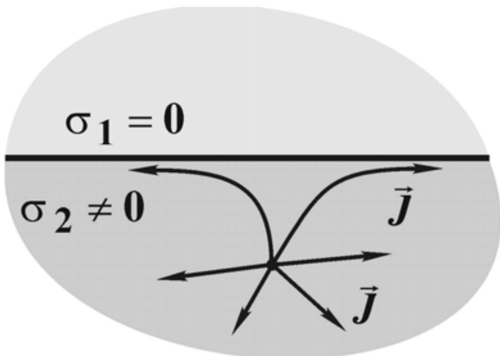
$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}=\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}\frac{E_{2n}}{E_{2\tau}}=\frac{E_{2n}}{E_{1n}}=\frac{J_{2n}}{\sigma_2}\frac{\sigma_1}{J_{1n}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

ha $\sigma_1 = 0$, akkor mivel

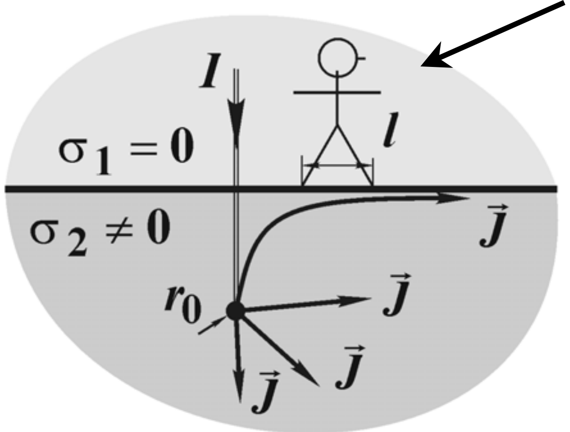
$$\sigma_2 \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sigma_1 \mathrm{tg}\,\alpha_2$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 \to \infty, \quad \alpha_2 = 90^{o}$$



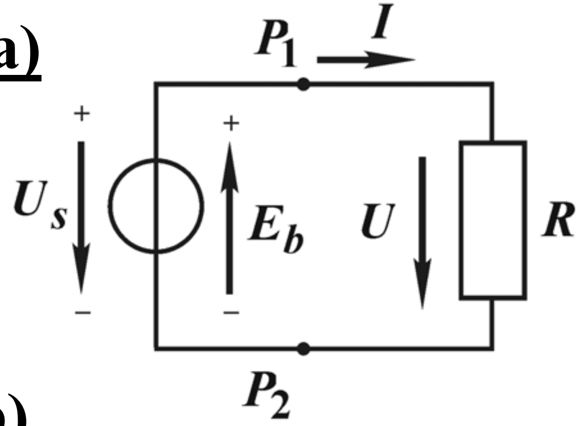
(d) Következménye

U_l = lépés feszültség



8. Beiktatott térerősség és a differenciális Ohm törvény

(a)

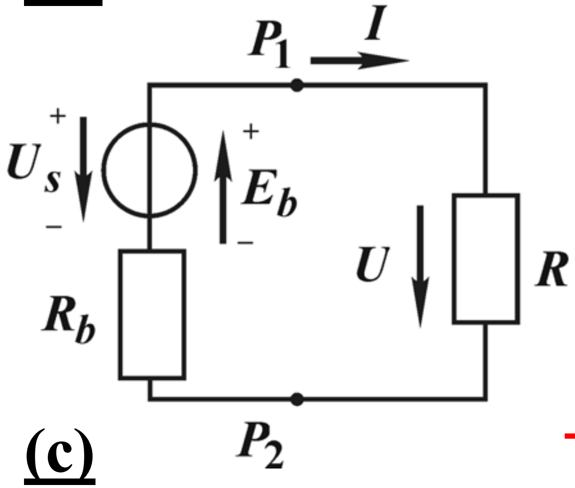


$$U = U_s$$

$$\int_{P_1\,(l_R)}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1\,(l_s)}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{P_1\,(l_s)}^{P_2} \vec{E}_b\cdot d\vec{l}$$

$\boxed{\vec{E} = -\vec{E}_b}$ **generátorban** $\quad \vec{E}_b$ **− töltéseket szétválasztó erő**

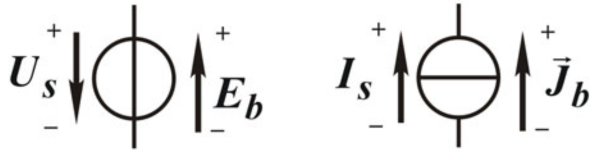
(b)



$$U = U_s - R_b I \qquad \vec{E} = \vec{J}/\sigma$$

$$\int_{P_1\,(l_R)}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1\,(l_s)}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{P_2\,(l_{R_b})}^{P_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1\,(l_s)}^{P_2} -\vec{E}_b\cdot d\vec{l} + \int_{P_1\,(l_{R_b})}^{P_2} \frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l}$$

(c)



$\vec{E} = -\vec{E}_b \qquad \vec{J} = \vec{J}_b$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_b\right)}$$

feszültség forrás

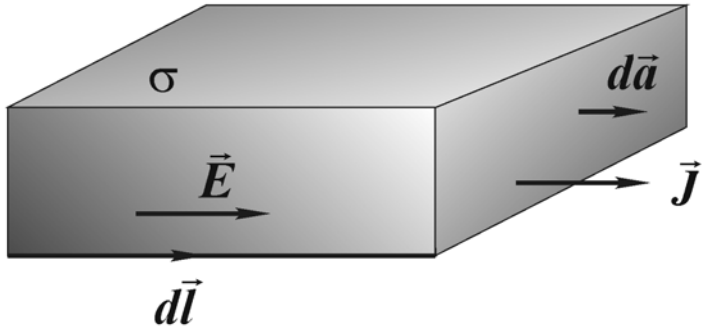
$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E} + \sigma\,\vec{E}_b + \rho\,\vec{v} + \vec{J}_b \longleftarrow \textbf{áramforrás}$$

9. Áramvezető teljesítménye

$$P = UI = RI^2 = GU^2, \quad [\mathrm{W}]$$

$$dv = d\vec{l} \cdot d\vec{a}$$

$$dP = ui = \left(\vec{E} \cdot d\vec{l}\right)\left(\vec{J} \cdot d\vec{a}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J}\, dv$$



teljesítmény sűrűség $p(\vec{r}) = \dfrac{dP}{dv}, \quad \left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$

$$p = \frac{dP}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_b\right) = \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} - \vec{E}_b \cdot \vec{J}$$

$$\boxed{p = \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} - \vec{E}_b \cdot \vec{J}}$$

vezetőben $p = \left|\vec{J}\right|^2 / \sigma$

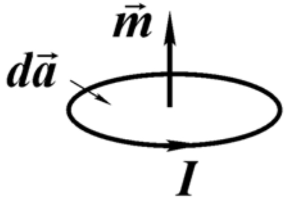
A *v* térfogat teljesítménye

$$P = \int_v p\, dv = \underbrace{\int_v \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} dv}_{\text{hővé váló teljesítmény}} - \underbrace{\int_v \vec{E}_b \cdot \vec{J}\, dv}_{\text{a generátor teljesítménye}}$$

III. Stacionárius mágneses tér

1. Jelenléte áramvezetőre ható erő

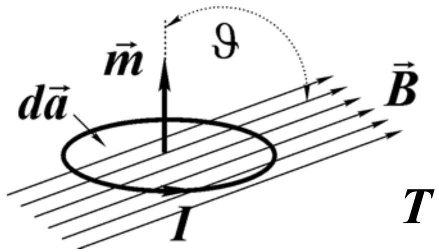
Elemi köráram, mágneses dipólus



$$\boxed{\vec{m} = I\, d\vec{a}}$$

mágneses dipólus momentum (nyomaték)

Mágneses térben---forgató nyomaték

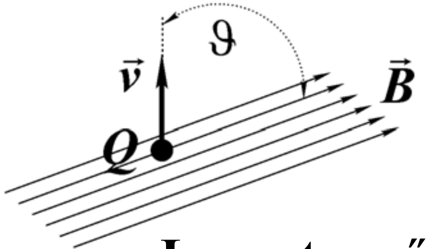


$$\boxed{\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

$$T = \left|\vec{T}\right| = mB \sin \vartheta$$

$$= I\, da\, B \sin \vartheta$$

Mozgó töltésre ható erő



$$\vec{F} = Q\, \vec{v} \times \vec{B} \qquad F = \left|\vec{F}\right| = Q\, v\, B \sin \vartheta$$

Lorentz erő

$$\boxed{\vec{F} = Q\left(\underbrace{\vec{E}}_{\text{elektromos térből}} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{mágneses térből}}\right)}$$

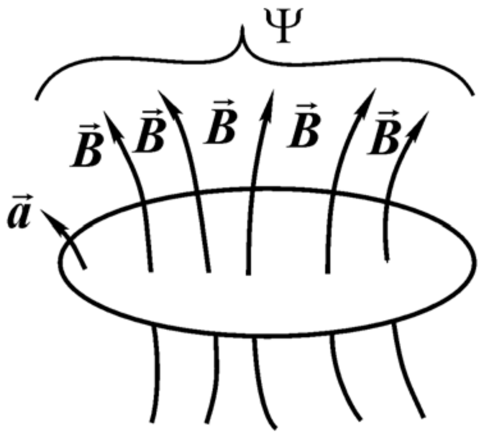
2. Szemléltetése

mágneses erővonalakkal

$$\left\{\begin{array}{l}\text{a tér nagysága=az erővonalak sűrűsége,}\\ \text{a tér iránya= az erővonal érintője.}\end{array}\right.$$

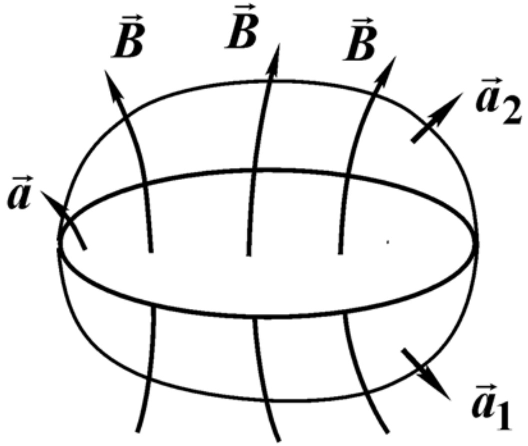
3. A mágneses tér intenzitása

A mágneses fluxus, a felületen áthaladó erővonalak száma



az $\vec{a}$ felület fluxusa $\boxed{\Psi = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad [\mathrm{Vs}]}$

Zárt felület fluxusa nulla



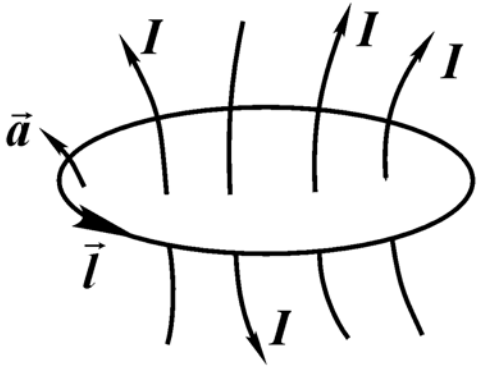
$$\Psi = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = \underbrace{-\int_{a_1} \vec{B} \cdot d\vec{a}_1 = \int_{a_2} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2}$$

$$\boxed{\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0}$$

zárt felület fluxusa nulla=
=nincsenek mágneses töltések

4. A mágneses tér gerjesztettsége

A gerjesztési törvény, tapasztalati törvény



$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu \int_a \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

A mágneses térerősség

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, [\mathrm{A/m}]}$$

μ -mágneses permeabilitás

$\mu = \mu_0 \mu_r$

μ_r --relatív permeabilitás,

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\right]$$

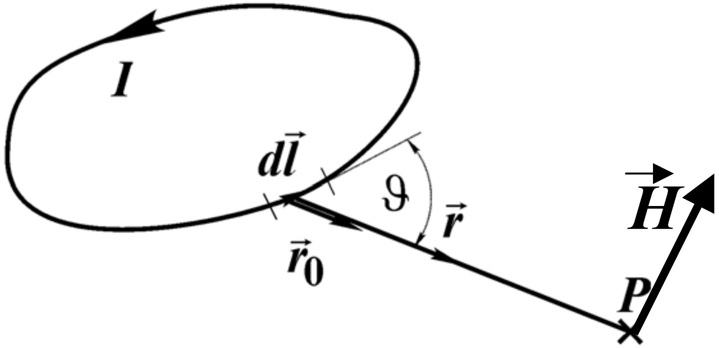
levegőre $\mu_r = 1$

$$\boxed{\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a \vec{J}\cdot d\vec{a} = \sum_k I_k}$$

alkalmazható, ha ismert az erővonalkép

5. A Biot-Savart törvény

ha nem ismert az erővonalkép, de ismert az áramvezető alakja

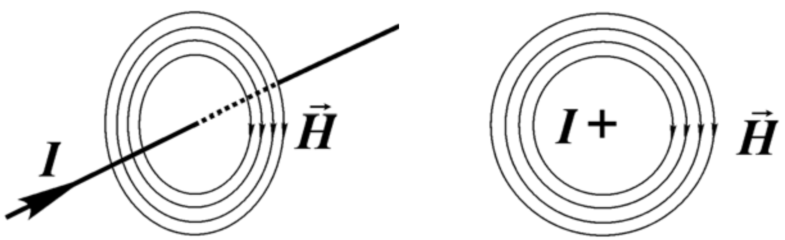


$$\boxed{\vec{H}(P) = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \left|d\vec{l}\times\vec{r}_0\right| = dl\,1\sin\vartheta$$

6. A gerjesztési törvény alkalmazása

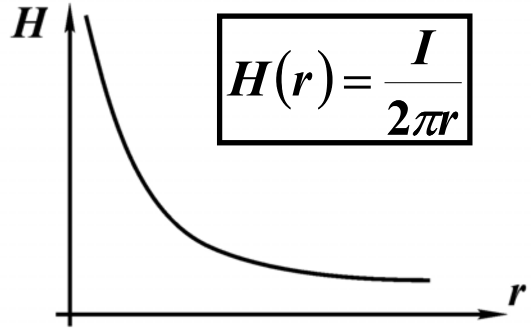
1. Feladat, **egyenes vezető mágneses tere**



