MŰSZAKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

egyetemi tanár

5. Konferencia, Előadás

Dinamikus hálózatok

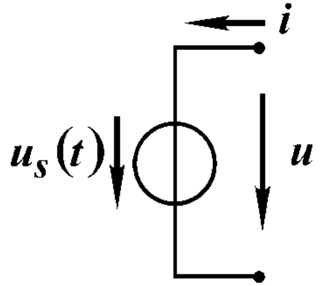
1) Rezisztív hálózatok - egyszerű modellek

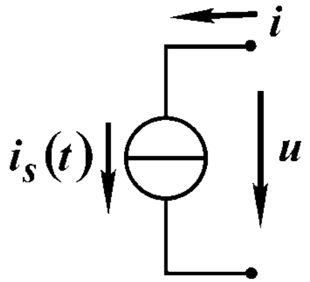
nem rendelkeznek - késleltetetéssel
- energia tárolással

dinamikus elemek bevezetése

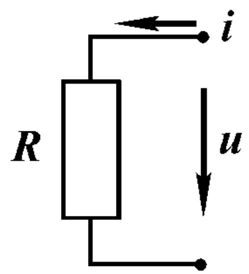
2) Dinamikus hálózatok elemei és karakterisztikájuk

Független források



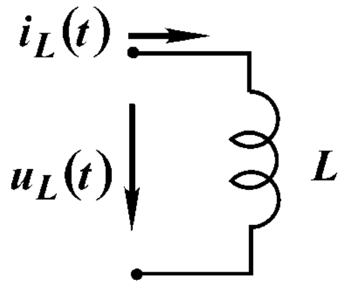


Rezisztív elemek

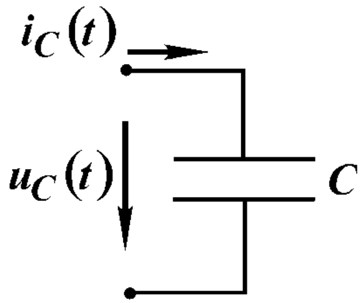


$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

Dinamikus elemek



$$u_L(t) = L\frac{d\, i_L(t)}{dt},$$



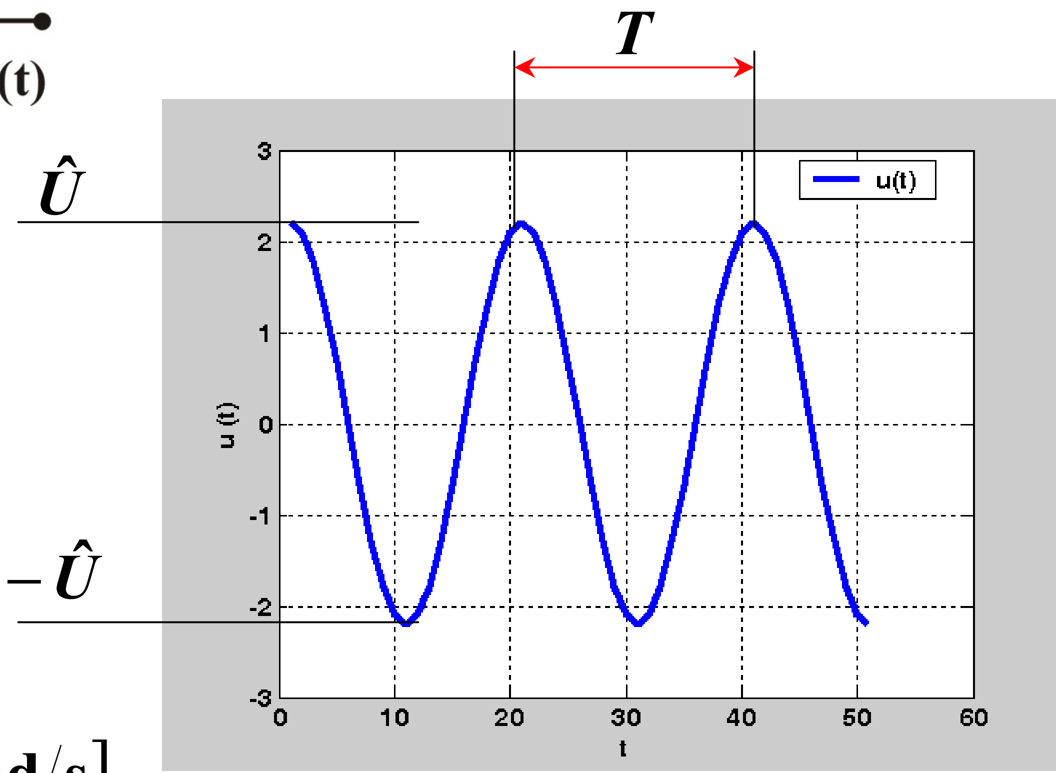
$$i_C(t) = C\frac{d\, u_C(t)}{dt},$$

Dinamikus hálózatok, állandósult állapot vizsgálata

Szinuszos gerjesztésre adott válasz

1. Szinuszos jel jellemzői

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \rho)$$



a) Periódusidő, T

$$T \rightarrow u(t) = u(t + T)$$

Frekvencia $f = \frac{1}{T}\,[\mathrm{Hz}]$

Körfrekvencia $\omega = 2\pi f\ [\mathrm{rad/s}]$

b) Csúcsérték, $\hat{U}$

c) Kezdőfázis, $\rho\,[\text{fok, szög}]$

t=0 kezdeti időpontbeli érték $u(t=0)=\hat{U}\cos\rho,$

$$\text{ha}\begin{cases}\rho=0, & u(t)=\hat{U}\cos\omega t,\\ \rho=\pi/2, & u(t)=\hat{U}\cos(\omega t+\pi/2)\\ \rho=-\pi/3, & u(t)=\hat{U}\cos(\omega t-\pi/3)\end{cases}$$

d) Középértékek, $i(t)=\hat{I}\cos(\omega t+\varphi)$

d/1) Egyszerű középérték, egy periódus alatt szállított töltésmennyiség

$$TI_e=\int_0^T i(t)dt \qquad \boxed{I_e=\frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt}$$

ha

$$i(t)=\hat{I}\cos(\omega t+\varphi)\longrightarrow I_e=0$$

d/2) Effektív érték,

áramegyenérték=ugyanakkora hőteljesítményt ad egy periódus alatt

$$RI_{eff}^2 = P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt \qquad \boxed{I = I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}$$

Pl. Ha $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$

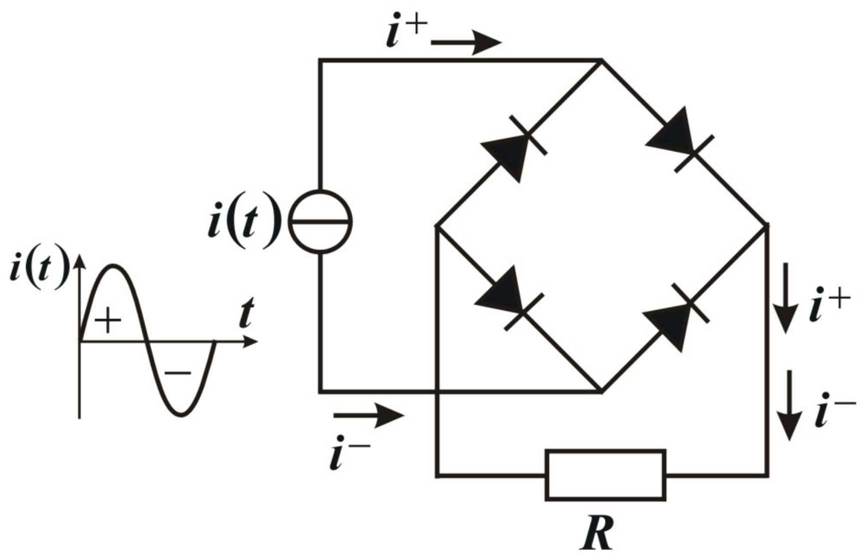
$$I = I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}^2\cos^2(\omega t + \varphi)dt} =$$

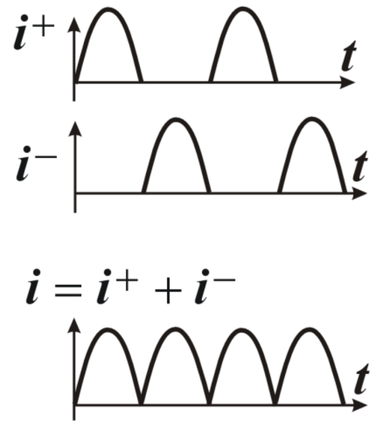
$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}^2\frac{1+\cos 2(\omega t + \varphi)}{2}dt} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

d/3) Abszolút középérték,

egyenirányított áram=ugyanakkora töltést hajt át egy periódus alatt

$$i(t)=\hat{I}\cos\omega t,\quad \varphi=0$$





$$\boxed{I_a=\frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt}$$

$$I_a=\frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt=\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\hat{I}\cos\omega t\,dt=\frac{4\hat{I}}{T}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^{T/4}$$

$$=\frac{4\hat{I}}{T}\frac{\sin\omega T/4}{2\pi/T}=\frac{2\hat{I}}{\pi}$$

e) Alakjellemző tényezők,

e/1) Formatényező,

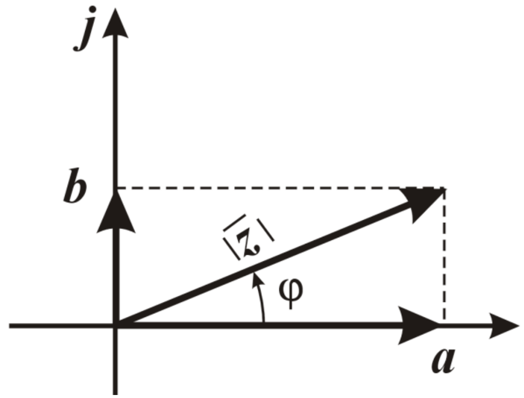
$$k_f = \frac{I_{eff}}{I_a} = \frac{\hat{I}/\sqrt{2}}{2\hat{I}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$$

e/2) Csúcstényező,

$$k_{cs} = \frac{\hat{I}}{I_{eff}} = \frac{\hat{I}}{\hat{I}/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

2. Szinuszos gerjesztés leírása

a) Komplex számok



algebrai alak: $\bar{z} = a + jb,$

trigonometrikus alak:

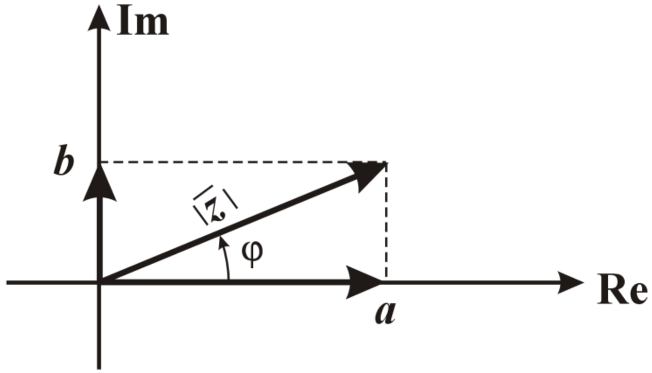
$$\bar{z} = z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = z\cos\varphi + jz\sin\varphi,$$

kapcsolatuk: $\begin{cases} a = z\cos\varphi, \\ b = z\sin\varphi, \end{cases}$ **abszolút értéke:** $z = \sqrt{a^2 + b^2},$

a komplex szám arkusza: $-\pi < \varphi \le \pi$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \rightarrow \varphi = \mathrm{Arc}\{\bar{z}\} = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm k\pi, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

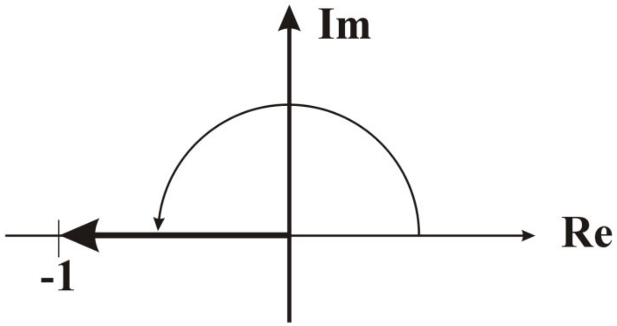
a komplex számsík:



algebrai alak:

$$\bar{z} = \mathrm{Re}[\bar{z}] + j\,\mathrm{Im}[\bar{z}] \quad = a + jb,$$

a *j* egységvektor:

