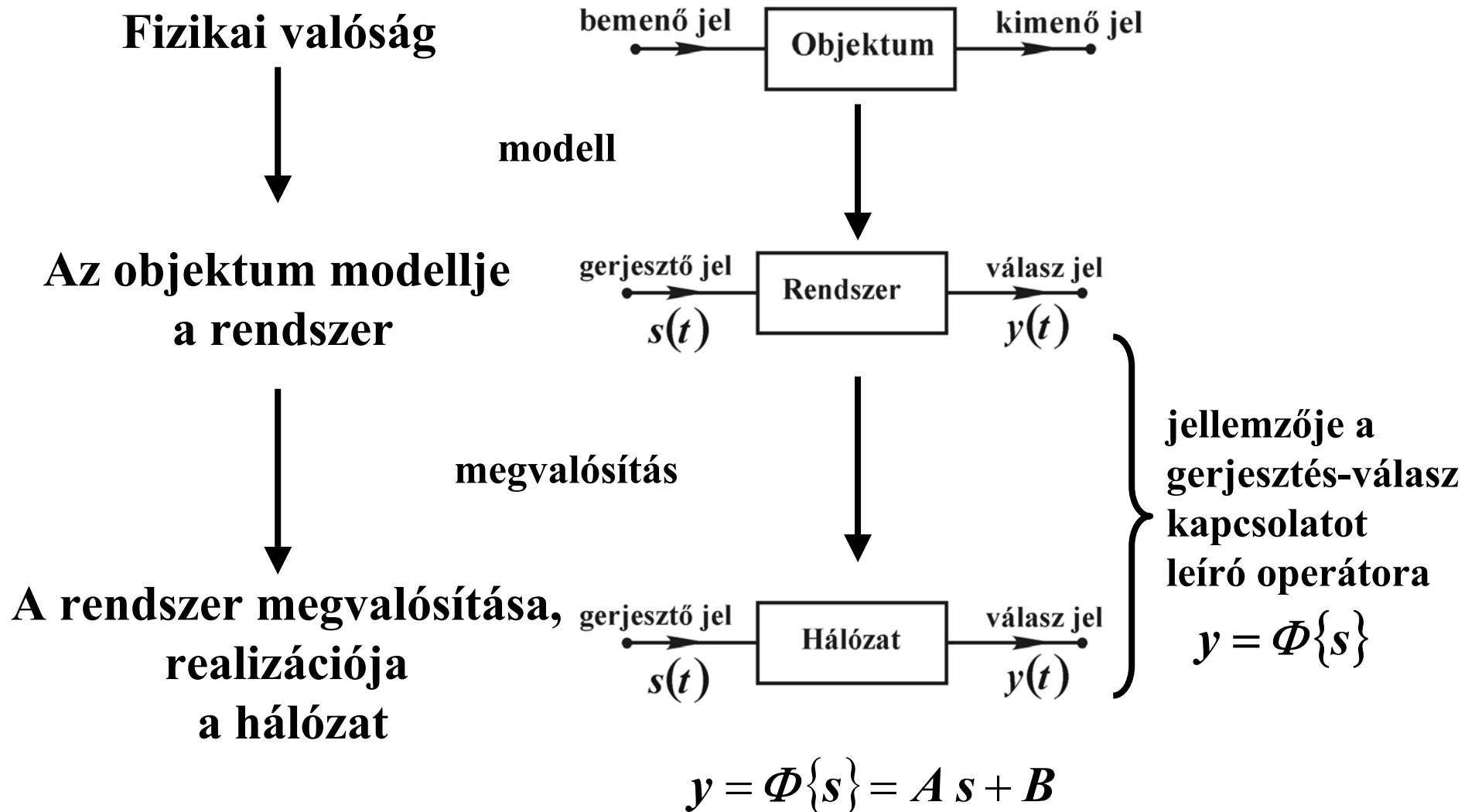


MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné
egyetemi tanár

4. Konferencia, Előadás

Hálózatszámítás



A rendszer és a hálózat $y = \Phi\{s\}$ operátorának tulajdonságai

a) lineáris, ha $\Phi(s_1) = y_1, \quad \Phi(s_2) = y_2,$
 $\Phi(a_1s_1 + a_2s_2) = a_1\Phi(s_1) + a_2\Phi(s_2) = a_1y_1 + a_2y_2,$
csak akkor, ha $B=0$ és $A=\text{állandó}$, azaz $y = A s$.

b) idő-invariáns, ha $\Phi\{s(t)\} = y(t),$
 $\Phi\{s(t-T)\} = y(t-T),$ } késleltetett gerjesztésre
késleltetett válasz,

c) kauzális, ha $y(t_1) = \Phi\{s(t), t \leq t_1\},$ a jövő nem hat vissza a múltra,

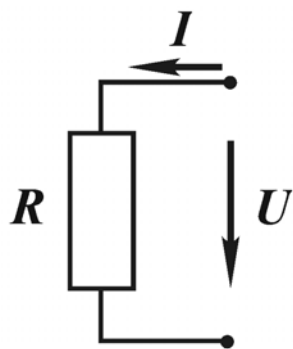
d) passzív, ha $p(t) \begin{cases} >0, & \text{felvesz teljesítményt, passzív elem, fogyasztó,} \\ =0, & \text{nonenergetikus, a felvett telj. nulla, passzív elem,} \\ <0, & \text{aktív elem, lead teljesítményt.} \end{cases}$

Kirchoff típusú hálózatok (lineáris, invariáns, kauzális)

1. Rezisztív hálózatok

Komponensek és karakterisztikájuk

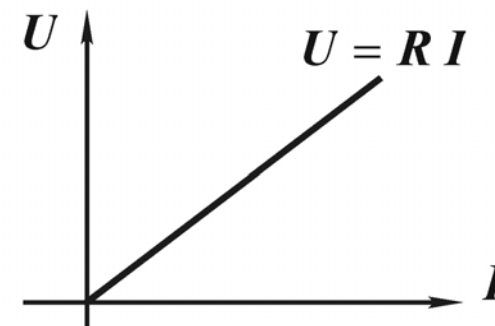
a) Az ellenállás,



karakterisztikája $u(t) = R i(t)$

időben állandó
gerjesztés esetén } $\boxed{U = R I}$

a vezetés $I = G U$, $\boxed{G = 1/R}$

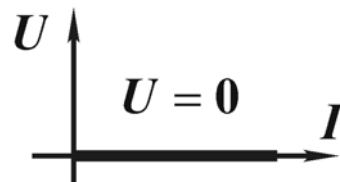
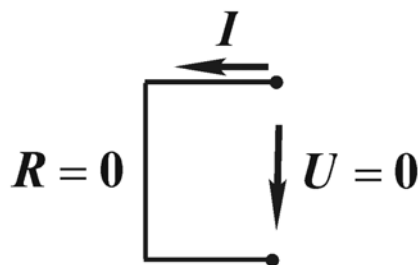


passzív elem

$$P = U I = R I^2 = U^2 / R$$

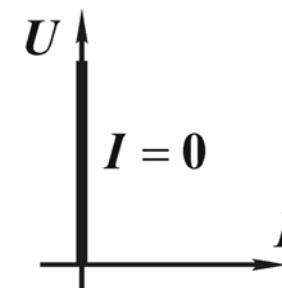
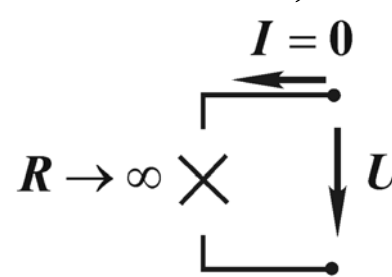
elfajuló, speciális esetek

(i) rövidzár, ha $R=0$, $U=0$,

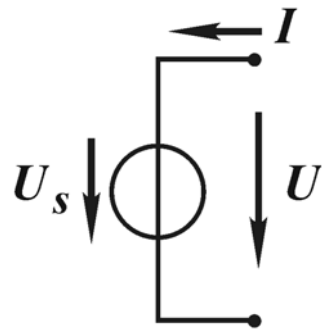


(ii) szakadás, üresjárás,

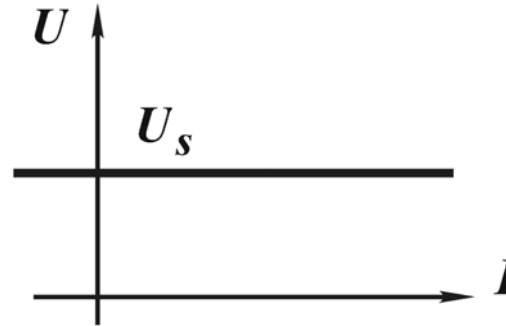
ha $R \rightarrow \infty$, $I=0$,



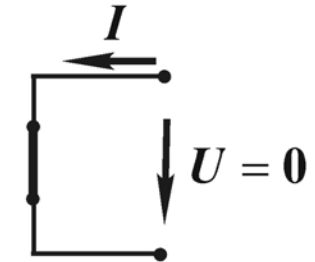
b) a feszültségforrás, aktív elem



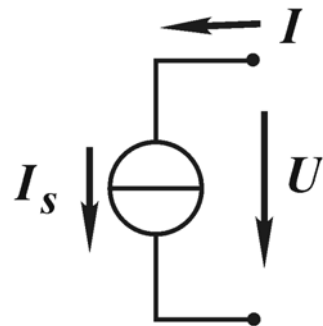
$U \equiv U_s$
 $I - \text{ tetszőleges}$



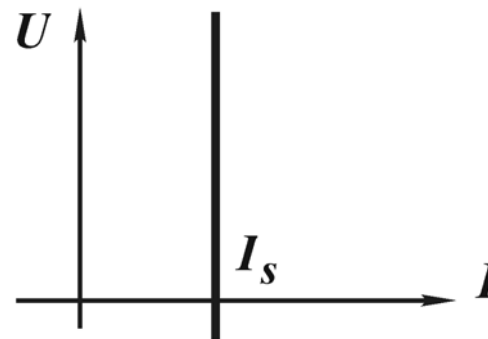
ha $U_s = 0$, akkor $U=0$,
azaz rövidzár



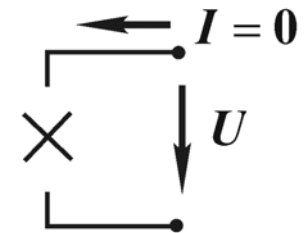
c) az áramforrás, aktív elem



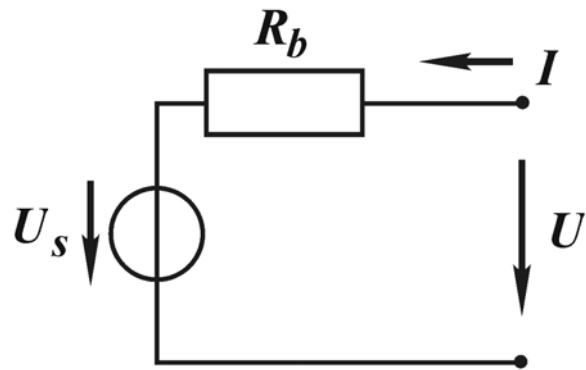
$I \equiv I_s$
 $U - \text{ tetszőleges}$



ha $I_s = 0$ akkor $I=0$,
azaz szakadás

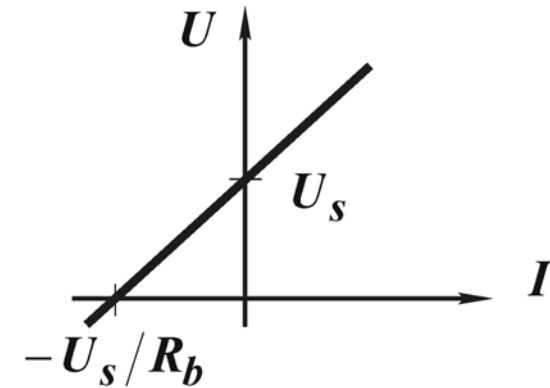


d) a feszültség generátor, aktív elem

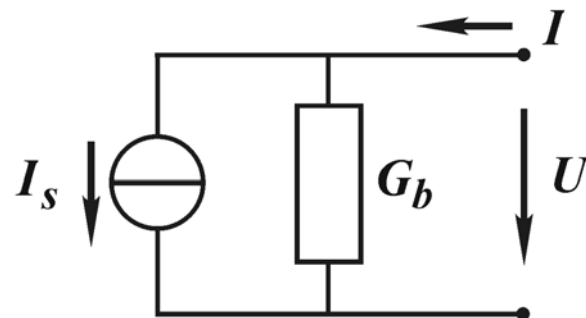


karakterisztikája

$$U = U_s + R_b I$$

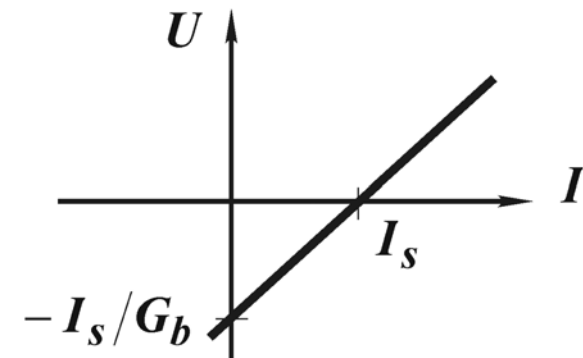


e) az áram generátor, aktív elem



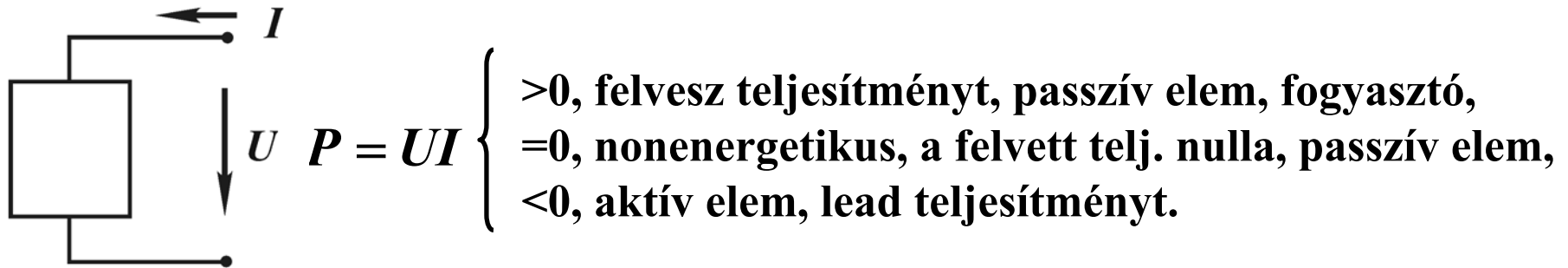
karakterisztikája

$$I = I_s + G_b U$$



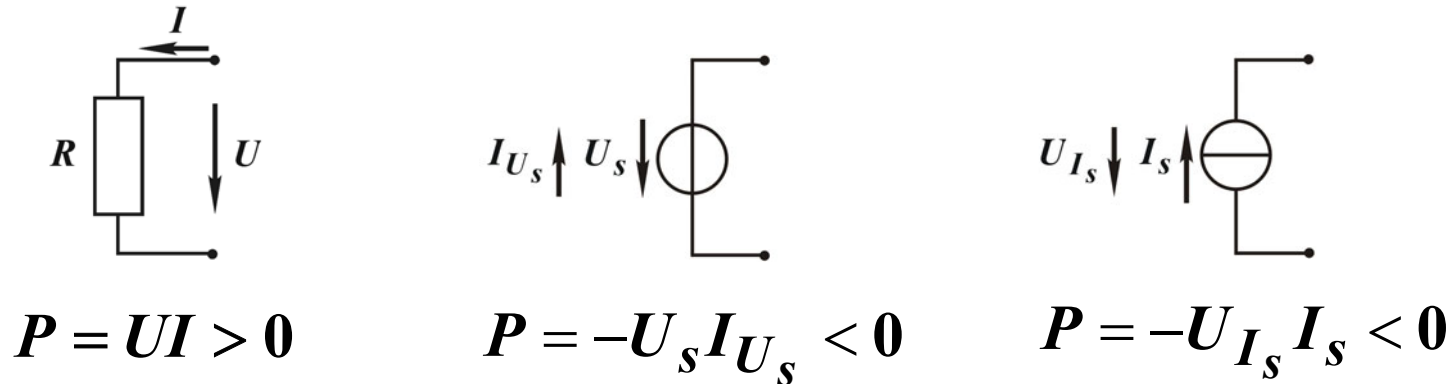
$I = 0$, üresjárás,
 $U = 0$, rövidzár,

f) passzivitás, az elem teljesítménye



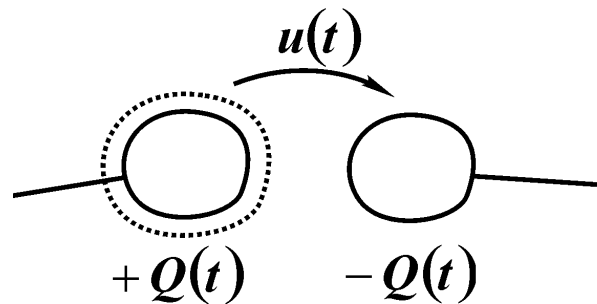
passzív elem, fogyasztó, ellenállás, vezeték,
non-energetikus, rövidzár, szakadás,
aktív elem, feszültség és áramforrás, a feszültség és áram generátorok

g) szokásos referencia irányok



c1) Kondenzátor

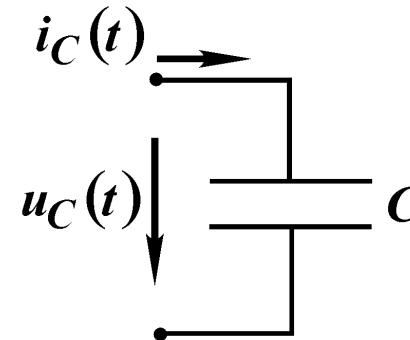
Eszköz



$$Q(t) = Cu(t)$$

$$i_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$$

Hálózati elem



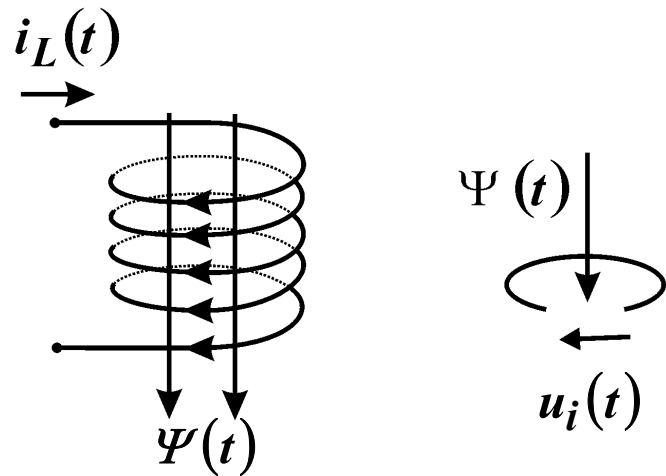
$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \dot{u}_C(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

kezdeti feltétel $u_C(t_0)$

c2) Tekercs

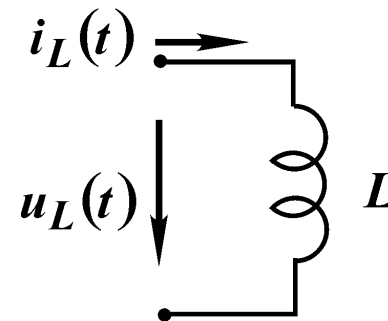
Eszköz



$$\Psi(t) = L i_L(t) \quad u_i(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = L \frac{d i_L(t)}{dt}$$

Hálózati elem



$$u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} = L \dot{i}_L(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L(\tau) d\tau}_{\text{kezdeti feltétel}} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$$

kezdeti feltétel $i_L(t_0)$

c3) Energiaviszonyok

A teljesítmény $p(t) = u(t)i(t)$

a kondenzátor teljesítménye $p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = u_C C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$

a tekercs teljesítménye $p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = i_L L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i_L^2 \right)$

A t időpillanatban az energia

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \begin{cases} \geq 0, & \text{passzív elem,} \\ < 0, & \text{aktív elem,} \end{cases}$$

kondenzátor energiája $u_C(-\infty) = 0, \quad w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) \geq 0, \quad C \geq 0,$

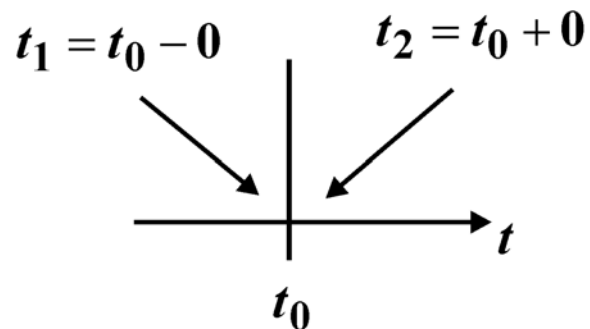
tekercs energiája $i_L(-\infty) = 0, \quad w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \geq 0, \quad L \geq 0,$

a tekercs és a kondenzátor passzív elemek

a t_1 - t_2 időpillanatok között felvett energia

a kondenzátor energiája $\Delta W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C [u_C^2(t_2) - u_C^2(t_1)]$

a tekercs energiája $\Delta W_L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L [i_L^2(t_2) - i_L^2(t_1)]$



ha $t_1 = t_2 = t_0$, akkor $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$,

és ekkor $\Delta W = 0$,

(mivel az energia ugrásszerűen nem változik)

$t_1 = t_0 - 0$ $t_2 = t_0 + 0$

baloldali jobboldali
határérték határérték

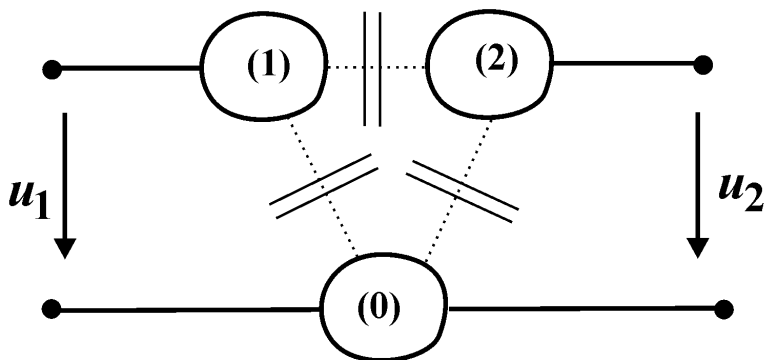
$$\boxed{u_C(t_1 = t_0) = u_C(t_2 = t_0)}$$

$$\boxed{i_L(t_1 = t_0) = i_L(t_2 = t_0)}$$

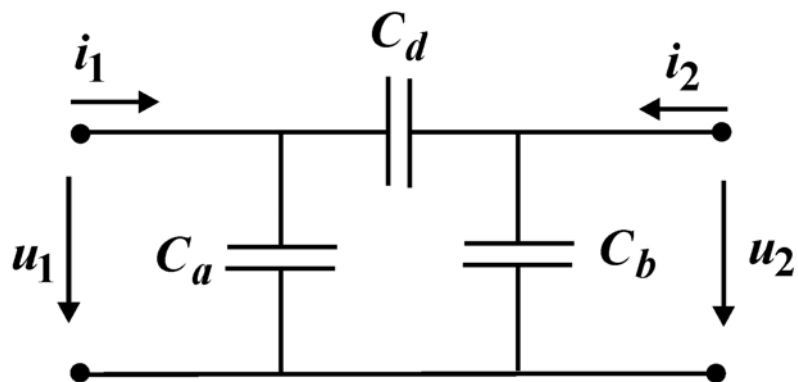
folytonosan változik,
nincs ugrása

d) A csatolt kondenzátor

Eszköz



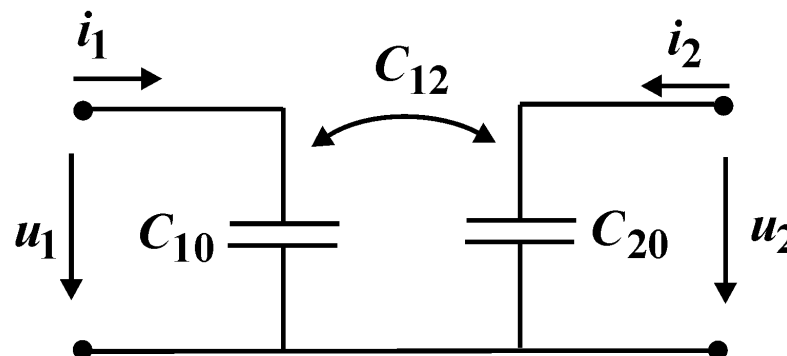
Π helyettesítő kép



$$C_{10} = C_a + C_d, \quad C_{12} = -C_d, \quad C_{20} = C_b + C_d,$$

$$C_a = C_{10} + C_{12}, \quad C_d = -C_{12}, \quad C_b = C_{20} + C_{12}.$$

Hálózati modell



$$i_1 = C_{10} \dot{u}_1 + C_{12} \dot{u}_2 \quad C_{12} = C_{21}$$

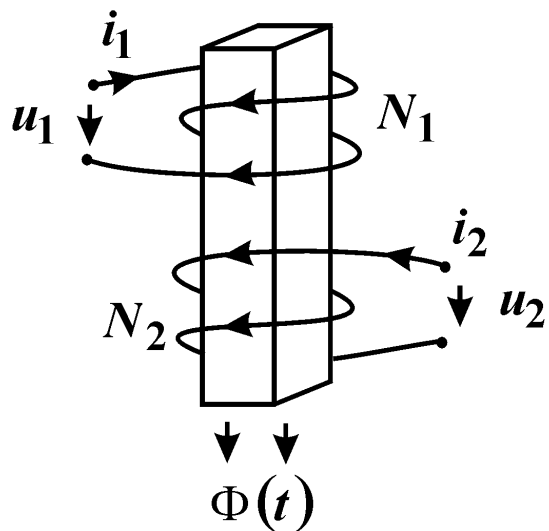
$$i_2 = C_{21} \dot{u}_1 + C_{20} \dot{u}_2$$

$$i_1 = C_a \dot{u}_1 + C_d (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = (C_a + C_d) \dot{u}_1 - C_d \dot{u}_2$$

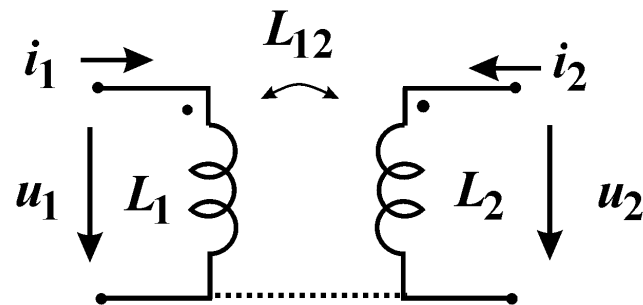
$$i_2 = C_d (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + C_b \dot{u}_2 = -C_d \dot{u}_1 + (C_b + C_d) \dot{u}_2$$

e) A csatolt tekercs

Eszköz

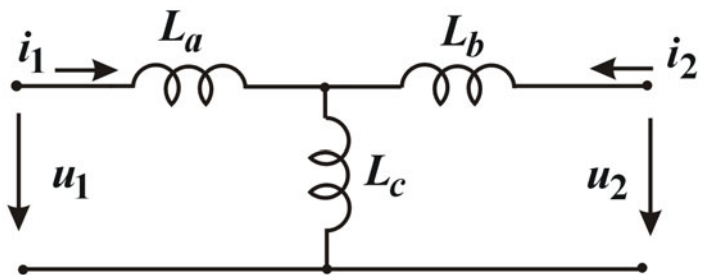


Hálózati modell



$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \dot{i}_1 + L_{12} \dot{i}_2 \\ u_2 &= L_{21} \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2 \end{aligned} \quad L_{12} = L_{21}$$

T helyettesítő kép

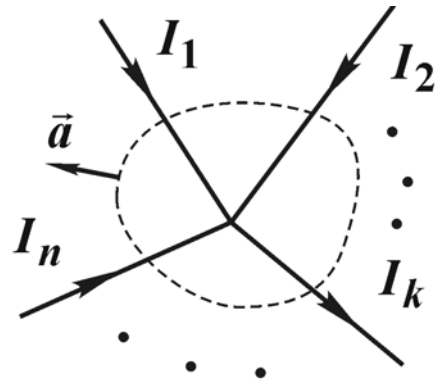


$$\begin{aligned} u_1 &= L_a \dot{i}_1 + L_c \left(\dot{i}_1 + \dot{i}_2 \right) = (L_a + L_c) \dot{i}_1 + L_c \dot{i}_2 \\ u_2 &= L_c \left(\dot{i}_1 + \dot{i}_2 \right) + L_b \dot{i}_2 = L_c \dot{i}_1 + (L_b + L_c) \dot{i}_2 \\ L_1 &= L_a + L_c, \quad L_{12} = L_c, \quad L_2 = L_b + L_c, \\ L_a &= L_1 - L_{12}, \quad L_c = L_{12}, \quad L_b = L_2 - L_{12}. \end{aligned}$$

3. A hálózati elemek összekapcsolása (Kirchhoff típusú hálózat)

Összekapcsolási kényszerek – Kirchhoff törvények

a) Kirchhoff csomóponti törvény

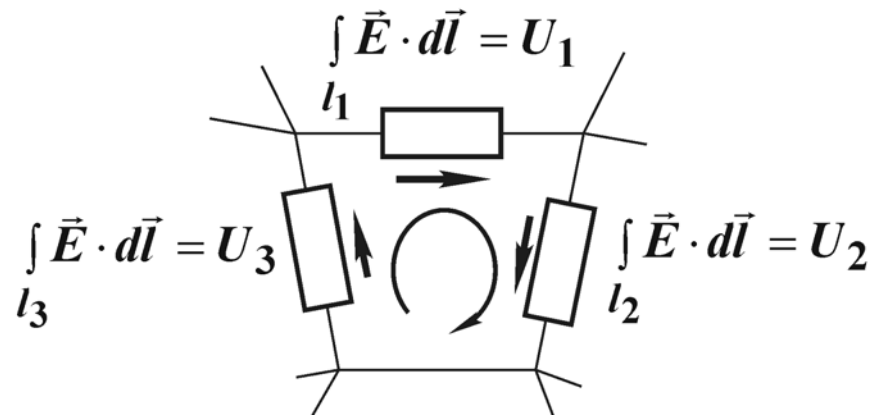


$$\oint_a \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0, \quad -I_{be} + I_{ki} = 0$$

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$

anyag-, és tömeg megmaradási törvény,

b) Kirchhoff huroktörvény



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\sum_k U_k = 0}$$

energia megmaradási törvény,

Hálózati egyenletek felírása és megoldás

Hálózati egyenletek = { ág törvények, karakterisztikák,
összekapcsolási kényszerek,

a hálózatban

b -ág

n -csomópont

b x feszültség = b ismeretlen,

b x áram = b ismeretlen,

$2b$ ismeretlen

- b számú karakterisztika

összesen =

b számú egyenlet

n -csomópont --- $c = n - 1$

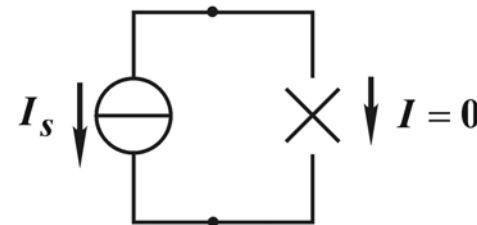
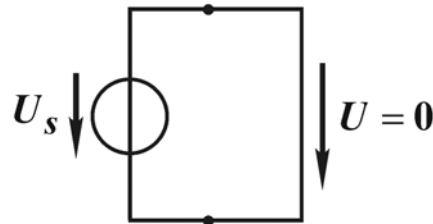
számú csomóponti egyenlet,

b -ág ---- $h = b - (n - 1)$

számú hurok egyenlet.