A mágneses erővonalak koncentrikus körök

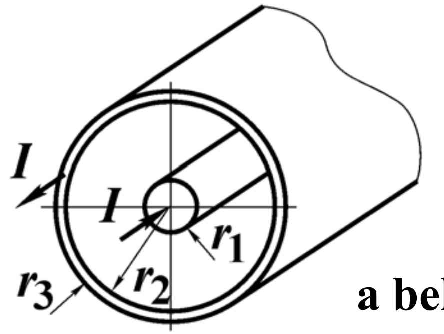
A gerjesztési törvény $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a \vec{J}\cdot d\vec{a}$

egy r sugarú körre $H(r)2r\pi = I$



$$\boxed{H(r) = \frac{I}{2\pi r}}$$

2. Feladat, **Koaxiális kábel mágneses tere**

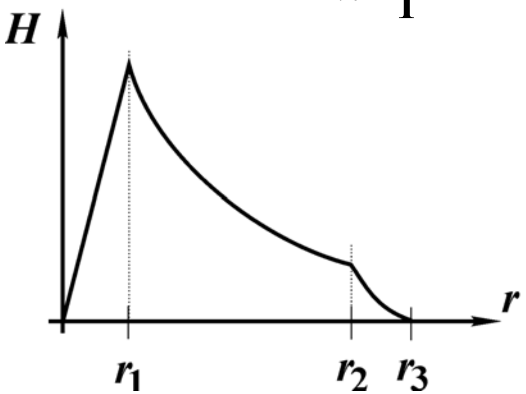


A gerjesztési törvényt alkalmazva a két vezető között

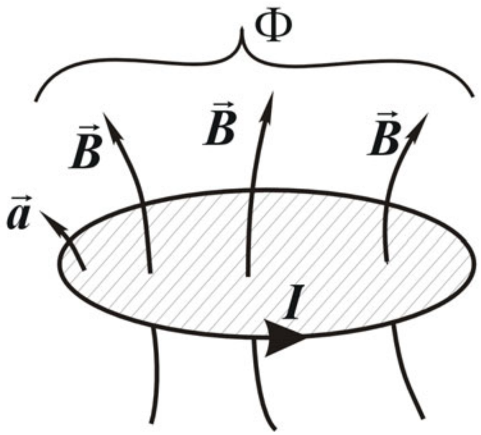
$$r_1 < r < r_2, \quad H(r)2r\pi = I, \quad H(r) = \frac{I}{2r\pi},$$

a belső vezetőben $r < r_1, \quad H(r)2r\pi = \frac{I}{r_1^2\pi} r^2\pi, \quad H(r) = \frac{I}{2\pi\, r_1^2} r$

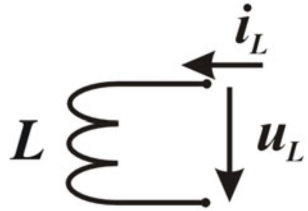
a külső vezetőben
$$\begin{cases} r_2 < r < r_3, \\ H(r)2r\pi = I - \dfrac{I}{\left(r_3^2 - r_2^2\right)\pi}\left(r^2 - r_2^2\right)\pi, \\ H(r) = \dfrac{I}{2\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)}\left(\dfrac{r_3^2}{r} - r\right) \end{cases}$$



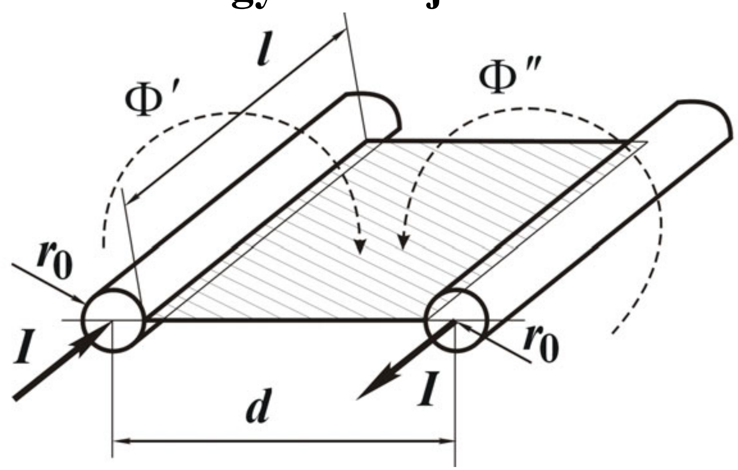
7. Vezető hurok önindukció együtthatója



$$\boxed{L_{ön} = \frac{\Phi}{I}}$$



Feladat, Határozzuk meg két párhúzamos tengelyű hengeres vezető hurok önindukció együtthatóját



A baloldali vezető által keltett fluxus

$$\Phi' = \int_{r_0}^{d-r_0} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_{r_0}^{d-r_0} \mu \frac{I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}\Bigg|_{d>>r_0} \approx \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

A jobboldali vezető által keltett fluxus $\Phi'' = \Phi'$

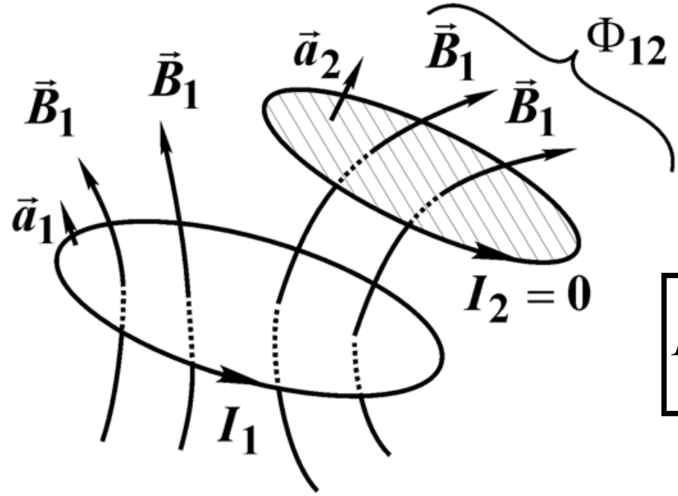
A vezető hurok fluxusa

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = 2\Phi' = \frac{\mu I l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

A vezető hurok önindukció együtthatója

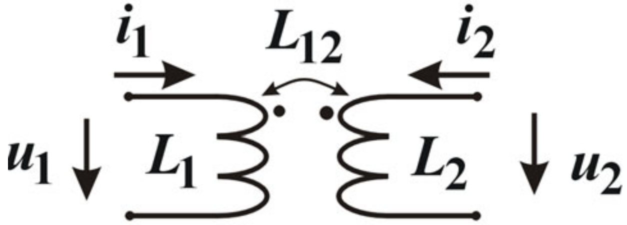
$$\boxed{L_{ön} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}}$$

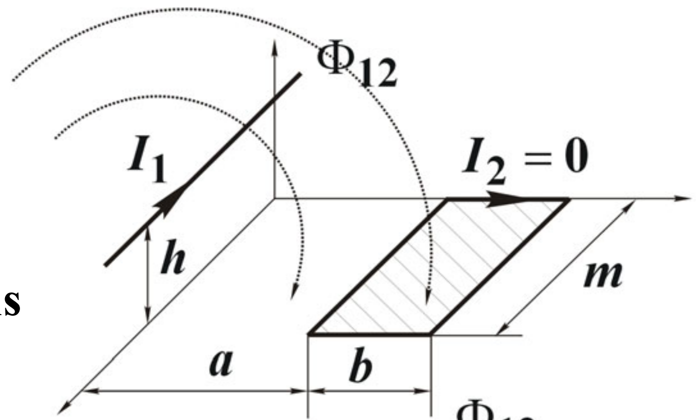
8. Vezetők kölcsönös indukció együtthatója



$$\Phi_{12} = \int_{a_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2,$$

$$\boxed{L_{12} = \left.\frac{\Phi_{12}}{I_1}\right|_{I_2=0}}$$



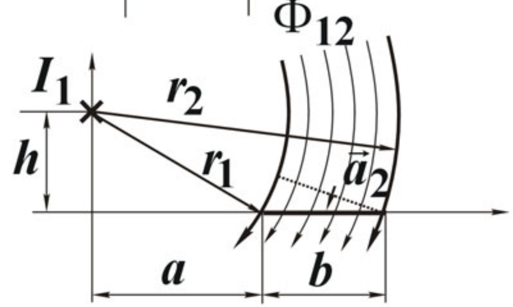


<u>Feladat,</u> Határozzuk meg egy egyenes vezető és a vezető hurok kölcsönös önindukció együtthatóját

Az egyenes vezető által a vezető keretben keltett fluxus

$$\Phi_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{I_1}{2\pi r} m dr = \frac{\mu I_1 m}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

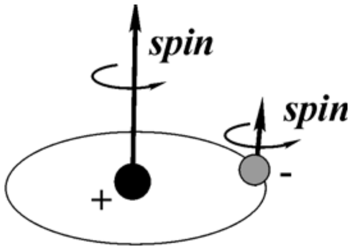
$$r_1 = \sqrt{a^2 + h^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}.$$

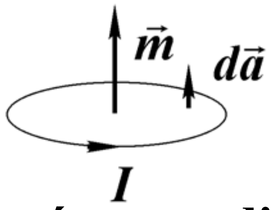


A kölcsönös indukció együttható $\boxed{L_{12} = \frac{\mu\, m}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}}$

9. Mágneses tér és anyag kölcsönhatása

(a) Mikroszkopikus modell



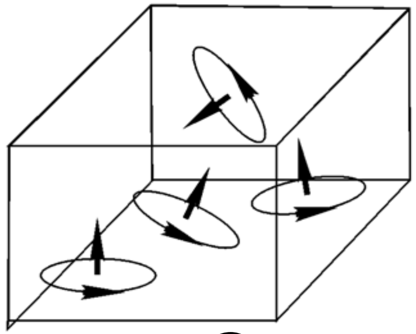


mágneses dipólus

$\vec{m} = I\, d\vec{a}$

mágneses dipólus nyomaték

(b) Makroszkopikus modell, a mágnesezettség vektora



dv

$N -$ **mágneses dipólus**

$\vec{m}_i -$ **mágneses dipólus nyomaték** $\quad \vec{m}_i \approx \vec{m}_j$

$\vec{m}_i \approx \alpha_i \vec{H} \approx \alpha \vec{H}$

mágneses dipólus sűrűség

$$\vec{M} = \lim_{dv \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i}{dv} \approx \frac{1}{dv} N\, \vec{m} = \frac{N}{dv} \alpha \vec{H} = n_m \alpha \vec{H} = \kappa \vec{H},$$

mágnesezettség

mágneses dipólus momentum sűrűség

$$\boxed{\vec{M} = \kappa \vec{H}}$$

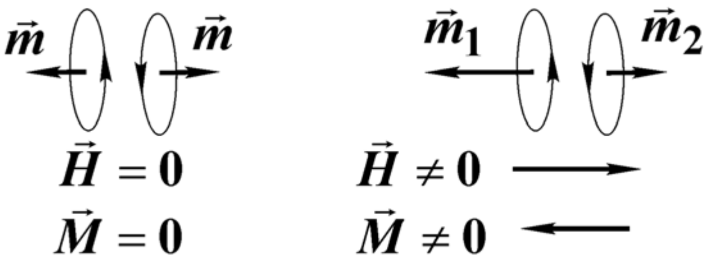
$\kappa -$ **mágneses szuszceptibilitás**

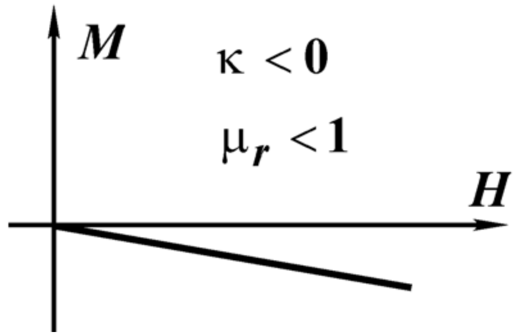
$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0\vec{H}\left(1+\kappa\right) = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

Mágneses anyagok típusai

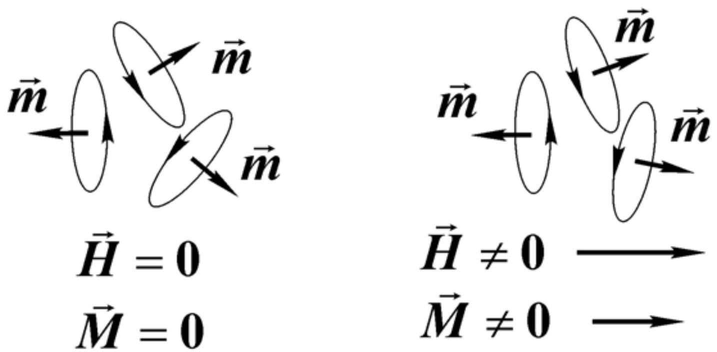
$\mu_r = \left(1+\kappa\right) -$ **mágneses relatív permeabilitás**

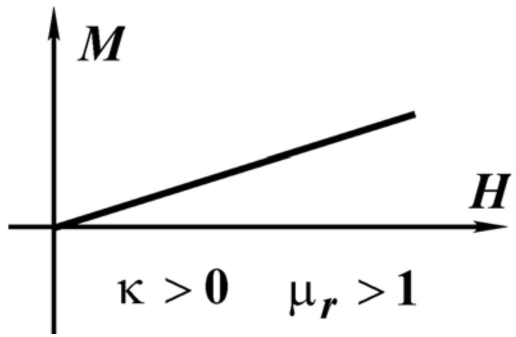
(a) Diamágneses anyagok **2 szabad vegyérték elektron, Pauli elv**





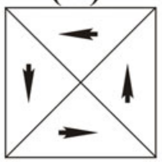
(b) Paramágneses anyagok **1 szabad vegyérték elektron**