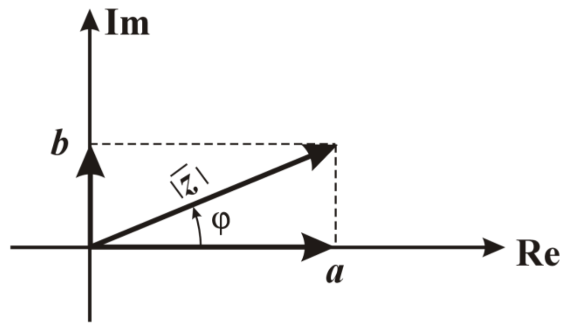


$$-1 = e^{j\pi}, \qquad \sqrt{-1} = j, \qquad \sqrt{-1} = e^{j\pi/2} = j,$$

műveletek az egységvektorral:

$$j \cdot j = j^2 = -1, \qquad \underbrace{j \cdot j}_{-1} \cdot j = j^3 = -j, \qquad \underbrace{j \cdot j}_{-1} \cdot \underbrace{j \cdot j}_{-1} = j^4 = +1,$$

$$\frac{j^4}{j} = j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = \frac{1}{j} = -j, \qquad \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j,$$



a komplex számsíkon

exponenciális alak: $\bar{z} = ze^{j\varphi}$,

algebrai alak: $\bar{z} = \mathrm{Re}[\bar{z}] + j\,\mathrm{Im}[\bar{z}] = a + jb,$

az exponenciális és az algebrai alak közti kapcsolat:

$$\bar{z} = ze^{j\varphi} = z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = z\cos\varphi + jz\sin\varphi = a + jb$$

$$\left.\begin{aligned} a &= z\cos\varphi \\ b &= z\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad z = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm k\pi,$$

matematika:

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j},$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{j\varphi}}{2},$$

b) Műveletek komplex számokkal:

1. A komplex szám algebrai alakjából az exponenciális alak:

$$\bar{z}_1 = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{jArc\{\bar{z}_1\}} = z_1 e^{j\varphi_1}, \quad \varphi_1 = arctg\left(\frac{b}{a}\right) \pm k\pi,$$

$$\bar{z}_2 = c + jd = \sqrt{c^2 + d^2}\, e^{jArc\{\bar{z}_2\}} = z_2 e^{j\varphi_2}, \quad \varphi_2 = arctg\left(\frac{d}{c}\right) \pm k\pi,$$

1. példa:

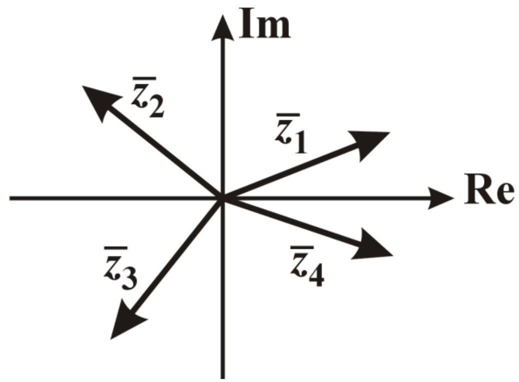
$$\bar{z}_1 = 5 + j3 = \sqrt{5^2 + 3^2}\, e^{j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)} = \sqrt{34}\, e^{j30{,}9638^{\mathrm{o}}} = 5{,}8310 e^{j30{,}9638^{\mathrm{o}}};$$

$$\bar{z}_2 = -3 + j6 = \sqrt{(-3)^2 + 6^2}\, e^{j\cdot\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{6}{-3}\right) + \pi\right)} =$$

$$= \sqrt{45}\, e^{j116{,}5651^{\mathrm{o}}} = 6{,}7082 e^{j116{,}5651^{\mathrm{o}}};$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3 = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}\, e^{j\cdot\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{-3}{-2}\right) - \pi\right)} =$$

$$= \sqrt{13}\, e^{-j123{,}6901^{\mathrm{o}}} = 3{,}6056 e^{-j123{,}6901^{\mathrm{o}}};$$



$$\bar{z}_4 = 4 - j3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\, e^{j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{-3}{4}\right)} = \sqrt{25}\, e^{-j36{,}8699^{\mathrm{o}}} = 5 e^{-j36{,}8699^{\mathrm{o}}};$$

2. A komplex szám exponenciális alakjából az algebrai alak:

$$\bar{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1} = z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) = z_1\cos\varphi_1 + jz_1\sin\varphi_1 = a + jb,$$

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\},$$

$$\bar{z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2} = z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = z_2\cos\varphi_2 + jz_2\sin\varphi_2 = c + jd,$$

$$\bar{z}_2 = c + jd = \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\},$$

2. példa:

$$\bar{z}_2 = 4e^{-j60^\circ} = 4(\cos 60^\circ - j\sin 60^\circ) = 2{,}0000 - j\,3{,}4641;$$

$$\bar{z}_3 = 3e^{j120^\circ} = 3(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = -1{,}5000 + j\,2{,}5981;$$

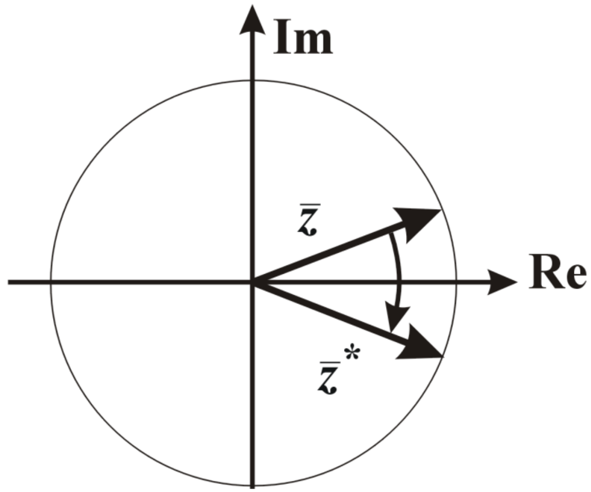
$$\bar{z}_4 = 5e^{-j150^\circ} = 5(\cos 150^\circ - j\sin 150^\circ) = -4{,}3301 - j\,2{,}5000;$$

3. A $\bar{z}$ komplex szám konjugáltja $\bar{z}^*$: (a valós tengelyre való tükötképe)

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\},$$

$$\bar{z}_1^* = a - jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} - j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\},$$

$$\bar{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1}, \quad \bar{z}_1^* = z_1 e^{-j\varphi_1},$$



3. példa:

$$\bar{z}_1 = 6e^{j30^o} = 6\left(\cos 30^o + j\sin 30^o\right) = 6\cos 30^o + j6\sin 30^o = 5{,}1962 + j3{,}0000;$$

$$\bar{z}_1^* = 6e^{-j30^o} = 5{,}1962 - j3{,}0000;$$

$$\bar{z}_2 = -3 + j6, \rightarrow \bar{z}_2^* = -3 - j6 = 6{,}7082e^{-j116{,}5651^o};$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3, \rightarrow \bar{z}_3^* = -2 + j3 = 3{,}6056e^{j123{,}6901^o};$$

$$\bar{z}_4 = 5e^{-j150^o}, \rightarrow \bar{z}_4^* = 5e^{j150^o} = 5\left(\cos 150^o + j\sin 150^o\right) = -4{,}3301 + j\,2{,}5000;$$

4. Két komplex szám összege, különbsége, algebrai alakban:

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}, \qquad \bar{z}_2 = c + jd = \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\},$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = (a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d);$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \left(\mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}\right) \pm \left(\mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\}\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\{\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2\}$$

4. példa:

$$\bar{z}_1 = 5 + j3, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6, \quad \bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (5 + j3) + (-3 + j6) = 2 + j9;$$

$$\bar{z}_1 = 5 + j3, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6, \quad \bar{z} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (5 + j3) - (-3 + j6) = 8 - j3;$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3, \quad \bar{z}_4 = 4 - j3, \quad \bar{z} = \bar{z}_3 + \bar{z}_4 = (-2 - j3) + (4 - j3) = 2 - j6;$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3, \quad \bar{z}_4 = 4 - j3, \quad \bar{z} = \bar{z}_3 - \bar{z}_4 = (-2 - j3) - (4 - j3) = -6 - j0;$$

5. A $\overline{z}$ komplex szám és $\overline{z}^*$ konjugáltjának összege, különbsége (algebrai alak):

$$\overline{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\overline{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\overline{z}_1\}, \quad \overline{z}_1^* = a - jb = \mathrm{Re}\{\overline{z}_1\} - j\,\mathrm{Im}\{\overline{z}_1\}$$

$$\overline{z} = \overline{z}_1 + \overline{z}_1^* = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{\overline{z}_1\}; \quad \overline{z} = \overline{z}_1 - \overline{z}_1^* = 2b = 2\,\mathrm{Im}\{\overline{z}_1\};$$

5. példa:

$$\overline{z}_1 = 5 + j3, \quad \overline{z}_1^* = 5 - j3, \rightarrow \overline{z}_1 + \overline{z}_1^* = 10, \quad \overline{z}_1 - \overline{z}_1^* = j6;$$

$$\overline{z}_2 = -3 + j6, \quad \overline{z}_2^* = -3 - j6, \rightarrow \overline{z}_2 + \overline{z}_2^* = -6, \quad \overline{z}_2 - \overline{z}_2^* = j12;$$

$$\overline{z}_3 = -2 - j3, \quad \overline{z}_3^* = -2 + j3, \rightarrow \overline{z}_3 + \overline{z}_3^* = -4, \quad \overline{z}_3 - \overline{z}_3^* = -j6;$$

$$\overline{z}_4 = 4 - j3, \quad \overline{z}_4^* = 4 + j3, \rightarrow \overline{z}_4 + \overline{z}_4^* = 8, \quad \overline{z}_4 - \overline{z}_4^* = -j6;$$

6. Két komplex szám szorzata, algebrai alakban:

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}, \qquad \bar{z}_2 = c + jd = \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\},$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a + jb)\cdot(c + jd) = ac + jbc + \left(jad + \overbrace{\underbrace{jbjd}_{-bd}}^{j\cdot j = j^2 = -1} \right) = (ac - bd) + j(ad + bc);$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \left(\mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}\right)\cdot\left(\mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\}\right) =$$

$$= \left[\mathrm{Re}\{\bar{z}_1\}\cdot \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} - \mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}\cdot \mathrm{Im}\{\bar{z}_2\}\right] + j\left[\mathrm{Re}\{\bar{z}_1\}\cdot \mathrm{Im}\{\bar{z}_2\} + \mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}\cdot \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\}\right];$$

6. példa:

$$\bar{z}_1 = 5 + j3, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6,$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (5 + j3)\cdot(-3 + j6) = (-15 - 18) + j(-9 + 30) = -33 + j21;$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3, \quad \bar{z}_4 = 4 - j6,$$

$$\bar{z} = \bar{z}_3 \cdot \bar{z}_4 = (-2 - j3)\cdot(4 - j6) = (-8 - 18) + j(12 - 12) = -26 + j0;$$

7. Két komplex szám szorzata, exponenciális alakban:

$$\bar{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1}, \quad \bar{z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2},$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 e^{j\varphi_1} \cdot z_2 e^{j\varphi_2} = z_1 \cdot z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

7. példa:

$$\bar{z}_1 = 5 + j3 = 5{,}8310 e^{j30{,}9638^o}, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6 = 6{,}7082 e^{j116{,}5651^o},$$

$$\bar{z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = 5{,}8310 e^{j30{,}9638^o} \cdot 6{,}7082 e^{j116{,}5651^o} =$$

$$= 5{,}8310 \cdot 6{,}7082 e^{j\left(30{,}9638^o + 116{,}5651^o\right)} = 39{,}1152 e^{j147{,}5288^o} = -33 + j21;$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3 = 3{,}6056 e^{-j123{,}6901^o}, \quad \bar{z}_4 = 4 - j6 = 7{,}2111 e^{-j56{,}3099^o},$$

$$\bar{z} = \bar{z}_3 \cdot \bar{z}_4 = 3{,}6056 e^{-j123{,}6901^o} \cdot 7{,}2111 e^{-j56{,}3099^o} =$$

$$= 3{,}6056 \cdot 7{,}2111 e^{-j\left(123{,}6901^o + 56{,}3099^o\right)} = 26 e^{j180^o} = -26;$$