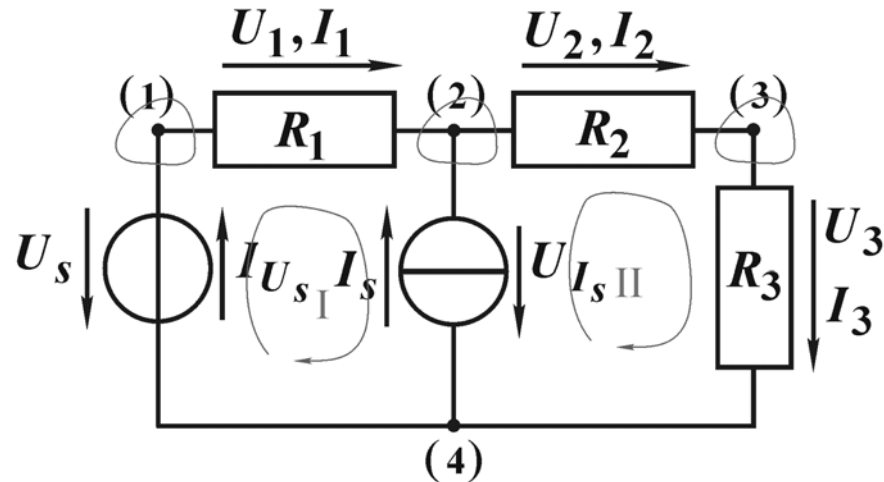
A hálózati egyenletek megoldhatók, ha reguláris a hálózat

pl. nem reguláris hálózatok:



4. Kirchoff típusú hálózat hálózati egyenletek felírása

Rezisztív hálózat, hálózati egyenletek



a) Karakterisztikák, ágtörvények

$$U_1 = R_1 I_1$$

$$U_2 = R_2 I_2$$

$$U_3 = R_3 I_3$$

b) Összekapcsolási kényszerek

(i) Kirchoff csomóponti törvény

$$(1) \quad I_1 - I_{U_s} = 0,$$

$$(2) \quad -I_1 - I_s + I_2 = 0,$$

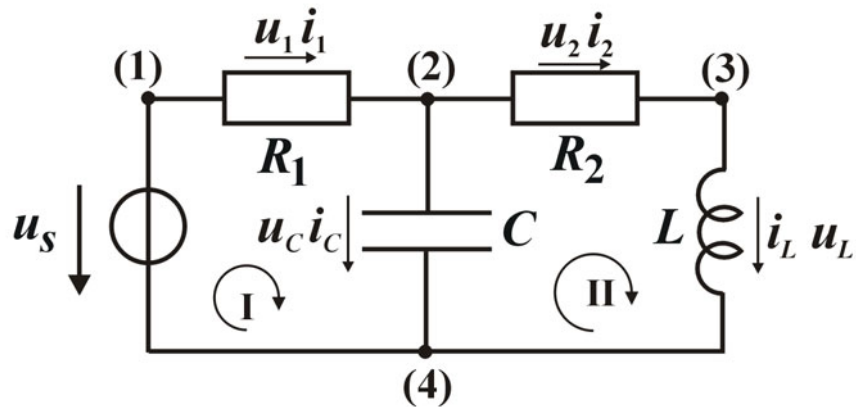
$$(3) \quad -I_2 + I_3 = 0.$$

(ii) Kirchoff hurok törvény

$$(I) \quad U_1 + U_{I_s} - U_s = 0,$$

$$(II) \quad U_2 + U_3 - U_{I_s} = 0.$$

Dinamikus hálózat, hálózati egyenletek



a) Karakterisztikák, ágtörvények

$$u_1 = R_1 i_1, \quad i_C = C \dot{u}_C$$

$$u_2 = R_2 i_2, \quad u_L = L \dot{i}_L$$

b) összekapcsolási kényszerek, (Kirchhoff egyenletek)

(i) Kirchhoff csomóponti törvény

$$(1) \quad i_1 - i_{U_s} = 0,$$

$$(2) \quad -i_1 + i_C + i_2 = 0,$$

$$(3) \quad -i_2 + i_L = 0.$$

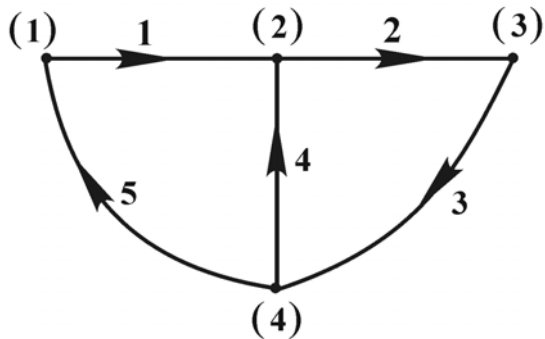
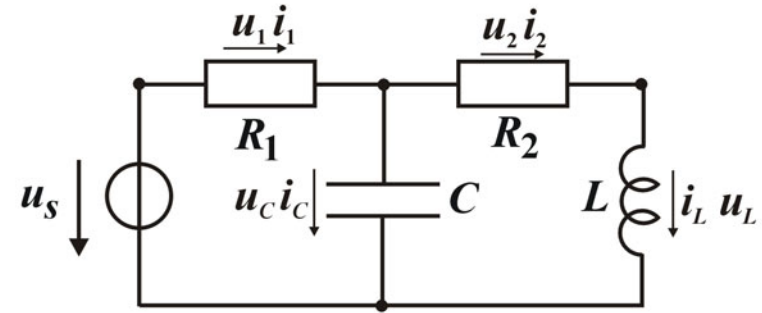
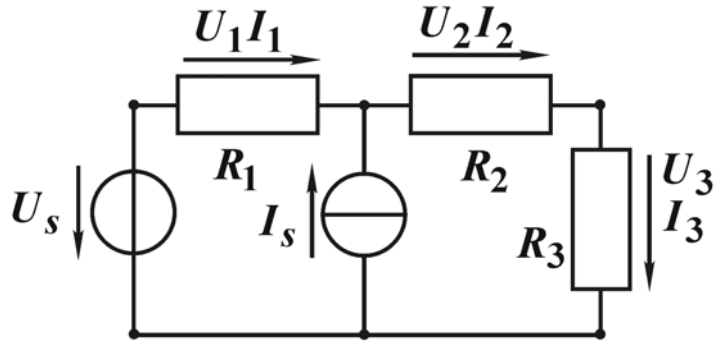
(ii) Kirchhoff hurok törvény

$$(I) \quad u_1 + u_C - u_s = 0,$$

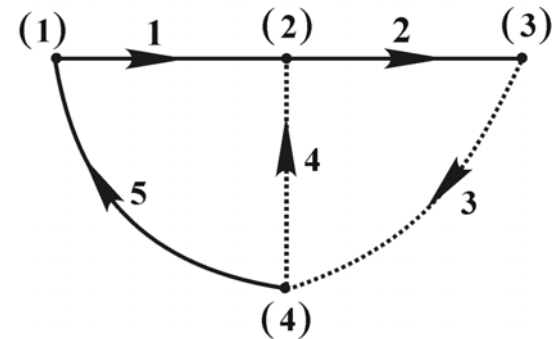
$$(II) \quad u_2 + u_L - u_C = 0.$$

Hálózati egyenletek szisztematikus felírása---gráfelméleti alapok

A hálózat gráfja---vonalas ábra, irányított gráf (áramirány)



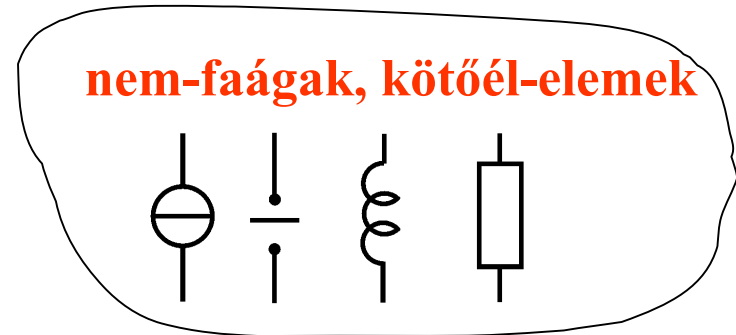
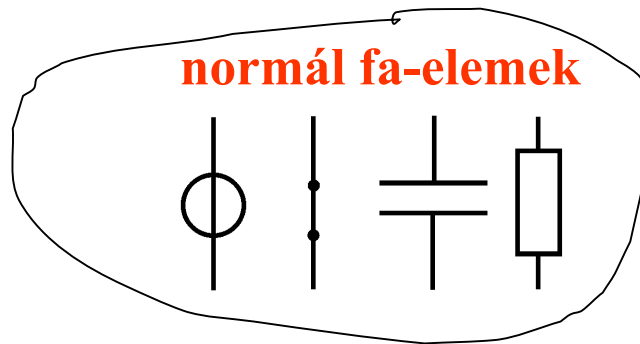
a gráf fája —————
és a kötőélek
—————
.....



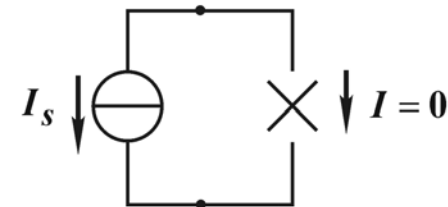
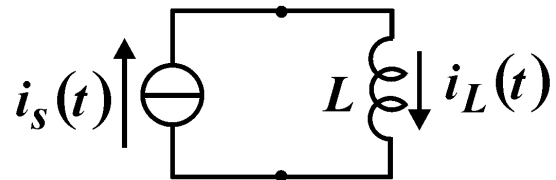
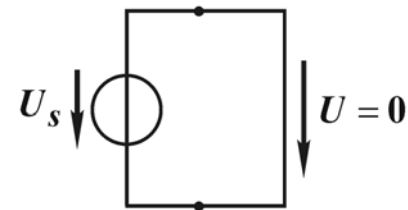
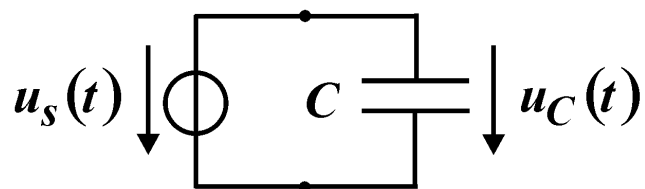
A hálózati egyenletek megoldhatósága

A hálózati egyenletek megoldhatók, ha a hálózat reguláris,
Reguláris az a hálózat, amelyhez normál fa rendelhető,

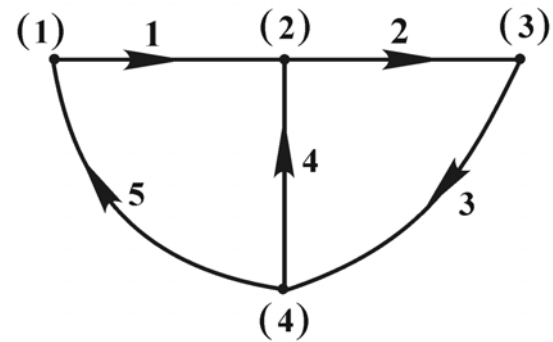
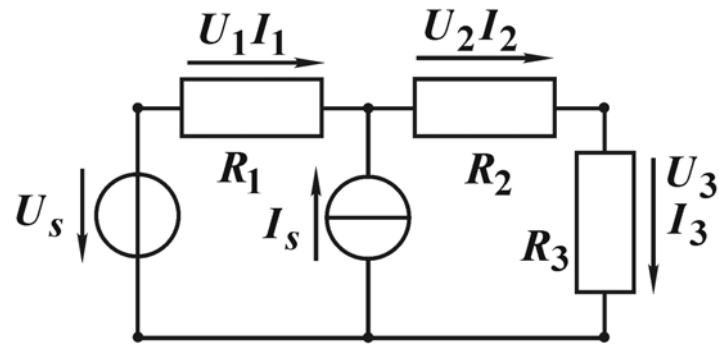
normál fa \longrightarrow fundamentális vágat és hurok



Nem reguláris hálózatok

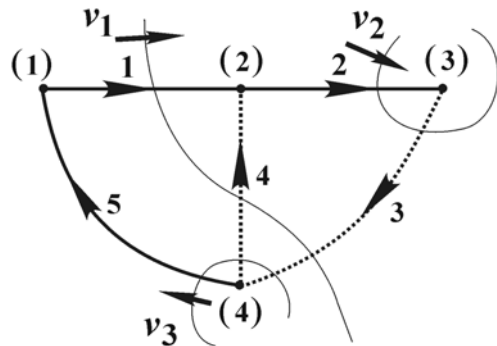


Összekapcsolási kényszerek, rezisztív hálózat



normál faágak ——— vágat, $(n-1)$ egyenlet)
 általánosított csomóponti egyenlet,

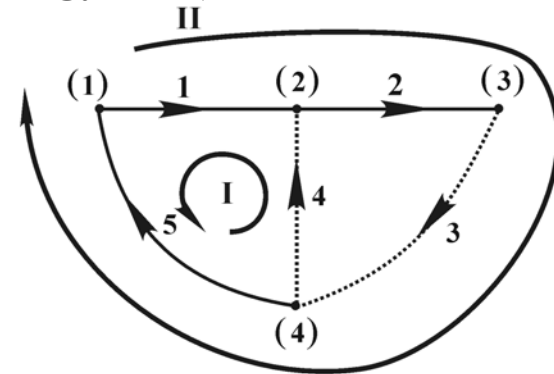
kötőélek hurkok, hurok egyenletek,
 $(h=b-n+1)$ egyenlet)



$$(v_1) \quad I_1 + I_4 - I_3 = 0,$$

$$(v_2) \quad I_2 - I_3 = 0,$$

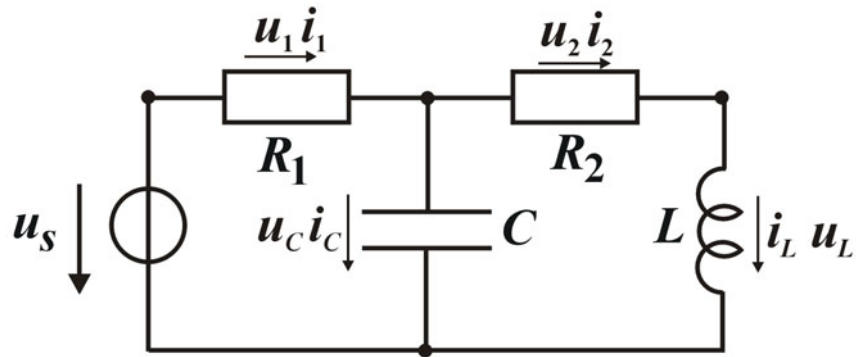
$$(v_3) \quad I_5 + I_4 - I_3 = 0,$$



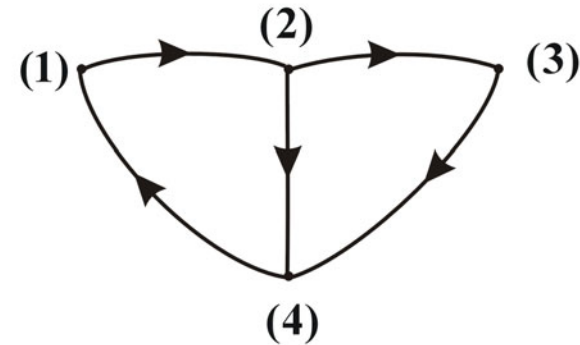
$$(I) \quad U_4 - U_1 - U_5 = 0,$$

$$(II) \quad U_1 + U_2 + U_3 + U_5 = 0,$$

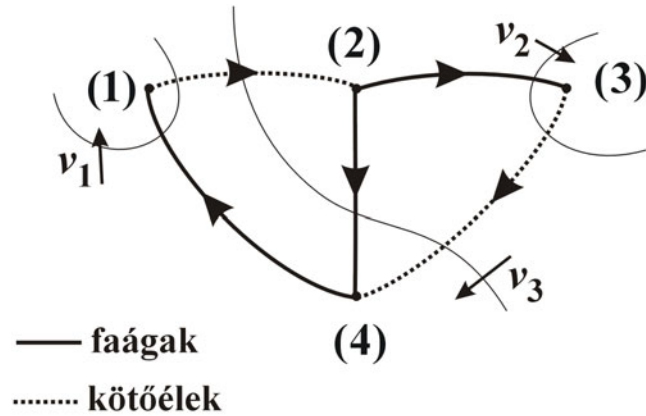
Összekapcsolási kényszerek, dinamikus hálózat



a hálózat gráfja

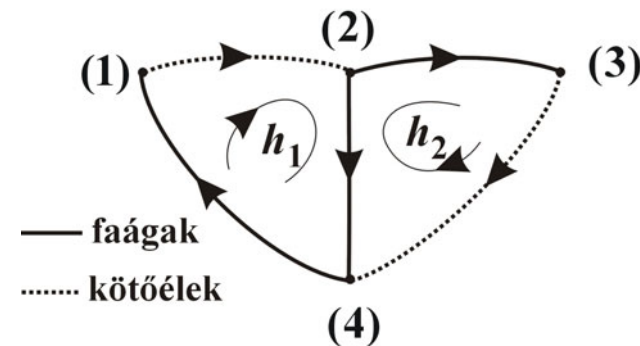


a hálózat egy normál fája, vágat egyenletek



$$\begin{aligned} (v_1) \quad i_{us} + i_1 &= 0, \\ (v_2) \quad i_2 - i_L &= 0, \\ (v_3) \quad -i_1 + i_C + i_L &= 0, \end{aligned}$$

a normál fa kötőelei, hurok egyenletek



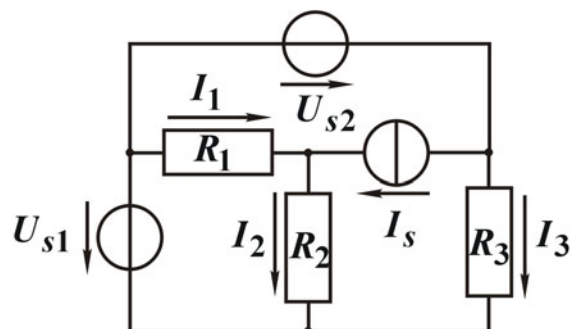
$$\begin{aligned} (h_1) \quad u_1 + u_C - u_s &= 0, \\ (h_2) \quad u_2 + u_L - u_C &= 0, \end{aligned}$$

5. Kirchoff típusú hálózat számítási módszerei I

Hálózati egyenletek szisztematikus felírása, -gráfelmélet alkalmazása,

a) ágtörvények, karakterisztikák megadása,

b) összekapcsolási kényszerek (Kirchoff egyenletek) felírása



a) Karakterisztikák

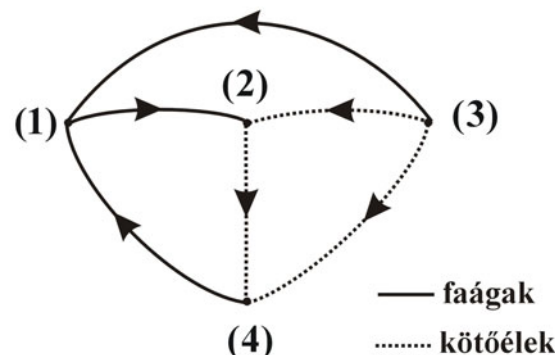
$$U_1 = R_1 I_1,$$

$$U_2 = R_2 I_2,$$

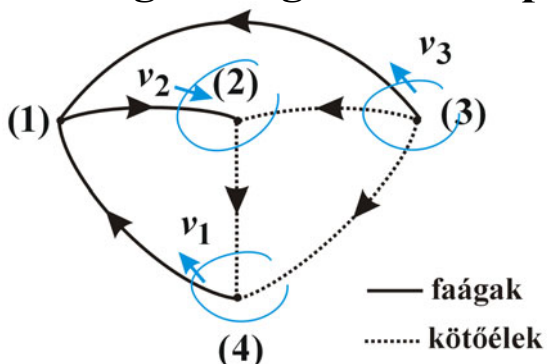
$$U_3 = R_3 I_3,$$

b) Összekapcsolási kényszerek

A hálózat **egy normál fája**



A faágak~vágatok~K. csp-i egyenletek

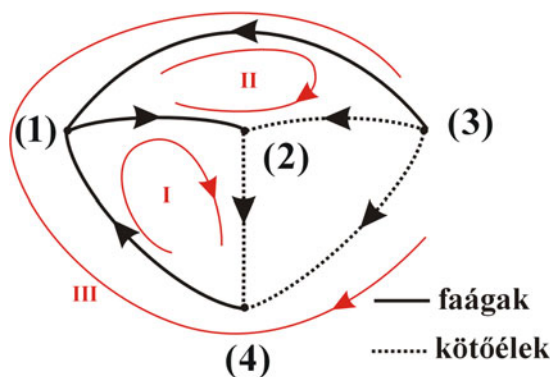


$$v_1) \quad I_{U_{s1}} - I_2 - I_3 = 0,$$

$$v_2) \quad I_1 - I_2 + I_s = 0,$$

$$v_3) \quad I_{U_{s2}} + I_s + I_3 = 0,$$

A kötőélek~hurkok~K. hurok egyenletek

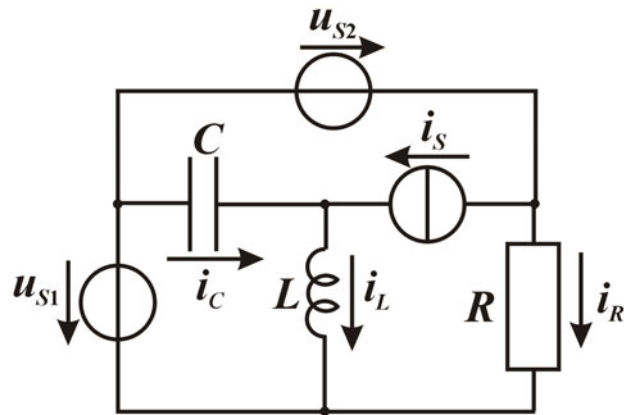


$$h_1) \quad U_1 + U_2 - U_{s1} = 0,$$

$$h_2) \quad U_{s2} - U_{I_s} - U_1 = 0,$$

$$h_3) \quad U_{s2} + U_3 - U_{s1} = 0,$$

Hálózati egyenletek szisztematikus felírása



a) Karakterisztikák

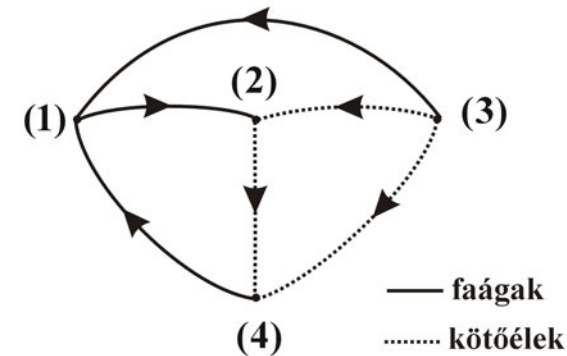
$$u_R = R i_R,$$

$$u_L = L \dot{i}_L,$$

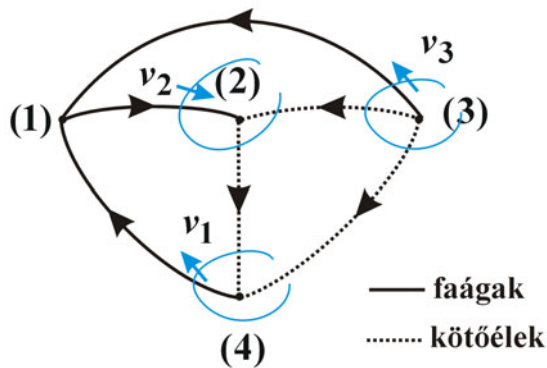
$$i_C = C \dot{u}_C,$$

b) Összekapcsolási kényszerek

A hálózat **egy normál fája**



A faágak~vágatok~K. csp-i egyenletek

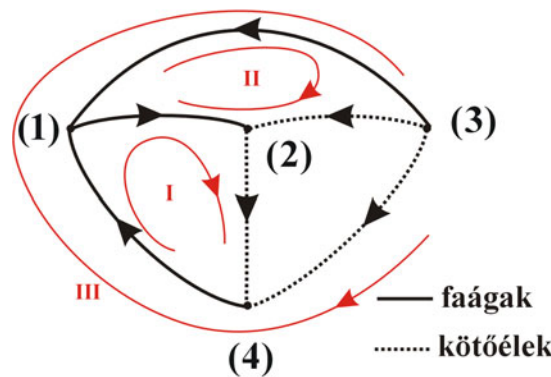


$$v_1) \quad i_{u_{s1}} - i_L - i_R = 0,$$

$$v_2) \quad i_C - i_L + i_s = 0,$$

$$v_3) \quad i_{u_{s2}} + i_s + i_R = 0,$$

A kötőélek~hurkok~K. hurok egyenletek

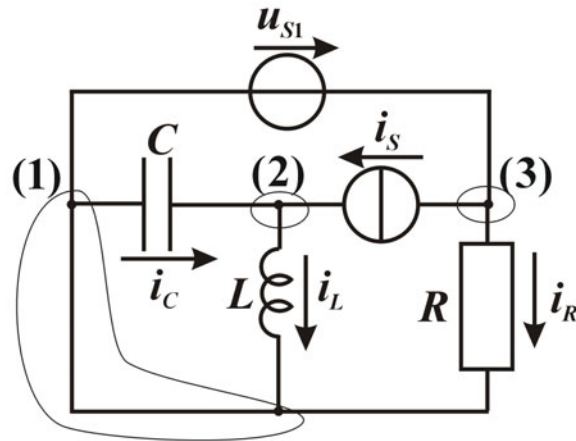


$$h_1) \quad u_C + u_L - u_{s1} = 0,$$

$$h_2) \quad u_{s2} - u_{i_s} - u_C = 0,$$

$$h_3) \quad u_{s2} + u_R - u_{s1} = 0,$$

Hálózati egyenletek szisztematikus felírása



a) Karakterisztikák

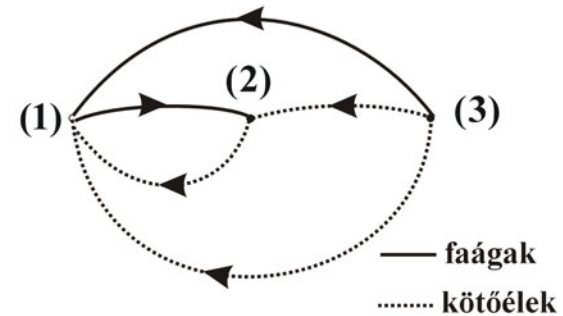
$$u_R = R i_R,$$

$$u_L = L \dot{i}_L,$$

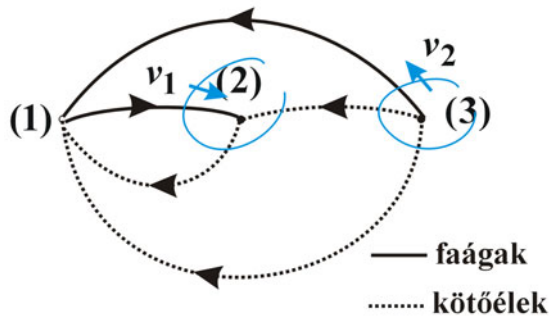
$$i_C = C \dot{u}_C,$$

b) Összekapcsolási kényszerek

A hálózat **egy normál fája**



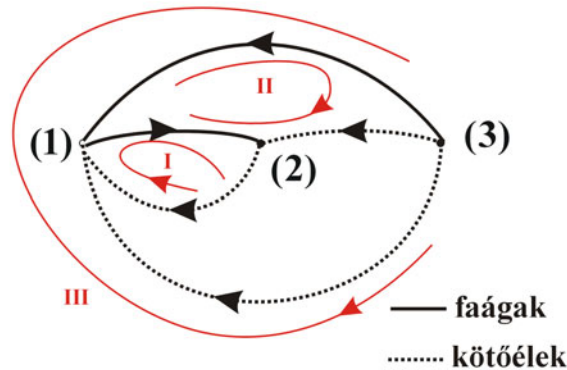
A faágak~vágatok~K. csp-i egyenletek



$$v_1) \quad i_C - i_L + i_s = 0,$$

$$v_2) \quad i_{u_{s1}} + i_s + i_R = 0,$$

A kötőélek~hurkok~K. hurok egyenletek



$$h_1) \quad u_C + u_L = 0,$$

$$h_2) \quad u_{s1} - u_{i_s} - u_C = 0,$$

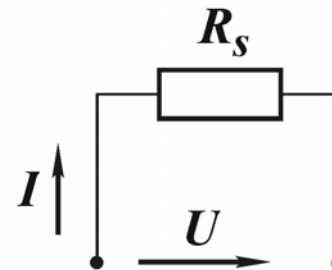
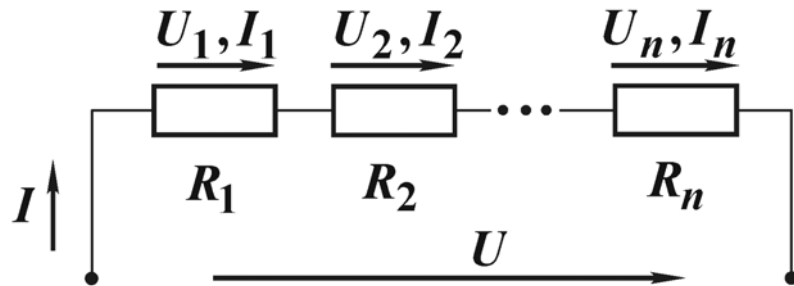
$$h_3) \quad u_{s1} + u_R = 0,$$