<u>(c) Ferromágneses anyagok</u> **mágneses domének, spontán mágnesezettség, kölcsönhatás**

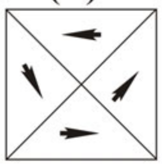
(A)



$H_a = 0$

$B_a = 0$

(B)

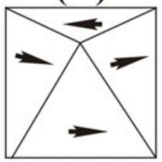


$H_b > H_a$

$B_b > B_a$

domének elfordulása

(C)

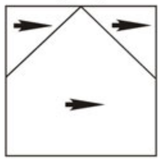


$H_c > H_b$

$B_c > B_b$

domén falak felszakadása

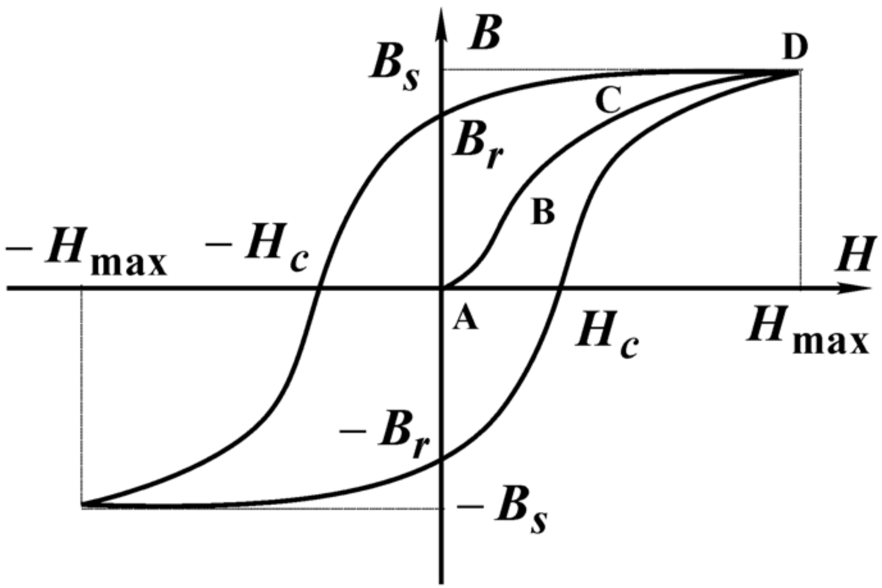
(D)



$H_d > H_c$

$B_d > B_c$

telítési állapot

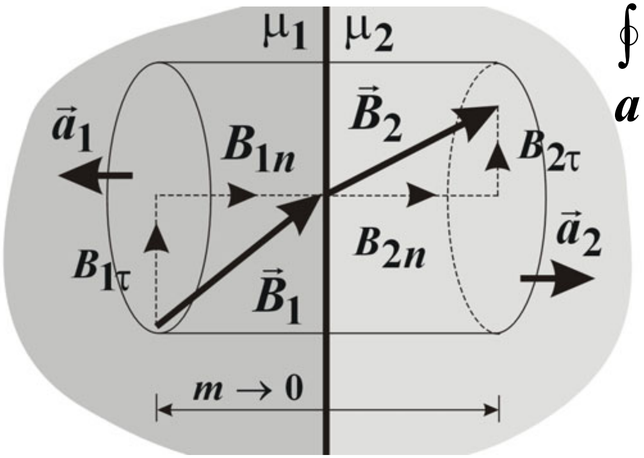


$\kappa >> 1, \quad \mu_r >> 1$

mágneses körök

10. Folytonossági feltételek-két mágneses anyag határfelületén

a) A $\vec{B}$ mágneses indukció vektor viselkedése közeghatáron



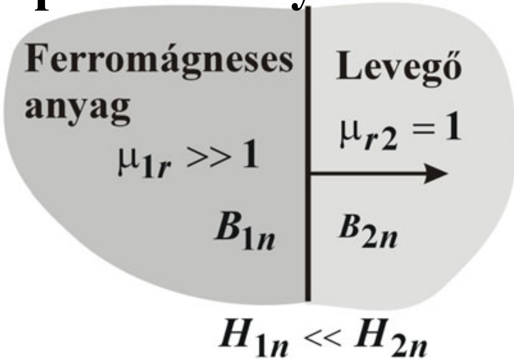
$$\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$-B_{1n}a + B_{2n}a + B_n a_{palást} = 0$$

ha $m \to 0$, $a_1 = a_2 = a$, $B_{2n} - B_{1n} = 0$

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \qquad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

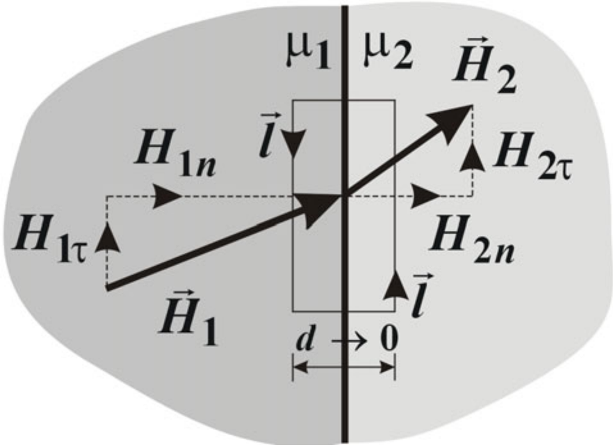
(i) a mágneses fluxus-sűrűség, a mágneses indukció vektor normális komponense folytonosan megy át két közeg határán,



(ii) ha $\mu_{r1} >> \mu_{r2} \longrightarrow H_{1n} << H_{2n}$

a ferromágneses anyag belsejében a mágneses indukció vektor normális komponense elhanyagolhatóan kicsi

b) Az $\vec{H}$ mágneses térerősség viselkedése közeghatáron



Gerjesztési törvény

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_a \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$l \longrightarrow a$$

$$-H_{1\tau} l + H_{2\tau} l + H_\tau\, d = I_n$$

ha $d \to 0$ $\quad -H_{1\tau} l + H_{2\tau} l + \underbrace{H_\tau \cancel{d}}_{d \to 0} = I_n$

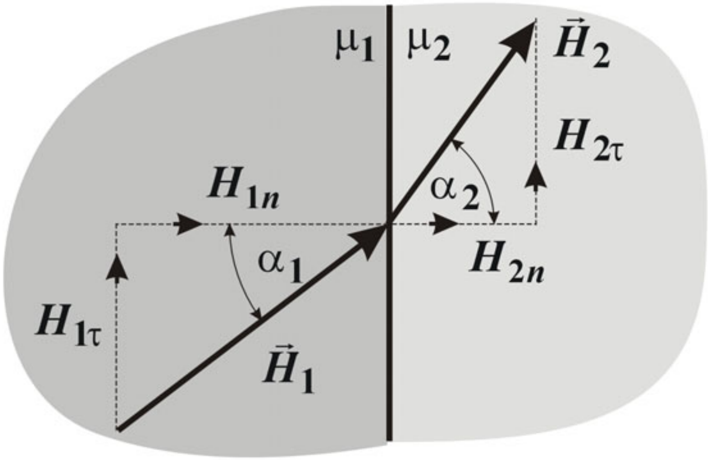
$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = I_n / l = K_n$$

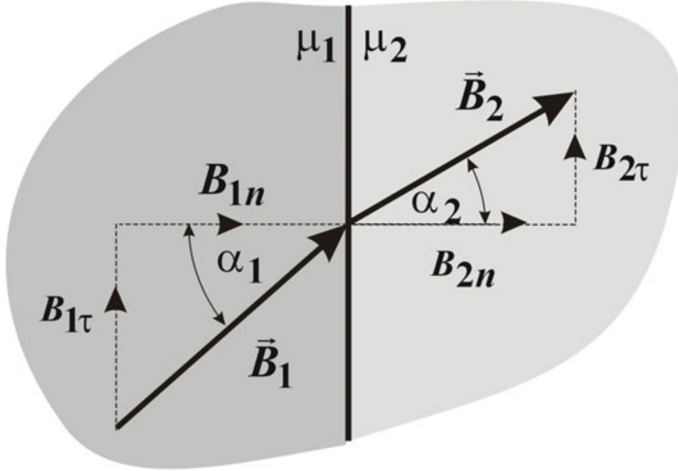
ha $K_n = 0 \longrightarrow \boxed{H_{1\tau} = H_{2\tau}}$ **a határfelületen a *H* mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos,**

$$\boxed{\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

a *B* indukció vektor tangenciális komponensei a permeabilitások arányában ugrásszerűen változik

c) Töréstörvények





$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \qquad B_{1n} = B_{2n} \quad B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1\tau}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{H_{1\tau}}{H_{1n}} \frac{H_{2n}}{H_{2\tau}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{B_{2n}}{\mu_2} \frac{\mu_1}{B_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}} \frac{B_{2n}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1 H_{1\tau}}{\mu_2 H_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

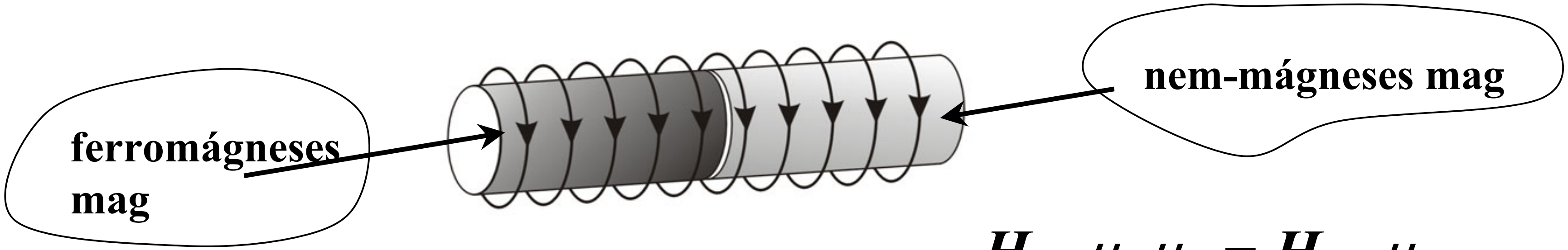
ha $\mu_1 >> \mu_2, \rightarrow \mathrm{tg}\alpha_1 >> \mathrm{tg}\alpha_2$

d) Következmények I

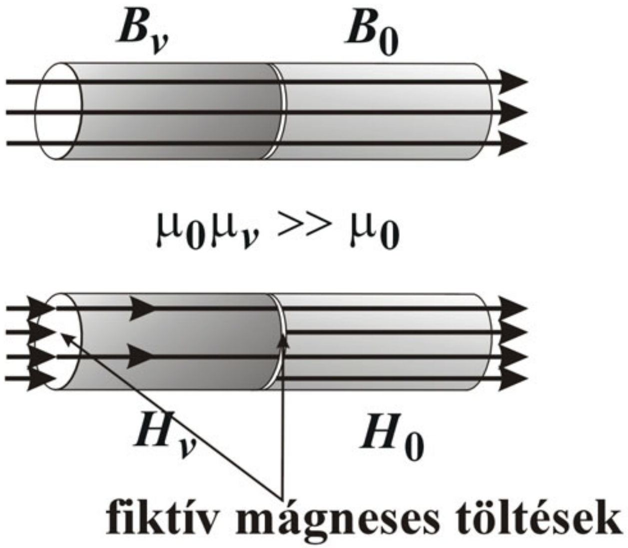
(i) Mágneses és nem-mágneses magú egyenes tekercs

(keresztirányú rétegezés)

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$



$$H_{vn}\mu_0\mu_v = H_{0n}\mu_0$$



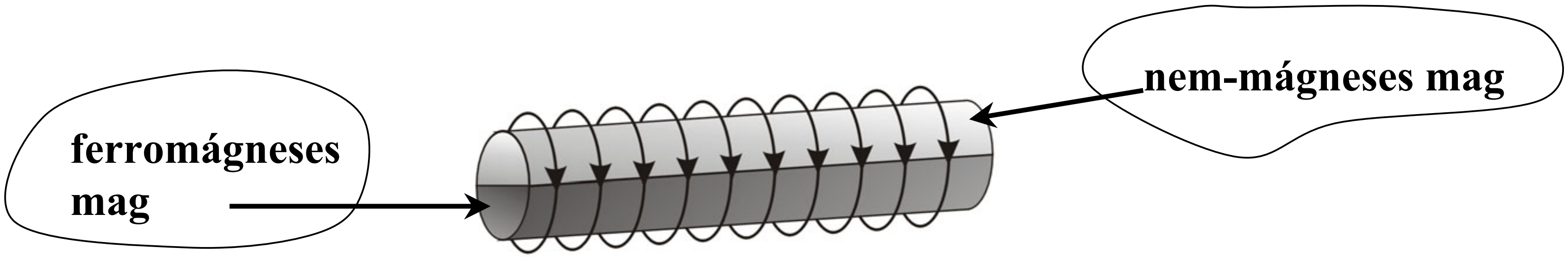
$$\mu_0\mu_v >> \mu_0 \qquad \mu_v >> 1,$$

$$\boxed{H_{vn} << H_{0n}}$$

e) Következmények II

(ii) Mágneses és nem-mágneses magú egyenes tekercs

(hosszirányú rétegezés)



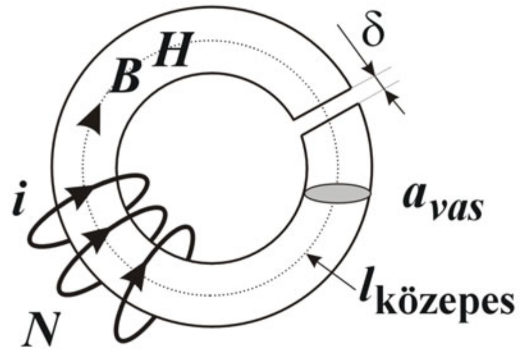
$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \qquad \boxed{H_{v\tau} = H_{0\tau}}$$

$$\mu_0\mu_v >> \mu_0 \qquad \mu_v >> 1,$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} \qquad \boxed{B_{v\tau} >> B_{0\tau}}$$