8. Komplex szám szorzata a konjugáltjával:

$$\bar{z} = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}\} = ze^{j\varphi},$$

$$\bar{z}^{*} = a - jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}\} - j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}\} = ze^{-j\varphi},$$

$$\bar{z}\cdot\bar{z}^{*} = (a + jb)\cdot(a - jb) = a^2 + b^2 = (\mathrm{Re}\{\bar{z}\})^2 + (\mathrm{Im}\{\bar{z}\})^2 =$$

$$= ze^{j\varphi}\cdot ze^{-j\varphi} = z\cdot ze^{j(\varphi-\varphi)} = z^2 = |\bar{z}|^2;$$

8. példa:

$$\bar{z} = 5 + j3 = 5{,}8310e^{j30{,}9638^{o}}, \quad \bar{z}^{*} = 5 - j3 = 5{,}8310e^{-j30{,}9638^{o}},$$

$$\bar{z}\cdot\bar{z}^{*} = (5 + j3)\cdot(5 - j3) = 25 + 9 = 34,$$

$$\bar{z}\cdot\bar{z}^{*} = 5{,}8310e^{j30{,}9638^{o}}\cdot 5{,}8310e^{-j30{,}9638^{o}} = 5{,}8310^2 = 34;$$

9. Két komplex szám hányadosa, exponenciális alak:

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\} = z_1 e^{j\varphi_1},$$

$$\bar{z}_2 = c + jd = \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\} = z_2 e^{j\varphi_2},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 e^{j\varphi_1}}{z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

9. példa:

$$\bar{z}_1 = 5 + j3 = 5{,}8310 e^{j30{,}9638^o}, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6 = 6{,}7082 e^{j116{,}5651^o},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{5{,}8310 e^{j30{,}9638^o}}{6{,}7082 e^{j116{,}5651^o}} = \frac{5{,}8310}{6{,}7082} e^{j\left(30{,}9638^o - 116{,}5651^o\right)} = 0{,}8692 e^{-j85{,}6013^o},$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3 = 3{,}6056 e^{-j123{,}6901^o}, \quad \bar{z}_4 = 4 - j6 = 7{,}2111 e^{-j56{,}3099^o},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_4} = \frac{3{,}6056 e^{-j123{,}6901^o}}{7{,}2111 e^{-j56{,}3099^o}} = 0{,}5000 e^{-j67{,}3801^o};$$

10. Két komplex szám hányadosa, algebbrai alak:

$$\bar{z}_1 = a + jb = \mathrm{Re}\{\bar{z}_1\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_1\}, \quad \bar{z}_2 = c + jd = \mathrm{Re}\{\bar{z}_2\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{z}_2\},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac + bd + j(bc - ad)}{c^2 + d^2},$$

10. példa:

$$\bar{z}_1 = 5 + j3 = 5{,}8310e^{j30{,}9638^{\circ}}, \quad \bar{z}_2 = -3 + j6 = 6{,}7082e^{j116{,}5651^{\circ}},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{5 + j3}{-3 + j6} = \frac{5 + j3}{-3 + j6} \cdot \frac{-3 - j6}{-3 - j6} = \frac{(-15 + 18) - j(30 + 9)}{9 + 36} = 0{,}0667 - j\,0{,}8667;$$

$$\bar{z}_3 = -2 - j3 = 3{,}6056e^{-j123{,}6901^{\circ}}, \quad \bar{z}_4 = 4 - j6 = 7{,}2111e^{-j56{,}3099^{\circ}},$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_4} = \frac{-2 - j3}{4 - j6} = \frac{-2 - j3}{4 - j6} \cdot \frac{4 + j6}{4 + j6} = \frac{(-8 + 18) + j(-12 - 12)}{16 + 36} = 0{,}1923 - j\,0{,}4615;$$

c) Műveletek komplex számokkal

Értékelje ki az alábbi komplex műveleteket, exponenciális és algebrai alakban is szorozzuk, ill. osszuk el a komplex számokat,

$$a = 3 + j4 = 5e^{j53{,}1301^{o}}, \qquad b = -2 + j5 = 5{,}3852e^{j111{,}8014^{o}},$$

$$c = a + b = 3 + j4 - 2 + j5 = 1 + j9 = 9{,}0554e^{j83{,}6598^{o}}$$

$$d = a - b = 3 + j4 - (-2 + j5) = 5 - j1 = 5{,}0990e^{-j11{,}3099^{o}}$$

$$e = a \cdot b = (3 + j4)(-2 + j5) = -26{,}0000 + j7{,}0000 = 26{,}9258e^{j164{,}9315^{o}}$$

$$e = a \cdot b = 5 \cdot 5{,}3852e^{j\left(53{,}1301^{o} + 111{,}8014^{o}\right)} = 26{,}9258\, e^{j164{,}9315^{o}}$$

$$f = a / b = \frac{3 + j4}{-2 + j5} = 0{,}4828 - j\,0{,}7931 = 0{,}9285e^{-j58{,}6713^{o}}$$

$$f = a / b = \frac{5e^{j53{,}1301^{o}}}{5{,}3852e^{j111{,}8014^{o}}} = 0{,}9285e^{-j58{,}6713^{o}}$$

d) A komplex formalizmus és alkalmazása

Adott a valós időfüggvény

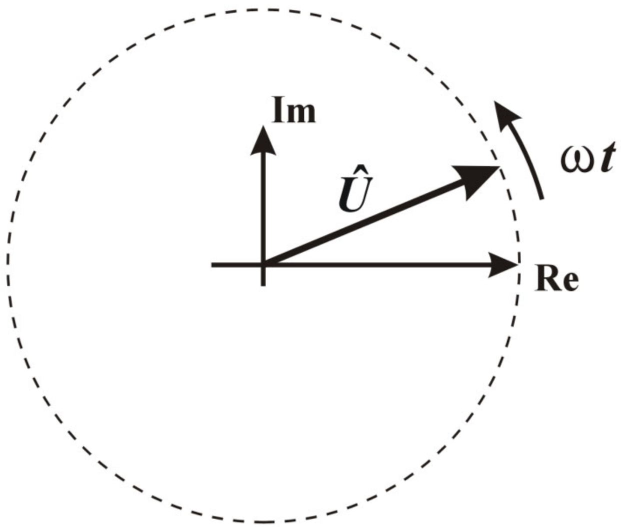
$$u(t)=\hat{U}\cos(\omega t+\rho)=\mathrm{Re}\left\{\hat{U}e^{j(\omega t+\rho)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\hat{U}e^{j\rho}}_{\hat{\overline{U}}}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{U}}e^{j\omega t}\right\}$$

Komplex csúcsérték

$$\hat{\overline{U}}=\hat{U}e^{j\rho}=\hat{U}(\cos\rho+j\sin\rho)=\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{U}}\right\}+j\,\mathrm{Im}\left\{\hat{\overline{U}}\right\}$$

Komplex effektív érték

$$\overline{U}=\frac{\hat{\overline{U}}}{\sqrt{2}}=\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}e^{j\rho}=Ue^{j\rho}$$



ahol *U* a valós effektív érték

1. Példa

$$u(t) = 15\cos\left(300t + 30^{o}\right) = \mathrm{Re}\left\{15 e^{j30^{o}} e^{j\omega t}\right\}$$

$$\hat{U} = 15 e^{j30^{o}} = 15\left(\cos 30^{o} + j\sin 30^{o}\right) = 12{,}9904 + j7{,}5000$$

$$\overline{U} = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j30^{o}}$$

2. Példa

$$\hat{U} = \left(-5 + j3\right)\mathrm{V} = 5{,}83 e^{j149^{o}} \quad \mathrm{V},$$

$$\left|\hat{U}\right| = \sqrt{(-5)^{2} + 3^{2}} = 5{,}83\ \mathrm{V}, \quad \rho = \mathrm{arctg}\left(\frac{3}{-5}\right) + \pi = 149^{o}$$

$$u(t) = 5{,}83\cos\left(\omega t + 149^{o}\right)\ \mathrm{V}$$

3. Példa, két feszültség időfüggvénye

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\text{V}, \quad u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\text{V}$$

a)Határozza meg a feszültségek komplex csúcsértékeit,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\text{V} = \text{Re}\left\{- j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{\underline{U}}_1 = (-10 - j20)\text{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\text{V} = \text{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^{\text{o}}}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{\underline{U}}_2 = (30 + j10)\text{V},$$

b) Határozza meg a két feszültség összegének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$\hat{\underline{U}}_3 = \hat{\underline{U}}_1 + \hat{\underline{U}}_2 = (-10 - j20) + (30 + j10) = (20{,}00 - j10{,}00)\text{V} =$$

$$= 22{,}3607e^{-j26{,}5651^{\text{o}}}\text{V},$$

$$u_3(t) = \text{Re}\left\{22{,}3607e^{-j26{,}5651^{\text{o}}}e^{j\omega t}\right\} = 22{,}3607\cos\left(\omega \text{t} - 26{,}5651^{\text{o}}\right)\text{V}$$

c) Határozza meg a két feszültség különbségének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{- j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{U}_1 = (-10 - j20)\mathrm{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^{\circ}}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{U}_2 = (30 + j10)\mathrm{V},$$

$$\hat{U}_4 = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = (-10 - j20) - (30 + j10) = (-40{,}00 - j30{,}00)\mathrm{V} =$$

$$= 50{,}00e^{-j143{,}1301^{\circ}}\mathrm{V},$$

$$u_3(t) = \mathrm{Re}\left\{50{,}00e^{-j143{,}1301^{\circ}}e^{j\omega t}\right\} = 50{,}00\cos\left(\omega \mathrm{t} - 143{,}1301^{\circ}\right)\mathrm{V},$$

<u>4. Feladat,</u> egy dinamikus elem áramának és feszültségének időfüggvénye

$$i(t) = 1{,}5\cos\omega t \text{ A},\ \ u(t) = 24\cos\left(\omega t - 30^{o}\right)\text{V},$$

Határozza meg a feszültség és az áram komplex csúcsértékét,

$$\hat{\hat{I}} = ?\ \hat{\hat{U}} = ? \qquad f = 1\text{kHz},$$

$$i(t) = \text{Re}\left\{1{,}5e^{j\omega t}\right\},\rightarrow \hat{\hat{I}} = 1{,}5 \text{ A},$$

$$u(t) = \text{Re}\left\{24e^{j\left(\omega t - 30^{o}\right)}\right\} = \text{Re}\left\{24e^{-j30^{o}}e^{j\omega t}\right\},$$

$$\hat{\hat{U}} = 24e^{j30^{o}} \text{ V} = \left(20{,}7846 - j12{,}0000\right)\text{V},$$

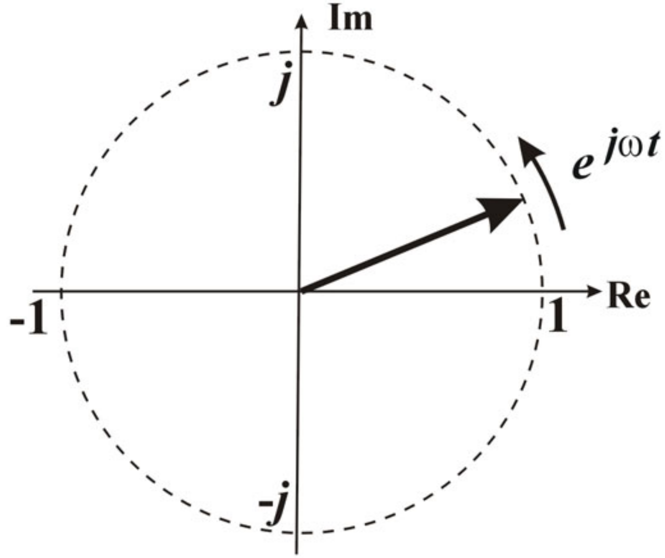
b) A komplex formalizmus és alkalmazása

Adott a valós időfüggvény

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \rho) = \mathbf{Re}\left\{\hat{U}e^{j(\omega t+\rho)}\right\} = \mathbf{Re}\left\{\underbrace{\hat{U}e^{j\rho}}_{\hat{\overline{U}}}e^{j\omega t}\right\} = \mathbf{Re}\left\{\hat{\overline{U}}e^{j\omega t}\right\}$$