6. Ellenállás hálózatok számítási módszerei, II

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása

a) Ellenállások soros kapcsolása,

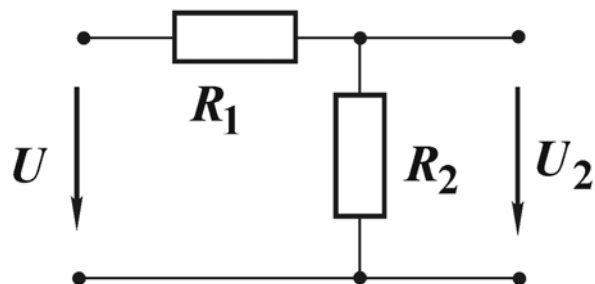
$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I,$$



$$R_s = \sum_{k=1}^n R_k$$

$$U_k = R_k I_n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad U = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k = I \sum_{k=1}^n R_k = R_s I,$$

b) Feszültségosztás két ellenállás esetén,

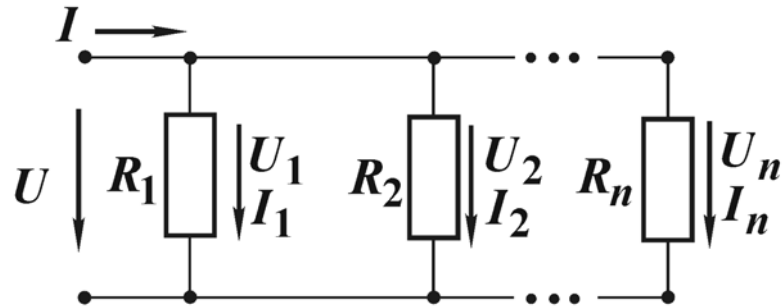


$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2,$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

c) Ellenállások párhuzamos kapcsolása

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$$



$$I_k = U_k / R_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{R_k} = U \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{U}{R_p}$$

Két ellenállás esetén

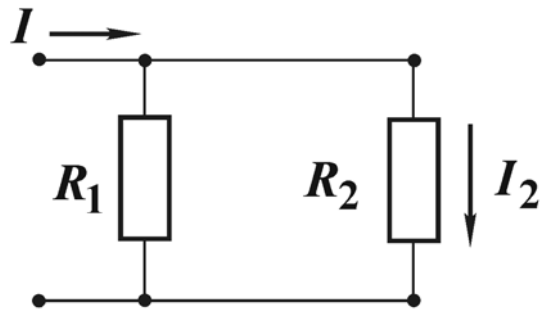
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \times R_2$$

re-plusz

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

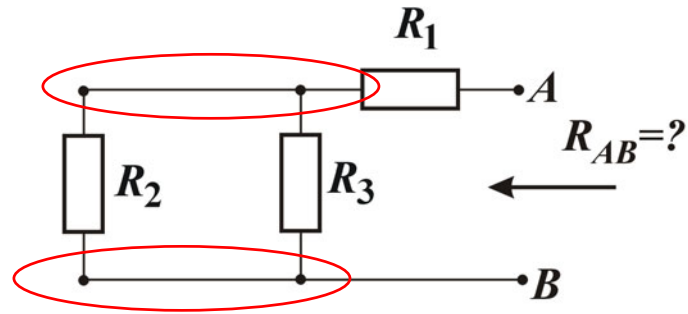
d) Áramosztás, két ellenállás esetén



$$I_2 = \frac{I(R_1 \times R_2)}{R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2}$$

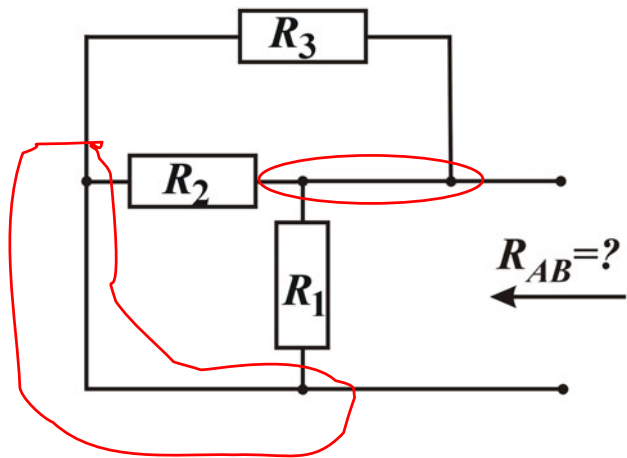
$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

1. Példa



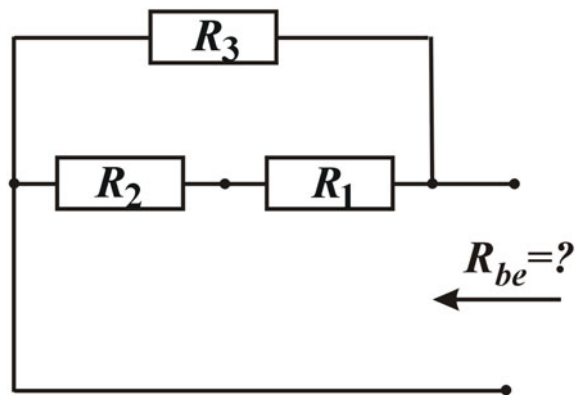
$$R_{AB} = R_2 \times R_3 + R_1,$$

2. Példa



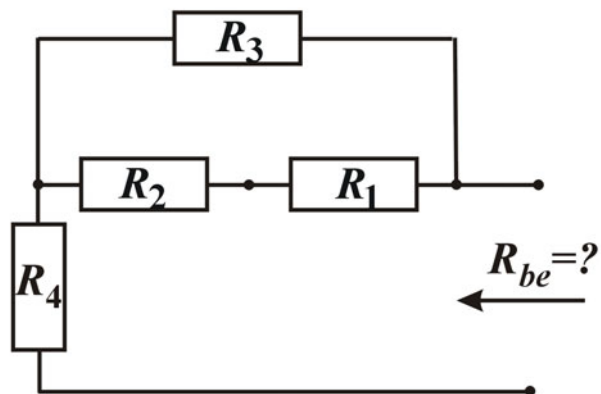
$$R_{AB} = (R_1 \times R_2) \times R_3,$$

3. Példa



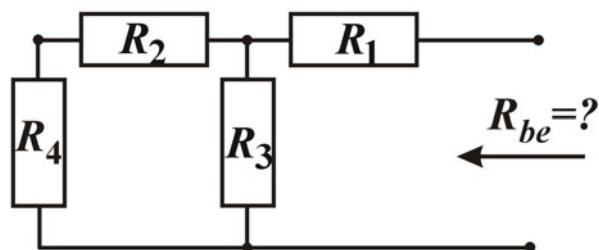
$$R_{be} = (R_1 + R_2) \times R_3,$$

4. Példa



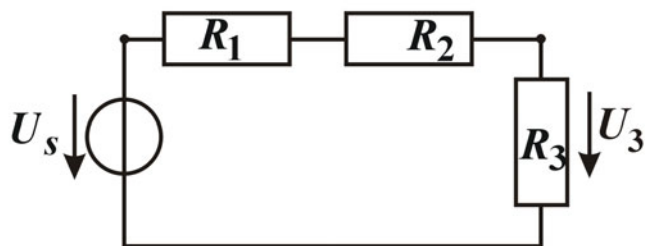
$$R_{be} = [(R_1 + R_2) \times R_3] + R_4,$$

5. Példa



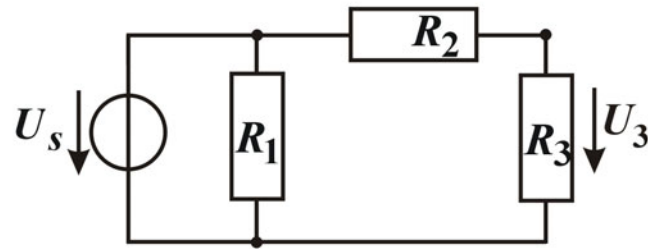
$$R_{be} = [(R_2 + R_4) \times R_3] + R_1,$$

6. Példa



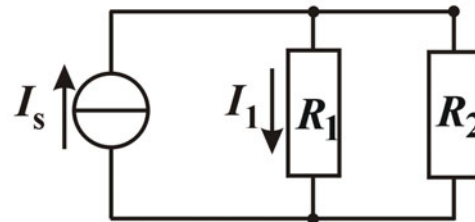
$$U_3 = U_s \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

7. Példa



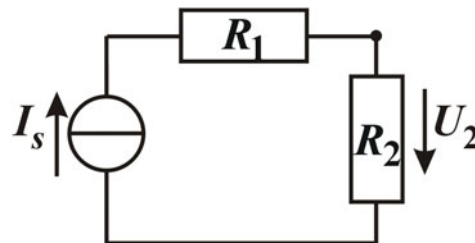
$$U_3 = U_s \frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

8. Példa



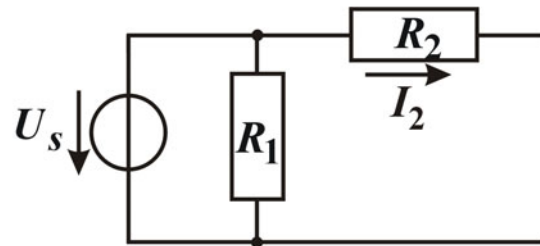
$$I_1 = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

9. Példa



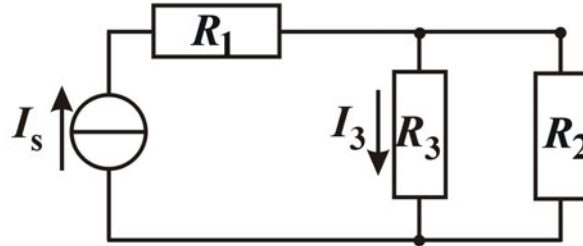
$$U_2 = I_s R_2,$$

10. Példa



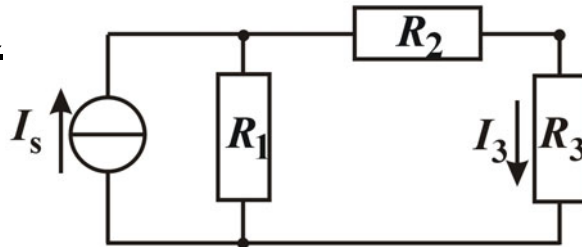
$$I_2 = \frac{U_s}{R_2},$$

11. Példa



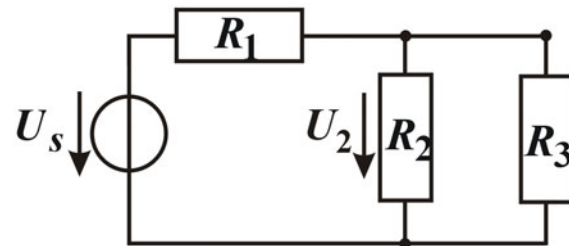
$$I_3 = I_s \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

12. Példa



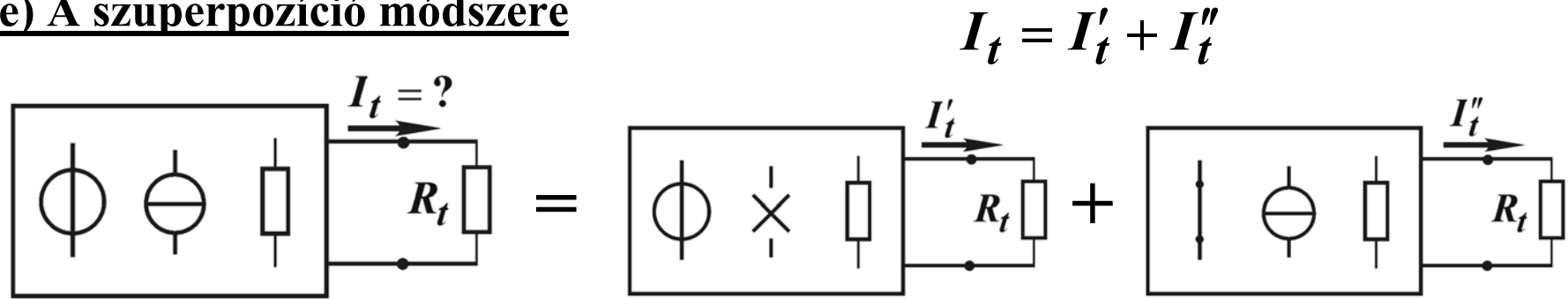
$$I_3 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3},$$

13. Példa

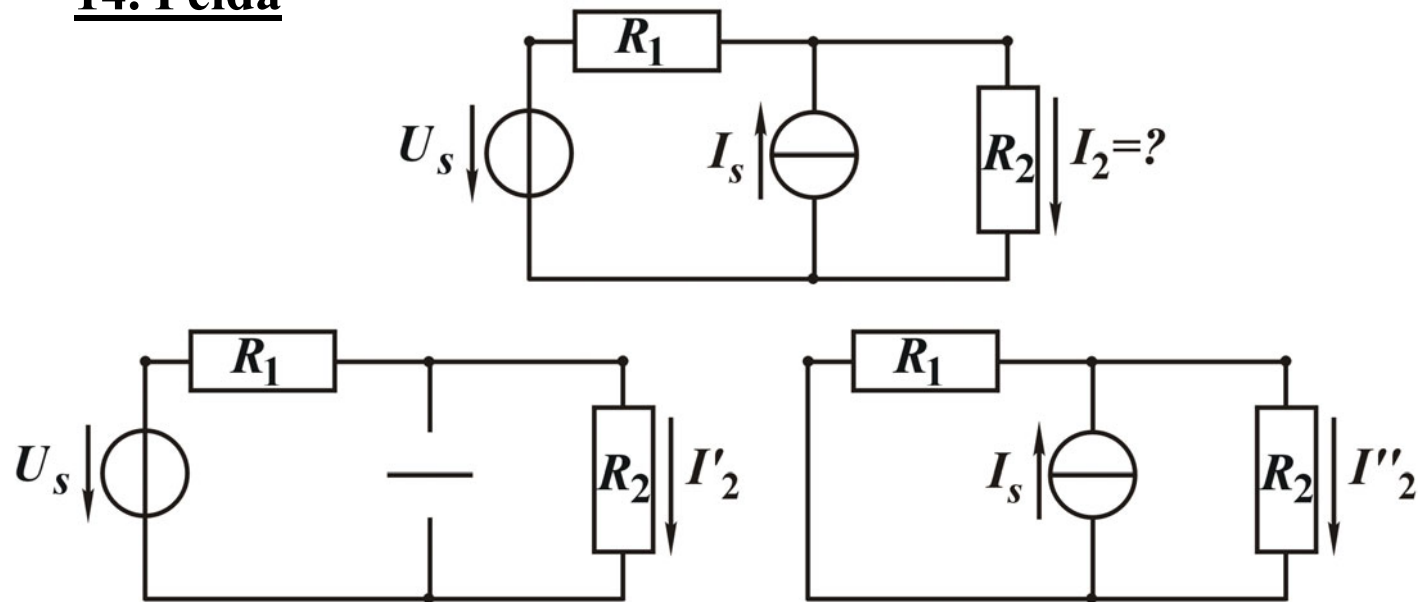


$$U_2 = U_s \frac{R_2 \times R_3}{R_2 \times R_3 + R_1},$$

e) A szuperpozíció módszere

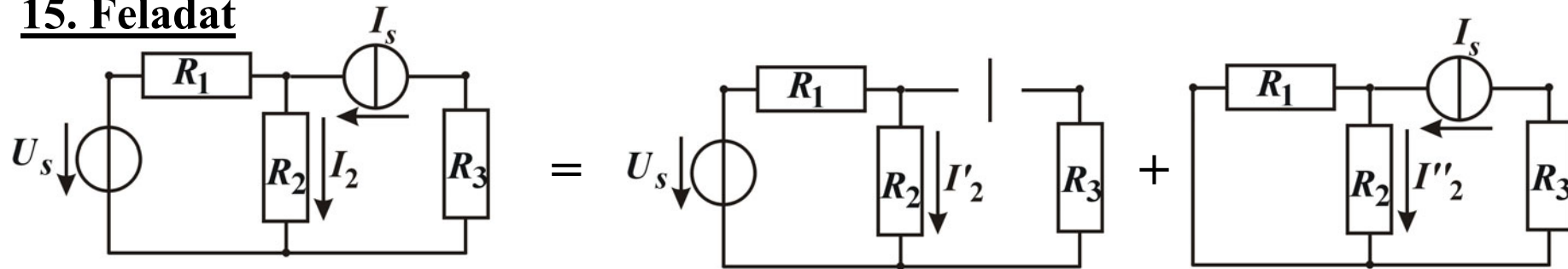


14. Példa



$$I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2}, \quad I''_2 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2},$$

15. Feladat

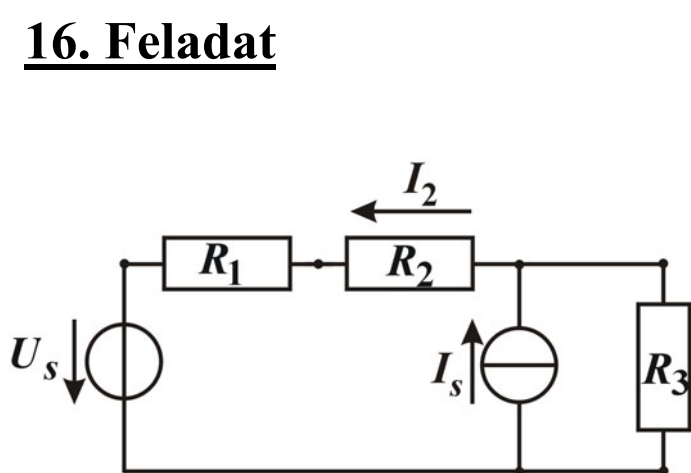


$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2},$$

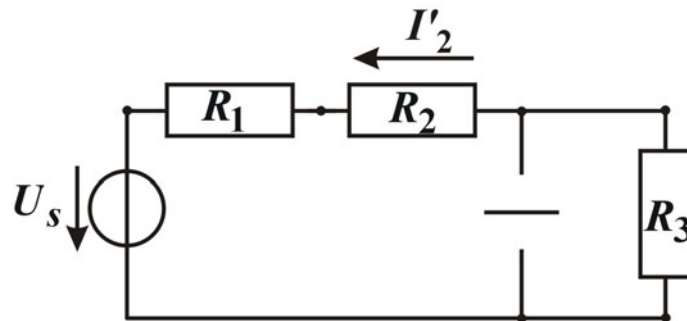
$$I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2},$$

$$I''_2 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

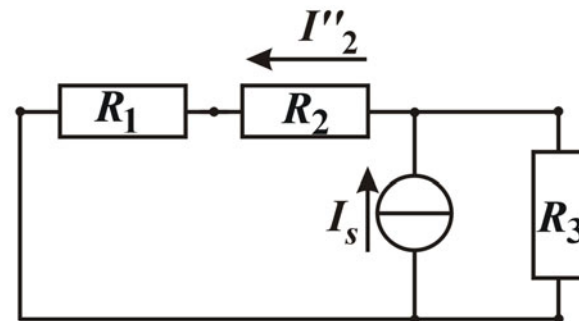
16. Feladat



$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{-U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2},$$

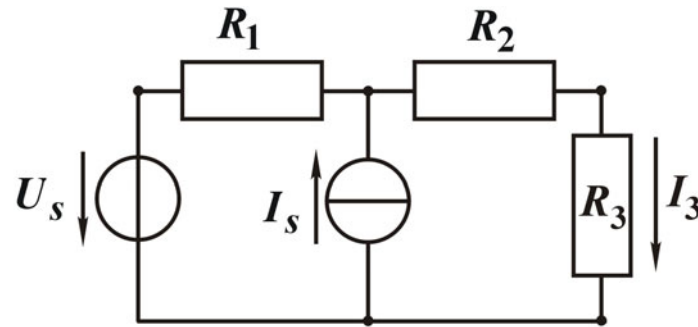


$$I'_2 = -\frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3},$$

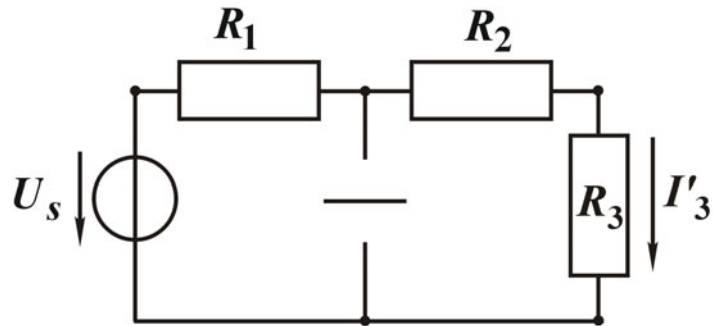


$$I''_2 = I_s \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

17. Példa

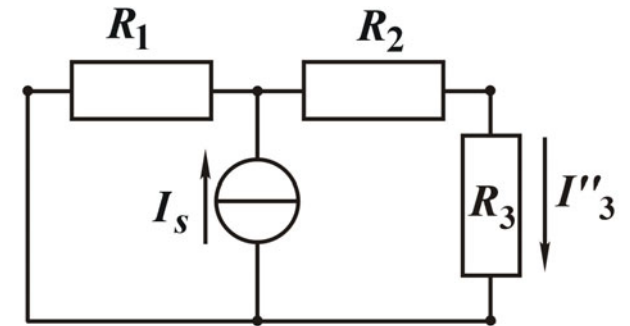


$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)},$$

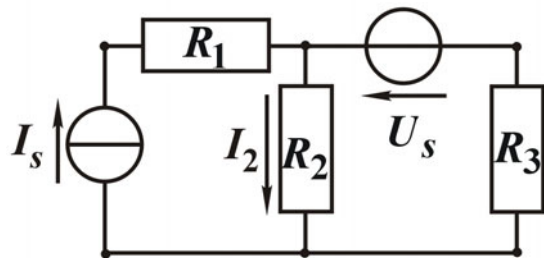


$$I'_3 = \frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3},$$

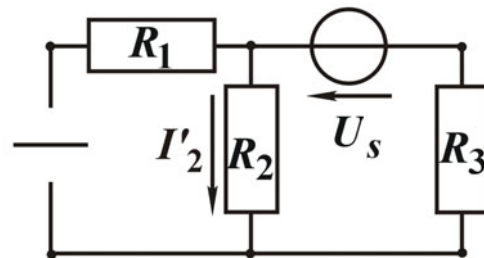
$$I''_3 = I_s \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)},$$



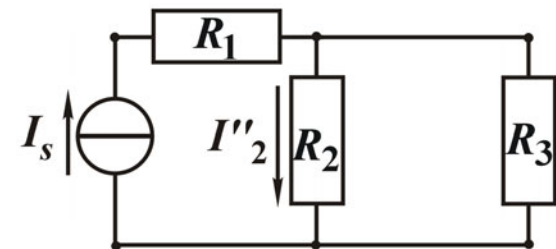
18. Példa



$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{-U_s + I_s R_3}{R_2 + R_3},$$