11. Mágneses körök számítása

(i) Térszámítással



(a) A gerjesztési törvény $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

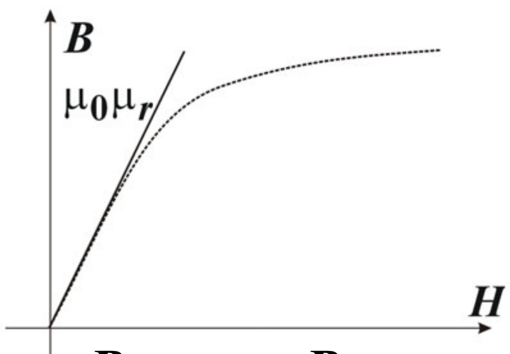
Közepes erővonal hosszal számolva $\sum_k H_k l_k = Ni$

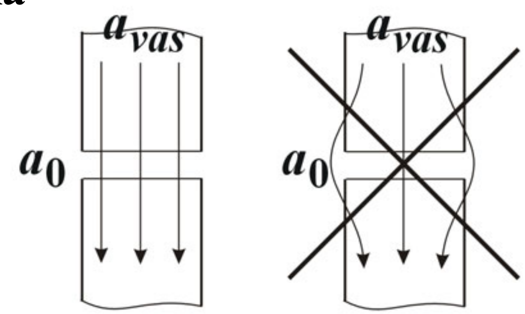
$$\boxed{H_v l_k + H_0 \delta = Ni}$$

(b) A fluxus törvényből $\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$

a szórástól eltekintve $a_{vas} = a_0 \longrightarrow \Phi_{vas} = \Phi_0$

(c) A mágneses anyag karakterisztika



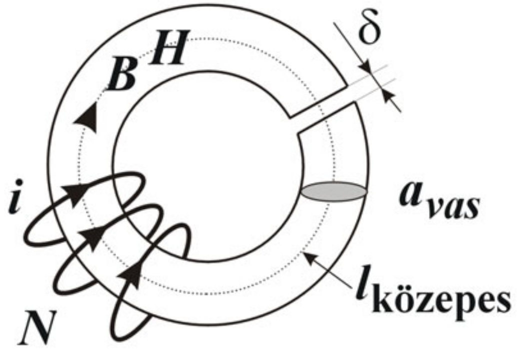


$$B_v a_{vas} = B_0 a_0$$

$$B_v = B_0$$

$$\frac{B_v}{\mu_0 \mu_r} l_k + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = Ni \qquad B_v = \frac{N\, i\, \mu_0 \mu_r}{l_k + \mu_r \delta} \qquad L = \frac{N\Phi_{vas}}{i} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r\, a}{l_k + \mu_r \delta}$$

(ii) Hálózati modellel



A gerjesztési törvény $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

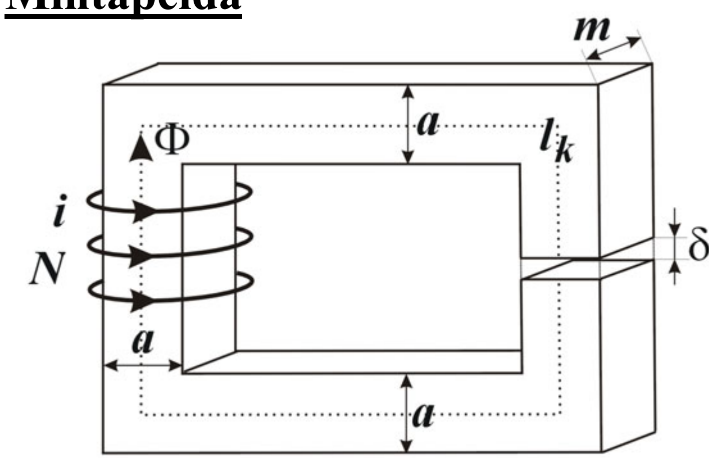
Közepes erővonal hosszal számolva $\sum_k H_k l_k = Ni$

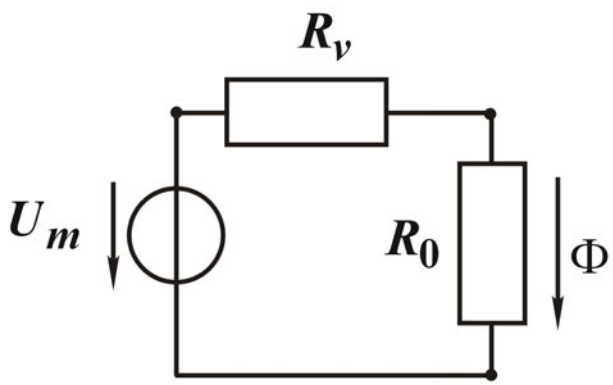
$$Ni = \sum_k H_k l_k = \sum_k \frac{B_k}{\mu_k} l_k = \sum_k \frac{\Phi_k}{a_k \mu_k} l_k = \sum_k \Phi_k \frac{l_k}{a_k \mu_k} = \sum_k \Phi_k R_{k,mág}$$

$$\boxed{U_{k,mág} = \Phi_k \; R_{k,mág}} \qquad \boxed{R_{k,mág} = \frac{l_k}{a_k \mu_k}}$$

mágneses Ohm törvény

Mintapélda





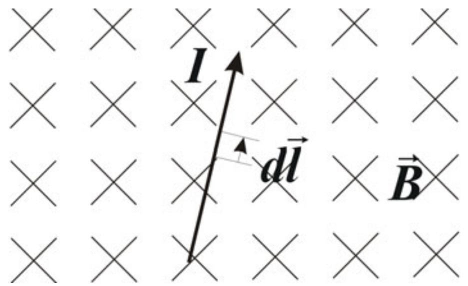
$$\Phi = \frac{U_m}{R_v + R_0}$$

$$R_m = \frac{l_k}{a \cdot m \mu_0 \mu_v}$$

$$R_0 = \frac{\delta}{a \cdot m \mu_0}$$

12. Mágneses erőhatás

(i) I áramú vezető mágneses térben

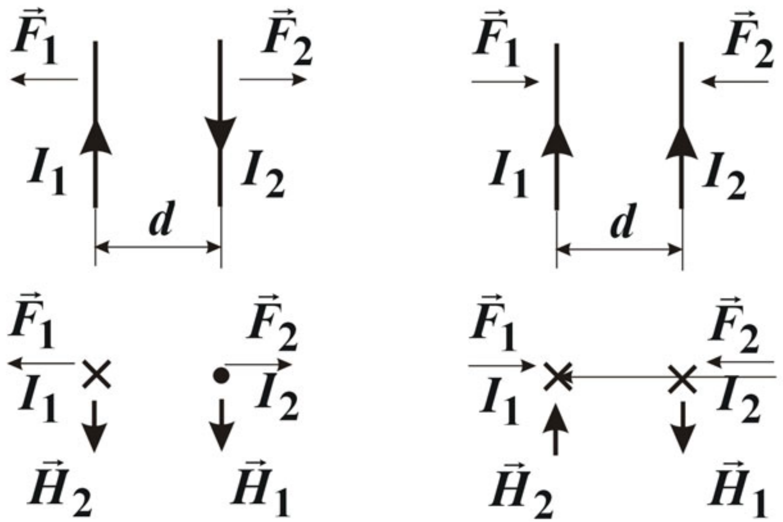


A Lorentz erőtörvény felhasználásával a mágneses térbe helyezett elemi vezetődarabra ható erő $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{v} \times \vec{B} = dQ\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times B = \frac{dQ}{dt}\,d\vec{l} \times B = I\,d\vec{l} \times B$$

a vezetőre ható erő $\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l} \times B}$

(ii) Következménye, párhuzamos áramvezetők között erőhatás lép fel



két párhuzamos, ellentétes áramirányú vezetők között taszítóerő lép fel

két párhuzamos, azonos áramirányú vezetők között vonzóerő lép fel

Ellenőrző kérdések

1. Foglalja össze az elektromos áramra és az árammodellekre vonatkozó ismereteket,
2. Ismertesse az elektromos töltés és áram közötti kapcsolatot,
3. Foglalja össze a statikus és stacionárius elektromos tér közötti analógiára vonatkozó összefüggéseket,
4. Ismertesse a stacionárius áramlási térben az áramsűrűség és az elektromos térerősségre vonatkozó folytonossági feltételeket,
5. Ismertesse a beiktatott térerősség és a differenciális Ohm törvényt,
6. Ismertesse a Joule hő fogalmát,
7. Adja meg a mágneses tér intenzitását és gerjesztettségét meghatározó összefüggéseket,
8. Ismertesse a gerjesztési és a Biot-Savart törvényt, a magyarázatot illusztrálja ábrával,
9. Adja meg az ön- és a kölcsönös indukció együttható fogalmát, szemléltesse ábrán a fogalmakat,
10. Ismertesse a mágnesezettség fogalmát és mutassa be a mágneses anyagok típusait,
11. Foglalja össze a mágneses térben fellépő erőhatásokat.

Irodalom

•Iványi Miklósné, Fizika I–Villamosságtan, (Jegyzet) 2006: www.e-oktat.pmmk.pte.hu

•Alvin Hudson, Rex Nelson: Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994, ISBN 963 577 197 5

•Hevesi Imre, Elektromosságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

•Fodor György, Elméleti elektrotechnika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

Professor Emeritus

2. Konferencia, gyakorlat

Gy.2.1. Gyakorlat feladatai

A gyakorlat célja: Áram és áramsűrűség meghatározása áramlási térben, folytonossági feltételek, az ellenállás számítása.

[1] Határozza meg, mekkora áram folyik át azon az $r_0 = 12\,\mathrm{cm}$ sugarú körlapon, amelyen az áramsűrűség normális komponense $J_n = 24\,\mathrm{A/m^2}$.

$$I = J_n r_0^2 \pi = 24 \cdot 0{,}12^2 \pi = 1{,}0857\ \mathrm{A},$$

[2] Határozza meg, mekkora az áramsűrűség azon az $r_0 = 18\,\mathrm{cm}$ sugarú gömbfelületen, amelyből $I = 12\,\mathrm{A}$ áram folyik ki.

$$J = \frac{I}{4 r_0^2 \pi} = \frac{12}{4 \cdot 0{,}18^2 \pi} = 29{,}4731\ \mathrm{A/m^2},$$

[3] Határozza meg, mekkora lesz az elektromos térerősség normális komponense azon $\sigma = 2 \cdot 10^6$ S/m vezetőképességű fém felületen, ahol az áramsűrűség normális komponense $J_n = 28\,\mathrm{A/cm}^2$.

$$E_n = J_n / \sigma = 28 \cdot 10^4 / 2 \cdot 10^6 = 14 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V/m},$$

[4] Mekkora teljesítménysűrűséget hoz létre az $E = 3{,}6\,\mathrm{V/cm}$ nagyságú elektromos tér a $\sigma = 3 \cdot 10^4$ S/m vezetőképességű közegben.

$$p = \sigma E^2 = 3 \cdot 10^4 \cdot \left(3{,}6 \cdot 10^2\right)^2 = 3{,}8880 \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3},$$

[5] Mekkora feszültséget hoz létre a $J = 6\mathrm{A/cm}^2$ áramsűrűség a $\sigma = 5 \cdot 10^6$S/m vezetőképességű közeg $l = 240\mathrm{cm}$ hosszú szakaszán.

$$U = \frac{J}{\sigma} l = \frac{6 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^6} 2{,}4 = 0{,}0288\,\mathrm{V},$$

[6] **Mekkora áramsűrűséget generál a $\rho = 2\,\mu\mathrm{C/m}^3$ nagyságú töltéssűrűség, ha $v = 12\,\mathrm{km/s}$ sebességgel mozog.**

$$J = \rho v = 2\cdot 10^{-6}\cdot 12\cdot 10^{3} = 24\cdot 10^{-3}\,\mathrm{A/m}^2 = 24\mathrm{mA/m}^2,$$

[7] **Két, $\sigma_1 = 4\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$ és $\sigma_2 = 6\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$ vezetőképességű közeg közös határfelületén a 2. közegben az elektromos térerősség normális komponense E_{2n} = 8 kV/cm. Mekkora lesz az 1. közegben az elektromos térerősség normális komponense.**

$$J_{1n} = J_{2n}, \rightarrow E_{1n} = E_{2n}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 8\cdot\frac{6}{4} = 12\,\mathrm{kV/cm},$$

[8] **Két, $\sigma_1 = 5\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$ és $\sigma_2 = 3\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$ vezetőképességű közeg közös határfelületén az 1. közegben az áramsűrűség tangenciális komponense J_{1t} = 6 mA/m^2. Mekkora lesz a 2. közegben az áramsűrűség tangenciális komponense.**

$$E_{1t} = E_{2t}, \rightarrow J_{2t} = J_{1t}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 6\frac{3}{5} = 3{,}6\,\mathrm{mA/m}^2,$$

[9] Határozza meg, mekkora az az *R* ellenállás, amelyen az átfolyó *I*=2 mA áram *U*=5,8 V feszültséget hoz létre.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{5{,}8}{2 \cdot 10^{-3}} = 2{,}9000 \cdot 10^{3}\ \Omega = 2{,}9000\ \mathrm{k\Omega},$$

[10] Határozza meg, mekkora *I* áram folyik át az $R = 3\ \mathrm{k\Omega}$ ellenálláson, ha sarkain $U = 6{,}2\ \mathrm{V}$ mérhető.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6{,}2}{3 \cdot 10^{3}} = 2{,}0667 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} = 2{,}0667\ \mathrm{mA},$$

[11] Határozza meg, mekkora *U* feszültésg lép fel az $R = 4{,}6\ \mathrm{k\Omega}$ ellenálláson, ha rajta $I = 4\ \mu\mathrm{A}$ áram folyik át.

$$U = RI = 4{,}6 \cdot 10^{3} 4 \cdot 10^{-6} = 18{,}4000 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V} = 18{,}4000\ \mathrm{mV},$$

[12] Határozza meg, mekkora az az *R* ellenállás, amelyen $I = 2\ \mathrm{A}$ hatására $U = 1{,}8\ \mathrm{kV}$ feszültség keletkezik.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1{,}8 \cdot 10^3}{2} = 0{,}9 \cdot 10^3\,\Omega = 900\Omega\ ,$$

A gyakorlat célja: Áramvezető(k) mágneses terének meghatározása a gerjesztési törvény alkalmazásával, a mágneses tér szuperpozíciója, mágneses anyagok, folytonossági feltételek mágneses közegek határán.