Komplex csúcsérték

$$\hat{\overline{U}} = \hat{U}e^{j\rho} = \hat{U}(\cos\rho + j\sin\rho) = \mathbf{Re}\left\{\hat{\overline{U}}\right\} + i\,\mathbf{Im}\left\{\hat{\overline{U}}\right\}$$



Komplex effektív érték

$$\overline{U} = \frac{\hat{\overline{U}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}e^{j\rho} = Ue^{j\rho}$$

ahol $U = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$, **a valós effektív érték**

1. Példa

$$u(t) = 15\cos\left(300t + 30^{\mathrm{o}}\right) = \mathrm{Re}\left\{15e^{j30^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\}$$

$$\hat{U} = 15e^{j30^{\mathrm{o}}} = 15\left(\cos 30^{\mathrm{o}} + j\sin 30^{\mathrm{o}}\right) = 12{,}9904 + j7{,}5000$$

$$\overline{U} = \frac{15}{\sqrt{2}}e^{j30^{\mathrm{o}}}$$

2. Példa

$$\hat{U} = \left(-5 + j3\right)\mathrm{V} = 5{,}83e^{j149^{\mathrm{o}}}\ \mathrm{V},$$

$$\left|\hat{U}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = 5{,}83\ \mathrm{V},\quad \rho = \mathrm{arctg}\left(\frac{3}{-5}\right) + \pi = 149^{\mathrm{o}}$$

$$u(t) = 5{,}83\cos\left(\omega t + 149^{\mathrm{o}}\right)\ \mathrm{V}$$

3. Példa, két feszültség időfüggvénye

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\text{V}, \quad u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\text{V}$$

a) Határozza meg a feszültségek komplex csúcsértékeit,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\text{V} = \text{Re}\left\{-j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{\underline{U}}_1 = (-10 - j20)\text{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\text{V} = \text{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^\circ}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{\underline{U}}_2 = (30 + j10)\text{V},$$

b) Határozza meg a két feszültség összegének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$\hat{\underline{U}}_3 = \hat{\underline{U}}_1 + \hat{\underline{U}}_2 = (-10 - j20) + (30 + j10) = (20{,}00 - j10{,}00)\text{V} =$$

$$= 22{,}3607e^{-j26{,}5651^\circ}\text{V},$$

$$u_3(t) = \text{Re}\left\{22{,}3607e^{-j26{,}5651^\circ}e^{j\omega t}\right\} = 22{,}3607\cos\left(\omega \text{t} - 26{,}5651^\circ\right)\text{V}$$

c) Határozza meg a két feszültség különbségének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{-j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{\underline{U}}_1 = (-10 - j20)\mathrm{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{\underline{U}}_2 = (30 + j10)\mathrm{V},$$

$$\hat{\underline{U}}_4 = \hat{\underline{U}}_1 - \hat{\underline{U}}_2 = (-10 - j20) - (30 + j10) = (-40{,}00 - j30{,}00)\mathrm{V} =$$

$$= 50{,}00e^{-j143{,}1301^{\mathrm{o}}}\mathrm{V},$$

$$u_3(t) = \mathrm{Re}\left\{50{,}00e^{-j143{,}1301^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\} = 50{,}00\cos\left(\omega\mathrm{t} - 143{,}1301^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{V},$$

<u>4. Példa,</u> egy dinamikus elem áramának és feszültségének időfüggvénye

$$i(t) = 1{,}5\cos\omega t \text{ A}, \quad u(t) = 24\cos\left(\omega t - 30^{o}\right)\text{V},$$

Határozza meg a feszültség és az áram komplex csúcsértékét,

$$\hat{\bar{I}} = ?\;\hat{\bar{U}} = ? \qquad f = 1\text{kHz},$$

$$i(t) = \text{Re}\left\{1{,}5e^{j\omega t}\right\}, \rightarrow \hat{\bar{I}} = 1{,}5\text{ A},$$

$$u(t) = \text{Re}\left\{24e^{j\left(\omega t - 30^{o}\right)}\right\} = \text{Re}\left\{24e^{-j30^{o}}e^{j\omega t}\right\},$$

$$\hat{\bar{U}} = 24e^{j30^{o}}\text{ V} = \left(20{,}7846 - j12{,}0000\right)\text{V},$$

3. Hálózati egyenletek komplex formalizmusa

a) Összekapcsolási kényszerek (Kirchhoff egyenletek)

$$i_k(t) = \hat{I}_k \cos(\omega t + \rho_k) = \mathrm{Re}\left\{\hat{I}_k e^{j(\omega t + \rho_k)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\hat{I}_k e^{j\rho_k}}_{\hat{\bar{I}}_k} e^{j\omega t}\right\}$$

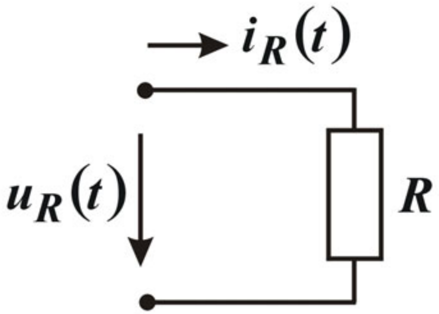
$$\sum_k i_k(t) = \sum_k \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{I}}_k e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\sum_k \hat{\bar{I}}_k\right) e^{j\omega t}\right\} = 0 \qquad \boxed{\sum_k \hat{\bar{I}}_k = 0}$$

$$u_k(t) = \hat{U}_k \cos(\omega t + \rho_k) = \mathrm{Re}\left\{\hat{U}_k e^{j(\omega t + \rho_k)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\hat{U}_k e^{j\rho_k}}_{\hat{\bar{U}}_k} e^{j\omega t}\right\}$$

$$\sum_k u_k(t) = \sum_k \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{U}}_k e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\sum_k \hat{\bar{U}}_k\right) e^{j\omega t}\right\} = 0 \qquad \boxed{\sum_k \hat{\bar{U}}_k = 0}$$

b) Ágtörvények (karakterisztikák)

Ellenállás



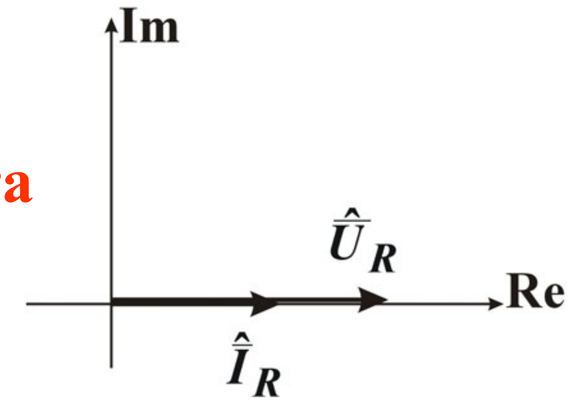
$$i_R(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \rho) =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\hat{I}e^{j\rho}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{I}}_R e^{j\omega t}\right\}$$

$$u_R(t) = R i_R(t) = \mathrm{Re}\left\{R\hat{\bar{I}}_R e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{U}}_R e^{j\omega t}\right\}$$

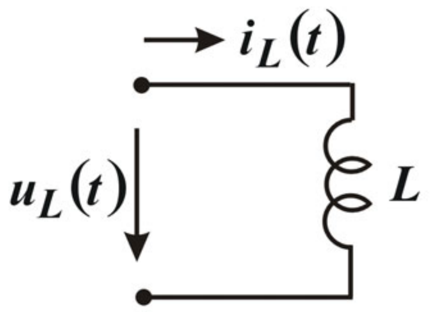
$$\boxed{\hat{\bar{U}}_R = R\hat{\bar{I}}_R}$$

fazorábra



az ellenállás árama fázisban van a feszültségével

Tekercs



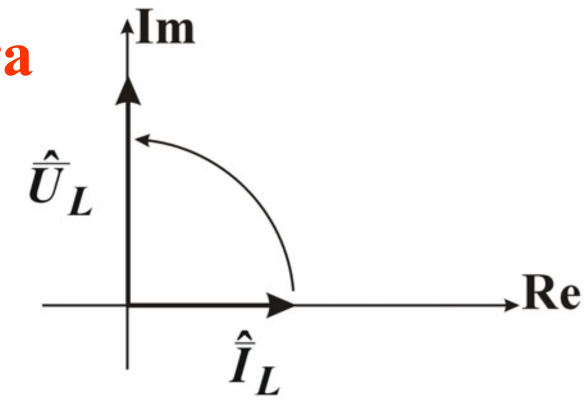
$$i_L(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \rho) =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\hat{I}e^{j\rho}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{I}}_L e^{j\omega t}\right\}$$

$$u_L(t) = L\dot{i}_L(t) = L\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{I}}_L e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega L\hat{\bar{I}}_L e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{U}}_L e^{j\omega t}\right\}$$

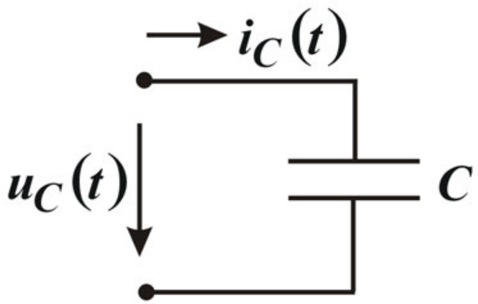
$$\boxed{\hat{\bar{U}}_L = j\omega L\hat{\bar{I}}_L}$$

fazorábra



a tekercs feszültsége 90°-kal siet az áramához képest

Kondenzátor



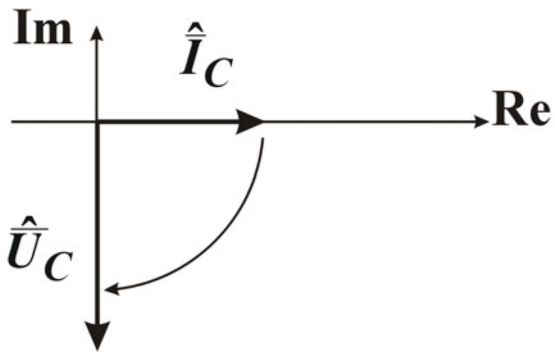
$$u_C(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \rho) =$$

$$= \mathrm{Re}\{\hat{U}e^{j\rho}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\hat{\bar{U}}_C e^{j\omega t}\}$$

$$i_C(t) = C\dot{u}_C(t) = C\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\{\hat{\bar{U}}_C e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{j\omega C\hat{\bar{U}}_C e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\hat{\bar{I}}_C e^{j\omega t}\}$$

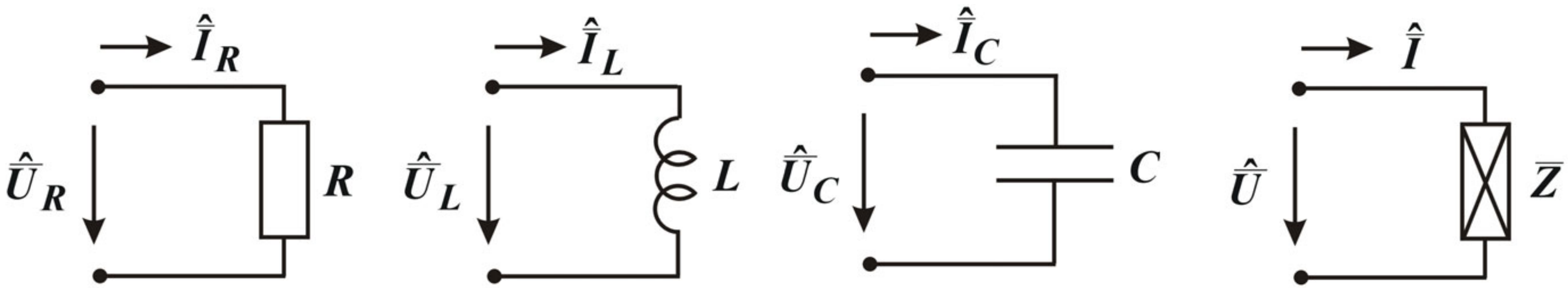
$$\boxed{\hat{\bar{U}}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{\bar{I}}_C}$$

fazorábra



a kondenzátor feszültsége 90°-kal késik az áramához képest

A komplex impedancia $\overline{Z}$



$$\boxed{\hat{U}_R = R\hat{I}_R} \qquad \boxed{\hat{U}_L = j\omega L\hat{I}_L} \qquad \boxed{\hat{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_C} \qquad \boxed{\hat{U} = \overline{Z}\cdot\hat{I}}$$

$$\overline{Z}_R = R \qquad \overline{Z}_L = j\omega L \qquad \overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\overline{Z} = \mathrm{Re}\{\overline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\overline{Z}\} = R + jX$$

impedancia rezisztencia reaktancia

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \overline{Y} = \frac{1}{R + jX} = G + jB$$

admittancia konduktancia szuszceptancia

$$X_R = 0$$

$$X_L = \omega L \qquad \overline{Z}_L = jX_L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \overline{Z}_C = -jX_C$$