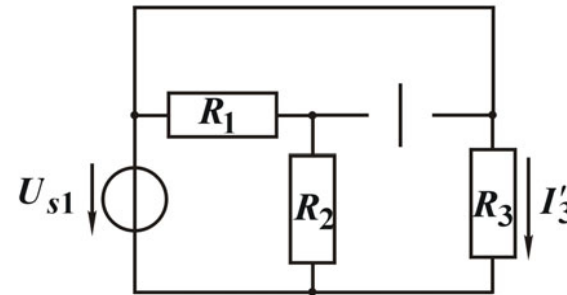
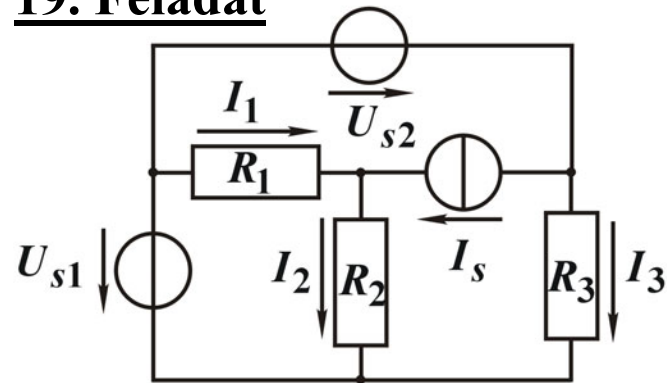


$$I'_2 = -\frac{U_s}{R_2 + R_3},$$

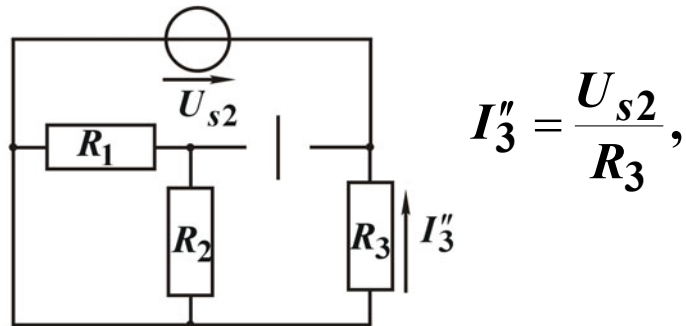


$$I''_2 = I_s \frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

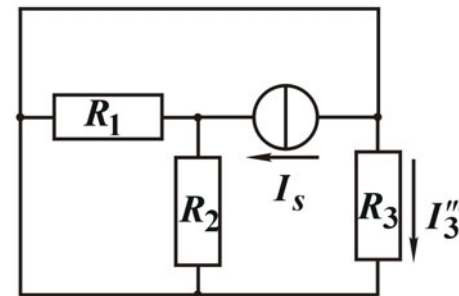
19. Feladat



$$I'_3 = \frac{U_{s1}}{R_3},$$



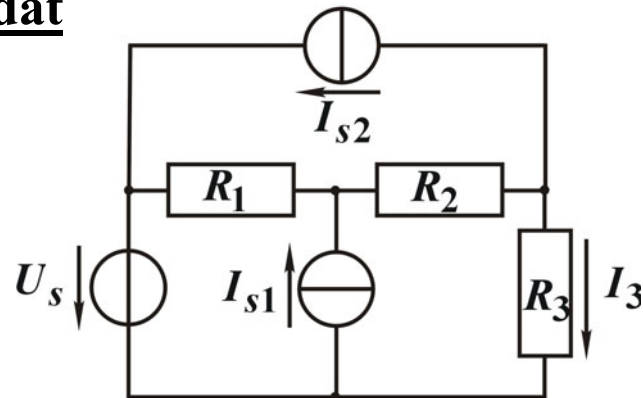
$$I''_3 = \frac{U_{s2}}{R_3},$$



$$I'''_3 = 0$$

$$I_3 = I'_3 - I''_3 + I'''_3,$$

20. Feladat



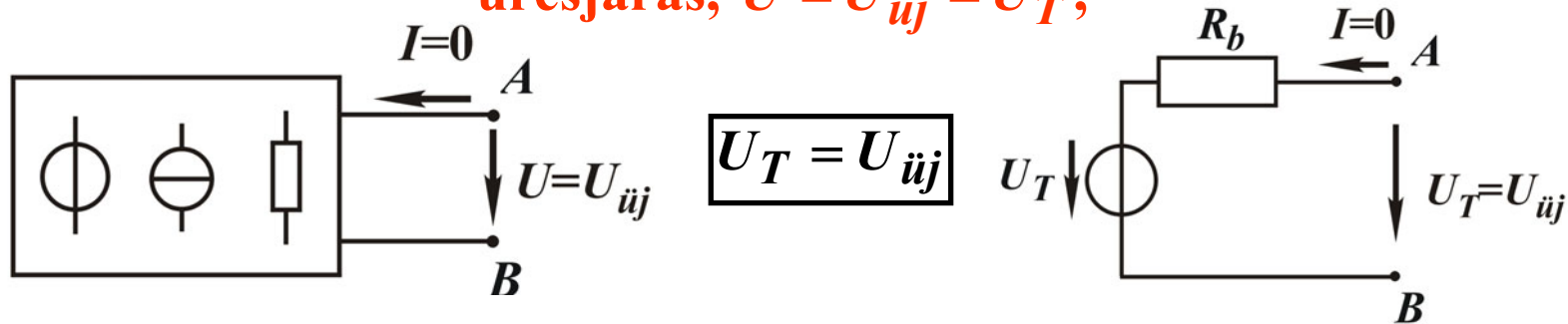
$$I_3 = \frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3} + I_{s1} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} - I_{s2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3},$$

f) Helyettesítő generátorok, Thevenin generátor

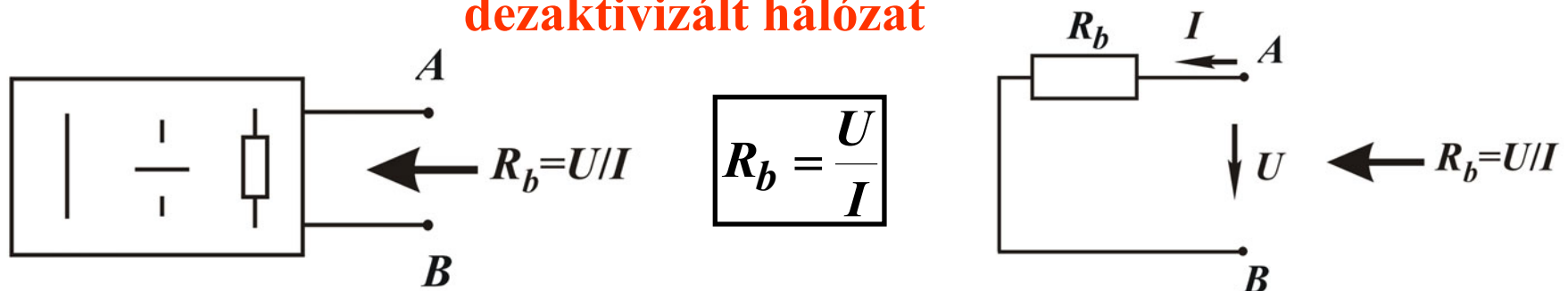
$$U = U_T + R_b I$$



üresjárás, $U = U_{\ddot{u}j} = U_T$,

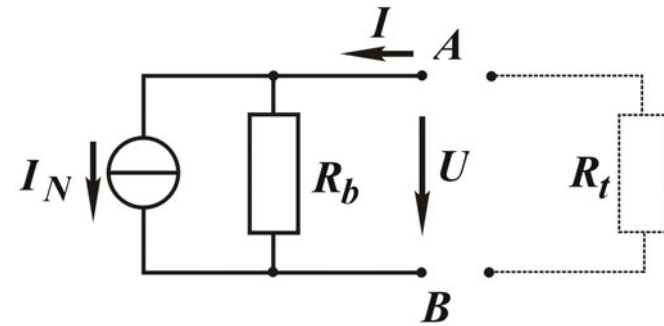
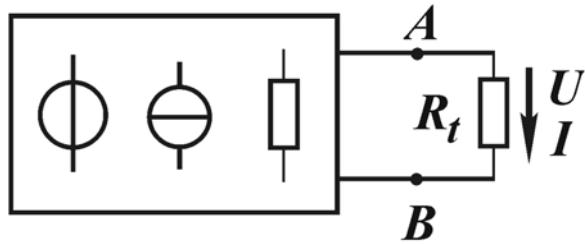


dezaktivizált hálózat

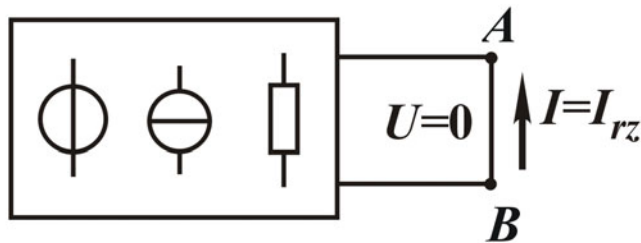


g) Helyettesítő generátorok, Norton generátor

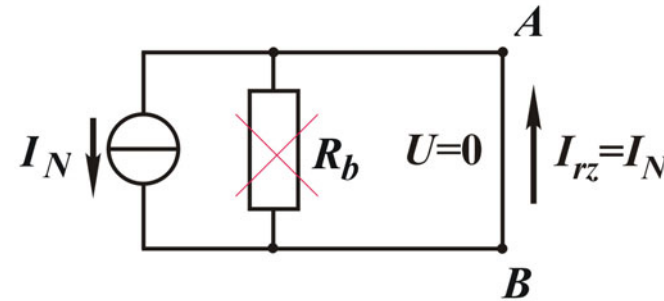
$$I = I_N + U/R_b$$



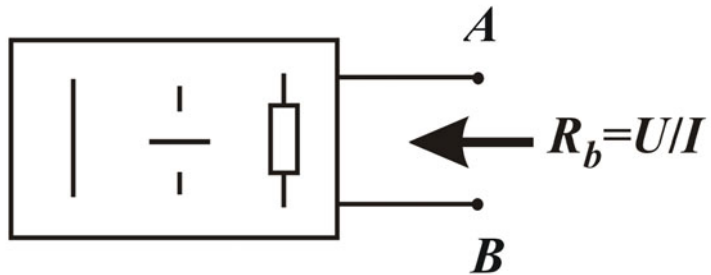
rövidzár, $I = I_{rz} = I_N$,



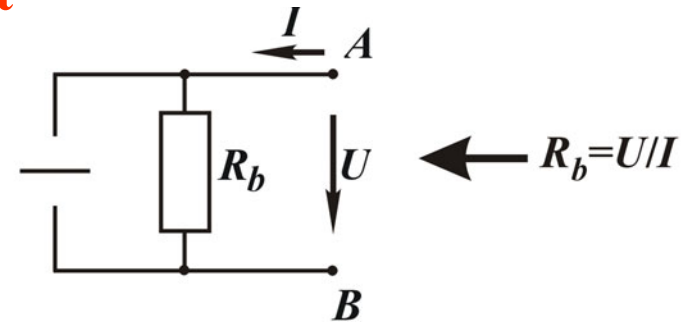
$$I_N = I_{rz}$$



dezaktivizált hálózat

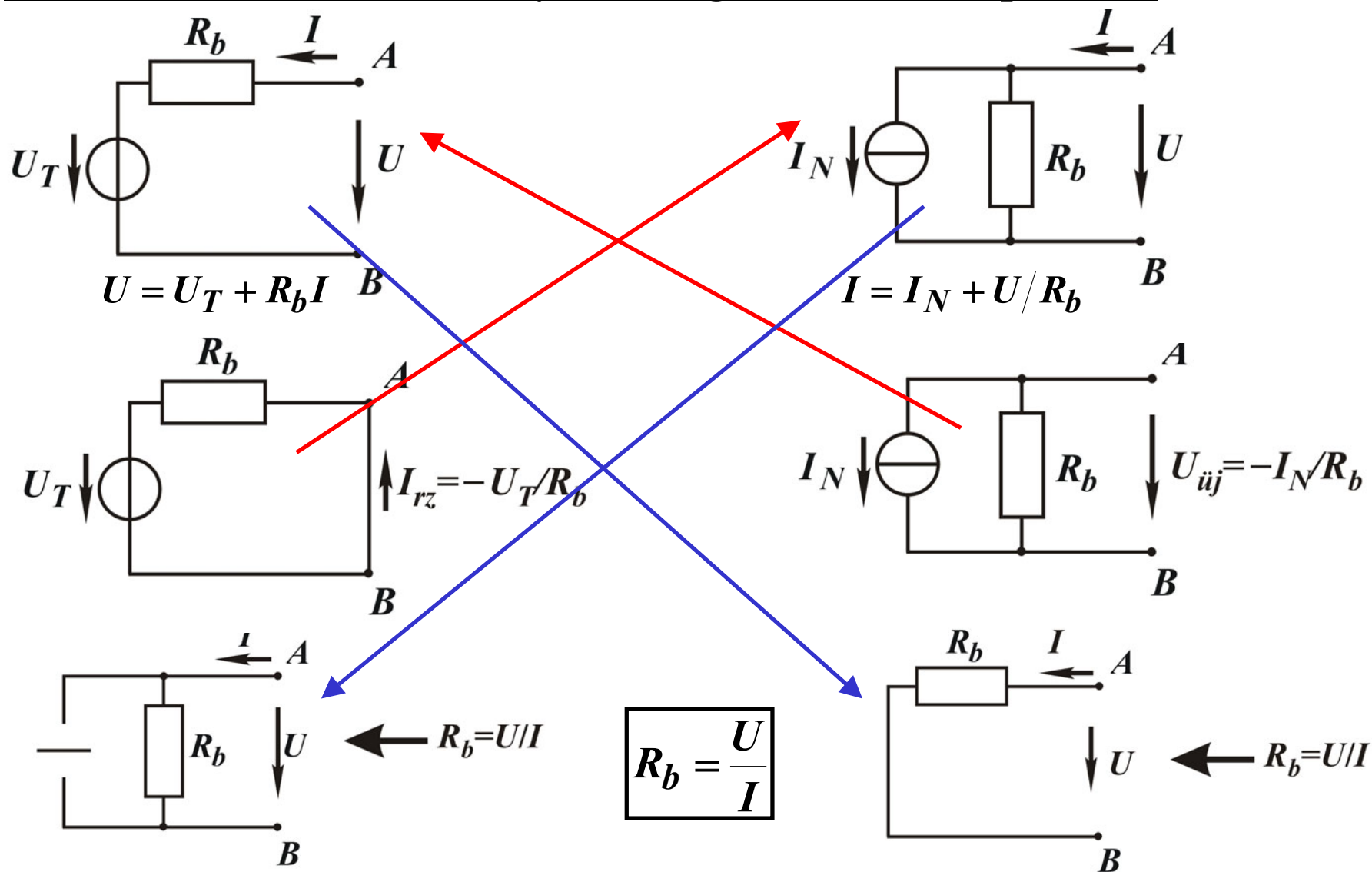


$$R_b = \frac{U}{I}$$

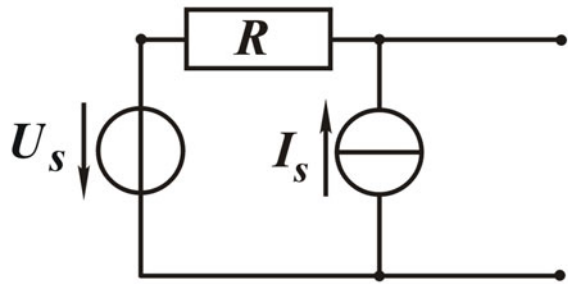


h) Helyettesítő generátorok,

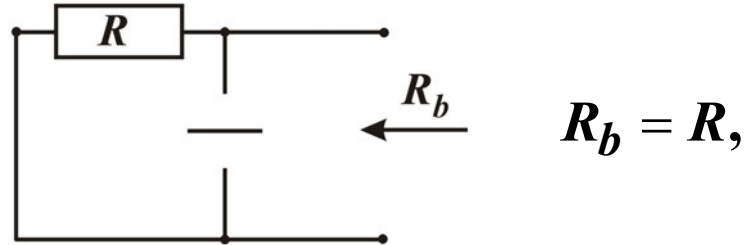
Thevenin és a Norton és helyettesítő generátorok kapcsolata



21. Feladat

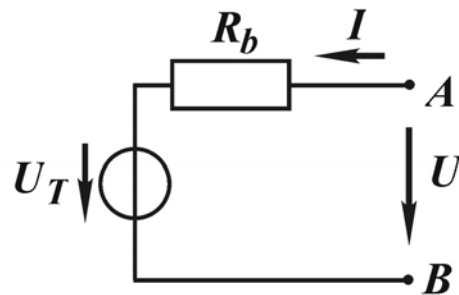


a deaktivizált hálózat

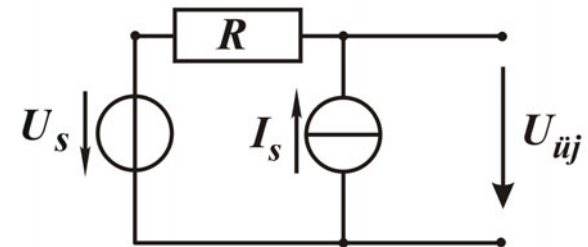


a hálózat Thevenin helyettesítő képe

a Thevenin generátor forrásfeszültsége

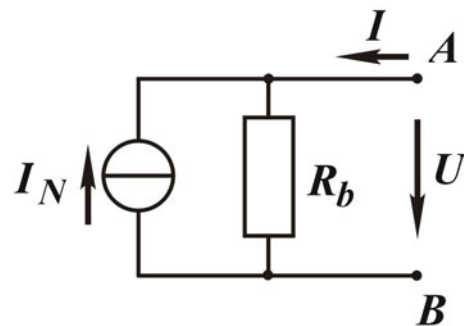


$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_s + I_s R,$$

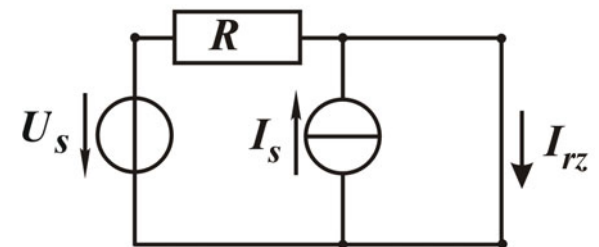


a hálózat Norton helyettesítő képe

a Norton generátor forrásárama

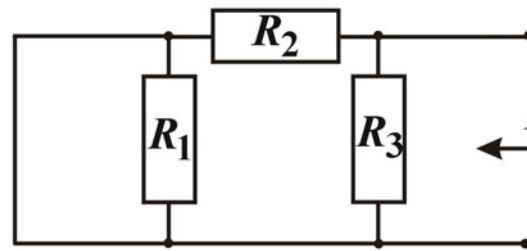
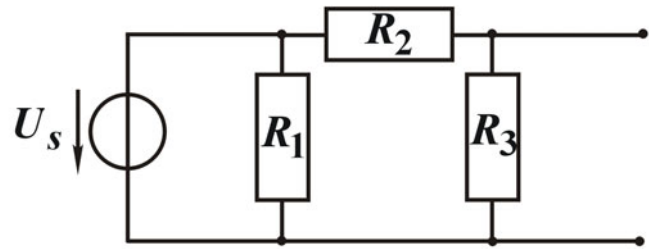


$$I_N = I_{rz} = I_s + U_s / R,$$



22. Feladat

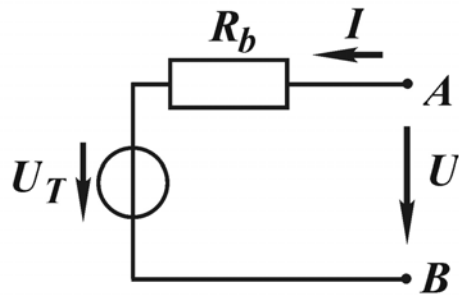
a dezaktivizált hálózat



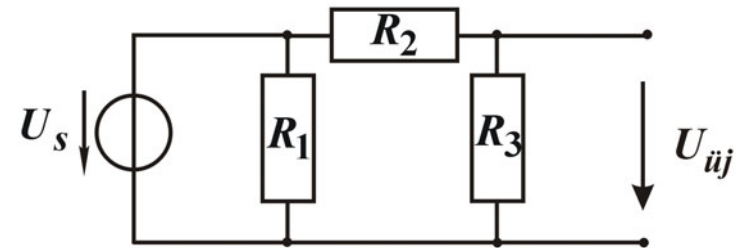
$$R_b = R_2 \times R_3,$$

a hálózat Thevenin helyettesítő képe

a Thevenin generátor forrásfeszültsége

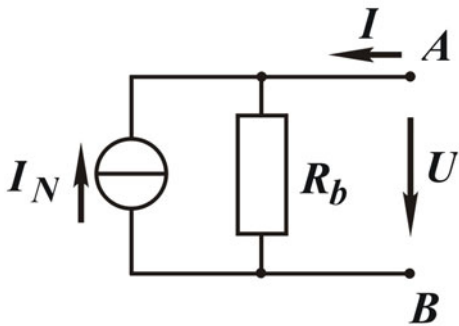


$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_s \frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

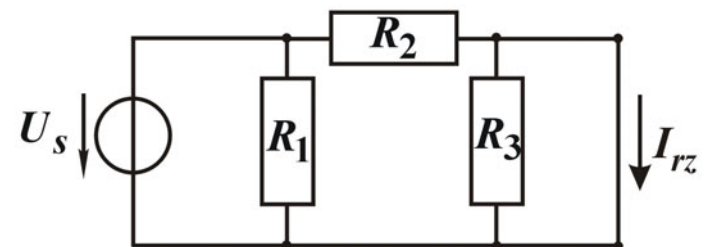


a hálózat Norton helyettesítő képe

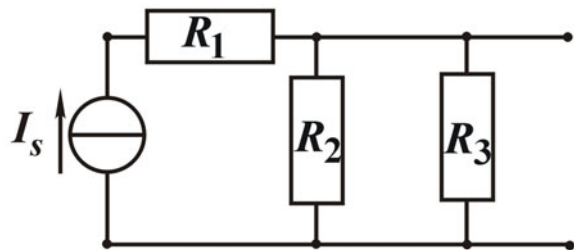
a Norton generátor forrásárama



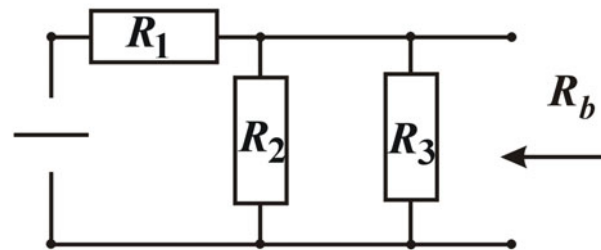
$$I_N = I_{rz} = \frac{U_s}{R_2},$$



23. Feladat



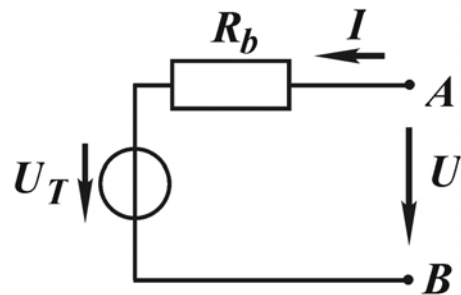
a dezaktivizált hálózat



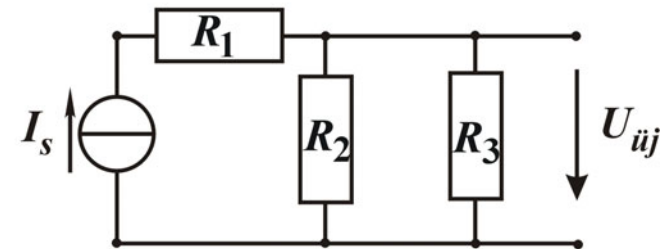
$$R_b = R_2 \times R_3,$$

a hálózat Thevenin helyettesítő képe

a Thevenin generátor forrásfeszültsége

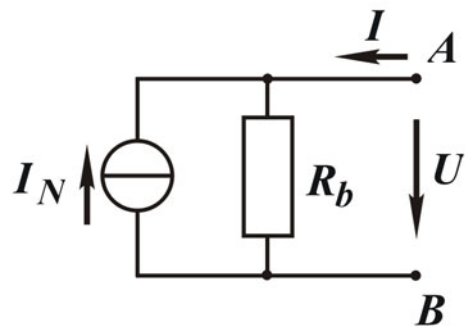


$$U_T = U_{\ddot{u}j} = I_s (R_2 \times R_3),$$

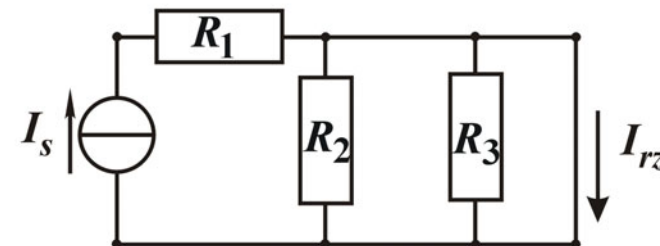


a hálózat Norton helyettesítő képe

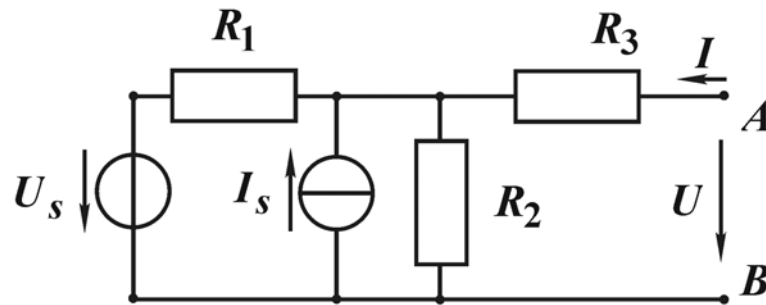
a Norton generátor forrásárama



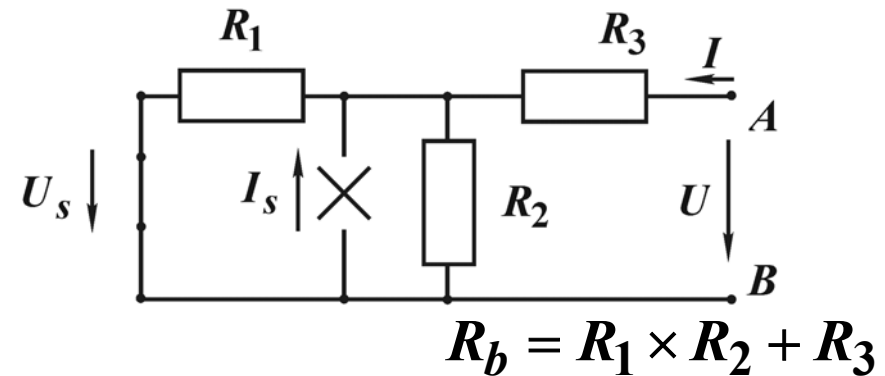
$$I_N = I_{rz} = I_s,$$



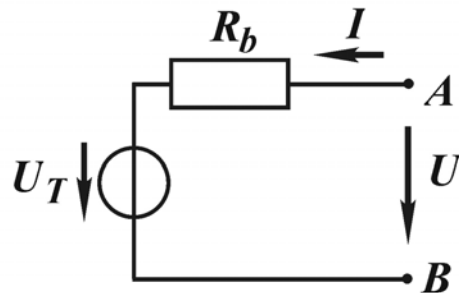
24. Feladat



a dezaktivizált hálózat



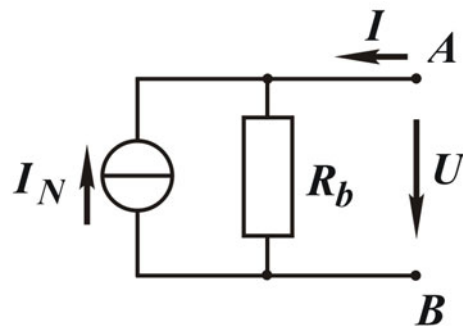
a hálózat Thevenin helyettesítő képe



a Thevenin generátor forrásfeszültsége

$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} + I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} R_2,$$

a hálózat Norton helyettesítő képe

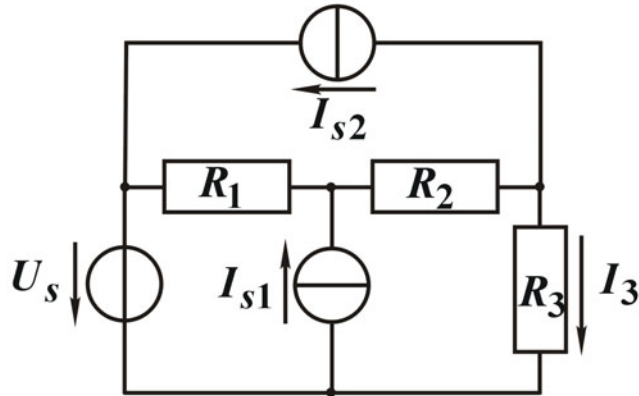


a Norton generátor forrásárama

$$I_N = I_{rz} = U_s \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 \times R_3} \frac{1}{R_3} + I_s \frac{R_1 \times R_2}{R_1 \times R_2 + R_3},$$

25. feladat Az ábrán látható hálózat elemei $R_1 = 5 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ $R_3 = 10 \Omega$

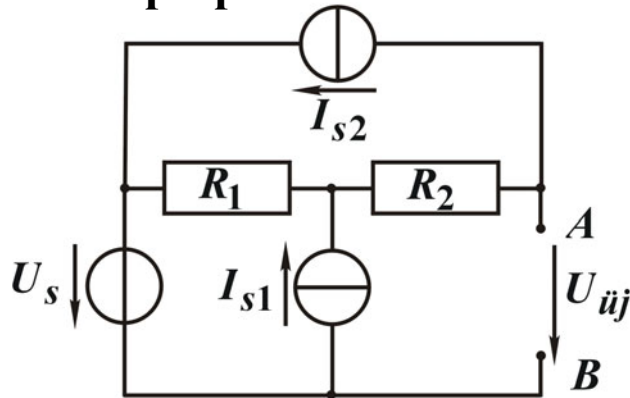
$$U_{s1} = 10 \text{ V} \quad I_{s1} = 2 \text{ A} \quad I_{s2} = 4 \text{ A}$$



Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

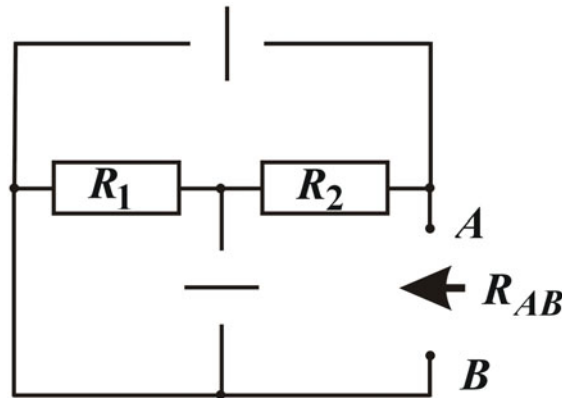
Megoldás

Szuperpozíció alkalmazása



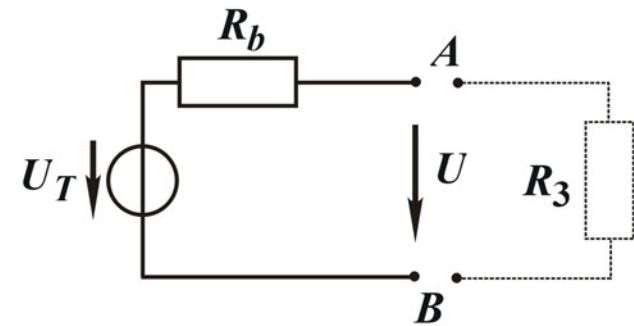
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_s + I_{s1}R_1 - I_{s2}(R_1 + R_2) = -40 \text{ V}$$