[1] Határozza meg egy $I = 12\ \mathrm{A}$ áramú egyenes vezetőtől $r = 3\ \mathrm{m}$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

A gerjesztési törvény alapján $H = \dfrac{I}{2\pi r} = \dfrac{12}{2\pi 3} = 0{,}6366\ \mathrm{A/m}$,

[2] Mekkora az I árama annak az egyenes áramvezetőnek, amelytől $r = 1{,}2\ \mathrm{m}$ távolságban a H mágneses térerősség értéke $5\ \mathrm{A/m}$.

A gerjesztési törvény alapján $H = \dfrac{I}{2\pi r}$, $I = H 2 r\pi = 5 \cdot 2 \cdot 1{,}2\pi = 37{,}6991\ \mathrm{A}$,

[3] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a H mágneses térerősség értékét.

Feltételezve, hogy az áramok a papír síkjára merőlegesen befelé mutatnak, a baloldali vezető keltette mágneses tér a jobb kéz szabály szerint vezető köré írható $d/2$ sugarú kör érintője a megadott pontban, nagysága a gerjesztési törvény szerint $H_b = \dfrac{I}{2\pi\, d/2}$. A jobboldali vezető ugyanekkora, de ellenkező irányú mágneses teret kelt $H_j = H_b$, a jobb kéz szabályt alkalmazva a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a H mágneses térerősség értéke nulla, $H = H_b - H_j = 0$,

[4] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\,\mathrm{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezető síkjában a jobboldali vezetőtől jobbra $d/2$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

Az előző feladathoz hasonlóan a baloldali vezető keltette mágneses tér lefelé mutató irányú, nagysága $H_b = \dfrac{I}{2\pi 3\frac{d}{2}}$, míg a jobboldali vezető által keltett

mágneses tér felfelé mutató, nagysága $H_j = \dfrac{I}{2\pi \frac{d}{2}}$. A mágneses térerősség vektor mennyiség, ezért vektoriálisan összegeződik, azaz a megadott pontban a mágneses tér nagysága

$$H = H_j - H_b = \frac{I}{2\pi d/2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{2\pi 0{,}6/2}\frac{2}{3} = 0{,}8488 \text{ A/m},$$

[5] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\,\text{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2$ A nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezető síkjában a baloldali vezetőtől jobbra $d/4$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

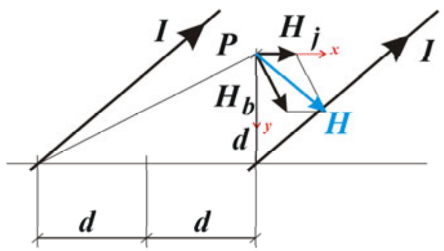
$$H = H_b - H_j = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{d/4} - \frac{1}{3d/4}\right) = \frac{I}{2\pi d/4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{2\pi 0{,}6/4}\frac{2}{3} = 1{,}4147 \text{ A/m},$$

[6] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\,\text{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 2$ A nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezető

síkjában a baloldali vezetőtől balra $d/4$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

$$H = H_b - H_j = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{d/4} - \frac{1}{5d/4}\right) = \frac{I}{2\pi d/4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{2\pi 0{,}6/4}\frac{4}{5} = 1{,}6977\ \text{A/m},$$

[7] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $2d$, $d = 60\ \text{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2\ \text{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a jobboldali vezető felett, attól d távolságban a H mágneses térerősség értékét.

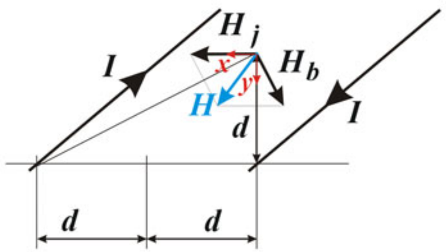


Az ábrán látható áramvezetők keltette mágneses térnek két komponense van, amelyeket vektoriálisan összegezünk. A baloldali vezető által keltett mágneses tér $H_b = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}$, a jobboldali vezető mágneses tere $H_j = \dfrac{I}{2\pi d}$. A vektori összegezéshez helyezzünk el egy x-y koordináta

rendszert a P pontban és bontsuk fel a vezetők keltette mágneses teret ezen koordináta komponensekre. A baloldali vezető mágneses tere x és y komponensekre bontható, $H_{bx} = H_b \frac{d}{\sqrt{5}d} = \frac{I}{2\pi 5d}$, $H_{by} = H_b \frac{2d}{\sqrt{5}d} = \frac{I}{\pi 5d}$, a jobboldali vezető H_j mágneses tere x- irányú $H_{jx} = H_j = \frac{I}{2\pi d}$. Az x-, ill. y-irányú komponenseket összegezve az eredő mágneses tér

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{\left(H_{bx} + H_{jx}\right)^2 + H_{by}^2} = \frac{I}{2\pi 5d}\sqrt{36+4} = \frac{2}{10\pi 0{,}6}\sqrt{40} = 0{,}6711\ \mathrm{A/m}$$

[8] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $2d$, $d = 42\,\mathrm{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 3{,}8\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a jobboldali vezető felett, attól d távolságban a H mágneses térerősség értékét.



Az előző feladat megoldásához hasonlóan a baloldali vezető mágneses tere $H_b = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}$, a jobboldali vezető mágneses tere $H_j = \dfrac{I}{2\pi d}$. felbontva a mágneses térerősség vektorokat *x-y* irányú komponensekre $H_{bx} = -\dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $H_{by} = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $H_{jx} = \dfrac{I}{2\pi d}$, az eredő mágneses térerősség vektor nagysága $H = \dfrac{I}{2\pi d 5}\sqrt{(2)^2 + (4)^2} = 1{,}2880$ A/m.

[9] Egy $a = 12\,\text{cm}$ oldalú négyzet három csúcspontján három áramvezető megy át. Két szemben lévő csúcson elhelyezkedő vezetőn az egyik irányba folyik az *I* áram, a harmadikon pedig visszafolyik a 2*I* áram. $I = 4{,}6\ \text{A}$. Határozza meg a *H* mágneses térerősség értékét a negyedik csúcspontban.

A két szemben lévő csúcson átmenő azonos áramirányú vezetők azonos nagyságú, egymásra merőleges $H_1 = H_2 = \dfrac{I}{2\pi a}$ nagyságú mágneses térkomponenseket hoznak létre, amelyek eredője $H_{12} = \dfrac{I}{2\pi a}\sqrt{2}$. A harmadik vezető $H_3 = \dfrac{2I}{2\pi a\sqrt{2}}$ nagyságú mágneses tere ellenkező irányú az előző komponensek eredőjével, így a négyzet negyedik csúcspontjában a mágneses tér értéke $H_{12} - H_3 = \dfrac{I}{2\pi a}\left(\sqrt{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

[10] Egy I=6,4 A elemi köráram $a = 16\,\text{cm}^2$ felületet ölel körül. mekkora a köráram mágneses dipólus nyomatéka.

$$m = Ia = 6{,}4 \cdot 16 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{0{,}0102\ \text{Am}^2 = 10{,}2\ \text{mAm}^2}},$$

[11] **Egy $\mu_r = 1500$ relatív permeabilitású ferromágneses vasmag külső felületén $B_0 = 1{,}2\ \mathrm{T}$ mágneses indukciót mérünk. Hatásozza meg a vasmag belsejében a mágneses térerősség normális komponensének értékét.**

Minthogy a ferromágneses anyagokból a mágneses indukcióvektor normális komponense megy át folytonosan a vasmagban az indukcióvektor normális komponense megegyezik a mért értékkel $B_{vn} = B_0$. Minthogy a vas mágneses permeabilitása ismert a mágneses térerősség meghatározható,

$$H_{vn} = \frac{B_{vn}}{\mu_0 \mu_r} = 636{,}6198\ \mathrm{A/m},$$

[12] **Mekkora mágneses indukciót hoz létre a $H = 16\ \mathrm{A/m}$ nagyságú mágneses tér $\mu_r = 1200$ relatív permeabilitású közegben.**

$$B = \mu H = 4\pi 10^{-7} 1200 \cdot 16 = 0{,}0241\ \mathrm{T} = 24{,}1\ \mathrm{mT},$$

[13] **Két, $\mu_{1r} = 400$ és $\mu_{2r} = 320$ relatív permeabilitású közeg közös határfelületén az 1. közegben a mágneses indukció vektor tangenciális komponense $B_{1t} = 0{,}4$**

T. Mekkora lesz a 2. közegben a mágneses indukció vektor tangenciális komponense.

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad B_{2t} = B_{1t} \frac{\mu_2}{\mu_1} = 0{,}4 \frac{\mu_0 320}{\mu_0 400} = 0{,}3200 \, \mathrm{T} = 320 \, \mathrm{mT},$$

[14] Két, μ_{1r} = 400 és μ_{2r} = 320 relatív permeabilitású közeg közös határfelületén a 2. közegben a mágneses térerősség normális komponense H_{2n} = 4 mA/cm. Mekkora lesz az 1. közegben a mágneses térerősség normális komponense.

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1n} = H_{2n} \frac{\mu_2}{\mu_1} = 4 \frac{320}{400} = 3{,}200 \, \mathrm{mA/cm} = 0{,}3200 \, \mathrm{A/m}$$

A gyakorlat célja: Áramvezetők fluxusa, ön és kölcsönös indukció együtthatója, erőhatás mágneses térben, a mágneses tér energiája. Időben változó mágneses tér, indukálási jelenség.

[15] Egy $a = 24\,\mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű, $l = 12\,\mathrm{cm}$ hosszúságú, $N = 750$ menetszámú egyenes tekercs $\mu_r = 2500$ relatív permeabilitású ferromágneses vasmaggal rendelkezik. Határozza meg a tekercs fluxusát, ha $I = 2{,}2\,\mathrm{A}$ árammal gerjesztjük.

Feltételezve, hogy az egyenes tekercs keresztmetszete elhanyagolhatóan kicsi a hosszához viszonyítva, a gerjesztési törvényt alkalmazva a mágneses térerősség meghatározható, $H \cong \frac{NI}{l}$, ahonnan a tekercs fluxusa

$$\Psi = N\Phi = NaB = Na\mu\frac{NI}{l} = \mu_0\mu_r\frac{N^2 Ia}{l} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,2500\,\frac{750^2\,2{,}2}{0{,}12}\,24\cdot 10^{-4} = 0{,}0400\ \mathrm{Vs}$$

[16] Mekkora annak a tekercsnek az önindukció együtthatója, amelyen I=12 A, Ψ= 2,8 mVs fluxust gerjeszt.

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-3}}{12} = 0{,}2333 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = 0{,}2333\ \mathrm{mH},$$

[17] Határozza meg, az $L = 22\,\mathrm{mH}$ indukció együtthatójú tekercs Ψ fluxusát, ha rajta $I = 4{,}8\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik át.

$$\Psi = LI = 22 \cdot 10^{-3} 4{,}8 = 0{,}1056\,\mathrm{Vs},$$

[18] Határozza meg, mekkora I áram hoz létre $\Psi = 45\,\mathrm{mVs}$ fluxust az $L = 12\,\mathrm{mH}$ indukció együtthatójú tekercsben.

$$I = \Psi / L = 45 \cdot 10^{-3} / 12 \cdot 10^{-3} = 3{,}7500\ \mathrm{A},$$

[19] Két sorosan kapcsolt tekercs indukció együtthatója $L_1 = 3{,}2\,\mathrm{mH}$, $L_2 = 4{,}6\,\mathrm{mH}$, köztük $L_{12} = 2{,}4\,\mathrm{mH}$ a kölcsönös indukció együttható. Határozza meg az 1. tekercs fluxusát, ha a rajtuk átfolyó áram $I = 2\ \mathrm{A}$.

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2 = (L_1 + L_{12}) I_2 = 11{,}20\,\mathrm{mVs}.$$

[20] **Határozza meg, hogy mekkora az a homogén eloszlású B indukciójú mágneses tér, amelyben az $a = 3{,}6\,\mathrm{cm}^2$ felület fluxusa $\Phi = 0{,}48\,\mathrm{mVs}$.**

$$B = \frac{\Phi}{a} = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^{-4}} = 1{,}3333\ \mathrm{T},$$

[21] **Mekkora az a mágneses indukció, amely egy $r = 36\mathrm{cm}$ sugarú vezető keretben $\Psi = 15\cos 100t$, mVs mágneses fluxust gerjeszt.**

$$B = \frac{\Psi}{a} = \frac{\Psi}{r^2\pi} = \frac{15 \cdot 10^{-3}\cos 100t}{0{,}36^2\pi} = 0{,}0368\cos 100t\ \mathrm{T} = 36{,}8\cos 100t\ \mathrm{mT}$$

[22] **Mekkora F erővel hat az $I = 22\ \mathrm{A}$ áramú egyenes vezető $l = 36\,\mathrm{cm}$ hosszú szakaszára a vezetőre merőleges $B = 1{,}4\,\mathrm{mT}$ indukciójú mágneses tér.**

$$F = IlB = 22 \cdot 0{,}36 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}0111\,\mathrm{N},$$

[23] Határozza meg, mekkora W mágneses energiát tárol az $L = 7{,}2\,\mathrm{mH}$ indukció együtthatójú tekercs, ha a vezetőjében $I = 2{,}8\,\mathrm{A}$ áram folyik.