Összefoglalva

$$\boxed{\sum_k \hat{\bar{I}}_k = 0}$$

$$\boxed{\hat{\bar{U}}_k = \bar{Z}_k \cdot \hat{\bar{I}}_k}$$

$$\boxed{\sum_k \hat{\bar{U}}_k = 0}$$

A hálózati egyenletek alakja formailag hasonlítanak az egyenáramú hálózatok egyenleteinek alakjára

az egyenáramú hálózatok számítási eljárásai továbbra is alkalmazhatók, a komplex formalizmus figyelembevételével

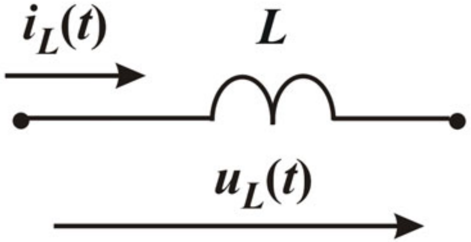
$$\bar{Z} = \mathrm{Re}\{\bar{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{Z}\} = R + jX \qquad \frac{1}{\bar{Z}} = \bar{Y} = \frac{1}{R + jX} = G + jB$$

$$\bar{Z}_R = R, \qquad X_R = 0$$

$$\bar{Z}_L = jX_L = j\omega L, \qquad X_L = \omega L$$

$$\bar{Z}_C = -jX_C = \frac{1}{j\omega C}, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

5. Példa $u_L(t) = 10\cos\omega t$ V, $\omega = 4$ kr/s,



$L = 3$ mH, $\hat{\bar{I}}_L = ?$ $i_L(t) = ?$

Megoldás $u_L(t) = 10\cos\omega t \text{ V} = \text{Re}\left\{10e^{j\omega t}\right\} \text{ V}, \rightarrow \hat{\bar{U}}_s = 10 \text{ V},$

a tekercs impedanciája $\bar{Z}_L = j\omega L = j3\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{3} = j12\ \Omega,$

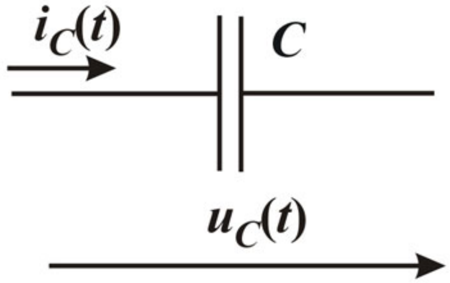
az áram komplex csúcsértéke

$$\hat{\bar{I}}_L = \frac{\hat{\bar{U}}_L}{\bar{Z}_L} = \frac{10}{j12} = -j0{,}8333\text{A} = 0{,}8333e^{-j\pi/2}\text{A},$$

az áram valós időfüggvénye

$$i_L(t) = \text{Re}\left\{0{,}8333e^{-j\pi/2}\cdot e^{j\omega t}\right\} = 0{,}8333\cos\left(\omega t - 90^{\text{o}}\right)\text{A},$$

6. Példa



$$i_C(t) = 0{,}10\cos\omega t \text{ A},\ \ \omega = 400 \text{ kr/s},$$

$$C = 2{,}5\ \mu\text{F}, \qquad \hat{\overline{U}}_C = ?\ \ u_C(t) = ?$$

Megoldás

$$i_C(t) = 0{,}10\cos\omega t \text{ A} = \text{Re}\left\{0{,}10e^{j\omega t}\right\} \text{ A}, \ \rightarrow \hat{\overline{I}}_C = 0{,}10 \text{ A},$$

a kondenzátor impedanciája

$$\overline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j400\cdot 10^3 2{,}5\cdot 10^{-6}} = -j1\,\Omega = 1e^{-j\pi/2}\Omega,$$

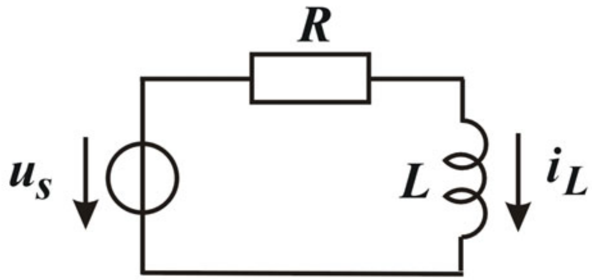
a feszültség komplex csúcsértéke

$$\hat{\overline{U}}_C = \hat{\overline{I}}_C \overline{Z}_C = 0{,}1\cdot(-j1) = -j0{,}1 \text{ V} = 0{,}1e^{-j\pi/2}\text{V},$$

a feszültség valós időfüggvénye

$$u_C(t) = \text{Re}\left\{0{,}1e^{-j\pi/2}\cdot e^{j\omega t}\right\} = 0{,}1\cos\left(\omega t - 90^{\text{o}}\right)\text{V},$$

7. Példa



$$u_s(t) = 10\cos\omega t \text{ V} \qquad \hat{I}_L = ?$$

$$R = 3\,\Omega,\ \ \omega L = \sqrt{3}\,\Omega$$

$$i_L(t) = ?$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 10 \text{ V} \qquad \overline{Z}_R = 3\Omega, \ \ \overline{Z}_L = j\sqrt{3}\Omega$$

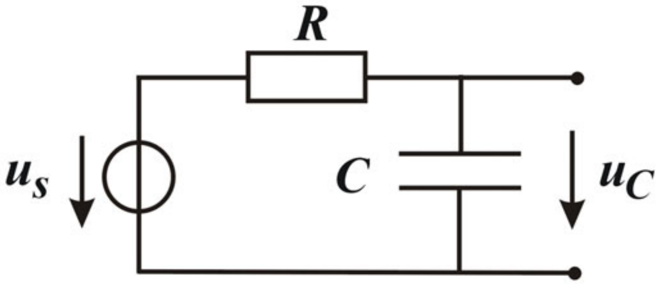
az áram komplex csúcsértéke

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{U}_s}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_L} = \frac{10}{3 + j\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{12}e^{j\text{arctg}\left(\sqrt{3}/3\right)}} = \frac{5}{\sqrt{3}e^{j30^o}} = \frac{5}{\sqrt{3}}e^{-j30^o} \text{ A}$$

az áram valós időfüggvénye

$$i_L(t) = \text{Re}\left\{\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-j30^o}e^{j\omega t}\right\} = \frac{5}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega t - 30^o\right)\text{A}$$

8. Példa



$$u_s(t) = 15\cos\omega t \text{ V}$$

$$R = 3\,\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 4\,\Omega$$

$$\hat{U}_C = ?$$

$$u_C(t) = ?$$

Megoldás $\hat{U}_s = 15\text{ V}$ $\quad \overline{Z}_R = 3\Omega,\ \overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j4\,\Omega$

a kondenzátor feszültségének komplex csúcsértéke

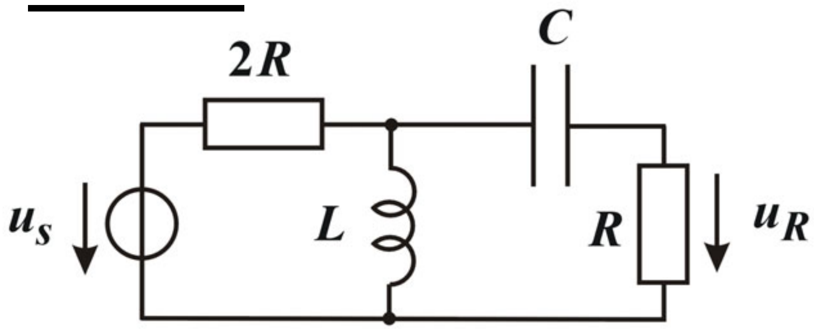
$$\hat{U}_C = \hat{U}_s \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} = 15\frac{-j4}{3-j4} = \frac{60e^{-j90^{\circ}}}{\sqrt{9+16}e^{j\operatorname{arctg}(-4/3)}} =$$

$$= \frac{60e^{-j90^{\circ}}}{5e^{-j53{,}13^{\circ}}} = 12e^{-j36{,}87^{\circ}}\text{ V}$$

a kondenzátor feszültségének valós időfüggvénye

$$u_C(t) = \operatorname{Re}\left\{12e^{-j36{,}87^{\circ}}e^{j\omega t}\right\} = 12\cos\left(\omega t - 36{,}87^{\circ}\right)\ \text{V}$$

9. Példa



$$u_s(t) = 12\cos\omega t \text{ V} \qquad \hat{\overline{U}}_R = ?$$

$$R = 5\,\Omega,$$
$$X_L = \omega L = 10\,\Omega,$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 5\,\Omega$$

$$u_R(t) = ?$$

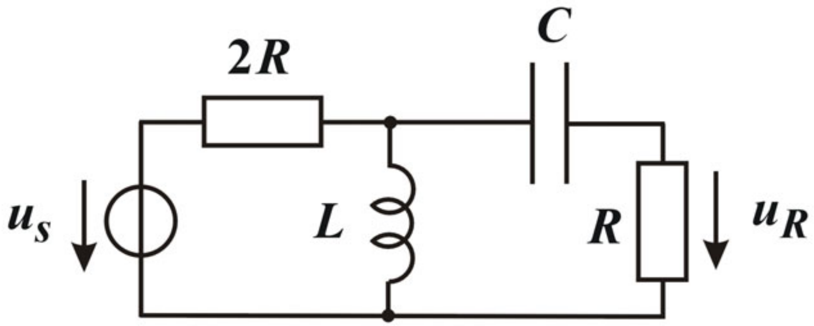
Megoldás $\hat{\overline{U}}_s = 12\text{ V} \qquad \overline{Z}_R = 5\Omega,\ \ \overline{Z}_C = -j5\,\Omega,\ \ \overline{Z}_L = j10\,\Omega$

az ellenállás feszültségének komplex csúcsértéke

$$\hat{\overline{U}}_R = \hat{\overline{U}}_s \frac{\overline{Z}_L \times (\overline{Z}_R + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_{2R} + \overline{Z}_L \times (\overline{Z}_R + \overline{Z}_C)} \frac{\overline{Z}_R}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} = 12 \frac{j10 \times (5 - j5)}{10 + j10 \times (5 - j5)} \frac{5}{5 - j5}$$

ahol $j10 \times (5 - j5) = \dfrac{j10(5 - j5)}{j10 + 5 - j5} = \dfrac{50(j+1)}{5(j+1)} = 10\Omega$

$$\hat{\overline{U}}_R = 12 \frac{10}{20} \frac{5}{5 - j5} = \frac{6}{1 - j} = \frac{6}{\sqrt{2}e^{-j45^o}} = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j45^o}\text{ V}$$



$$u_R(t) = ?$$

minthogy az ellenállás feszültségének komplex csúcsértéke

$$\hat{U}_R = 12\frac{10}{20}\frac{5}{5-j5} = \frac{6}{1-j} = \frac{6}{\sqrt{2}e^{-j45^o}} = \frac{6}{\sqrt{2}}e^{j45^o}\,\mathrm{V}$$