Dezaktivizált hálózat



$$R_b = R_{AB} = R_1 + R_2 = 15 \Omega$$

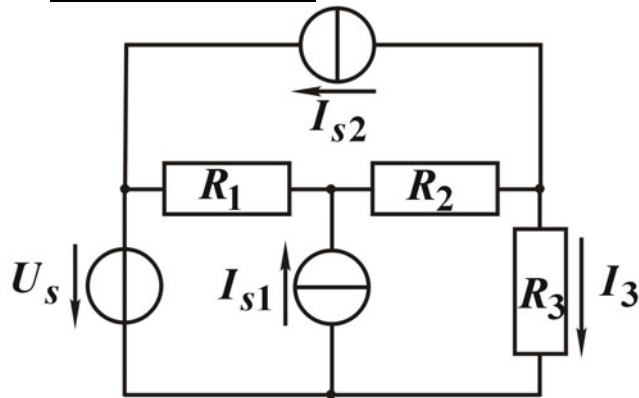
Thevenin generátor



$$I_3 = \frac{U_T}{R_b + R_3} = -1,8 \text{ A}$$

26. Feladat Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ $R_3 = 10 \Omega$

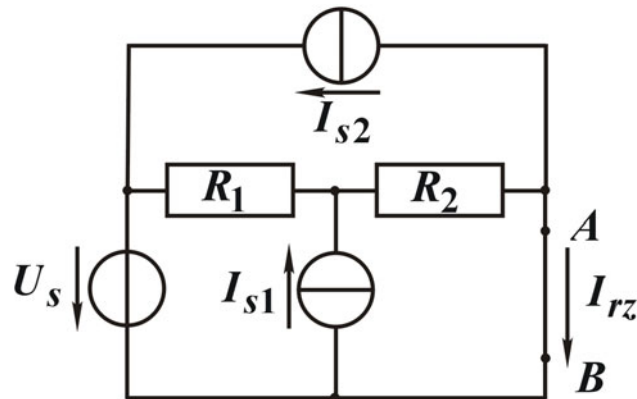
$$U_{s1} = 10 \text{ V} \quad I_{s1} = 2 \text{ A} \quad I_{s2} = 4 \text{ A}$$



Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

Megoldás

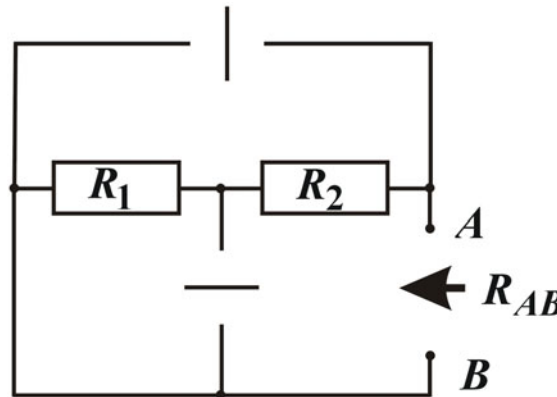
Szuperpozíció alkalmazása



$$I_{rz} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} + I_{s1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - I_{s2}$$

$$-I_{s2} = -\frac{8}{3} \text{ A}$$

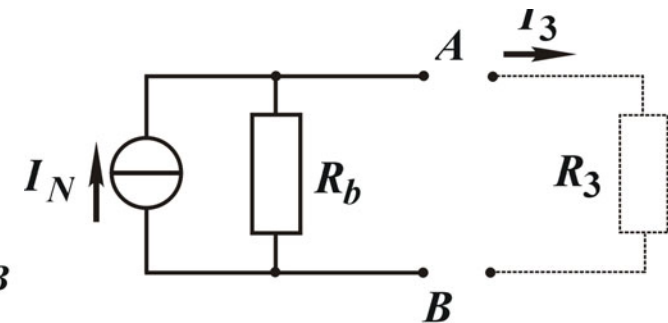
Dezaktivizált hálózat



$$R_b = R_{AB} = R_1 + R_2 = 15 \Omega$$

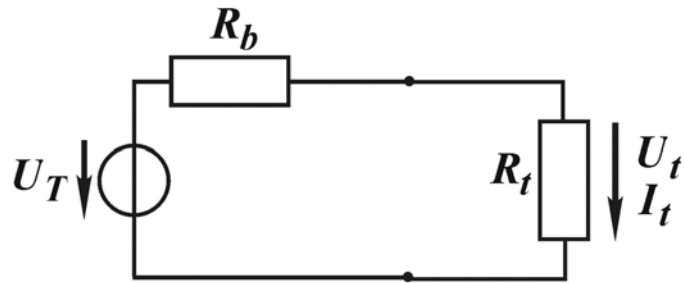
$$R_b = U_{\ddot{u}j} / I_{rz} = 15 \Omega$$

Norton generátor



$$I_3 = I_N \frac{R_b}{R_b + R_3} = -1,8 \text{ A}$$

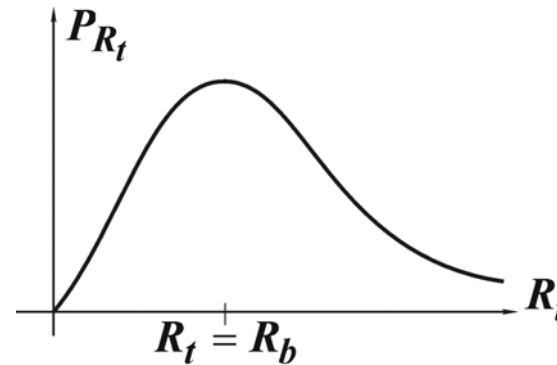
i) Teljesítmény illesztés



$$R_t = ? \quad P_{R_t} = \max, \quad (P_{R_t})_{\max} = ?$$

$$P_{R_t} = R_t I_t^2 = R_t \left(\frac{U_T}{R_b + R_t} \right)^2 = U_T^2 \frac{R_t}{(R_b + R_t)^2},$$

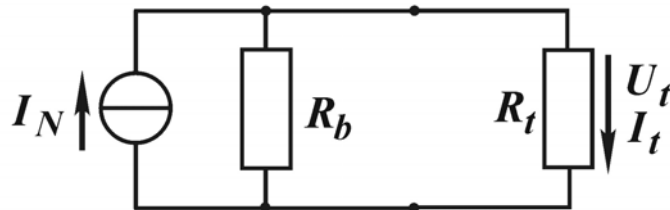
$$\begin{aligned} \frac{dP_{R_t}}{dR_t} &= U_T^2 \frac{d}{dR_t} \left(\frac{R_t}{(R_b + R_t)^2} \right) = \\ &= U_T^2 \frac{(R_b + R_t)^2 - 2R_t(R_b + R_t)}{(R_b + R_t)^4} = 0, \end{aligned}$$



$$\frac{dP_{R_t}}{dR_t} = U_T^2 \frac{(R_b + R_t)(R_b - R_t)}{(R_b + R_t)^4} = 0,$$

$$R_t = R_b$$

$$(P_{R_t})_{\max} = \frac{U_T^2}{4R_b}$$



$$U_T = R_b I_N$$

$$(P_{R_t})_{\max} = I_N^2 \frac{R_b}{4}$$

Ellenőrző kérdések

- 1. Ismertesse az hálózatok aktív és passzív, rezisztív és dinamikus elemeit és karakterisztikájukat,**
- 2. Ismertesse a Kirchhoff típusú hálózatok hálózati egyenleteit,**
- 3. Ismertesse a gráfelmélet alkalmazását Kirchhoff típusú hálózatok összekapcsolási kényereinek felírásában,**
- 4. Ismertesse a normál fa elemeit,**
- 5. Ismertesse a kötőélek elemeit,**
- 6. Adjon példát a gráfelmélet alkalmazására Kirchhoff típusú hálózatok hálózati egyenleteinek szisztematikus felírására,**
- 7. Ismertesse az ellenállások soros és párhuzamos kapcsolását,**
- 8. Ismertesse az áramosztás és feszültségosztás eljárását,**
- 9. Ismertesse a szuperpozíció tételét,**
- 10. Ismertesse a Thevenin és a Norton helyettesítő kapcsolásokat,**
- 11. Foglalja össze a teljesítményillesztés feltételét.**

Irodalom

- **Iványi Miklósné, Fizika – I, Villamosság, (Előadás) 2006, www.e-oktat.pmmf.pte.hu**
- **Fodor György, Hálózatok és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, 2004. (Kód: 55064)**
- **Fodor György, (Szerk) Villamosság példatár, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1998. (Kód: 44 555)**

MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné
egyetemi tanár

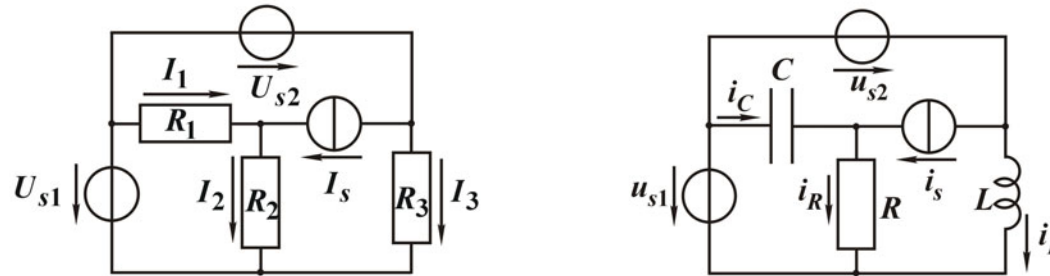
4. Konferencia, gyakorlat

Gyakorlat feladatai

A gyakorlat célja: A Kirchhoff típusú hálózatokban a hálózati egyenletek felírása, azaz a hálózati komponensek karakterisztikái és a hálózati komponensek összekapcsolására vonatkozó összekapcsolási kényszerek (Kirchhoff csomóponti és hurok egyenletek) szisztematikus felírása a gráfelmélet alapján.

1. Feladat

a) Az ábrán látható hálózatban figyelembe véve a komponensek áramainak, ill. feszültségeinek bejelölt referencia irányát, adja meg a komponensek karakterisztikáit,



b) Adja meg az ábrán látható hálózat gráfját, a gráfhoz tartozó normál fát, a faágak alapján jelölje be a vágatokat és a kötőélekhez tartozó hurkokat.

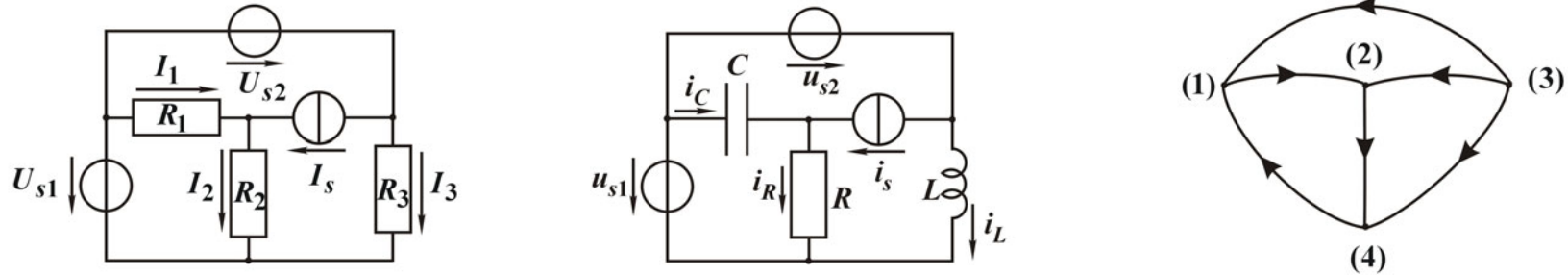
c) Az előző pont alapján írja fel a hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszereket (Kirchhoff egyenleteket).

Megoldás

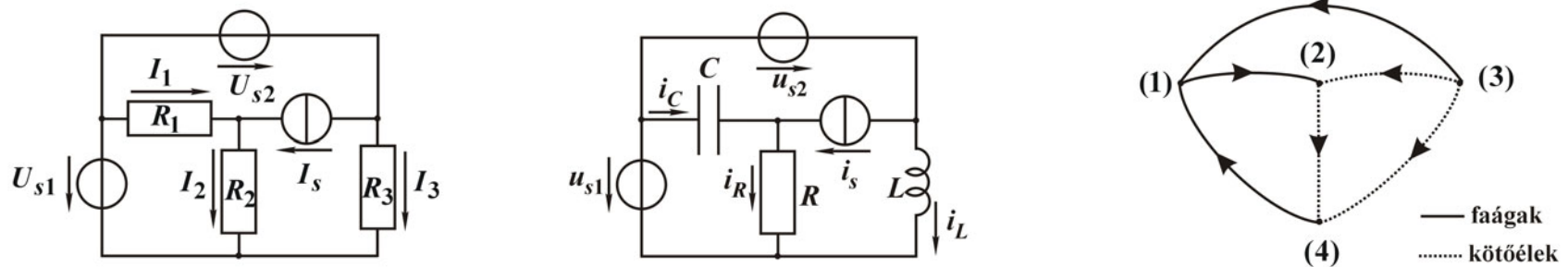
Az rezisztív hálózatban az ellenállások karakterisztikái $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$,

A dinamikus hálózatban a komponensek karakterisztikái $u_R(t) = R i_R(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

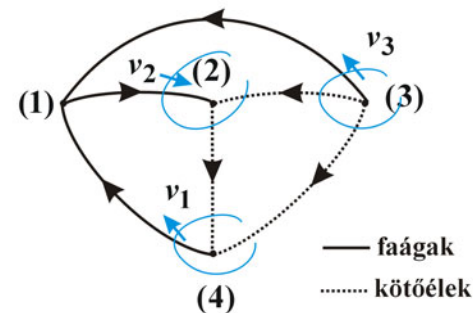
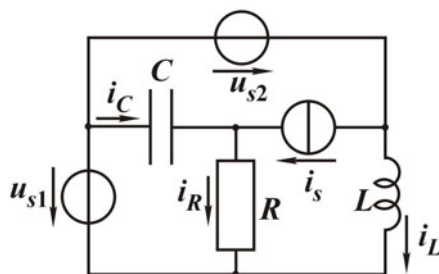
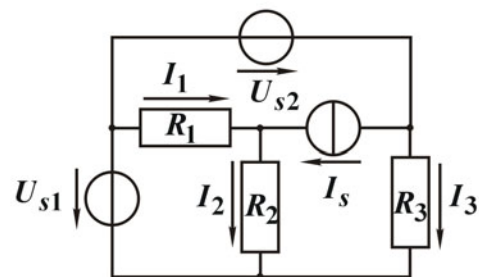
A hálózat gráfja a hálózat vonalas ábrája, irányított gráf, az áramirányokhoz rendeljük a gráf éleinek irányítását. (A feszültségforrás áramát a forrásfeszültséggel ellenkező irányúnak feltételezzük, hasonlóan az áramforrás feszültségét a forrásárammal ellenkező irányúnak tekintjük.)



A gráf fája minden csomópontot tartalmaz, minden csomópont elérhető a faágakon keresztül, de nincs hurok. A faágak száma eggyel kevesebb mint az n csomópontok száma, azaz $n-1$. A normál fa a hálózati elemekhez tartozó ágak egy csoportját tartalmazza, a feszültségforrást, a kondenzátort, a rövidzárt és annyi ellenállást amennyire szükség van. (A nem-faágak kötőelemek alkotnak, ebbe a csoportba tartoznak az áramforrások, a tekercs, a szakadás és a maradék ellenállás.) A faágak és kötőelemek számának összege megegyezik a hálózat b ágainak számával, minthogy a faágak száma $n-1$, a kötőelemek száma $h=b-(n-1)$. Ennek alapján a hálózat egy lehetséges normál fája



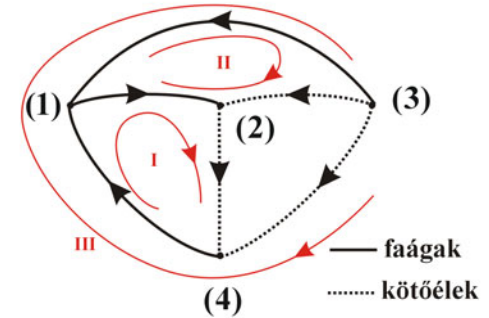
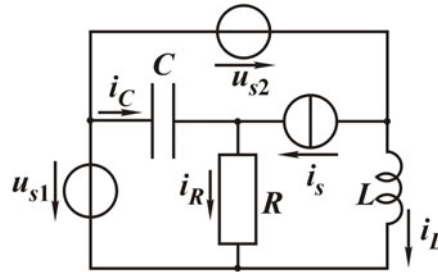
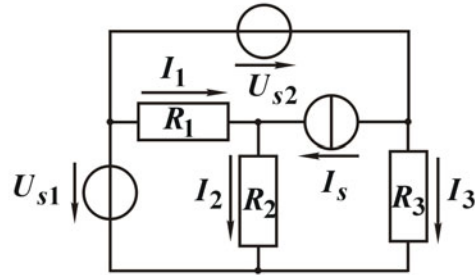
A gráf normál fája egy vágatrendszert definiál, amelyet úgy kapunk, hogy a hálózat gráfját egy felülettel kétfelé vágjuk, úgy, hogy mindig csak egy faágat és tetszőleges számú kötőélt vágunk át. (A kétfelé vágott hálózatban nem feltétlenül egy csomópontot izolálunk.) A vágatok irányítását a faágak irányításához rendeljük. A fenti normál fához tartozó vágatok a következők



A vágatokhoz rendelt vágategyenletek általánosított csomóponti egyenleteknek felelnek meg, minthogy a vágatot képző felületen átfolyó áramok algebrai összege nulla. Ennek megfelelően

	$v_1) \quad I_{U_{s1}} - I_2 - I_3 = 0,$	$v_1) \quad i_{u_{s1}} - i_R - i_L = 0,$
a rezisztív hálózatban	$v_2) \quad I_1 - I_2 + I_s = 0,$	a dinamikus hálózatban $v_2) \quad i_C - i_R + i_s = 0,$
	$v_3) \quad I_{U_{s2}} + I_s + I_3 = 0,$	$v_3) \quad i_{u_{s2}} + i_s + i_L = 0,$

A faágakat egy kötőéllel kiegészítve hurkot kapunk. A lineárisan független hurokrendszerben a hurkok egy kötőélt és tetszőleges számú faágat tartalmaznak, úgy, hogy minden ágon csak egyszer megyünk át miközben a hurkot körbejárjuk. A hurok irányítását a kötőélek rögzítik.



A fenti normál fához tartozó hurokrendszer a következő

$$I) \quad U_1 + U_2 - U_{s1} = 0,$$

$$I) \quad u_C + u_R - u_{s1} = 0,$$

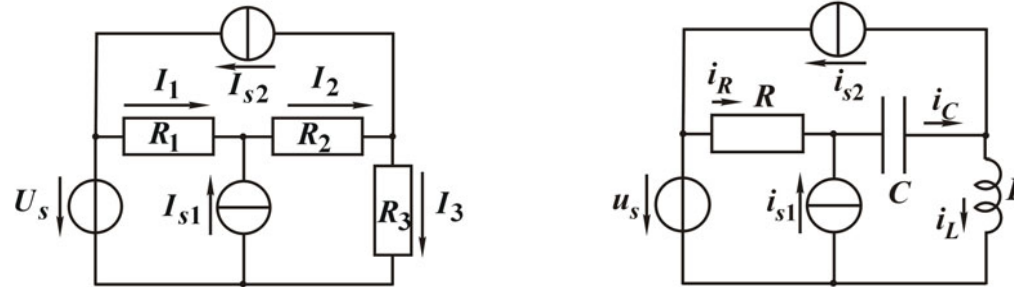
rezisztív hálózatban $II) \quad U_{s2} - U_{I_s} - U_1 = 0,$ dinamikus hálózatban $II) \quad u_{s2} - u_{i_s} - u_C = 0,$

$$III) \quad U_{s2} + U_3 - U_{s1} = 0,$$

$$III) \quad u_{s2} + u_L - u_{s1} = 0,$$

2. Feladat

- a) Az ábrán látható hálózatban figyelembe véve a komponensek áramainak, ill. feszültségeinek bejelölt referencia irányát, adja meg a komponensek karakterisztikáit,



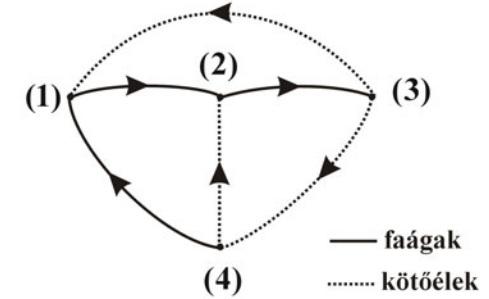
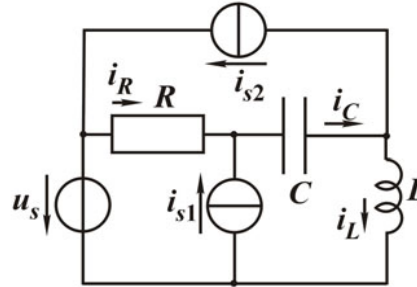
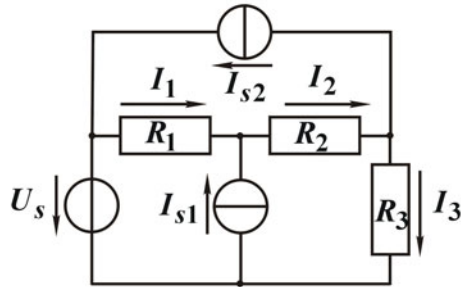
- b) Adja meg az ábrán látható hálózat gráfját, a gráfhoz tartozó normál fát, a faágak alapján jelölje be a vágatokat és a kötőélekhez tartozó hurkokat.
- c) Az előző pont alapján írja fel a hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszereket (Kirchhoff egyenleteket).

Megoldás

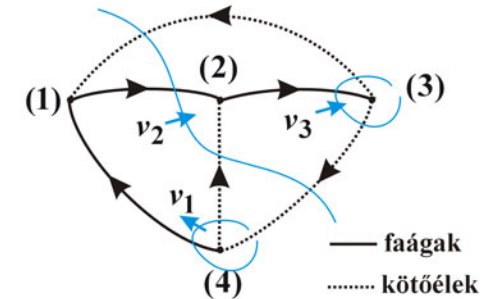
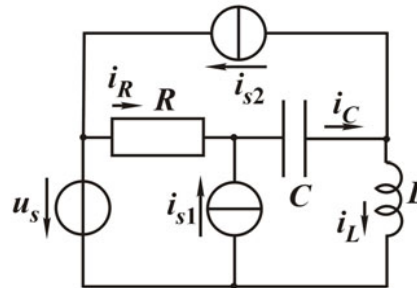
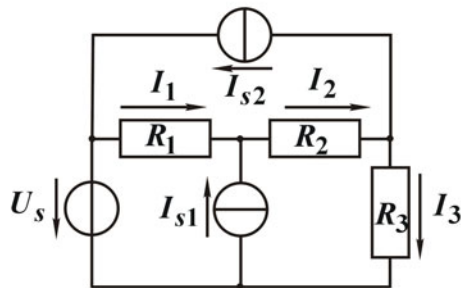
Az rezisztív hálózatban az ellenállások karakterisztikái $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$,

A dinamikus hálózatban a komponensek karakterisztikái $u_R(t) = R i_R(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

Az előző feladathoz hasonlóan a hálózat és egy lehetséges normál fája



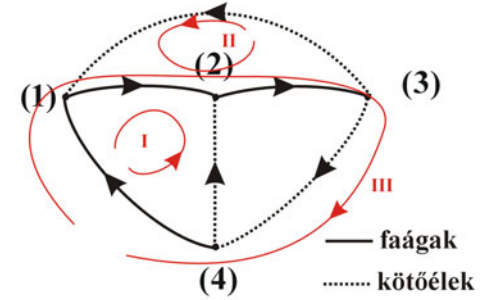
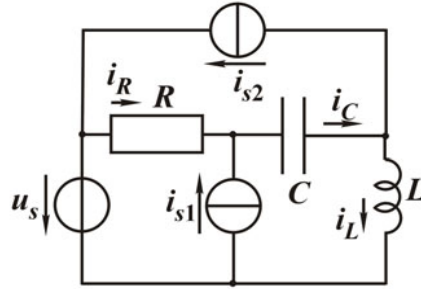
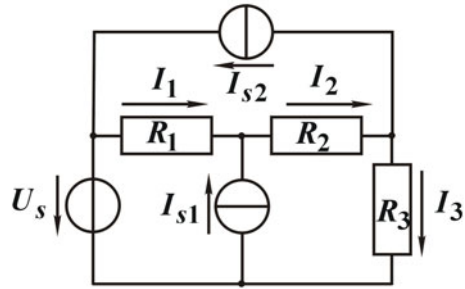
A normál fához tartozó vágatok és vágategyenletek



$v_1) \quad I_{U_s} + I_{s2} - I_3 = 0,$
 a rezisztív hálózatban $v_2) \quad -I_{s2} + I_1 + I_{s1} - I_3 = 0,$
 $v_3) \quad -I_{s2} + I_2 - I_3 = 0,$

$v_1) \quad i_{u_s} + i_{s2} - i_L = 0,$
 a dinamikus hálózatban $v_2) \quad -i_{s2} + i_R + i_{s1} - i_L = 0,$
 $v_3) \quad -i_{s2} + i_C - i_L = 0,$

A normál fához tartozó kötőélek és a kötőélekhez tartozó hurkok a hurokegyenletekkel



a rezisztív hálózatban

$$I) \quad -U_{I_{s1}} - U_1 + U_s = 0$$

$$II) \quad -U_{I_{s2}} + U_1 + U_2 = 0$$

$$III) \quad U_1 + U_2 + U_3 - U_s = 0$$

a dinamikus hálózatban

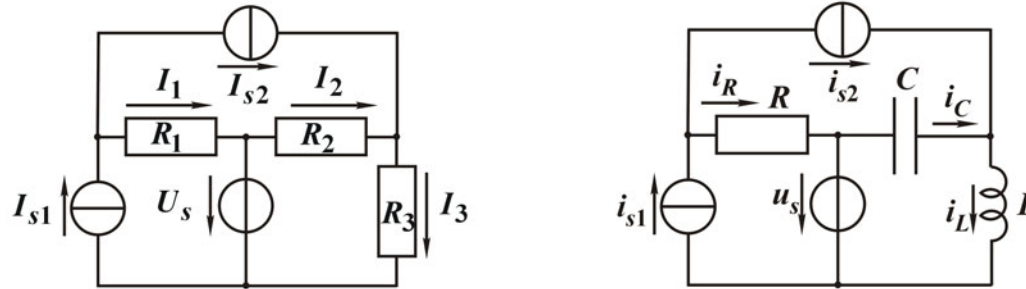
$$I) \quad -u_{i_{s1}} - u_R + u_s = 0,$$

$$II) \quad -u_{i_{s2}} + u_R + u_C = 0,$$

$$III) \quad u_R + u_C + u_L - u_s = 0,$$

3. Feladat

a) Az ábrán látható hálózatban figyelembe véve a komponensek áramainak, ill. feszültségeinek bejelölt referencia irányát, adja meg a komponensek karakterisztikáit,



b) Adja meg az ábrán látható hálózat gráfját, a gráfhoz tartozó normál fát, a faágak alapján jelölje be a vágatokat és a kötőélekhez tartozó hurkokat.

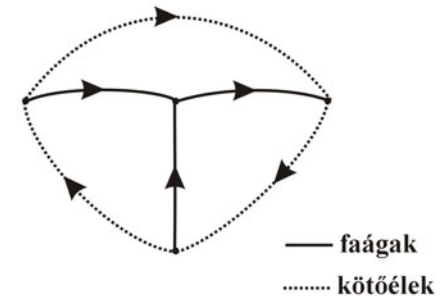
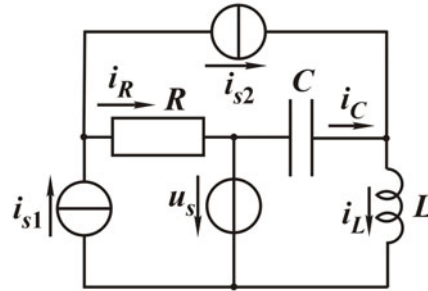
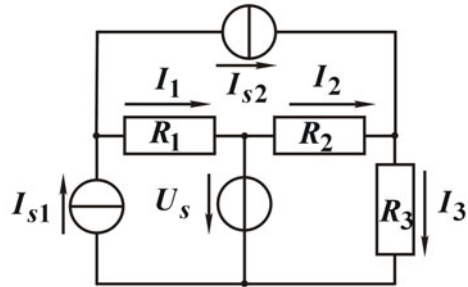
c) Az előző pont alapján írja fel a hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszereket (Kirchhoff egyenleteket).