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}7{,}2\cdot 10^{-3}2{,}8^2 = 0{,}0282\ \mathrm{Ws} = 28{,}2240\,\mathrm{mJ},$$

[24] Határozza meg, mekkora annak a tekercsnek az L indukció együtthatója, amely az $I = 2{,}8\,\mathrm{A}$ áram hatására $W = 40\,\mathrm{mJ}$ mágneses energiát tárol.

$$W = \frac{1}{2}LI^2, \rightarrow L = \frac{2W}{I^2} = \frac{2\cdot 40\cdot 10^{-3}}{2{,}8^2} = 10{,}2041\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = 10{,}2041\,\mathrm{mH}\cdot$$

[25] Határozza meg mekkora az $L = 3{,}6\,\mathrm{mH}$ indukció együtthatójú tekercs I árama, ha a tekercs $W = 52\,\mathrm{mJ}$ mágneses energiát tárol.

$$W = \frac{1}{2}LI^2, \rightarrow I = \sqrt{\frac{2W}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 52\cdot 10^{-3}}{3{,}6\cdot 10^{-3}}} = 5{,}3748\ \mathrm{A},$$

[26] Mekkora mágneses energiát tárol a $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$ indukciójú mágneses tér a $\mu_r = 2000$ relatív permeabilitású közeg egységnyi térfogatában.

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1{,}5^2}{2 \cdot 4\pi 10^{-7} 2000} = 447{,}6233\ \mathrm{J/m^3} = 447{,}6233\ \mathrm{Ws/m^3},$$

[27] Határozza meg, mekkora abban a levegővel kitöltött közeg 1 m^3 térfogatában tárolt W mágneses energia, ahol az egyenletes eloszlású mágneses térerősség $H = 3\ \mathrm{A/cm}$.

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} 4\pi 10^{-7} 300^2 = 0{,}0565\ \mathrm{Ws} = 56{,}5\ \mathrm{mWs},$$

[28] Határozza meg mekkora a mágneses energiája annak az $L = 2{,}8\ \mathrm{mH}$ indukció együtthatójú tekercsnek, amelyen $I = 6\ \mathrm{A}$ áram folyik át.

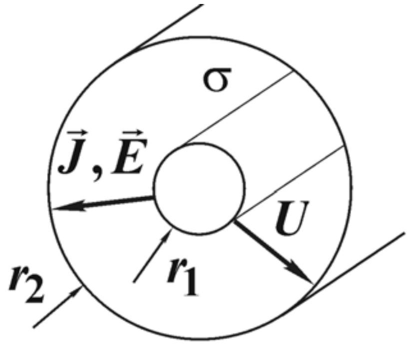
$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} 2{,}8 \cdot 10^{-3} 6^2 = 0{,}0504\ \mathrm{Ws} = 50{,}4\ \mathrm{mWs},$$

Gy.2.2. További feladatok

1. Feladat

Koaxiális kábel külső és belső sugara $r_2 = 2{,}5\text{mm},\ r_1 = 0{,}8\text{mm},$ a vezetők közötti szigetelésének vezetőképessége $\sigma = 10^{-9}\text{S/m}$. Mekkora az l=2m hosszúságú szakasz szivárgási árama és szivárgási ellenállása az ér és a köpeny között, ha az elektródákra kapcsolt feszültség U=2 kV. Határozzuk meg a koaxiális kábel szigetelőjében hővé váló teljesítményt.

Megoldás



(a) Ha az l hosszúságú hengerpaláston I áram folyik át

$$J(r) = \frac{I}{2\pi\, r\, l}, \qquad E(r) = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\, r\sigma\, l}$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr = \frac{I}{2\pi\sigma\, l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\, dr = \frac{I}{2\pi\sigma\, l}\ln\frac{r_2}{r_1} = IR_{sz}$$

$$R_{sz} = \frac{1}{2\pi\sigma\, l}\ln\frac{r_2}{r_1} = 9{,}0673\cdot 10^7\ \Omega = 90{,}673\ \text{M}\,\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{sz}} = \frac{2\cdot 10^3}{9{,}0673\cdot 10^7} = 2{,}2057\cdot 10^{-5}\,\text{A} = 22{,}057\text{mA}$$

(b) Az analógia alapján $$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln r_2/r_1}, \qquad \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad G = \frac{C}{\varepsilon}\sigma = \frac{2\pi\sigma\, l}{\ln r_2/r_1} = \frac{1}{R_{sz}}.$$

(c) A hővé váló teljesítmény a szivárgási ellenálláson

$$P = R_{sz} I^2 = GU^2 = \frac{2\pi\sigma\, l}{\ln r_2/r_1} U^2$$

$$= \left(9{,}0673 \cdot 10^7\right)\left(2{,}2057 \cdot 10^{-5}\right)^2 = 0{,}0441\,\mathrm{W} = 44{,}1\,\mathrm{mW}$$

Alkalmazzuk a teljesítménysűrűség összefüggését $p = \dfrac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma}$

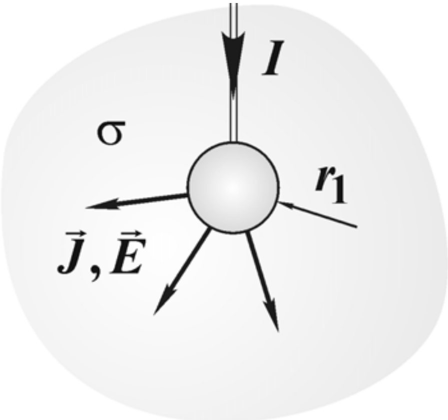
$$J = \frac{I}{2\pi\sigma\, l}\frac{1}{r}, \quad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{I}}{2\pi\sigma\, l}\ln\frac{r_2}{r_1}, \;\rightarrow\; J = \frac{U\sigma}{\ln r_2/r_1}\frac{1}{r}$$

$$P = \int_v \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} dv = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma}\frac{U^2\sigma^2}{\ln^2 r_2/r_1}\frac{1}{r^2} 2r\pi\, l\, dr = U^2 \frac{2\pi\sigma\, l}{\ln^2 r_2/r_1}\ln r_2/r_1$$

$$P = U^2 \frac{2\pi\sigma l}{\ln r_2/r_1}$$

2. Feladat

Egy végtelen kiterjedésű vezető közegben egy gömb alakú ideális fém elektródát helyezünk el, amelyhez szigetelt vezetőn *I* áramot vezetünk.
(a) Határozza meg a térerősség és a potenciál eloszlását a közegben,
(b) Határozza meg a földelt gömb szivárgási ellenállását.

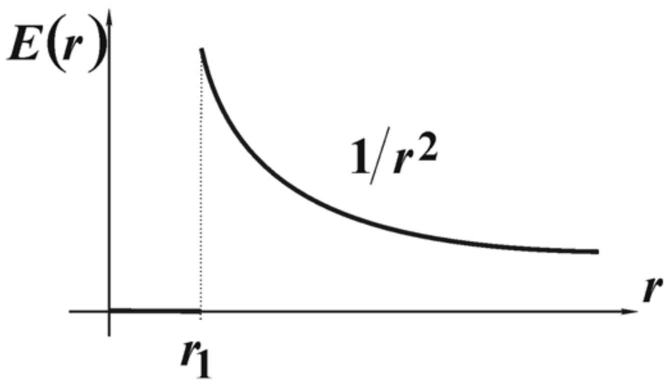


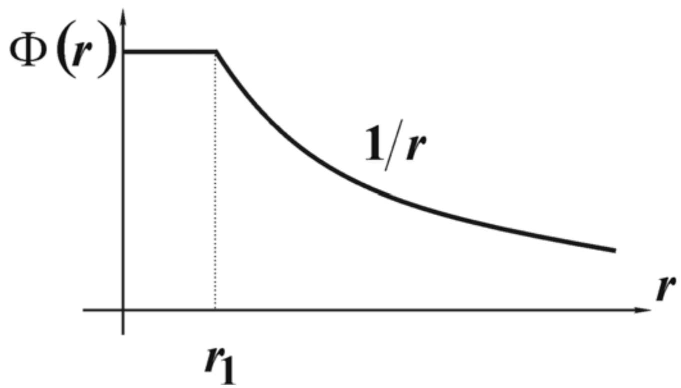
Megoldás

(a) Az *r* sugarú gömb felületén átfolyó áramsűrűség

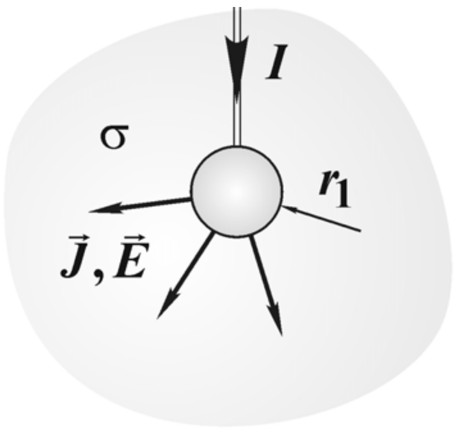
$$J(r) = \frac{I}{4\pi\, r^2} = \sigma E, \quad E(r) = \frac{I}{4\pi\sigma\, r^2}$$

A potenciál változása $\Phi(r) = \int_r^\infty E\, dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r}$





(b) Az r_0 sugarú gömb szivárgási ellenállása



Minthogy a tér gömbszimmetrikus

$$E(r) = \frac{I}{4\pi\sigma\, r^2} \qquad \Phi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r}$$

$$U = \Phi(r_0) - \Phi(\infty) = \frac{I}{4\pi\sigma\, r_0} = IR_{sz}$$

A szivárgási ellenállás

$$\boxed{R_{sz} = \frac{I}{4\pi\sigma\, r_0}}$$

<u>Ellenőrzés</u>

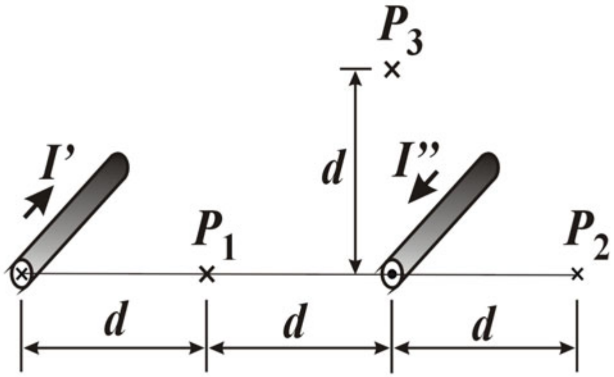
a magában álló gömb kapacitása $C = 4\pi\varepsilon\, r_0$

vezetése $G = \dfrac{1}{R_{sz}} = 4\pi\sigma\, r_0$

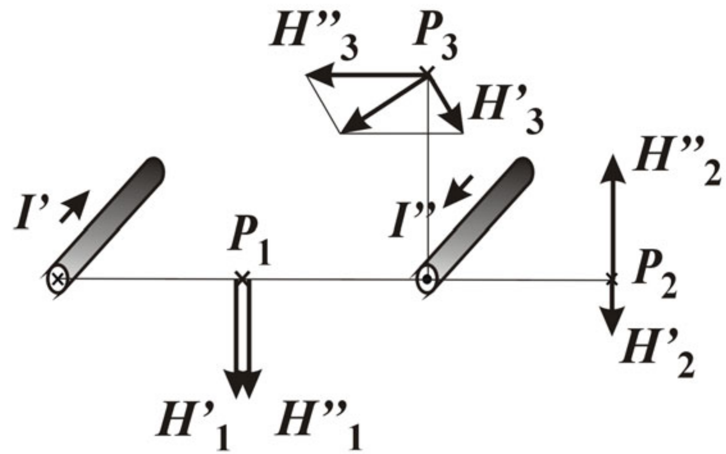
$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

3. Feladat

Határozzuk meg az ábrán látható két végtelen hosszúnak tekinthető, egymással párhuzamos egyenes vezető által létrehozott mágneses térerősség értékét a megjelölt P_1, P_2 és P_3 pontokban, ha , d=20 cm, I'=I''=I=20 A.



Megoldás,



(a) P_1 pontban a két komponens, $H_1' = H_1''$
egyforma nagyságú és azonos irányú

$$H_1 = H_1' + H_1'' = 2\frac{I}{2\pi d} = \frac{I}{\pi d} = \frac{20}{\pi 0{,}2} = 31{,}8310\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

(b) A P_2 pontban a két komponens ellentétes irányú

$$H_2 = H_2'' - H_2' = \frac{I}{2\pi\, d} - \frac{I}{2\pi\, 3d} = \frac{I}{3\pi\, d} = \frac{20}{3\pi 0{,}2} = 10{,}6103\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

(c) A P_3 pontban a két komponens vektori összegét képezve

$$H_3' = -\frac{I}{2\pi\, r_3} = -\frac{I}{2\pi\, d\sqrt{5}},$$

$$H_{3x}' = \frac{I}{2\pi\, d\sqrt{5}}\frac{d}{d\sqrt{5}} = \frac{I}{2\pi\, 5d},$$

$$H_{3y}' = -\frac{I}{2\pi\, d\sqrt{5}}\frac{2d}{d\sqrt{5}} = -\frac{I}{\pi\, 5d},$$

$$H_3'' = H_{3x}'' = \frac{I}{2\pi\, d}$$

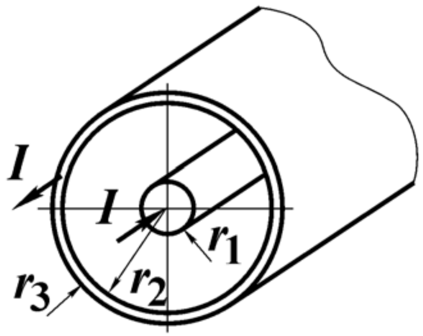
$$H_{3x} = H'_{3x} + H''_{3x} = \frac{I}{2\pi\, d}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2I}{\pi\, 5d}, \qquad H_{3y} = H''_{3y} = -\frac{I}{\pi\, 5d}$$

$$H_3 = \sqrt{H_{3x}^2 + H_{3y}^2} = \frac{I}{\pi 5d}\sqrt{5} = \frac{20}{\pi 0{,}2\sqrt{5}} = 14{,}2353\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

4. Feladat

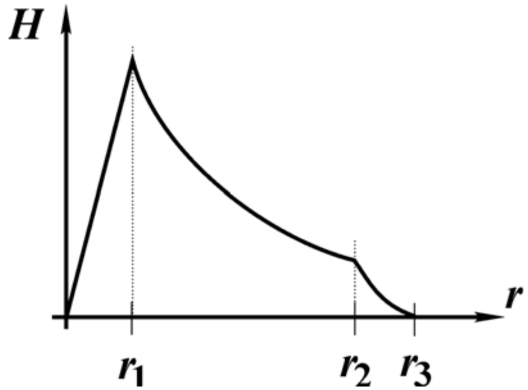
Az r_1 =1 mm sugarú belső, és r_2=3 mm sugarú külső vezetőérrel rendelkező koaxiális kábel árama I=3 A. Határozzuk meg a mágneses térerősség értékét a kábel tengelyétől r=0,5 mm-re, valamint a mágneses térerősség maximális értékét.