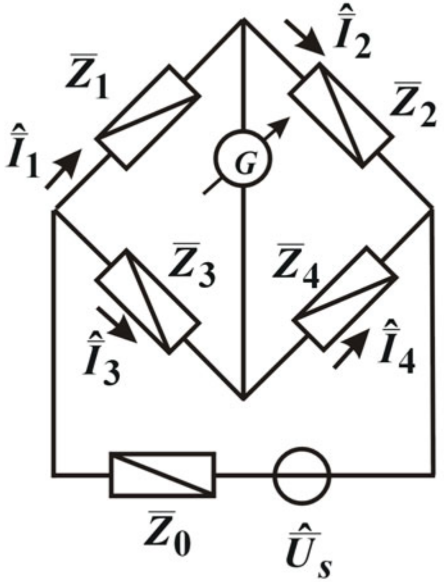
az ellenállás feszültségének valós időfüggvénye

$$u_R(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{6}{\sqrt{2}}e^{j45^o}e^{j\omega t}\right\} = 6/\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 45^o\right)\ \ \mathrm{V}$$

4. Hálózatszámítás

$$U_G = 0, \quad I_G = 0$$

1) Wheaston híd **kiegyenlítés feltétele**



$$\hat{I}_G = 0, \begin{cases} \hat{I}_1 = \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 = \hat{I}_4 \end{cases} \qquad \hat{U}_G = 0, \begin{cases} \overline{Z}_1 \hat{I}_1 = \overline{Z}_3 \hat{I}_3 \\ \overline{Z}_2 \hat{I}_2 = \overline{Z}_4 \hat{I}_4 \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{Z}_1 \overline{Z}_4 = \overline{Z}_2 \overline{Z}_3} \leftarrow \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_4}$$

a szemközti impedanciák szorzata egyenlő

(a) Minthogy $\overline{Z} = \mathrm{Re}\{\overline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\overline{Z}\} = R + jX$

$$(R_1 + jX_1)(R_4 + jX_4) = (R_2 + jX_2)(R_3 + jX_3)$$

$$\mathrm{Re}: \quad R_1 R_4 - X_1 X_4 = R_2 R_3 - X_2 X_3$$

$$\mathrm{Im}: \quad X_1 R_4 + R_1 X_4 = R_2 X_3 + X_2 R_3$$

(b) Minthogy

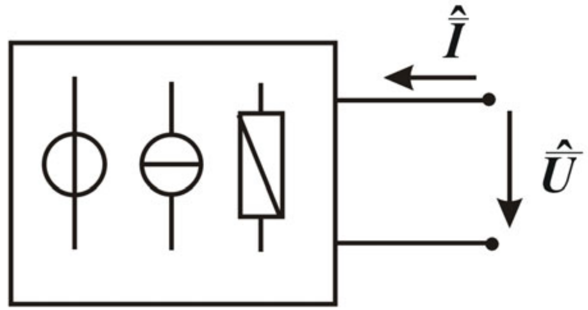
$$\overline{Z} = |\overline{Z}| e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$$

$$Z_1 e^{j\varphi_1} Z_4 e^{j\varphi_4} = Z_2 e^{j\varphi_2} Z_3 e^{j\varphi_3}$$

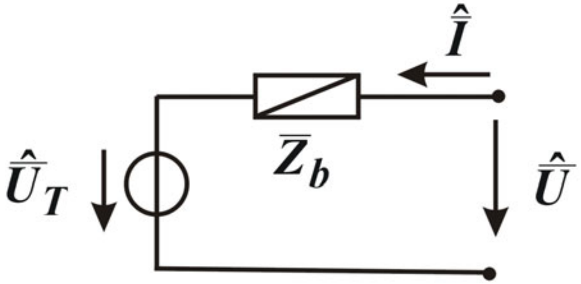
abs : $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$

kezdőezdőf: $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$

2) Helyettesítő generátorok



Thevenin helyettesítő generátor

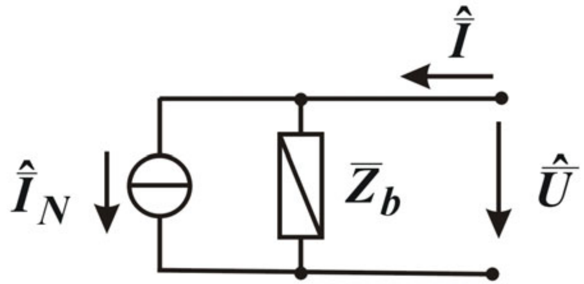


$$\hat{U} = \overline{Z}_b \hat{I} + \hat{U}_T$$

$$\left(\hat{I} = 0, \ddot{u}j\right): \; \hat{U}_T = \hat{U}_{\ddot{u}j}$$

$$\left(\hat{U} = 0, rz\right): \; \overline{Z}_b = -\frac{\hat{U}_T}{\hat{I}_{rz}} = -\frac{\hat{U}_{\ddot{u}j}}{\hat{I}_{rz}}$$

Norton helyettesítő generátor

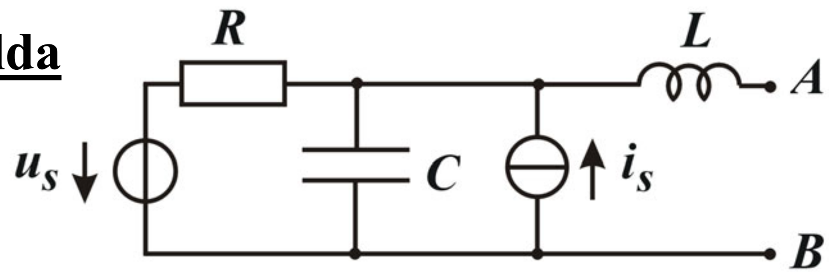


$$\hat{I} = \hat{U} \big/ \overline{Z}_b + \hat{I}_N$$

$$\left(\hat{U} = 0, rz\right): \; \hat{I}_N = \hat{I}_{rz}$$

$$\left(\hat{I} = 0, \ddot{u}j\right): \; \overline{Z}_b = -\frac{\hat{U}_{\ddot{u}j}}{\hat{I}_N} = -\frac{\hat{U}_{\ddot{u}j}}{\hat{I}_{rz}}$$

Példa



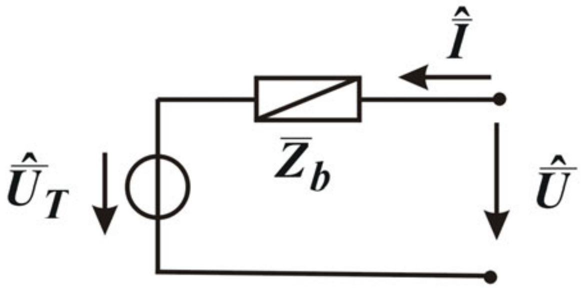
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = R = 10\Omega$$

$$u_s(t) = \hat{U}\sin\omega t,\ \hat{U} = 10\text{V}$$

$$i_s(t) = \hat{I}\cos\omega t,\quad \hat{I} = 2\text{A}$$

Thevenin helyettesítő generátor

V,A,Ω koherens egységekben



$$\hat{\overline{U}}_s = -j10\text{V},\ \hat{\overline{I}}_s = 2\text{A},$$

$$\overline{Z}_b = R \times \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = j10 + 10 \times (-j10)$$

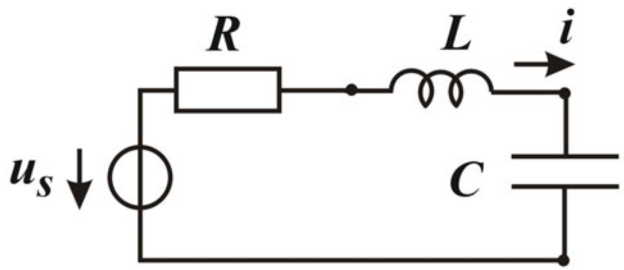
$$= j10 - \frac{j100}{10 - j10} = j10 + \frac{-j10 + 10}{2} =$$

$$= 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ}\,\Omega$$

$$\hat{\overline{U}}_T = \hat{\overline{U}}_{üj} = \hat{\overline{U}}_s \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} + \hat{\overline{I}}_s \frac{R \cdot 1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = -j10\frac{-j10}{10 - j10} + 2\frac{10(-j10)}{10 - j10} =$$

$$= \frac{-10}{1-j} + \frac{-j20}{1-j} = \frac{-10 - j20}{1-j} = 10\frac{(-1 - j2)(1 + j)}{2} = 5(-1 + 2 - j3) = (5 - j15)\text{V}$$

3) Soros rezgőkör

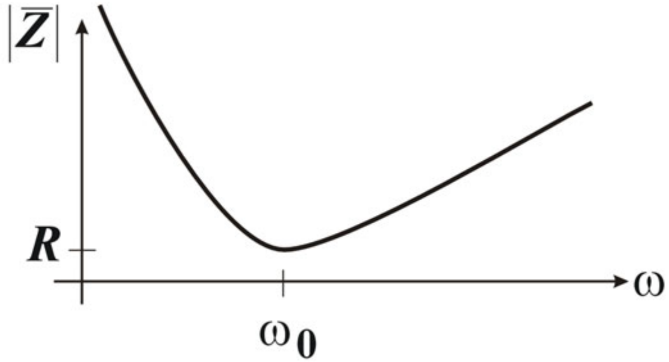


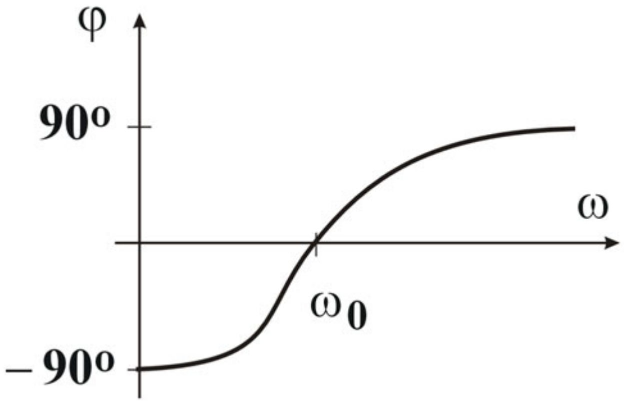
$$\overline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

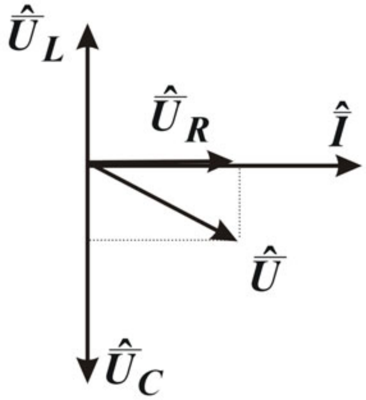
rezonancia áll fenn

$$\text{ha} \quad \mathrm{Im}\{\overline{Z}\} = 0, \rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

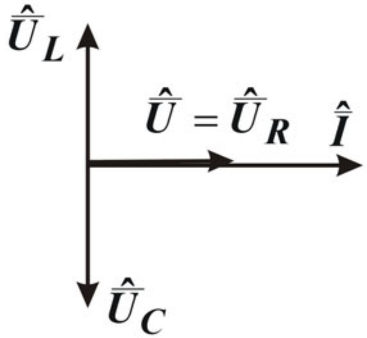




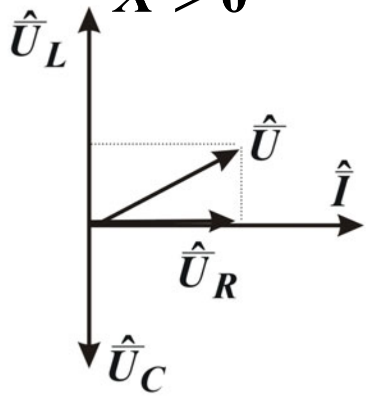
$\omega < \omega_0$ $\quad X < 0$

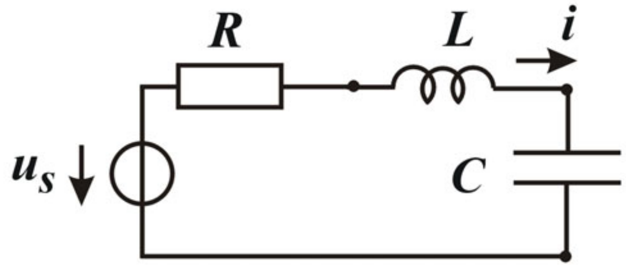


$\omega = \omega_0$ $\quad X = 0$



$\omega > \omega_0$ $\quad X > 0$



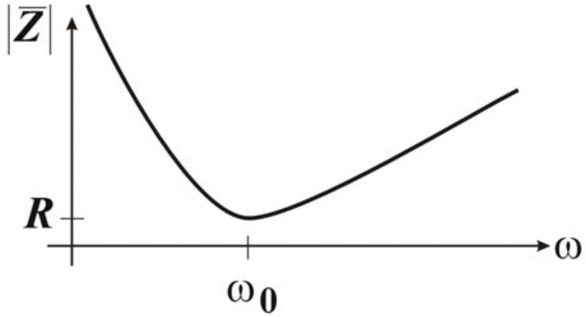


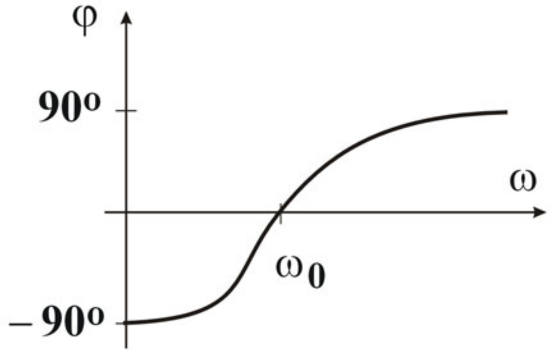
$$\overline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