Megoldás

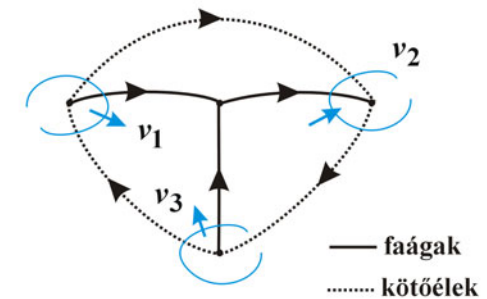
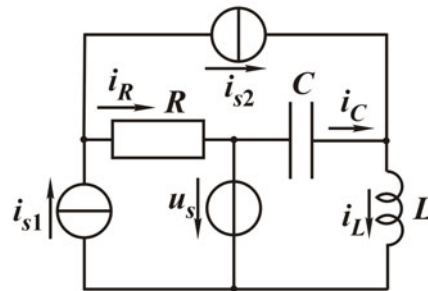
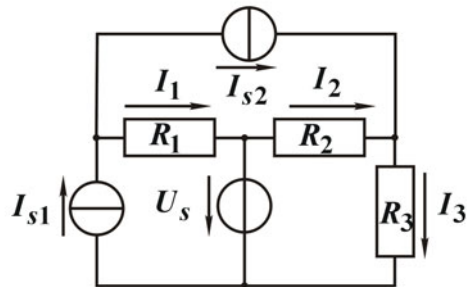
Az rezisztív hálózatban az ellenállások karakterisztikái $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$,

A dinamikus hálózatban a komponensek karakterisztikái $u_R(t) = R i_R(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

Az 1. feladathoz hasonlóan a hálózat és egy lehetséges normál fája



A normál fához tartozó vágatok és vágategyenletek



a rezisztív hálózatban

$$v_1) -I_{s1} + I_1 + I_{s2} = 0$$

$$v_2) I_2 + I_{s2} - I_3 = 0$$

$$v_3) I_{U_s} + I_{s1} - I_3 = 0$$

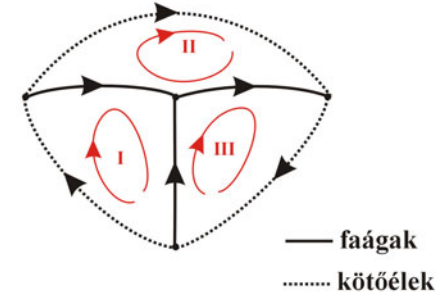
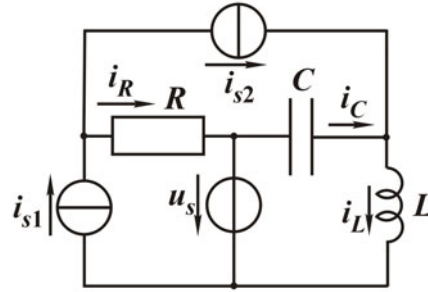
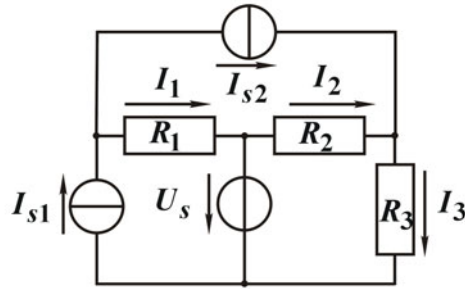
a dinamikus hálózatban

$$v_1) -i_{s1} + i_R + i_{s2} = 0,$$

$$v_2) i_C + i_{s2} - i_L = 0,$$

$$v_3) i_{u_s} + i_{s1} - i_L = 0,$$

A normál fához tartozó kötőélek és a kötőélekhez tartozó hurkok a hurokegyenletekkel

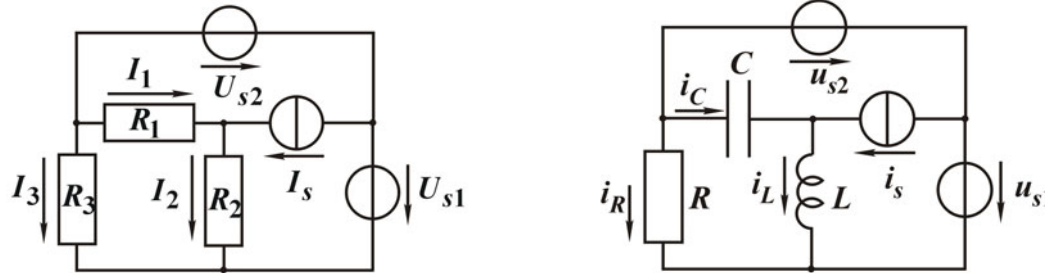


I) $U_1 + U_s - U_{I_{s1}} = 0$
a rezisztív hálózatban II) $-U_2 - U_1 - U_{I_{s2}} = 0$
III) $U_2 + U_3 - U_s = 0$

I) $u_R + u_s - u_{i_{s1}} = 0,$
a dinamikus hálózatban II) $-u_C - u_R - u_{i_{s2}} = 0,$
III) $u_C + u_L - u_s = 0,$

4. Feladat

- a) Az ábrán látható hálózatban figyelembe véve a komponensek áramainak, ill. feszültségeinek bejelölt referencia irányát, adja meg a komponensek karakterisztikáit,



- b) Adja meg az ábrán látható hálózat gráfját, a gráfhoz tartozó normál fát, a faágak alapján jelölje be a vágatokat és a kötőélekhez tartozó hurkokat.

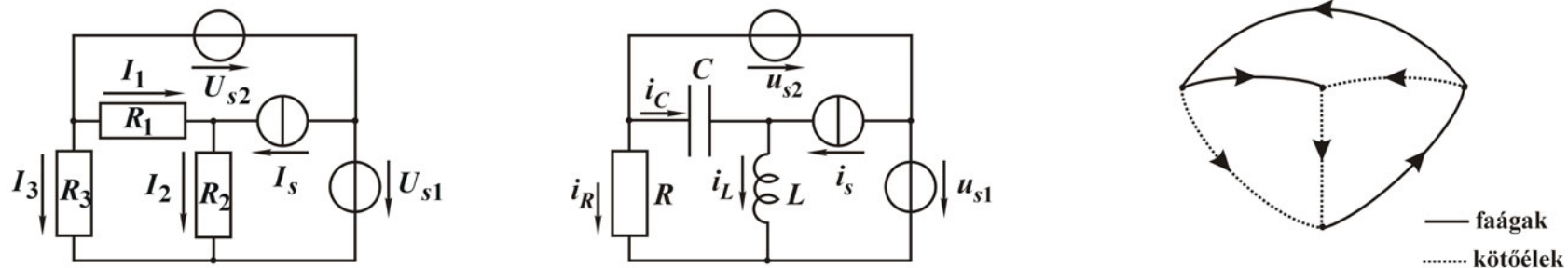
- c) Az előző pont alapján írja fel a hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszereket (Kirchhoff egyenleteket).

Megoldás

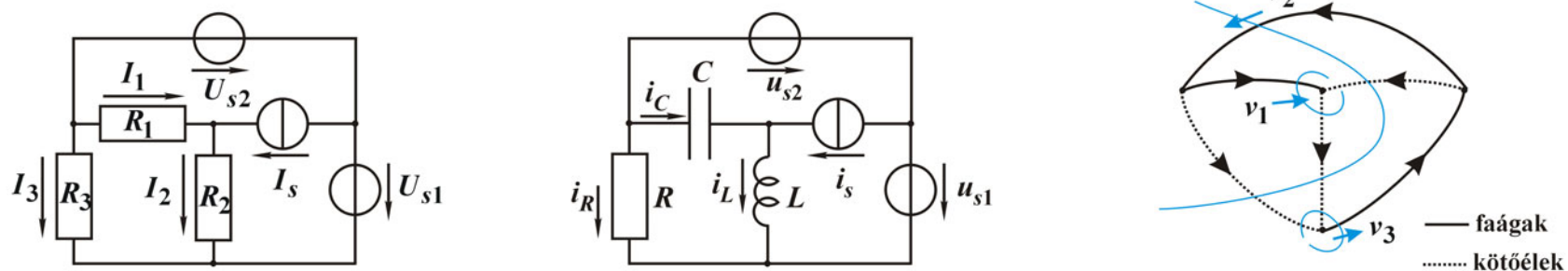
Az rezisztív hálózatban az ellenállások karakterisztikái $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$,

A dinamikus hálózatban a komponensek karakterisztikái $u_R(t) = R i_R(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

Az 1. feladathoz hasonlóan a hálózat és egy lehetséges normál fája



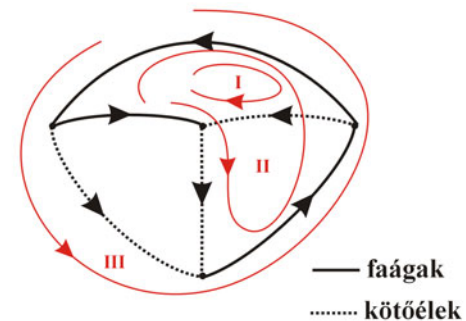
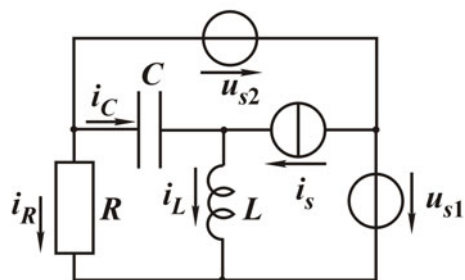
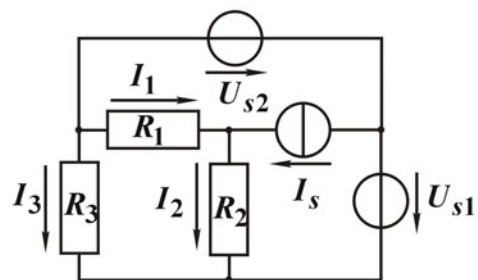
A normál fához tartozó vágatok és vágategyenletek



$v_1) \quad I_1 + I_s - I_2 = 0$
 a rezisztív hálózatban $v_2) \quad I_{U_{s2}} + I_s - I_2 - I_3 = 0$
 $v_3) \quad I_{U_{s1}} - I_2 - I_3 = 0$

$v_1) \quad i_C + i_s - i_L = 0,$
 a dinamikus hálózatban $v_2) \quad i_{u_{s2}} + i_s - i_L - i_R = 0,$
 $v_3) \quad i_{u_{s1}} - i_L - i_R = 0,$

A normál fához tartozó kötőélek és a kötőélekhez tartozó hurkok a hurokegyenletekkel



a rezisztív hálózatban

$$I) \quad -U_{I_s} - U_1 + U_{s2} = 0$$

$$II) \quad U_2 - U_{s1} - U_{s2} + U_1 = 0$$

$$III) \quad U_3 - U_{s1} - U_{s2} = 0$$

a dinamikus hálózatban

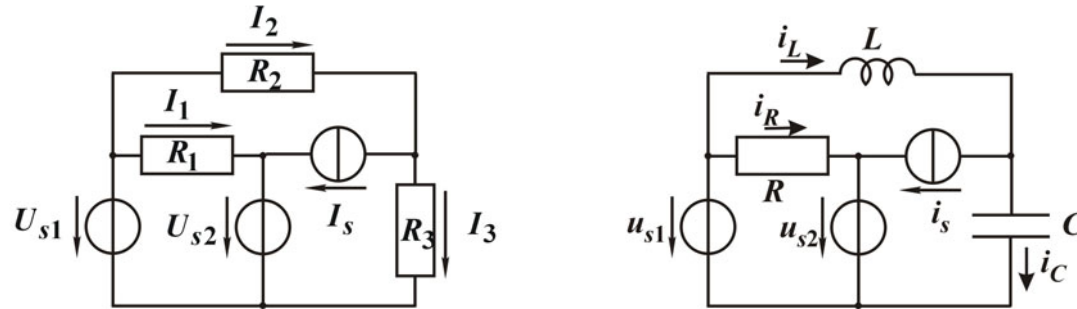
$$I) \quad -u_{i_s} - u_C + u_{s2} = 0,$$

$$II) \quad u_L - u_{s1} - u_{s2} + u_C = 0,$$

$$III) \quad u_C - u_{s1} - u_{s2} = 0,$$

5. Feladat

- a) Az ábrán látható hálózatban figyelembe véve a komponensek áramainak, ill. feszültségeinek bejelölt referencia irányát, adja meg a komponensek karakterisztikáit,



- b) Adja meg az ábrán látható hálózat gráfját, a gráfhoz tartozó normál fát, a faágak alapján jelölje be a vágatokat és a kötőélekhez tartozó hurkokat.

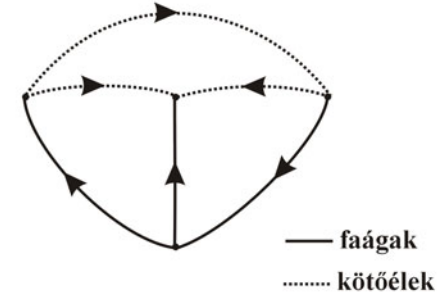
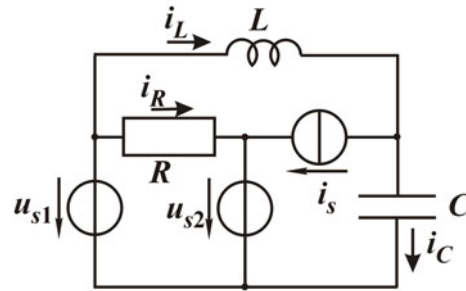
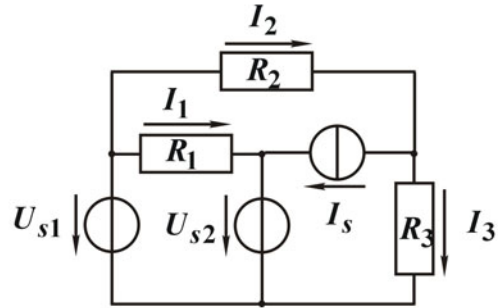
- c) Az előző pont alapján írja fel a hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszereket (Kirchhoff egyenleteket).

Megoldás

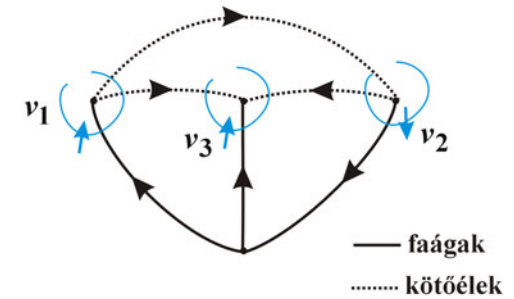
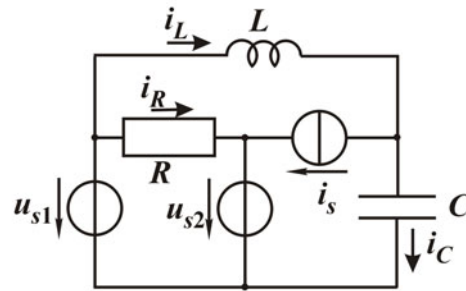
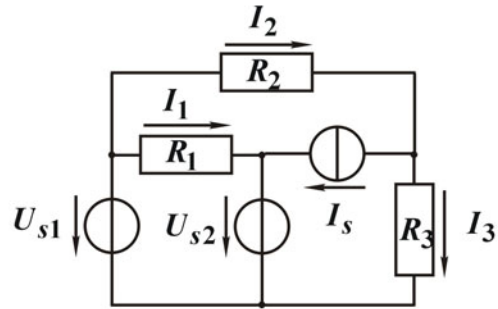
A rezisztív hálózatban az ellenállások karakterisztikái $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$,

A dinamikus hálózatban a komponensek karakterisztikái $u_R(t) = R i_R(t)$, $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

Az 1. feladathoz hasonlóan a hálózat és egy lehetséges normál fája



A normál fához tartozó vágatok és vágategyenletek



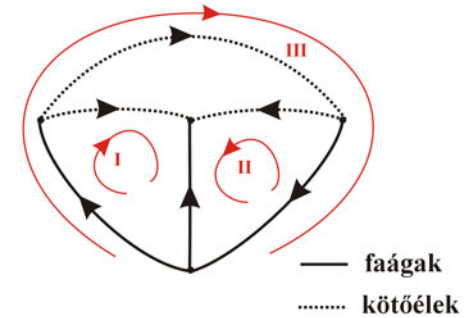
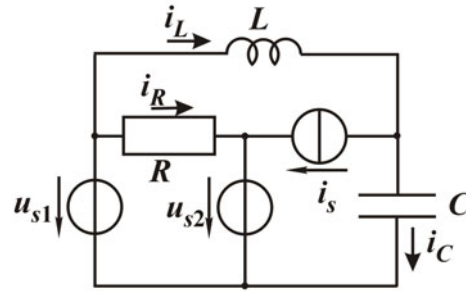
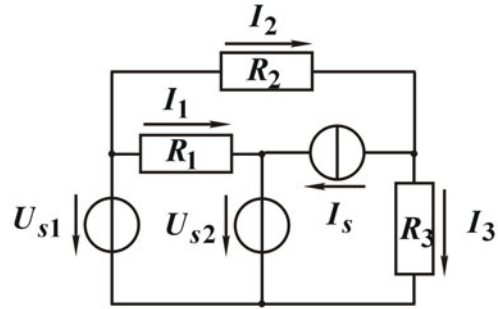
a rezisztív hálózatban

$$\begin{aligned} v_1) \quad & I_{U_{s1}} - I_1 - I_2 = 0 \\ v_2) \quad & I_3 + I_s - I_2 = 0 \\ v_3) \quad & I_{U_{s2}} + I_1 + I_s = 0 \end{aligned}$$

a dinamikus hálózatban

$$\begin{aligned} v_1) \quad & i_{u_{s1}} - i_R - i_L = 0, \\ v_2) \quad & i_C + i_s - i_L = 0, \\ v_3) \quad & i_{u_{s2}} + i_R + i_s = 0, \end{aligned}$$

A normál fához tartozó kötőélek és a kötőélekhez tartozó hurkok a hurokegyenletekkel



I) $U_1 + U_{s2} - U_{s1} = 0$
a rezisztív hálózatban **II)** $-U_{I_s} + U_{s2} - U_3 = 0$
III) $U_2 + U_3 - U_{s1} = 0$

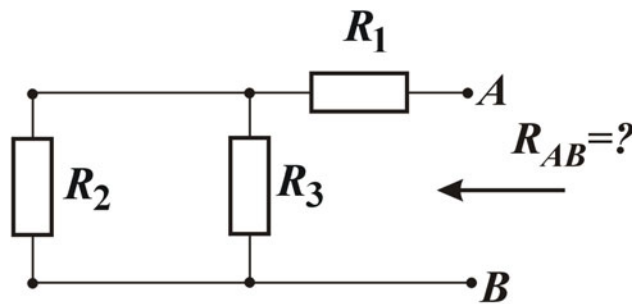
I) $u_R + u_{s2} - u_{s1} = 0,$
a dinamikus hálózatban **II)** $-u_{i_s} + u_{s2} - u_C = 0,$
III) $u_L + u_C - u_{s1} = 0,$

Gyakorlat feladatai, II

A gyakorlat célja: a rezisztív hálózatok elemeinek soros, ill. párhuzamos kapcsolása, az elemek áramának, ill. feszültségének meghatározása a feszültségosztás, ill. az áramosztás alkalmazásával, a szuperpozíció elve.

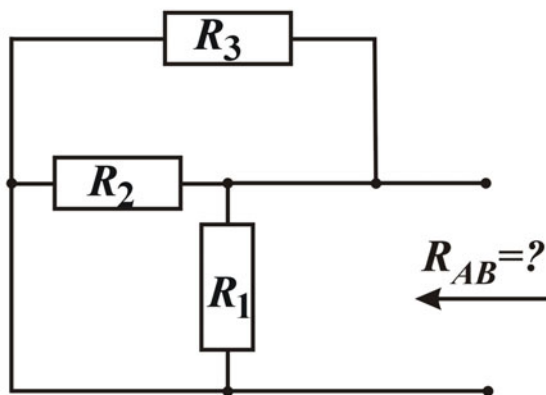
a) Soros párhuzamos kapcsolás

1. Példa



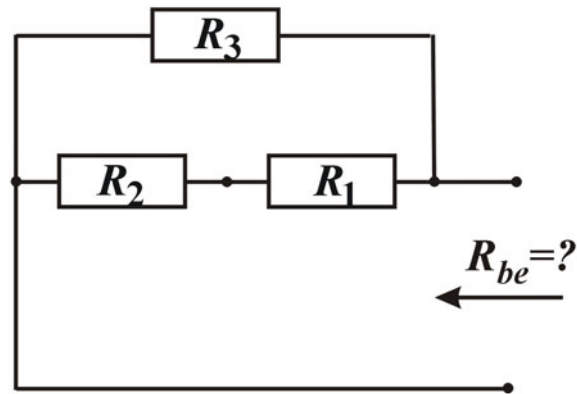
$$R_{AB} = R_2 \times R_3 + R_1,$$

2. Példa



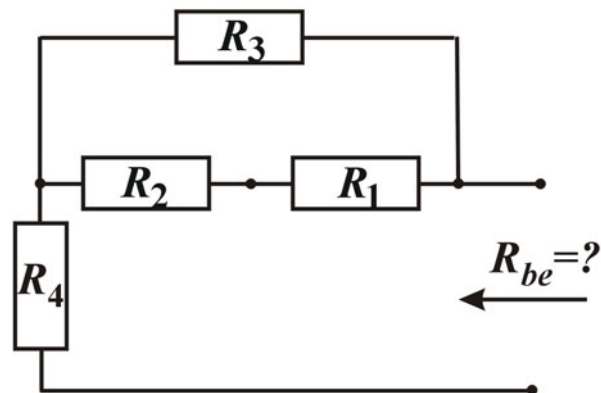
$$R_{AB} = (R_1 \times R_2) \times R_3,$$

3. Példa



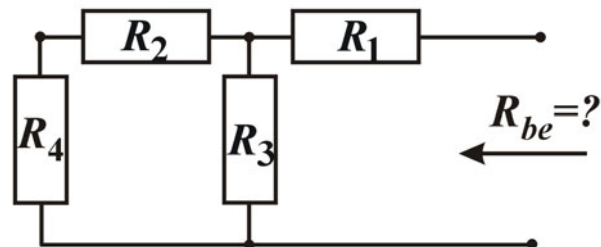
$$R_{be} = (R_1 + R_2) \times R_3,$$

4. Példa



$$R_{be} = [(R_1 + R_2) \times R_3] + R_4,$$

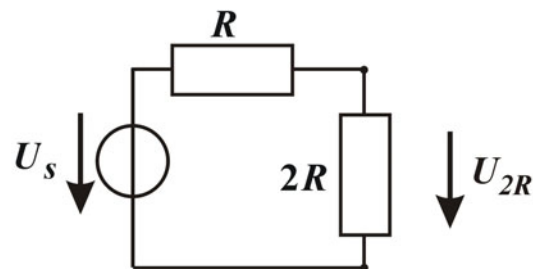
5. Példa



$$R_{be} = [(R_2 + R_4) \times R_3] + R_1,$$

b) Áram osztás, feszültség osztás,

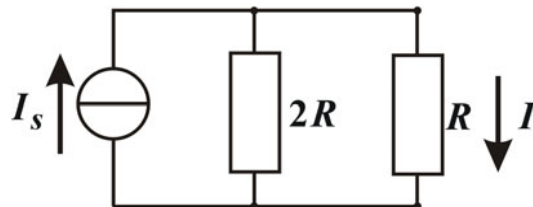
6. Példa



$$U_s = 12 \text{ V},$$
$$R = 3 \Omega,$$

$$U_{2R} = U_s \frac{2R}{2R + R},$$

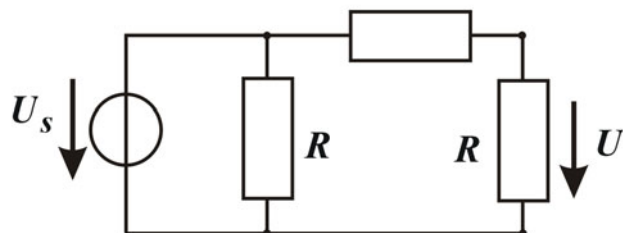
7. Példa



$$I_s = 2,4 \text{ A}$$
$$R = 6 \Omega$$

$$I = I_s \frac{2R}{2R + R},$$

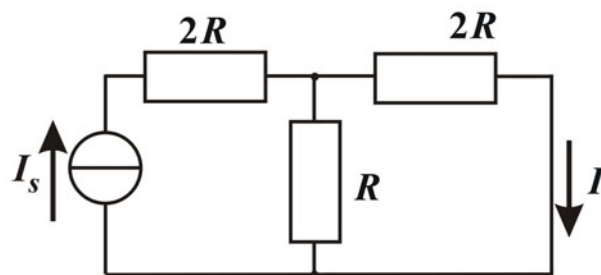
8. Példa



$$U_s = 18 \text{ V}$$
$$R = 4 \Omega$$

$$U = U_s \frac{R}{R + 2R},$$

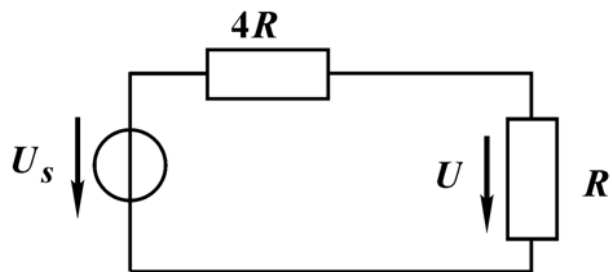
9. Példa



$$I_s = 2 \text{ A}$$
$$R = 5 \Omega$$

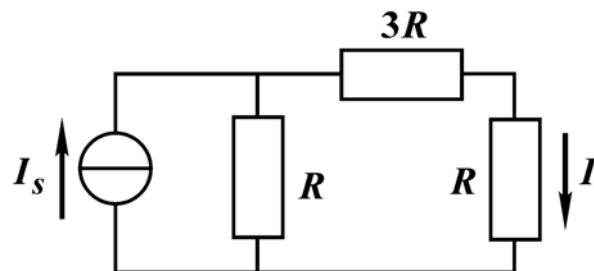
$$I = I_s \frac{R}{R + 2R},$$

10. Példa



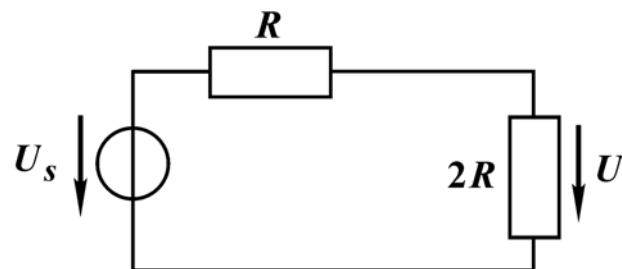
$$U_s = 12 \text{ V}, \quad U = U_s \frac{R}{R + 4R}$$
$$R = 2 \Omega,$$

11. Példa



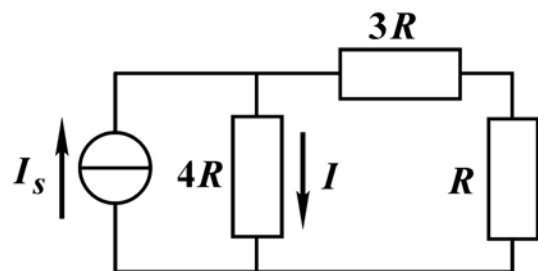
$$I_s = 6 \text{ A} \quad I = I_s \frac{R}{R + (3R + R)}$$
$$R = 3 \Omega$$

12. Példa



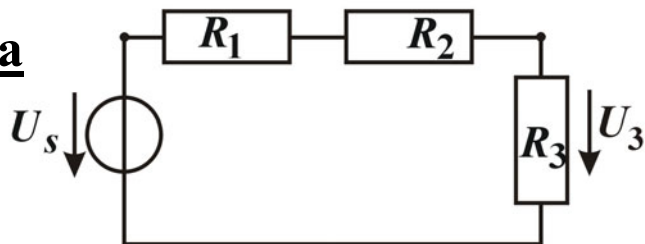
$$U_s = 12 \text{ V} \quad U = U_s \frac{2R}{R + 2R}$$
$$R = 2 \Omega$$

13. Példa



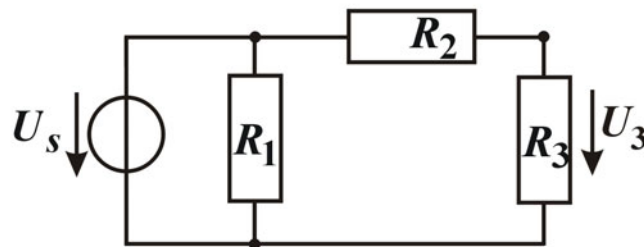
$$I_s = 8 \text{ A} \quad I = I_s \frac{(3R + R)}{(3R + R) + 3R}$$
$$R = 3 \Omega$$

14. Példa



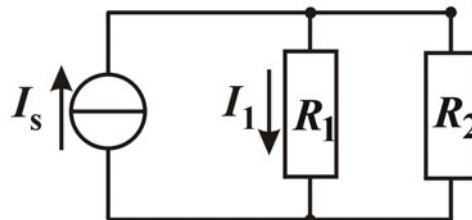
$$U_3 = U_s \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

15. Példa



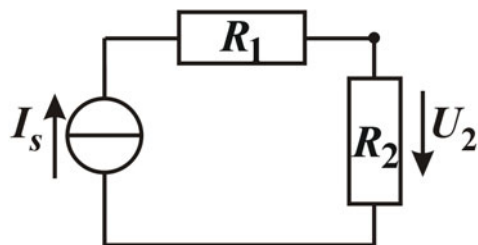
$$U_3 = U_s \frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

16. Példa



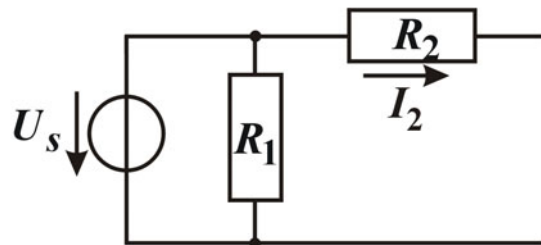
$$I_1 = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