Megoldás,



$$H(r)2\pi r = \frac{I}{r_1^{\,2}\pi} r^2\pi \qquad H(r) = \frac{I}{2r_1^{\,2}\pi} r$$

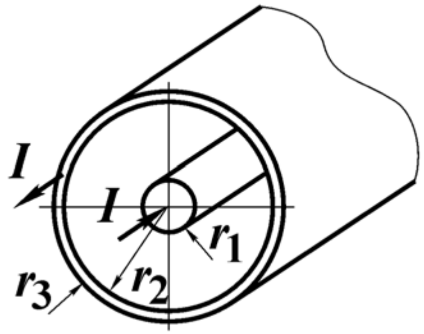
$$H(r = 0{,}5\,\mathrm{mm}) = \frac{0{,}5}{2(10^{-3})^2\pi} \cdot 5\cdot 10^{-4} = 39{,}79\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$



$$H(r = 1\,\mathrm{mm}) = \frac{0{,}5}{2\pi 10^{-3}} = 79{,}58\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

5. Feladat

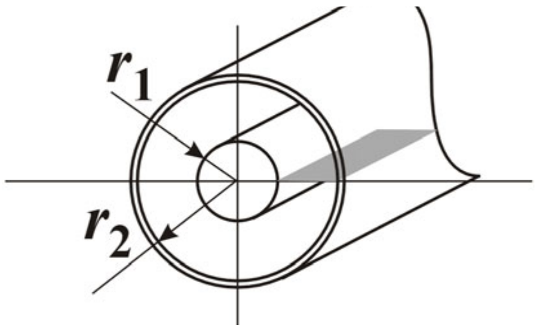
Határozzuk meg a koaxiális kábel önindukció együtthatójá, ha a belső vezető sugara r_1, a külső vezető belső sugara r_2, külső sugara r_3.



Megoldás

A két vezető között a mágneses térerősség

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$



Az elemi felület fluxusa

$$d\Phi = \mu H\, l dr = \mu \frac{I}{2\pi r} l dr$$

A két vezető közötti térrész mágneses fluxusa

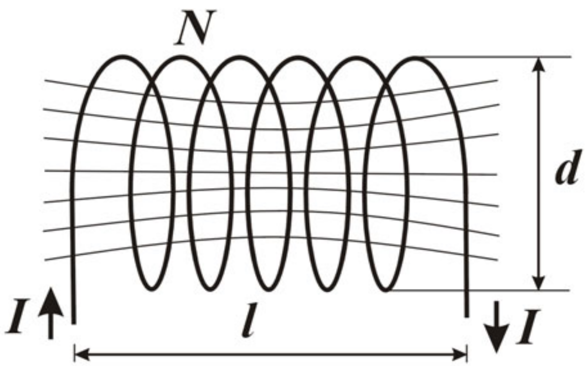
$$\Phi = \mu \frac{I}{2\pi} l \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \mu \frac{I}{2\pi} l \ln \frac{r_2}{r_1} = L\, I$$

Az önindukció együttható

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} l \ln \frac{r_2}{r_1}$$

6. Feladat

Határozzuk meg az N menetszámú, d átmérőjű és l hosszúságú légmagos egyenes tekercs, szolenoid belsejében a mágneses térerősség értékét és az önindukció együtthatóját



Megoldás

A mágneses térerősség

$$\oint_{l_{mág}} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{l_{mág}} H\,dl = \int_{l} H\,dl \approx H\,l = N\,I$$

$$H = \frac{N\,I}{l}$$

Egy menet fluxusa

$$\Phi = \int_{a} \vec{B}\cdot d\vec{a} \approx B\,a = \mu_0 H a = \mu_0 \frac{NI}{l} a$$

N menet fluxuskapcsolódása

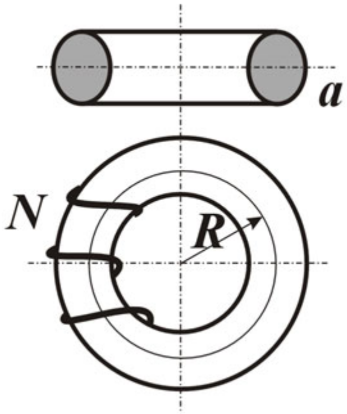
$$\Psi = N\Phi = \mu_0 \frac{N^2 a}{l} I$$

Az önindukció együttható

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 a}{l}$$

7. Feladat

Egy toroid alakú légmagos tekercs keresztmetszete *a*, közepes sugara *R*. A gyűrűn *N* menetű tekercs helyezkedik el. Határozzuk meg a tekercs önindukció együtthatóját.



Megoldás

A mágneses térerősség

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H\,2R\pi = N\,I \qquad H = \frac{NI}{2\pi\,R}$$

Egy menet fluxusa

$$\Phi = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} \approx B\,a = \mu_0 Ha = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} a$$

N menet fluxuskapcsolódása

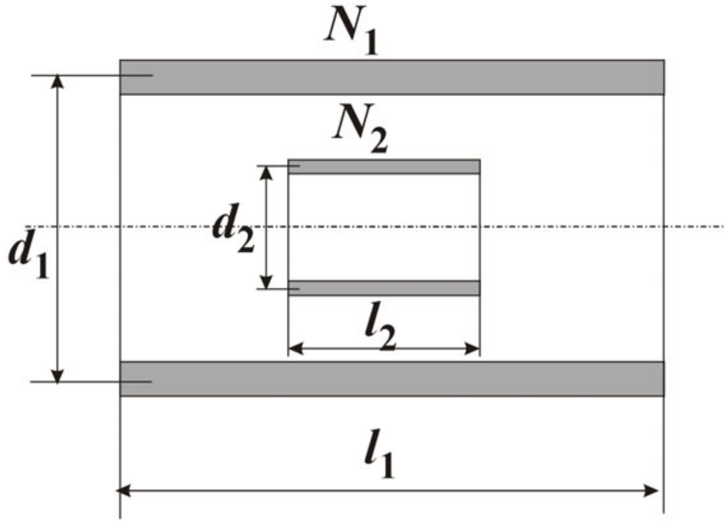
$$\Psi = N\Phi = NBa = N\mu Ha = N\mu \frac{NI}{2\pi R} a$$

Az önindukció együttható

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{N^2 a}{2R\pi}$$

8. Feladat

Helyezzünk el egy N_1 menetszámú, d_1 átmérőjű, l_1 hosszúságú, légmagos egyenes tekercs belsejében egy kisebb, N_2 menetszámú, d_2 átmérőjű, l_2 hosszúságú egyenes tekercset, úgy, hogy tengelyeik egybeessenek. Határozzuk meg a két tekercs között fellépő kölcsönös indukció együtthatót.



Megoldás

A külső tekercs mágneses indukciója

$$H_1 = \frac{N_1 I_1}{l_1}, \quad B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1}$$

A belső tekercs fluxusa

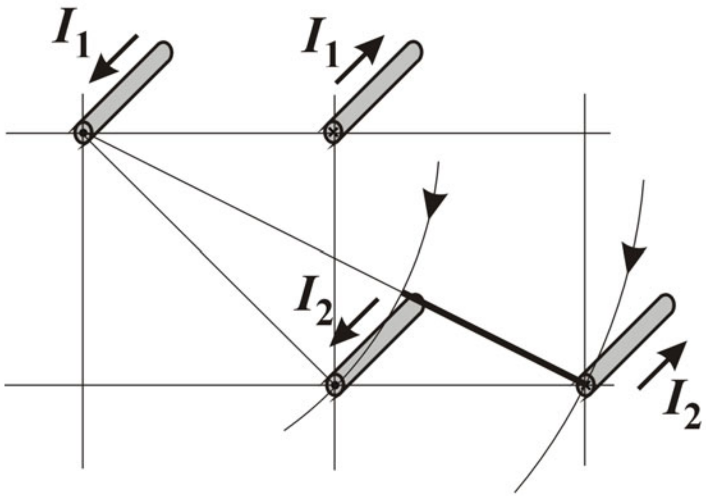
$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = N_2 B_1 a_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 a_2}{l_1} I_1$$

Az önindukció együttható

$$L_{12} = \left.\frac{\Psi_{12}}{I_1}\right|_{I_2=0} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 a_2}{l_1}$$

9. Feladat

Határozzuk meg a két párhuzamos kettősvezeték l hosszúságú szakaszának kölcsönös induktivitását.



Megoldás

$$L_{12} = \left.\frac{\Psi_{12}}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

A baloldali áramvezető által létrehozott fluxus

$$\Phi'_{12} = \int_{a_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int_{d\sqrt{2}}^{d\sqrt{5}} \mu \frac{I_1}{2\pi r} l dr = \mu \frac{I_1 l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

A jobboldali áramvezető által létrehozott fluxus

$$\Phi''_{12} = \int_{a_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = -\int_{d}^{d\sqrt{2}} \mu \frac{I_1}{2\pi r} l dr = -\mu \frac{I_1 l}{2\pi} \ln \sqrt{2}$$

A két fluxus erdője

$$\Phi_{12} = \Phi'_{12} + \Phi''_{12} = \mu \frac{I_1 l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{5}}{2} = L_{12} I_1$$

A kölcsönös indukció együttható

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Gy.2.3. Gyakorló feladatok

[1] Határozza meg egy $I = 12\ \mathrm{A}$ áramú egyenes vezetőtől $r = 3\ \mathrm{m}$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

[2] Mekkora az I árama annak az egyenes áramvezetőnek, amelytől $r = 1{,}2\ \mathrm{m}$ távolságban a H mágneses térerősség értéke $5\ \mathrm{A/m}$.

[3] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a H mágneses térerősség értékét.

[4] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezető síkjában a jobboldali vezetőtől $d/2$ távolságban a H mágneses térerősség értékét.

[5] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $2d$, $d = 60\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben azonos irányú, $I = 2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a jobboldali vezető felett, attól d távolságban a H mágneses térerősség értékét.

[6] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 60\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 4\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a H mágneses térerősség értékét.

[7] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $d = 24\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 3{,}2\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a két vezető síkjában a jobboldali vezetőtől $d/2$ távolságban lévő P_1 pontban a H mágneses térerősség értékét.

[8] Két egymással párhuzamos egyenes vezető távolsága $2d$, $d = 42\ \mathrm{cm}$. A vezetőkben ellentétes irányú, $I = 3{,}8\ \mathrm{A}$ nagyságú áram folyik. Határozza meg a jobboldali vezető felett, attól d távolságban a H mágneses térerősség értékét.

[9] Egy koaxiális kábel belső vezetőjének sugara $r_1 = 2\ \mathrm{cm}$, a külső köpeny belső sugara $r_2 = 3{,}2\ \mathrm{cm}$, a köpeny külső sugara $r_3 = 3{,}4\ \mathrm{cm}$. Határozza meg a koaxiális kábelben a mágneses térerősség értékét az r_1, r_2, r_3 sugarú helyeken, ha a kábelen $I = 2{,}4\ \mathrm{A}$ áram folyik.

[10] Egy $a = 12\ \mathrm{cm}$ oldalú négyzet három csúcspontján három áramvezető megy át. Két szemben lévő csúcson elhelyezkedő vezetőn az egyik irányba folyik az I áram, a harmadikon pedig visszafolyik a $2I$ áram. $I = 4{,}6\ \mathrm{A}$. Határozza meg a H mágneses térerősség értékét a negyedik csúcspontban.