rezonancia áll fenn

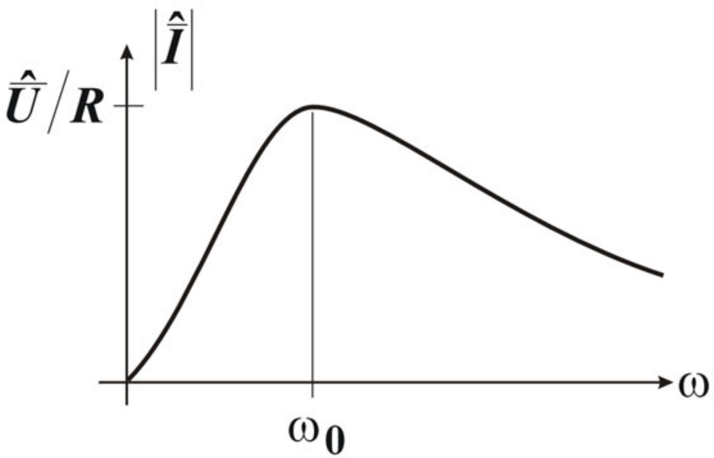
$$\mathrm{Im}\{\overline{Z}\} = 0$$

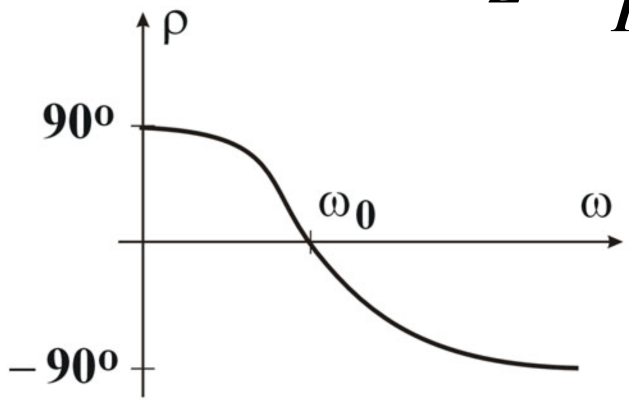
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$



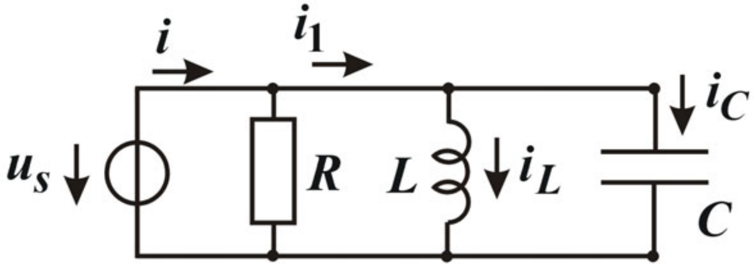


$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{\overline{Z}} = \frac{\hat{U}_s}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}$$





4) Párhuzamos rezgőkör



párhuzamos rezonancia áll fenn

ha $\mathrm{Im}\{\overline{Y}\} = 0, \rightarrow \omega C - \dfrac{1}{\omega L} = 0,$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\hat{\overline{I}}_1 = \hat{\overline{U}}\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) = 0$$

$$\hat{\overline{I}} = \hat{\overline{U}}\left(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)$$

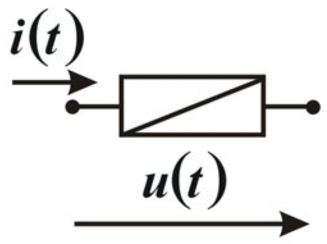
$$\hat{\overline{U}} j\omega C = -\hat{\overline{U}}\,\frac{1}{j\omega L} \neq 0$$

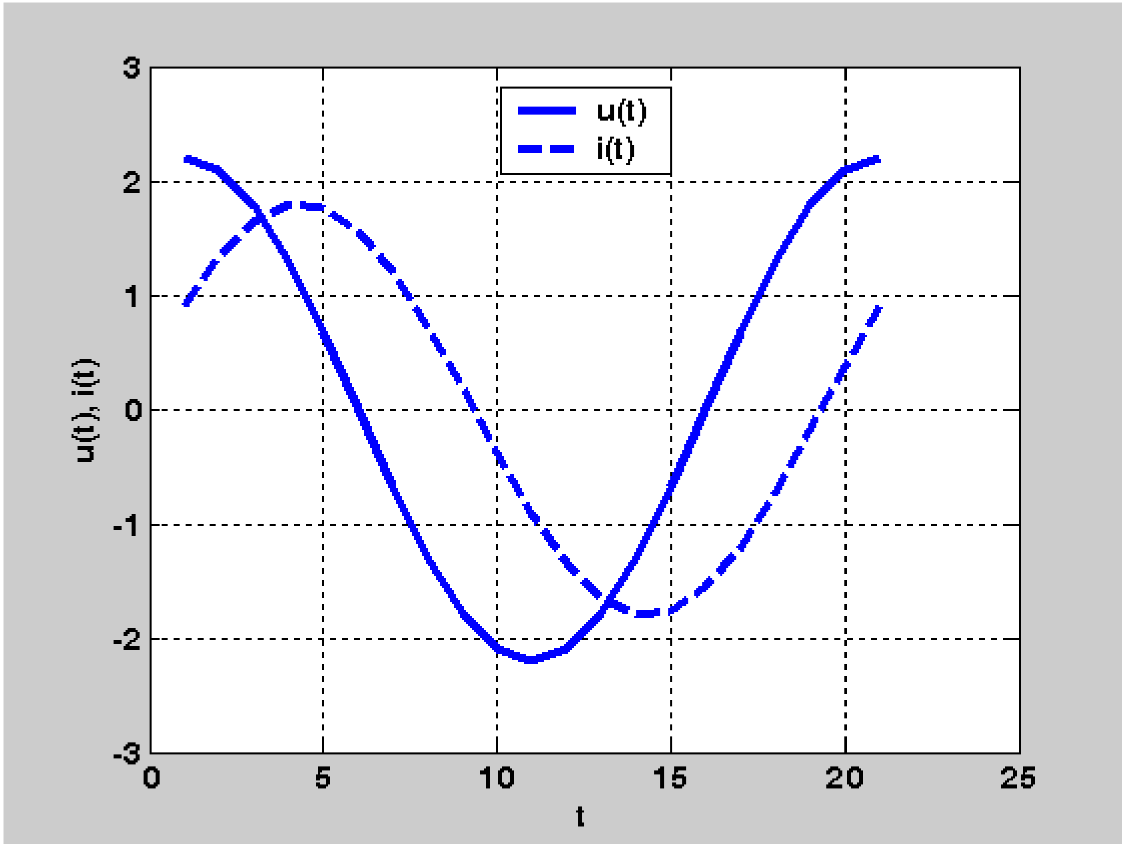
$$\hat{\overline{I}}_C = -\hat{\overline{I}}_L \neq 0$$

5. Teljesítmény

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \rho),$$

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \rho - \varphi),$$





(a) Pillanatnyi teljesítmény

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U}\hat{I}\cos\underbrace{(\omega t + \rho)}_{\alpha}\cos\underbrace{(\omega t + \rho - \varphi)}_{\beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

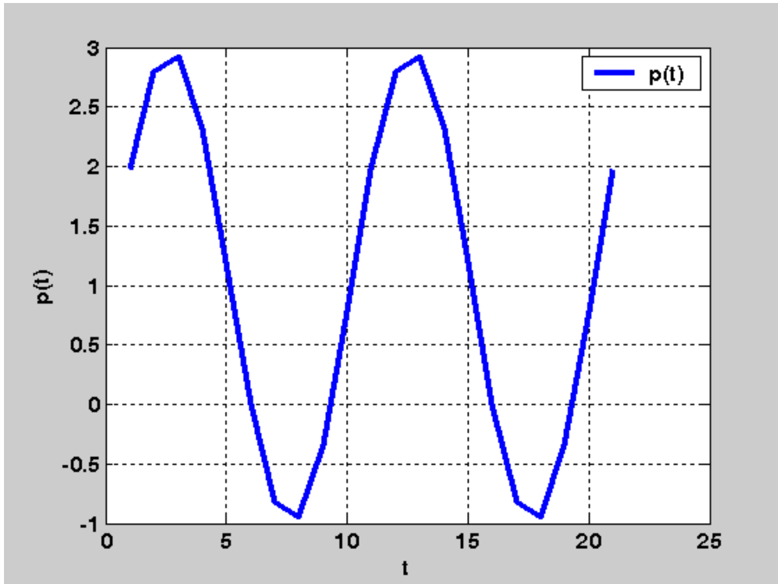
$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos\varphi + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(2\omega t + 2\rho - \varphi) =$$

$$= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + 2\rho - \varphi)$$

$UI(1+\cos\varphi) \longrightarrow$

$UI\cos\varphi \longrightarrow$

$-UI(1-\cos\varphi) \longrightarrow$



A kétpólus által végzett munka

$$W(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt =$$

$$= UI\cos\varphi(t_2-t_1)+UI\underbrace{\frac{\sin(2\omega t_2+2\rho-\varphi)-\sin(2\omega t_1+2\rho-\varphi)}{2\omega}}$$

ha $t_2-t_1 >> T$**, akkor** $\rightarrow \frac{2}{2\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{2\pi}$**, elhanyagolható**

<u>(b) Hatásos teljesítmény</u>

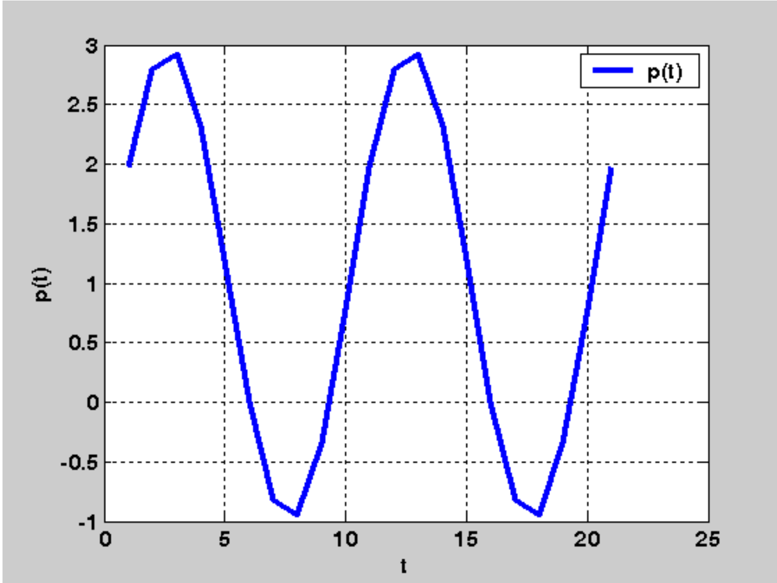
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi\ [\mathrm{W}],\ \text{ha}\begin{cases} P\geq 0, & \text{fogyasztó}\\ P<0, & \text{termelő}\end{cases}$$