17. Példa



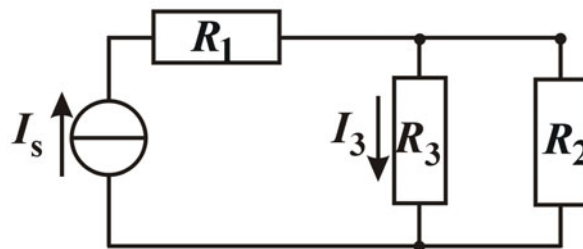
$$U_2 = I_s R_2,$$

18. Példa



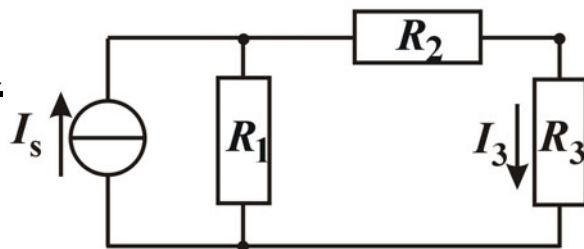
$$I_2 = \frac{U_s}{R_2},$$

19. Példa



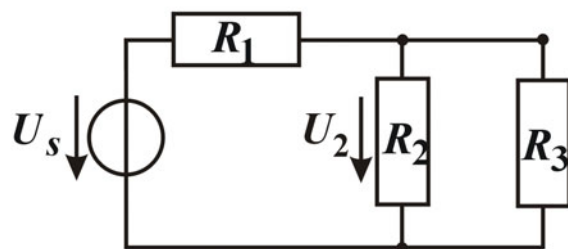
$$I_3 = I_s \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

20. Példa



$$I_3 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3},$$

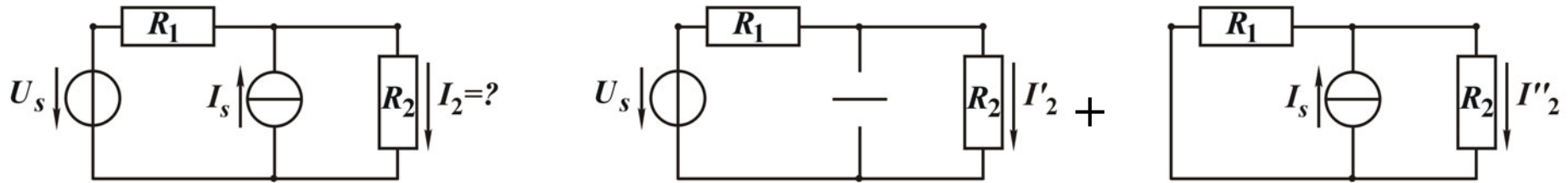
21. Példa



$$U_2 = U_s \frac{R_2 \times R_3}{R_2 \times R_3 + R_1},$$

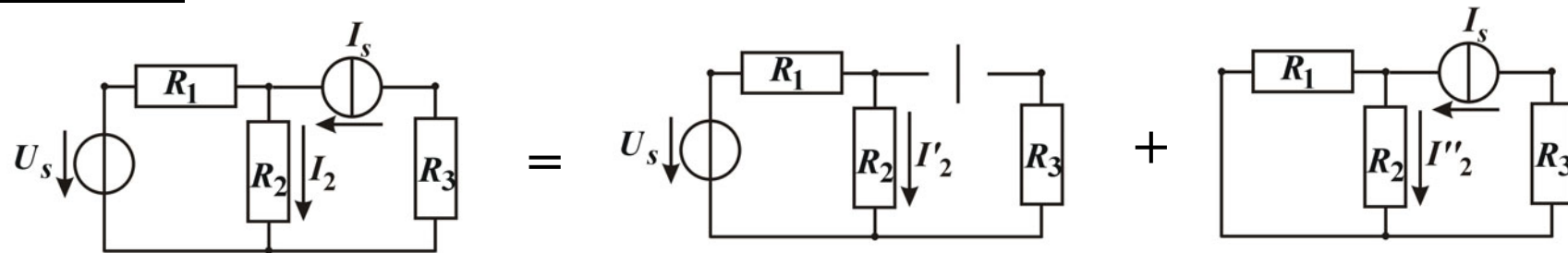
c) A szuperpozíció alkalmazása,

22. Példa



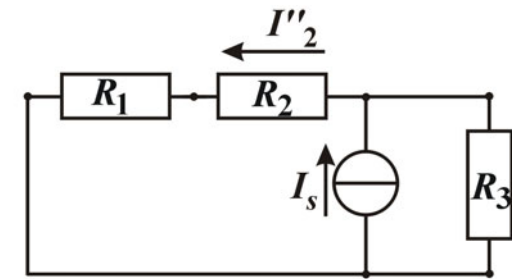
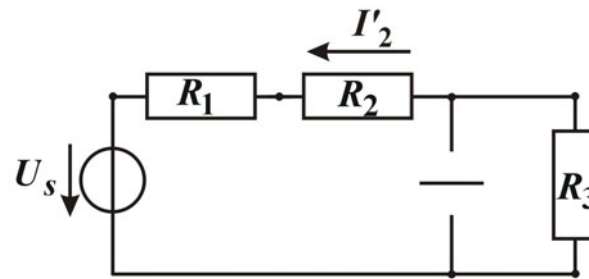
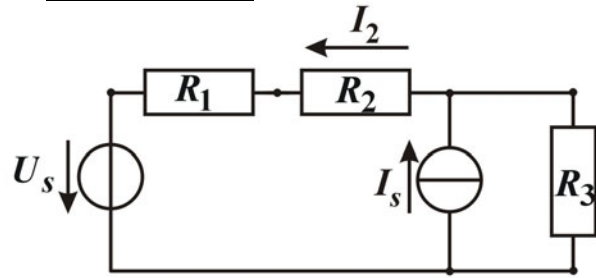
$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2}, \quad \leftarrow \quad I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2}, \quad I''_2 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

23. Példa



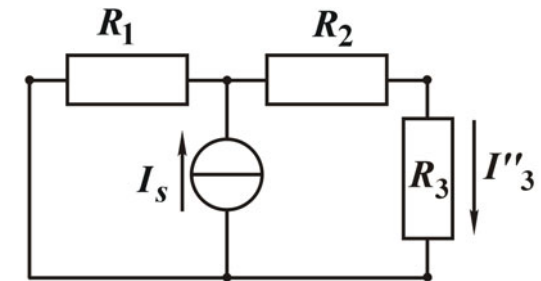
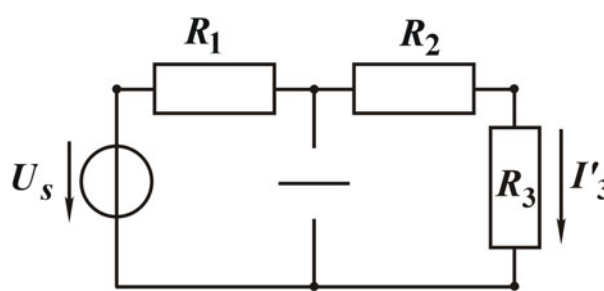
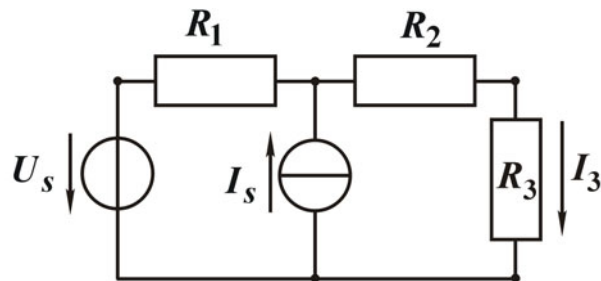
$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2}, \quad \leftarrow \quad I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2}, \quad I''_2 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

24. Példa



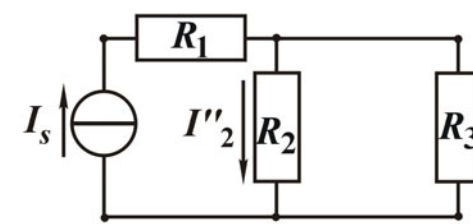
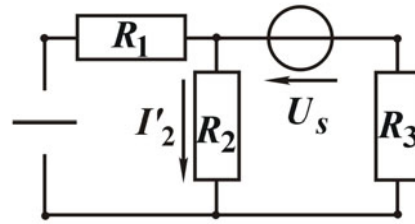
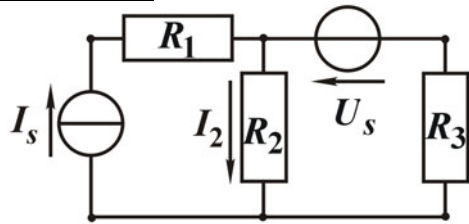
$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{-U_s + I_s R_1}{R_1 + R_2}, \quad \leftarrow \quad I'_2 = -\frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad I''_2 = I_s \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

25. Példa



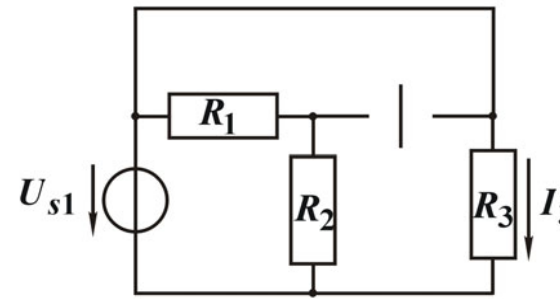
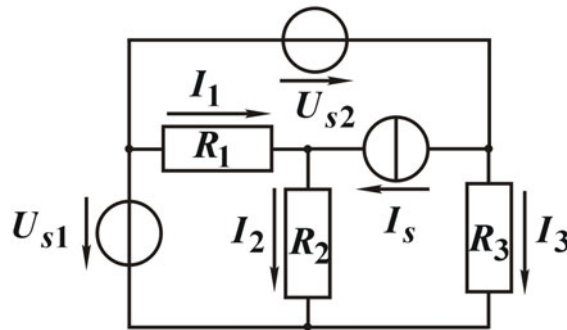
$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{U_s + I_s R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)}, \quad \leftarrow \quad I'_3 = \frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad I''_3 = I_s \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)},$$

26. Példa

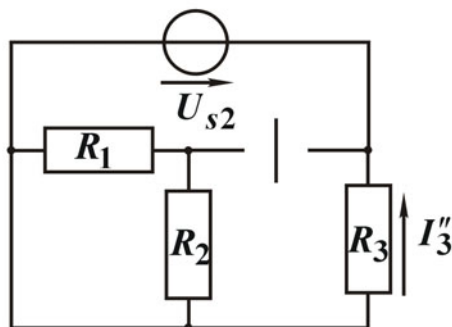


$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{-U_s + I_s R_3}{R_2 + R_3}, \quad \leftarrow I'_2 = -\frac{U_s}{R_2 + R_3}, \quad I''_2 = I_s \frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

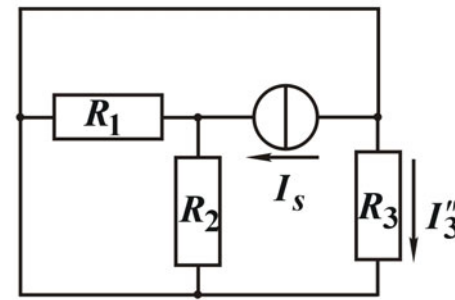
27. Példa



$$I'_3 = \frac{U_{s1}}{R_3},$$



$$I''_3 = \frac{U_{s2}}{R_3},$$



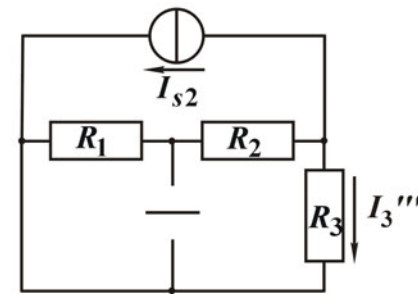
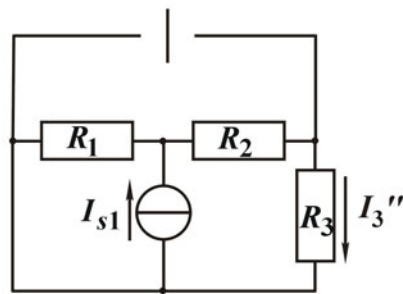
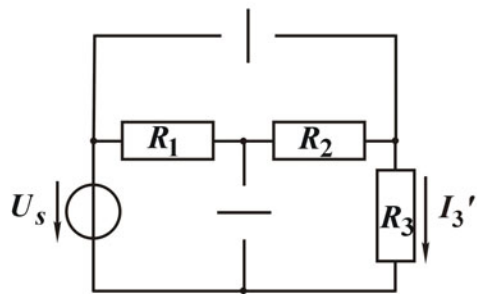
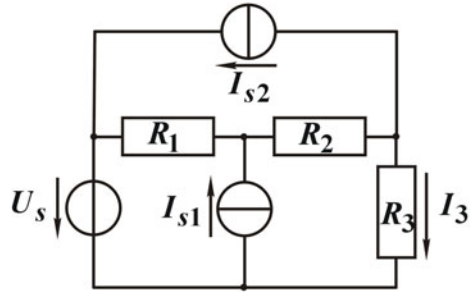
$$I'''_3 = 0$$

$$I_3 = I'_3 - I''_3 + I'''_3,$$

28. Példa

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $U_{s1} = 10 \text{ V}$, $I_{s1} = 2 \text{ A}$, $I_{s2} = 4 \text{ A}$.

Határozza meg a szuperpozíció módszer alkalmazásával az R_3 ellenállás áramát.

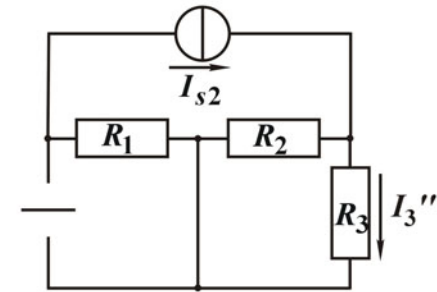
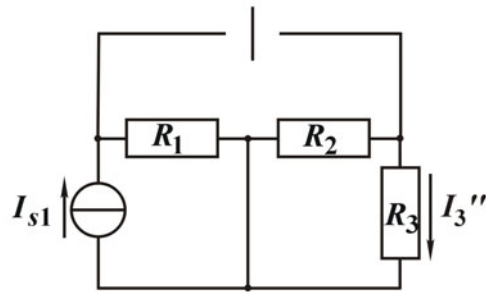
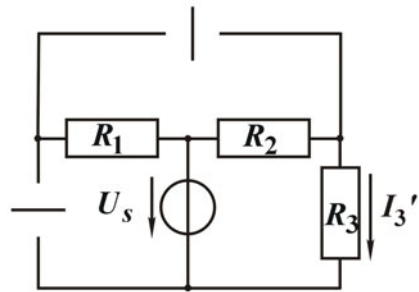
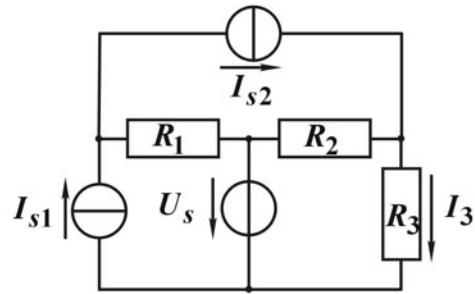


$$I_3 = \frac{U_s}{R_1 + R_2 + R_3} + I_{s1} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} - I_{s2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = -1,8 \text{ A}$$

29. Példa

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $U_{s1} = 12 \text{ V}$, $I_{s1} = 6 \text{ A}$, $I_{s2} = 3 \text{ A}$.

Határozza meg a szuperpozíció módszer alkalmazásával az R_3 ellenállás áramát.

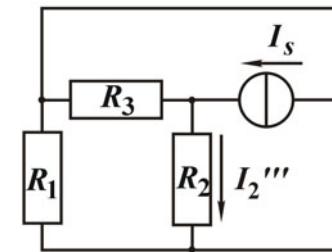
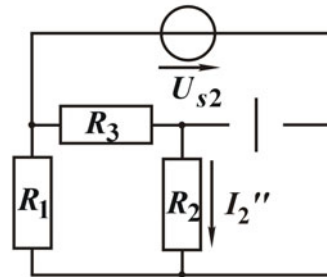
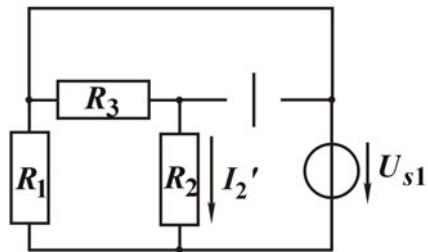
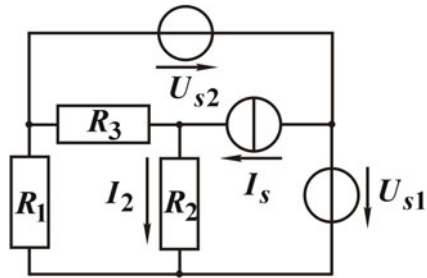


$$I_3 = I_{s2} \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{U_s}{R_2 + R_3} = \frac{10}{3} \text{ A}.$$

30. Példa

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $U_{s1} = 20\text{ V}$, $U_{s2} = 15\text{ V}$, $I_s = 2\text{ A}$

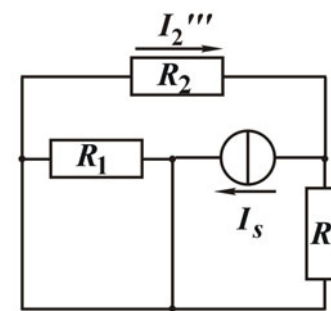
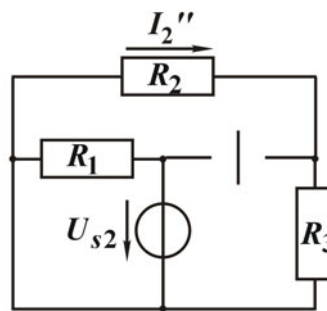
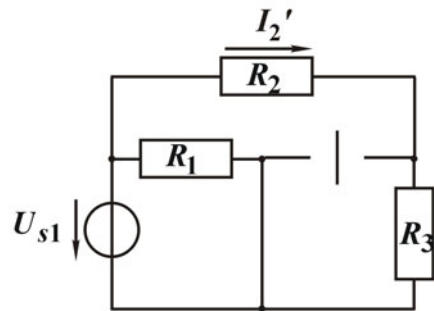
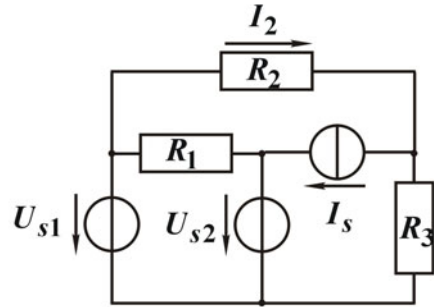
Határozza meg a szuperpozíció módszer alkalmazásával az R_2 ellenállás áramát.



$$I_2 = \frac{U_{s1}}{R_2 + R_3} + \frac{U_{s2}}{R_2 + R_3} - I_s \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1,25\text{ A},$$

31. Példa

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $U_{s1} = 100\ \text{V}$, $U_{s2} = 60\ \text{V}$, $I_s = 2\ \text{A}$.
Határozza meg a szuperpozíció módszer alkalmazásával az R_2 ellenállás áramát.



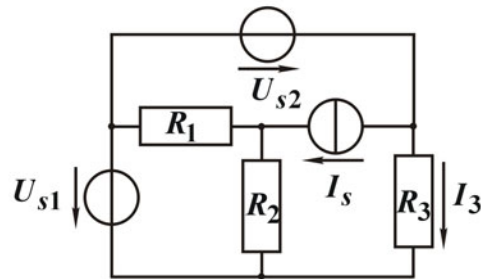
$$I_2 = \frac{U_{s1}}{R_2 + R_3} + I_s \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3\ \text{A},$$

Gyakorlat feladatai

A gyakorlat célja: A szuperpozíció elv, a Thevenin és a Norton helyettesítő kapcsolások meghatározása, teljesítmény illesztés.

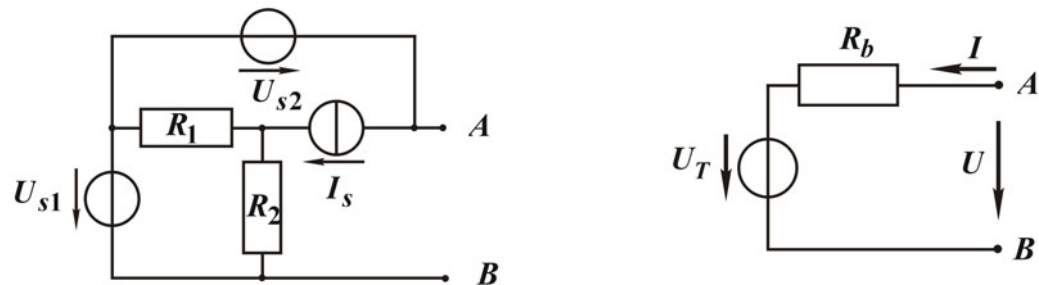
1. Feladat

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $U_{s1} = 24 \text{ V}$, $U_{s2} = 32 \text{ V}$,
 $I_s = 4 \text{ A}$.

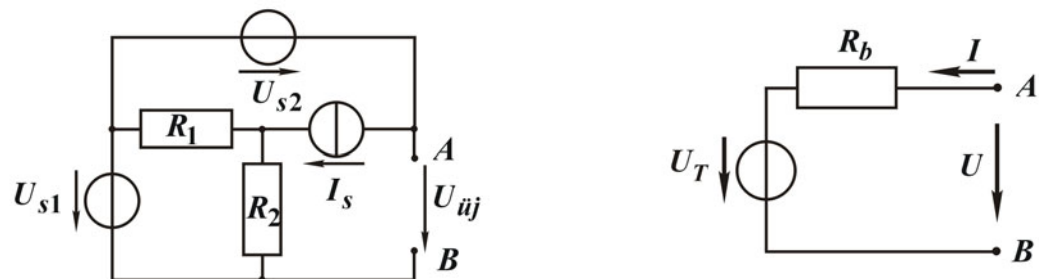


Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Thevenin helyettesítő képe

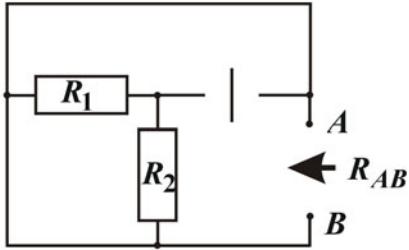


A Thevenin helyettesítő generátor forrásfeszültsége



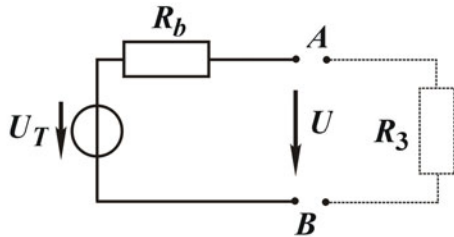
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_{s1} - U_{s2} = -8 \text{ V},$$

A Thevenin helyettesítő generátor belső ellenállása



$$R_b = 0,$$

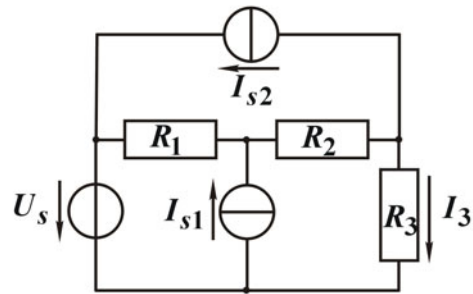
Az R_3 terhelő ellenállás árama



$$I_3 = \frac{U_T}{R_b + R_3} = \frac{-8}{10} = -0,8 \text{ A.}$$

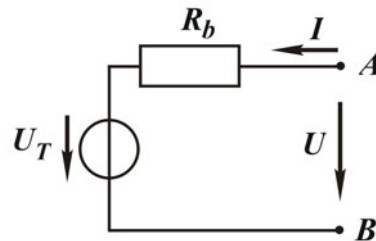
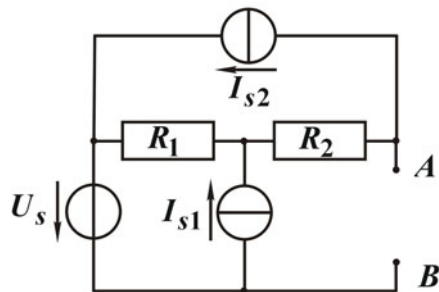
2. Feladat

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $U_{s1} = 10 \text{ V}$, $I_{s1} = 2 \text{ A}$,
 $I_{s2} = 4 \text{ A}$

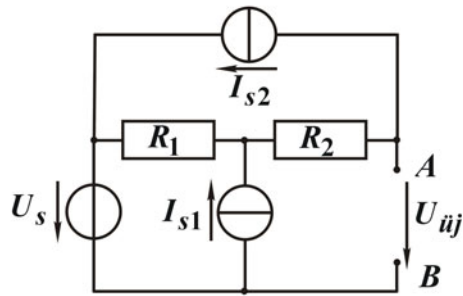


- a) Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.
- b) Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

a) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Thevenin helyettesítő generátor

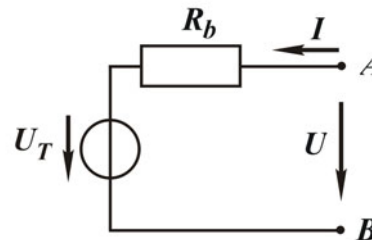
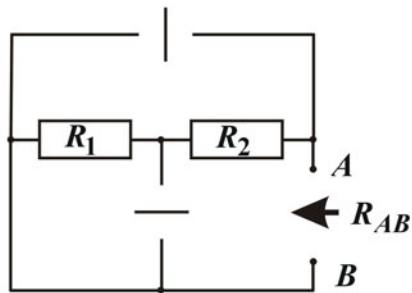


A Thevenin helyettesítő generátor forrásfeszültsége



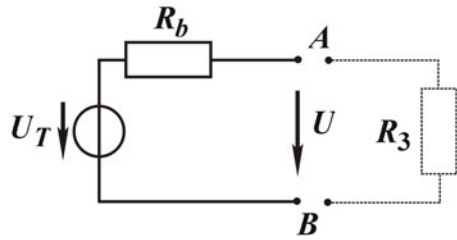
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_s + I_{s1}R_1 - I_{s2}(R_1 + R_2) = -40 \text{ V},$$

A Thevenin helyettesítő generátor belső ellenállása



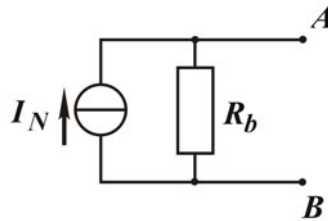
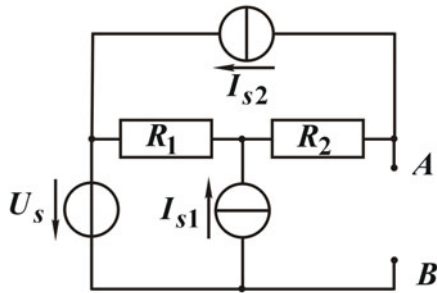
$$R_b = R_{AB} = R_1 + R_2 = 15 \Omega.$$

Az R_3 terhelő ellenállás árama

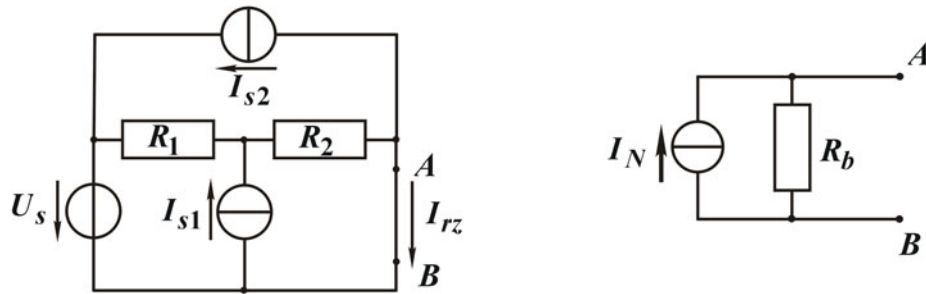


$$I_3 = \frac{U_T}{R_b + R_3} = -1,8 \text{ A.}$$

b) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Norton helyettesítő képe

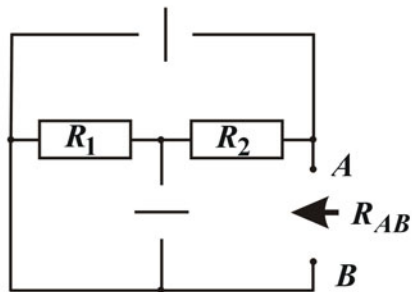


Norton helyettesítő generátor forrásárama



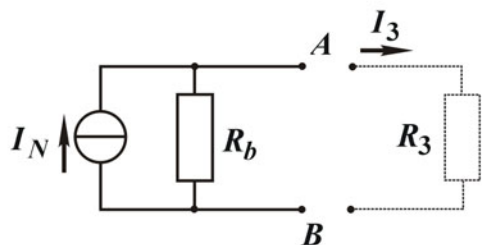
$$I_{rz} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} + I_{s1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - I_{s2} = -\frac{8}{3} \text{ A.}$$