[11] **Egy $a = 8\,\text{cm}$ oldalú négyzet három csúcspontján három áramvezető megy át. Mindhárom vezetőn azonos irányban folyik az I áram. $I = 1{,}4\,\text{A}$. Határozza meg a H mágneses térerősség értékét a négyzet középpontjában.**

[12] **Egy $a = 18\,\text{cm}$ oldalú négyzet három csúcspontján három áramvezető megy át, amelyeken $I = 3{,}6\,\text{A}$ nagyságú, azonos irányú áram folyik át. Határozza meg a H mágneses térerősség értékét a negyedik csúcspontban.**

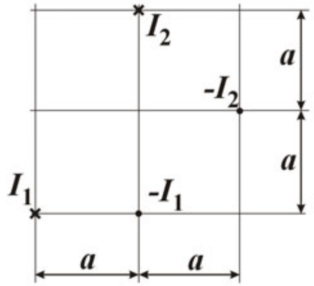
[13] **Két egymással párhuzamos kettősvezeték sugara $r_0 = 2\,\text{cm}$, tengelyeik távolsága $d = 28\,\text{cm}$. A két vezető ellenkező irányú árama $I = 12\,\text{A}$. Határozza meg a kettősvezeték $l = 1{,}4\,\text{m}$ hosszú szakaszának Ψ fluxusát.**

[14] **Két egymással párhuzamos kettősvezeték sugara $r_0 = 2\,\text{cm}$, tengelyeik távolsága $d = 28\,\text{cm}$. A két vezető ellenkező irányú árama $I = 12\,\text{A}$. Határozza meg a kettősvezeték $l = 1{,}4\,\text{m}$ hosszú szakaszának L önindukció együtthatóját.**

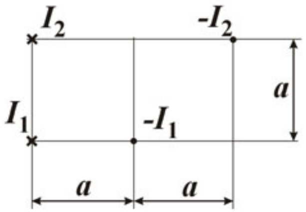
[15] **Egy $I_1 = 2\,\text{A}$ áramú, $a = 12\,\text{cm}$ szélességű, $b = 15\,\text{cm}$ hosszúságú keret síkjában a kerettől $d = 22\,\text{cm}$ távolságra, jobbra egy $I_2 = 4\,\text{A}$ áramú egyenes vezető helyezkedik el. Határozza meg a két áramvezető közötti kölcsönös indukció együttható értékét, ha a két egymás melletti vezetőben azonos irányú áram folyik.**

[16] **Egy $I_1 = 2\,\text{A}$ áramú, $a = 12\,\text{cm}$ szélességű, $b = 15\,\text{cm}$ hosszúságú keret síkjában a kerettől $d = 22\,\text{cm}$ távolságra, jobbra egy $I_2 = 4\,\text{A}$ áramú egyenes vezető helyezkedik el. Határozza meg a két áramvezető közötti kölcsönös indukció együttható értékét, ha a két egymás melletti vezetőben ellenkező irányú áram folyik.**

[17] **Határozza meg az ábrán látható két kettősvezeték $l = 1{,}2\,\text{m}$ hosszú szakaszának kölcsönös indukció együtthatóját, ha a vezetők árama $I_1 = 3\,\text{A}$, $I_2 = 8\,\text{A}$ és $a = 23\,\text{cm}$.**



[18] **Határozza meg az ábrán látható két kettősvezeték $l = 2{,}6\,\text{m}$ hosszú szakaszának kölcsönös indukció együtthatóját, ha a vezetők árama $I_1 = 2\,\text{A}$, $I_2 = 6\,\text{A}$ és $a = 18\,\text{cm}$.**



Megoldások

[1] A gerjesztési törvény alapján $H = \dfrac{I}{2\pi r} = \dfrac{12}{2\pi 3} = 0{,}6366$ A/m.

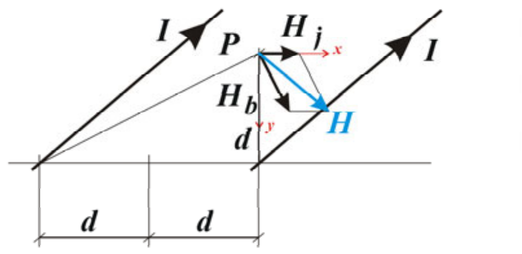
[2] Minthogy a gerjesztési törvény alapján $H = \dfrac{I}{2\pi r}$, így $I = H 2 r\pi = 5 \cdot 2 \cdot 1{,}2\pi = 37{,}6991$ A.

[3] Feltételezve, hogy az áramok a papír síkjára merőlegesen befelé mutatnak, a baloldali vezető keltette mágneses tér a jobb kéz szabály szerint vezető köré írható $d/2$ sugarú kör érintője a megadott pontban, nagysága a gerjesztési törvény szerint $H_b = \dfrac{I}{2\pi\, d/2}$. A jobboldali vezető ugyanekkora, de ellenkező irányú mágneses teret kelt $H_j = H_b$, ezért a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a H mágneses térerősség értéke nulla.

[4] Az előző feladathoz hasonlóan a baloldali vezető keltette mágneses tér lefelé mutató irányú, nagysága $H_b = \dfrac{I}{2\pi 3\frac{d}{2}}$, míg a jobboldali vezető által keltett mágneses azonos irányú, nagysága $H_j = \dfrac{I}{2\pi \frac{d}{2}}$. A mágneses térerősség vektor mennyiség, ezért vektoriálisan összegeződik, azaz a megadott pontban a mágneses tér nagysága $H = H_b + H_j = \dfrac{I}{4\pi\, d} = \dfrac{2}{4\pi 0{,}6} = 0{,}2653$ A/m.

[5] Az ábrán látható az áramvezetők keltette mágneses tér két komponense, amelyeket vektoriálisan összegezünk. A baloldali vezető által keltett mágneses tér $H_b = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}$, a jobboldali vezető mágneses tere $H_j = \dfrac{I}{2\pi\, d}$. A vektori

összegezéshez helyezzünk el egy x-y koordináta rendszert a P pontban és bontsuk fel a vezetők keltette mágneses teret ezen koordináta komponensekre. A baloldali vezető mágneses tere x és y komponensekre bontható, $H_{bx} = H_b \dfrac{d}{\sqrt{5}d} = \dfrac{I}{2\pi 5d}$, $H_{by} = H_b \dfrac{2d}{\sqrt{5}d} = \dfrac{I}{\pi 5d}$, a jobboldali vezető H_j mágneses tere x- irányú $H_{jx} = H_j = \dfrac{I}{2\pi d}$.



Az x-, ill. y- irányú komponenseket összegezve az eredő mágneses tér

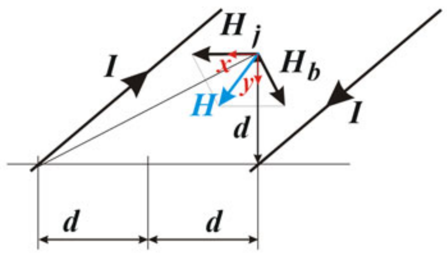
$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{\left(H_{bx} + H_{jx}\right)^2 + H_{by}^2} = \frac{I}{2\pi 5d}\sqrt{36+4} = \frac{2}{10\pi 0,6}\sqrt{40} = 0,6711 \text{ A/m}$$

[6] A gerjesztési törvény értelmében a két vezetőt összekötő egyenes felezőpontjában a két áramvezető azonos nagyságú és irányú mágneses teret kelt. (A mágneses tér irányát a jobb kéz szabály szerint határozhatjuk meg.) Ezek vektori összege a két komponensből $H = 2\dfrac{I}{2\pi \frac{d}{2}} = \dfrac{4}{\pi 0,6} = 2,1221 \text{ A/m}$.

[7] Feltételezve, hogy a baloldali vezetőben a papír síkjára merőlegesen befelé folyik az áram, a mágneses tér nagysága $H_b \dfrac{I}{2\pi \frac{3}{2} d}$, iránya a jobb kéz szabály szerint lefelé mutató. A jobboldali vezetőben felénk mutató az áram iránya, a

mágneses tér felfelé mutató irányú és $H_j = \dfrac{I}{2\pi \frac{d}{2}}$ nagyságú. A két mágneses térkomponens eredője felfelé mutató irányú és $H = \dfrac{I}{3\pi \frac{d}{2}} = 2{,}8294\ \mathrm{A/m}$.

[8] Az 5. feladat megoldásához hasonlóan a baloldali vezető mágneses tere $H_b = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}$, a jobboldali vezető mágneses tere $H_j = \dfrac{I}{2\pi d}$. felbontva a mágneses térerősség vektorokat *x-y* irányú komponensekre $H_{bx} = -\dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $H_{by} = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{5}d}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $H_{jx} = \dfrac{I}{2\pi d}$, az eredő mágneses térerősség vektor nagysága $H = \dfrac{I}{2\pi d 5}\sqrt{(2)^2 + (4)^2} = 1{,}2880\ \mathrm{A/m}$.



[9] A gerjesztési törvény alkalmazva $H(r_1) = I/2\pi r_1 = 31{,}8310\ \mathrm{A/m}$, $H(r_2) = I/2\pi r_2 = 18{,}7241\ \mathrm{A/m}$, és végül $H(r_3) = I/2\pi r_3 = 0$, minthogy a belső vezetéken és a külső köpenyen átfolyó áramok összege nulla.

[10] A két szemben lévő csúcson átmenő azonos áramirányú vezetők azonos nagyságú, egymásra merőleges $H_1 = H_2 = \dfrac{I}{2\pi a}$ nagyságú mágneses térkomponenseket hoznak létre, amelyek eredője $H_{12} = \dfrac{I}{2\pi a}\sqrt{2}$. A harmadik

vezető $H_3 = \dfrac{2I}{2\pi a\sqrt{2}}$ nagyságú mágneses tere ellenkező irányú az előző komponensek eredőjével, így a négyzet negyedik csúcspontjában a mágneses tér értéke $H_{12} - H_3 = \dfrac{I}{2\pi a}\left(\sqrt{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

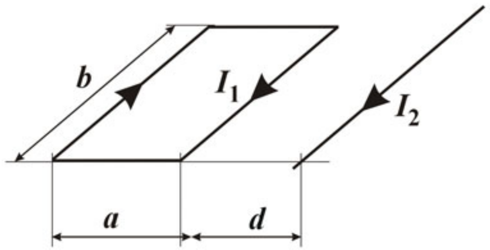
[11] A gerjesztési törvény értelmében a két szemközti csúcson átmenő áramvezetők a négyzet középpontjában azonos nagyságú és ellenkező irányú mágneses teret keltenek, amelyek eredője nulla. Így az eredő mágneses térerősséget a harmadik vezető mágneses tere adja, $H_3 = \dfrac{I}{2\pi\frac{\sqrt{2}a}{2}} = 3{,}9389\ \mathrm{A/m}$.

[12] A gerjesztési törvény értelmében a szemközti csúcsokon elhelyezett áramvezetők egymásra merőleges mágneses tere azonos nagyságú, $H_1 = H_2 = \dfrac{I}{2\pi a}$, eredőjük az átló irányába mutat $H_{12} = \dfrac{I}{2\pi a}\sqrt{2}$. A harmadik vezető mágneses tere a négyzet átlójára merőleges irányú és $H_3 = \dfrac{I}{2\pi a\sqrt{2}}$ nagyságú. Ennek megfelelően a négyzet negyedik csúcsában a mágneses térerősség értéke $H = \sqrt{H_{12}^2 + H_3^2} = \dfrac{I}{2\pi a}\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = 5{,}0329\ \mathrm{A/m}$.

[13] A két vezető azonos nagyságú és irányú mágneses fluxust kelt a két vezető közötti térben. A baloldali vezető mágneses tere a vezetőtől r távolságra $H = \dfrac{I}{2\pi r}$, a mágneses indukció vektor értéke $B = \mu_0 H = \mu_0\dfrac{I}{2\pi r}$. Az elemi felület $da = l \cdot dr$, és így az elemi felület fluxusa $d\Psi = B \cdot da$, az áramvezető által keltett fluxus $\Psi' = \int_{r=r_0}^{r=d-r_0} \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r} l dr = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi} l \ln\dfrac{d-r_0}{r_0} \approx \mu_0\dfrac{I}{2\pi} l \ln\dfrac{d}{r_0} = 8{,}8672 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs}$. A jobboldali vezető mágneses fluxusa megegyezik a baloldali vezetőjével $\Psi'' = \Psi'$, így a két vezető közötti $l = 1{,}4\ \mathrm{m}$ hosszúságú keresztmetszet fluxusa $\Psi = 2\Psi' = 1{,}7734 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Vs}$.

[14] Az előző feladat megoldását felhasználva a kettősvezeték önindukció együtthatója $L = \Psi/I = 1{,}4778 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H} = 1{,}4778\ \mu\mathrm{H}$.

[15] **Felhasználva a kölcsönös indukció-együttható definícióját, amely szerint az egyik vezető árama által a másik vezető keresztmetszetén keltett mágneses fluxust osztva azzal az árammal amely létrehozta megkapjuk a két vezető közötti kölcsönös indukció együtthatót,** $L_{12} = \left.\dfrac{\Psi_{12}}{I_1}\right|_{I_2=0}$.



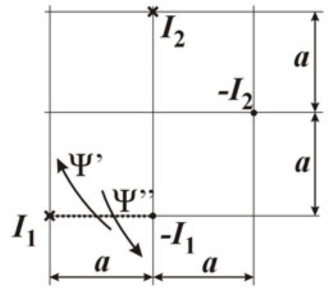
A fentieknek megfelelően az I_2 **áramvezető az** I_1 **áramvezető keresztmetszetén** $\Psi_{12} = \int_d^{d+a} \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi r} b\,dr = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi} b \ln \dfrac{d+a}{d}$

fluxust hoz létre, ahonnan kölcsönös indukció együttható $L_{12} = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \dfrac{d+a}{d} = 1{,}3060 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H} = 0{,}13060\ \mathrm{nH}$.

[16] **Az előző feladat eredményét felhasználva és figyelembe véve, hogy az valamelyik áramirány megfordítása a felületen a felületi normálissal (a keret áramiránya a jobb kéz szabály szerint adja a felületi normálist) ellenkező irányú (negatív előjelű) fluxust eredményez, és így a kölcsönös indukció-együttható is előjelet vált, azaz** $L_{12} = -0{,}13060\ \mathrm{nH}$.

[17] **Az** I_1 **áramú vezető-pár keresztmetszetén az** I_2 **áram** $\Psi' = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi} l \ln \dfrac{a\sqrt{5}}{2a}$ **fluxust hoz létre, miközben a** $-I_2$ **áramú vezető** $\Psi'' = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi} l \ln \dfrac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{2}}$ **mágneses fluxust gerjeszt. Minthogy a felület normálisa az** I_1 **áramiránynak megfelelően**

lefelé mutató, így a keresztmetszet fluxusa $\Psi = \Psi'' - \Psi' = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi} l \ln\sqrt{2}$, a kölcsönös indukció együttható pedig $L_{12} = \frac{\Psi}{I_2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\sqrt{2} = 8{,}3178 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H} = 0{,}83178\ \mathrm{nH}$.



[19] Az előző feladathoz hasonlóan most az I_1 áramú vezetők fluxusából határozzuk meg a kölcsönös indukció együtthatót. Az I_1 áramú vezető fluxusa $\Psi' = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi} l \ln\frac{a\sqrt{2}}{a}$, a $-I_1$ áram pedig nulla fluxust kelt az I_2 áramú vezetők keresztmetszetén, mivel amennyi mágneses indukcióvonal az egyik felén bemegy annyi a mások felén ki is lép. Ezzel az elrendezés kölcsönös indukció együtthatója $L_{12} = \frac{\Psi'}{I_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\sqrt{2} = 0{,}83178\ \mathrm{nH}$.