A Norton generátor R_b belső ellenállása



$$R_b = R_{AB} = R_1 + R_2 = 15 \Omega.$$

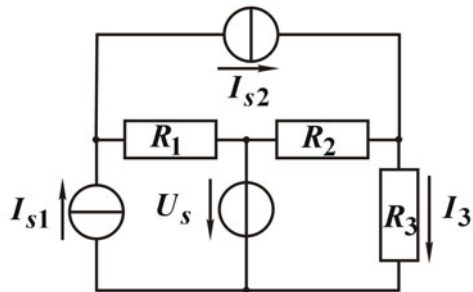
Az R_3 terhelő ellenállás árama



$$I_3 = I_N \frac{R_b}{R_b + R_3} = -1,8 \text{ A}$$

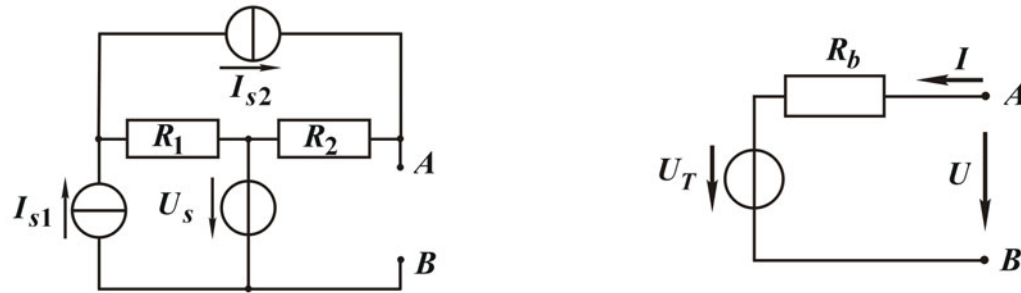
3. Feladat

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $U_{s1} = 12 \text{ V}$, $I_{s1} = 6 \text{ A}$,
 $I_{s2} = 3 \text{ A}$

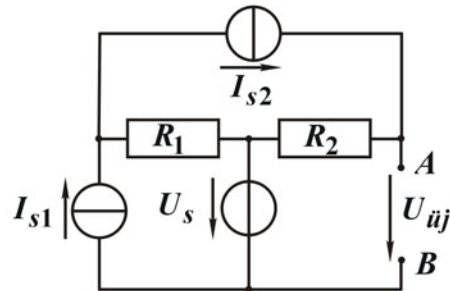


- Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.
- Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

a) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Thevenin helyettesítő képe

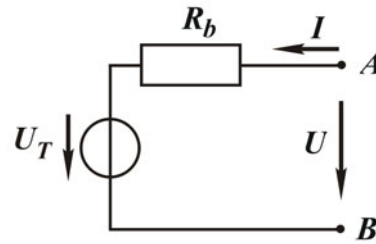
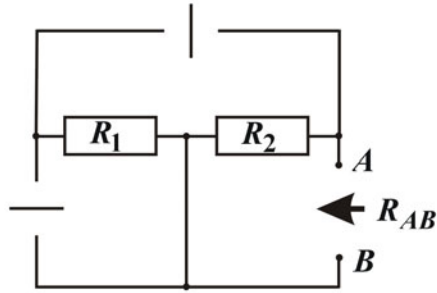


A Thevenin helyettesítő generátor forrásfeszültsége



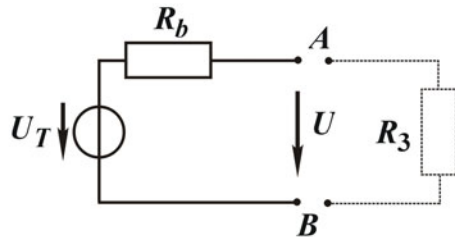
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = I_{s2}R_2 + U_s = 30 \text{ V}$$

A Thevenin helyettesítő generátor belső ellenállása



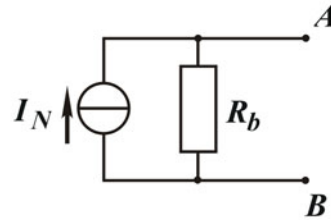
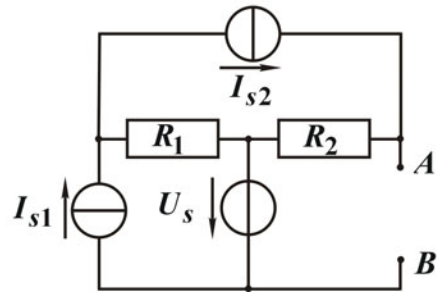
$$R_b = R_{AB} = R_2 = 6 \Omega,$$

Az R_3 terhelő ellenállás árama

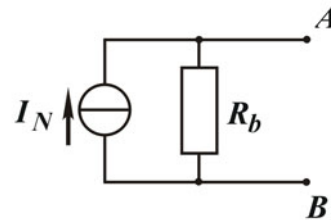
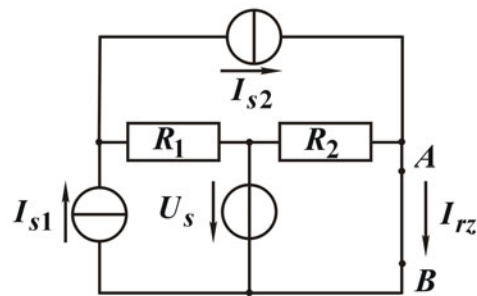


$$I_3 = \frac{U_T}{R_b + R_3} = \frac{10}{3} \text{ A.}$$

b) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Norton helyettesítő képe

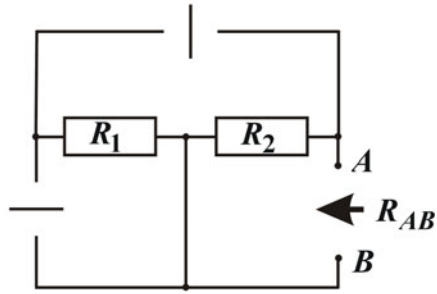


Norton helyettesítő generátor forrásárama



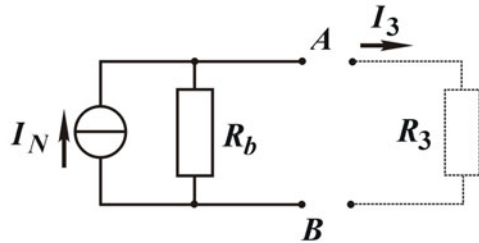
$$I_N = I_{rz} = \frac{U_s}{R_2} + I_{s2} = 5 \text{ A},$$

A Norton generátor R_b belső ellenállása



$$R_b = R_{AB} = R_2 = 6 \Omega$$

Az R_3 terhelő ellenállás árama

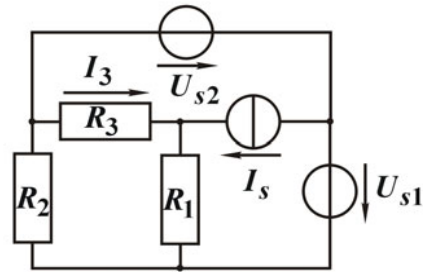


$$I_3 = I_N \frac{R_b}{R_b + R_3} = \frac{10}{3} \text{ A.}$$

4. Feladat

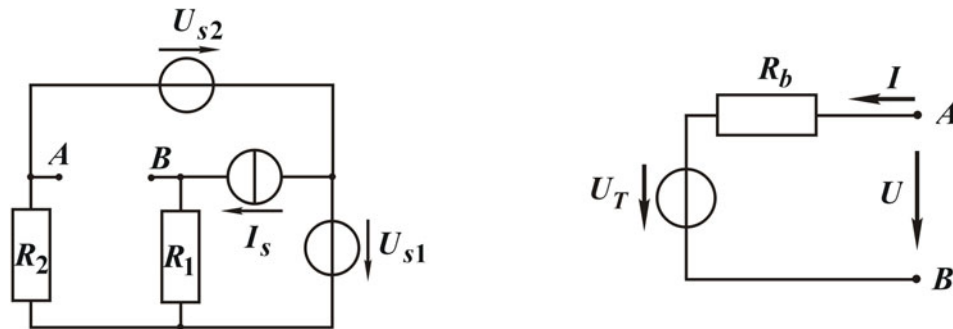
Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $U_{s1} = 20 \text{ V}$, $U_{s2} = 15 \text{ V}$,

$$I_s = 2 \text{ A}$$

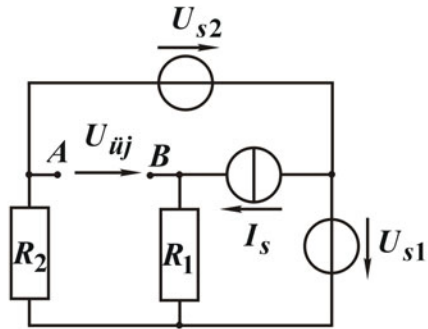


- a) Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.
- b) Határozza meg az R_3 ellenállás pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és a helyettesítő kép alapján az elem áramát.

a) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Thevenin helyettesítő képe

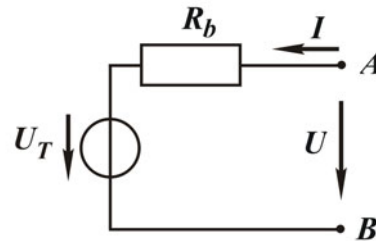
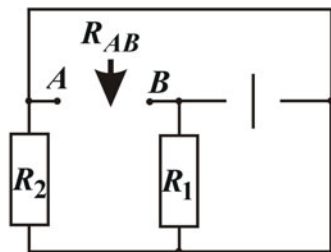


A Thevenin helyettesítő generátor forrásfeszültsége



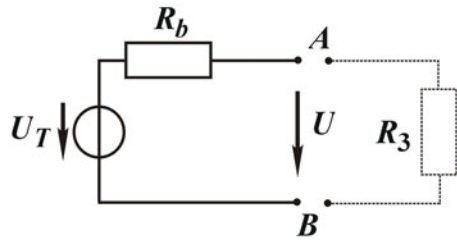
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = U_{s1} + U_{s2} - I_s R_1 = 25 \text{ V},$$

A Thevenin helyettesítő generátor belső ellenállása



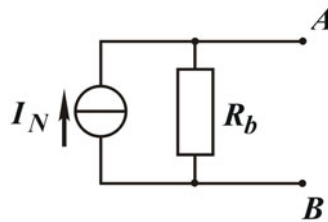
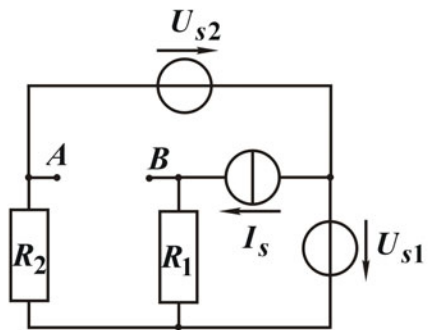
$$R_b = R_{AB} = R_1 = 5 \Omega$$

Az R_3 terhelő ellenállás árama

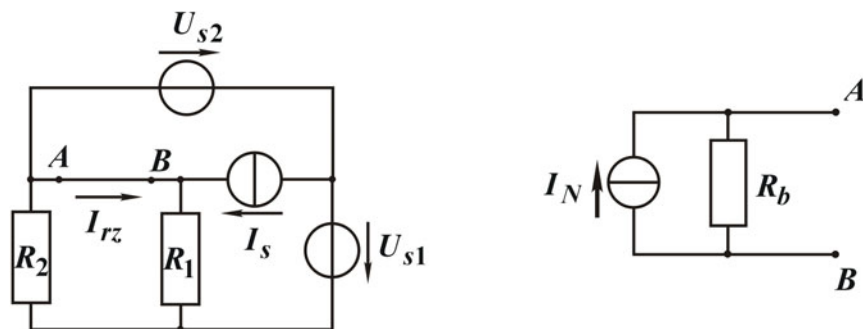


$$I_3 = I_N \frac{R_b}{R_b + R_3} = 2,5 \text{ A}$$

b) Az R_3 ellenálláshoz csatlakozó hálózat és a Norton helyettesítő képe

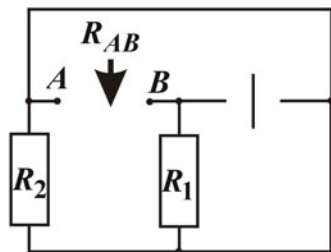


Norton helyettesítő generátor forrásárama

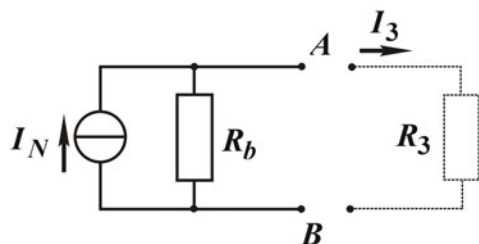


$$I_N = I_{rz} = \frac{U_{s1}}{R_1} + \frac{U_{s2}}{R_1} - I_s = 5 \text{ A},$$

A Norton generátor R_b belső ellenállása



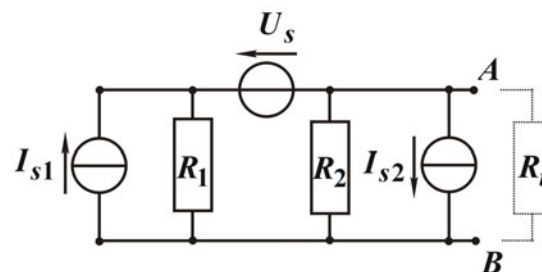
Az R_3 terhelő ellenállás árama



$$I_3 = I_N \frac{R_b}{R_b + R_3} = 2,5 \text{ A.}$$

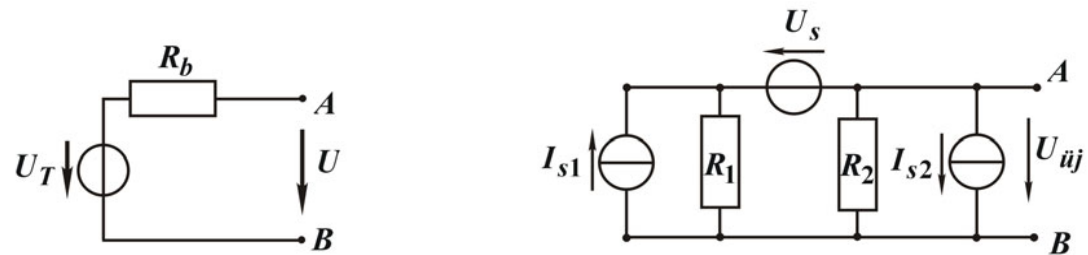
5. Feladat

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $U_s = 20 \text{ V}$, $I_{s1} = 2 \text{ A}$, $I_{s2} = 4 \text{ A}$



Határozza meg az A-B pólusokhoz tartozó üresjárási feszültséget, rövidzárási áramot, a Thevenin és a Norton helyettesítő képet, valamint az A-B pólusokra kapcsolható azon terhelő ellenállás értékét, amelyen maximális teljesítmény ébred, és ezen maximális teljesítmény értékét.

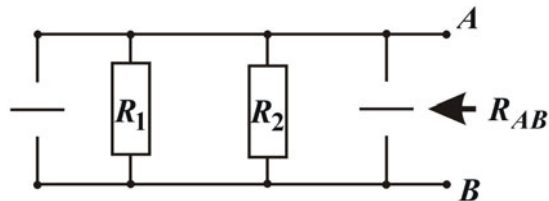
A Thevenin helyettesítő kép és a paraméterek értékei



az üresjárási feszültség

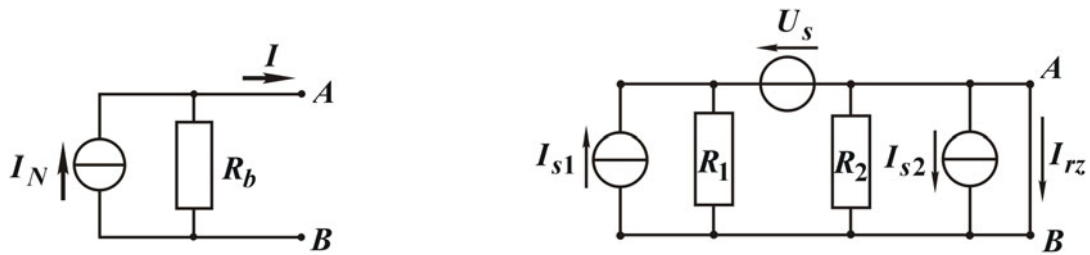
$$U_T = U_{\ddot{u}j} = I_{s1}R_1 \times R_2 - I_{s2}R_1 \times R_2 + \frac{U_s}{R_1 + R_2}R_2 = 7,5 \text{ V},$$

az R_b belső ellenállás a dezaktivizált hálózatból



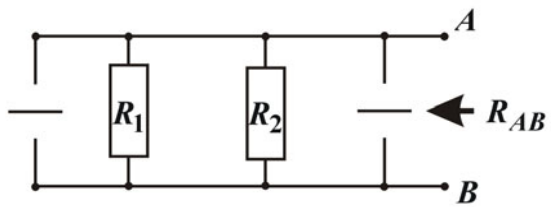
$$R_b = R_{AB} = R_1 \times R_2 = 3,75 \Omega$$

A Norton helyettesítő kép és a paraméterek értékei



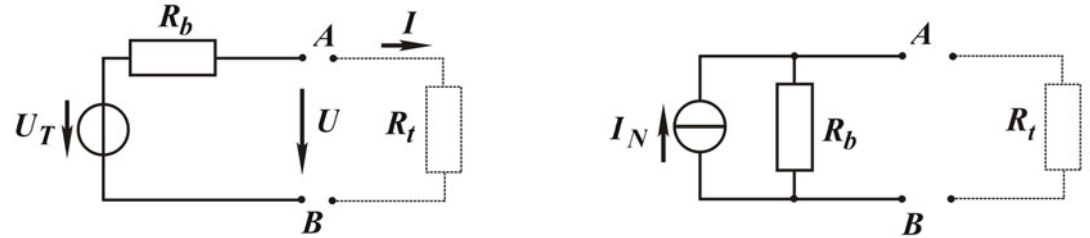
a rövidzárási áram: $I_N = I_{rz} = I_{s1} - I_{s2} + \frac{U_s}{R_1} = 2 \text{ A}.$

Az R_b belső ellenállás



$R_b = R_{AB} = R_1 \times R_2 = 3,75 \Omega$

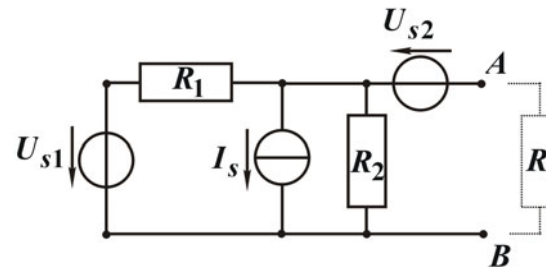
Teljesítmény illesztés esetén a terhelő ellenállás és a kivehető maximális teljesítmény



$$R_t = R_b = 3,75 \Omega, P_{R_t} = \frac{U_T^2}{4R_b} = \frac{I_N^2 R_b}{4} = 3,75 \text{ W}$$

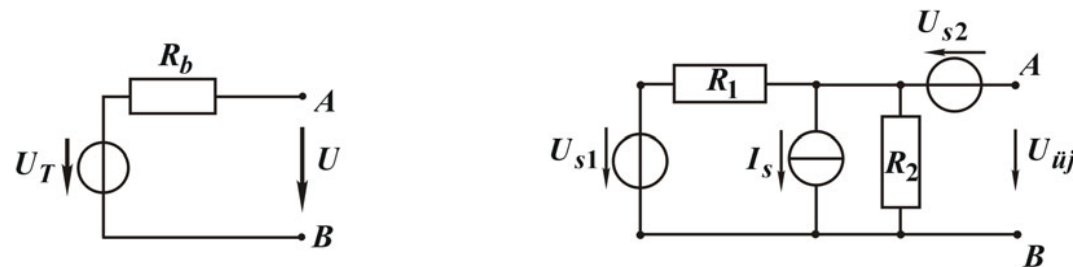
6. Feladat

Az ábrán látható hálózat elemei, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$, $U_{s1} = 32 \text{ V}$, $U_{s2} = 24 \text{ V}$, $I_s = 12 \text{ A}$.



Határozza meg az A-B pólusokhoz tartozó üresjárási feszültséget, rövidzárási áramot, a Thevenin és a Norton helyettesítő képet, valamint az A-B pólusokra kapcsolható azon terhelő ellenállás értékét, amelyen maximális teljesítmény ébred, és ezen maximális teljesítmény értékét.

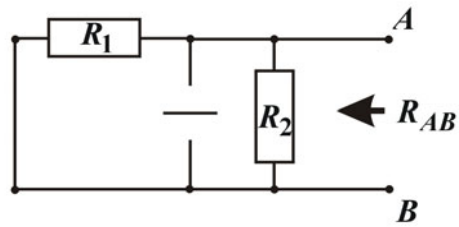
A Thevenin helyettesítő kép és a paraméterek értékei



az üresjárású feszültség

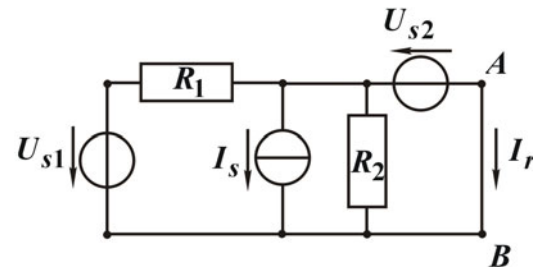
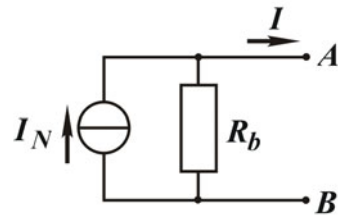
$$U_T = U_{\text{üj}} = U_{s1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + U_{s2} - I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} R_2 = 21 \text{ V},$$

Az R_b belső ellenállás



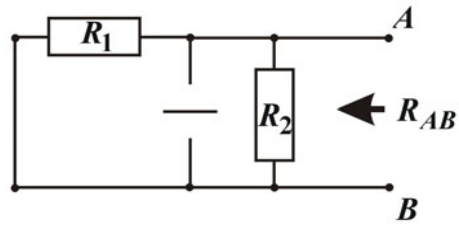
$$R_b = R_{AB} = R_1 \times R_2 = 2,25 \Omega$$

A Norton helyettesítő kép és a paraméterek értékei



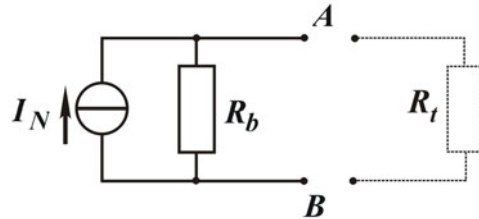
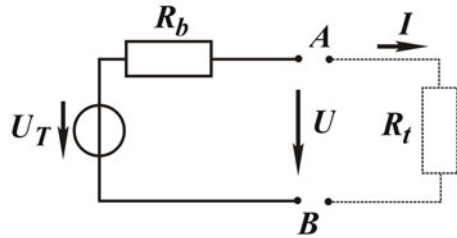
a rövidzárási áram $I_{rz} = \frac{U_{s1}}{R_1} + \frac{U_{s2}}{R_1 \times R_1} - I_s = \frac{28}{3} \text{ A}.$

Az R_b belső ellenállás



$$R_b = R_{AB} = R_1 \times R_2 = 2,25 \Omega,$$

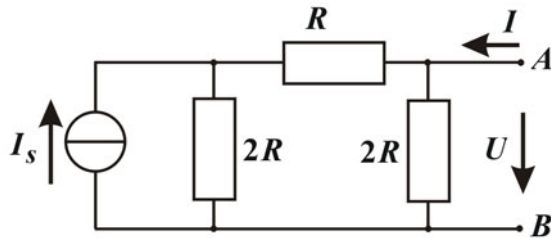
Teljesítmény illesztés esetén a terhelő ellenállás és a kivehető maximális teljesítmény



$$R_t = R_b = 2,25 \Omega, P_{R_t} = \frac{U_T^2}{4R_b} = \frac{I_N^2 R_b}{4} = 49 \text{ W}.$$

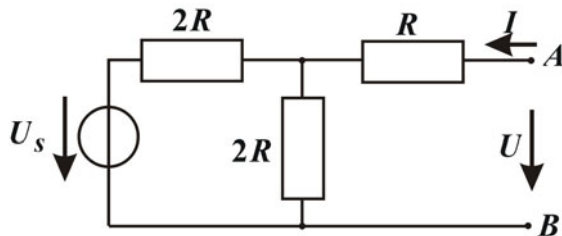
7. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózat bejelölt $A - B$ pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $I_s = 6 \text{ A}$, $R = 5 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.



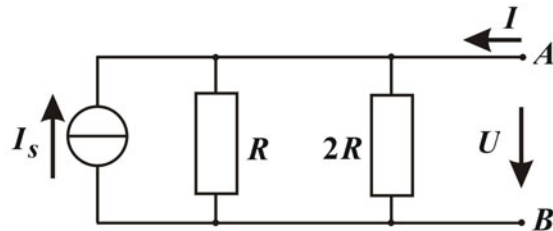
8. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózat bejelölt $A - B$ pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $U_s = 18 \text{ V}$, $R = 3 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.



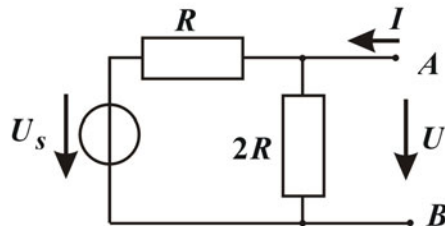
9. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózat bejelölt $A - B$ pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $I_s = 8 \text{ A}$, $R = 6 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.



10. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózat bejelölt $A - B$ pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $U_s = 12 \text{ V}$, $R = 5 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.

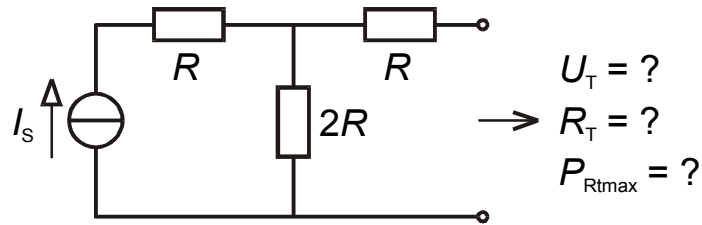


11. Feladat

Adja meg az alábbi áramkör Thevenin helyettesítő generátorának feszültségét, belső ellenállását és a megfelelő terhelő ellenálláson fellépő lehetséges, maximális teljesítményt.

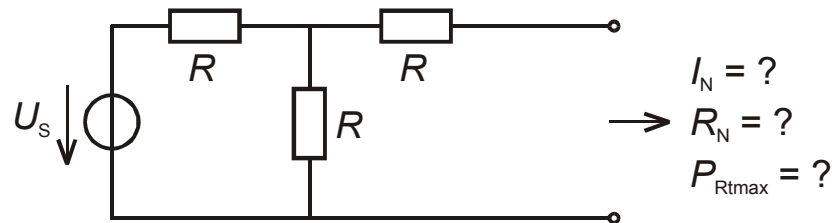
Határozza meg a hálózat A-B pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet. $I_s = 8 \text{ A}$,

$$R = 6 \Omega$$



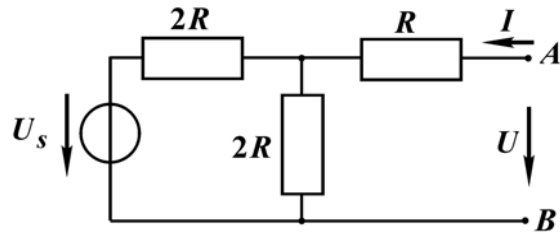
12. Feladat

Adja meg az alábbi áramkör Norton helyettesítő generátorának áramát, belső ellenállását és a megfelelő terhelő ellenálláson fellépő lehetséges, maximális teljesítmény. Határozza meg a hálózat A-B pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet. $U_s = 25 \text{ V}$, $R = 6 \Omega$



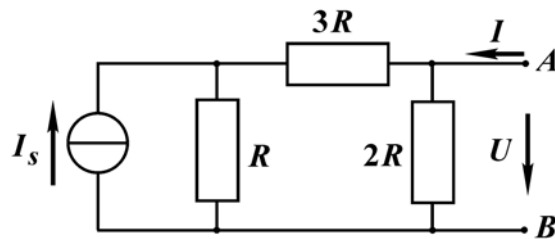
13. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózatban a bejelölt $A - B$ pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $U_s = 25 \text{ V}$, $R = 6 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet.



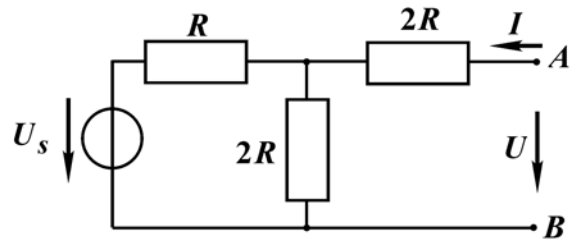
14. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózatban a bejelölt $A-B$ pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $I_s = 8 \text{ A}$, $R = 2,5 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.



15. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózatban a bejelölt $A-B$ pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $U_s = 18 \text{ V}$, $R = 4,5 \Omega$. Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet.



16. Feladat

Rajzolja fel az ábrán látható rezisztív hálózatban a bejelölt $A-B$ pólusaira vonatkozó Norton helyettesítő képet és határozza meg a paraméterek értékeit, ha $I_s = 6 \text{ A}$, $R = 5 \Omega$.

Határozza meg a hálózat AB pólusaira vonatkozó Thevenin helyettesítő képet.