(c) Látszólagos teljesítmény $S = UI$ [VA]

$$UI(1+\cos\varphi) = P + S$$

$$UI\cos\varphi = P$$

$$-UI(1-\cos\varphi) = P - S$$



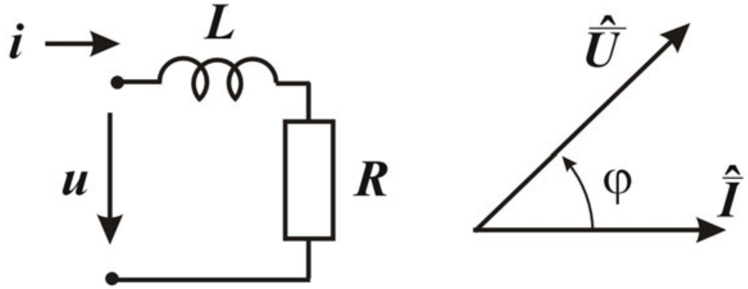
$$P - S < p(t) < P + S$$

A pillanatnyi teljesítmény a hatásos teljesítmény körül a látszólagos teljesítmény amplitúdójával, kétszeres frekvenciával leng

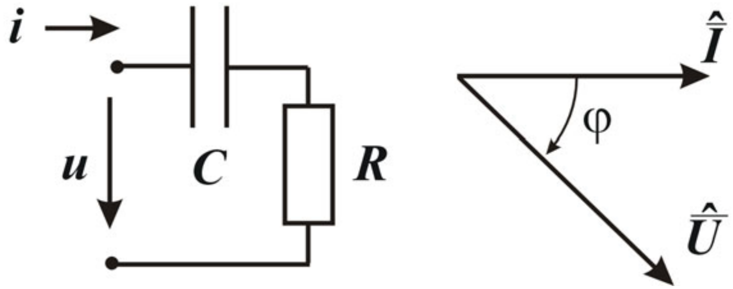
(d) Teljesítmény tényező

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI}$$

ahol φ az áram és feszültség közti szög, az impedancia szöge



$$0 \le \varphi < 90^{o}, \quad \cos\varphi > 0$$



$$-90^{o} < \varphi \le 0, \quad \cos\varphi > 0$$

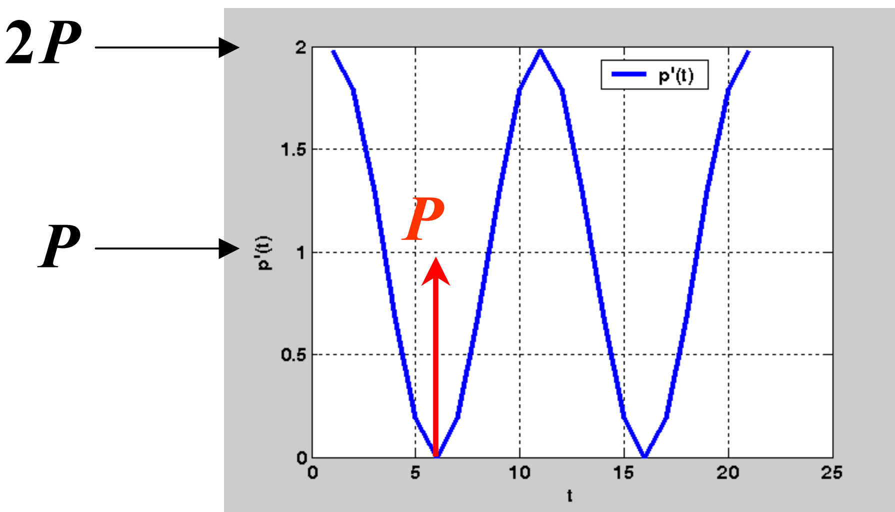
(e) Meddő teljesítmény

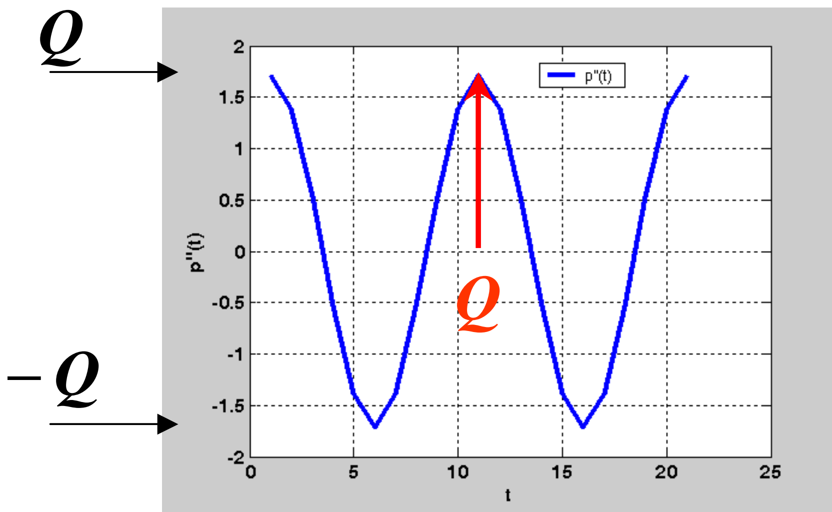
$$\boxed{Q = UI\sin\varphi\ [\mathrm{var}]}$$

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos\left(\underbrace{2\omega t + 2\rho}_{\alpha} - \underbrace{\varphi}_{\beta}\right) =$$

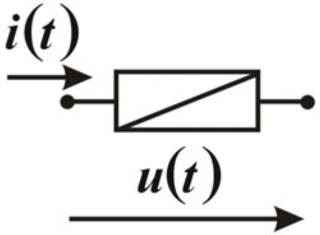
$$= UI\cos\varphi + UI\left[\cos(2\omega t + 2\rho)\cos\varphi + \sin(2\omega t + 2\rho)\sin\varphi\right] =$$

$$= \underbrace{\underbrace{UI\cos\varphi}_{P}\left(1 + \cos(2\omega t + 2\rho)\right)}_{p'(t)} + \underbrace{\underbrace{UI\sin\varphi}_{Q}\sin(2\omega t + 2\rho)}_{p''(t)}$$





(f) Komplex teljesítmény



$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \rho) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\hat{U}e^{j\rho}}_{\sqrt{2}\overline{U}} e^{j\omega t} \right\},$$

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \rho - \varphi) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\hat{I}e^{j(\rho-\varphi)}}_{\sqrt{2}\overline{I}} e^{j\omega t} \right\},$$

$$\overline{Z} = \frac{\hat{\overline{U}}}{\hat{\overline{I}}} = \frac{U}{I}e^{j\varphi}$$

Komplex teljesítmény

$$\boxed{\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^*} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ \ \ [\mathrm{VA}]$$

$$\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I} \rightarrow \overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^* = \overline{Z}\underbrace{\overline{I}\,\overline{I}^*}_{|\overline{I}|^2} = \overline{Z}|\overline{I}|^2 = (R + jX)|\overline{I}|^2 = P + jQ$$

$|\overline{S}| = S -$ **látszólagos teljesítmény**

$\mathrm{Re}\{\overline{S}\} = P -$ **hatásos teljesítmény**

$\mathrm{Im}\{\overline{S}\} = Q -$ **meddő teljesítmény**

$$P = R|\overline{I}|^2 \ \ [\mathrm{W}],$$

$$Q = X|\overline{I}|^2 \ [\mathrm{var}]$$

Példa

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cos \omega t \ \mathrm{V}, \rightarrow \hat{\bar{U}} = \sqrt{2} \cdot 10\mathrm{V}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \cos\left(\omega t - 30^{o}\right) \mathrm{A}, \rightarrow \hat{\bar{I}} = \sqrt{2} \cdot 2 e^{-j30^{o}} \mathrm{A}$$

$$\bar{S} = \overline{UI^*} = 10 \cdot 2 e^{j30^{o}} = 20\left(\cos 30^{o} + j \sin 30^{o}\right) =$$

$$20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)\mathrm{VA}$$

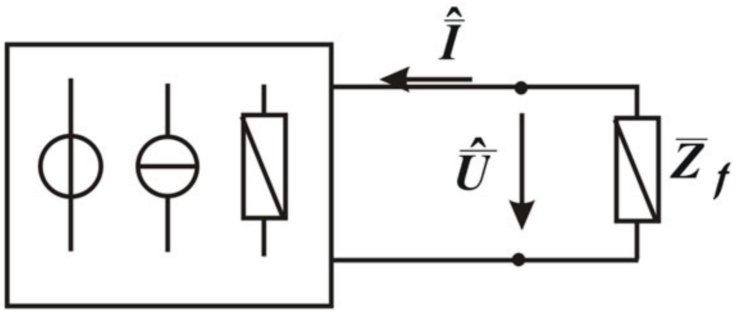
$$S = 20 \ \ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S} = \left(10\sqrt{3} + j10\right)\mathrm{VA}$$

$$P = 10\sqrt{3} \ \ \mathrm{W}$$

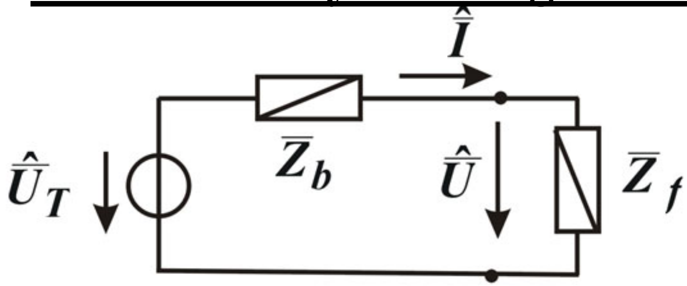
$$Q = 10 \ \ \mathrm{var}$$

g) Teljesítmény illesztés



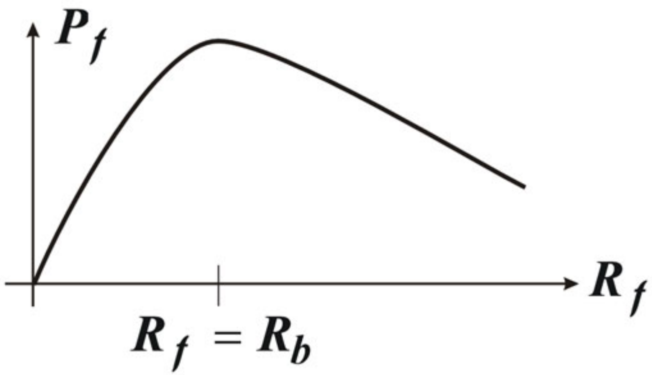
$$R_f = ? \quad \left(P_f\right)_{\max} = ?$$

Thevenin helyettesítő generátor



$$\overline{Z}_b = R_b + jX_b, \quad \overline{Z}_f = R_f + jX_f$$

$$P_f = R_f \frac{1}{2}\left|\hat{I}\right|^2 = \frac{1}{2} R_f \left|\frac{\hat{U}_T}{\overline{Z}_b + \overline{Z}_f}\right|^2 = \frac{1}{2} R_f \frac{\left|\hat{U}_T\right|^2}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(X_b + X_f\right)^2}$$



a tört maximális, ha a nevezője minimális,

$$\text{ha } X_f + X_b = 0, \rightarrow \boxed{X_f = -X_b},$$

$$\text{ha } X_f + X_b = 0, \rightarrow X_f = -X_b, \qquad P_f = \frac{1}{2} R_f \frac{\left|\hat{\overline{U}}_T\right|^2}{\left(R_b + R_f\right)^2}$$

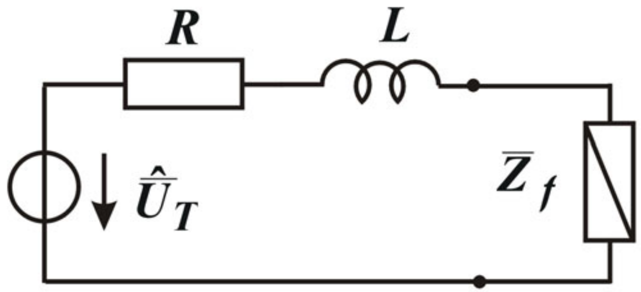
$$\frac{dP_f}{dR_f} = 0 = \frac{\left|\hat{\overline{U}}_T\right|^2}{2} \frac{d}{dR_f} \left\{ \frac{R_f}{\left(R_b + R_f\right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{\left|\hat{\overline{U}}_T\right|^2}{2} \frac{\left(R_b + R_f\right)^2 - R_f 2\left(R_b + R_f\right)}{\left(R_b + R_f\right)^3} \qquad \left(R_b + R_f\right) \left(\underbrace{R_b + R_f - 2R_f}_{R_b - R_f = 0} \right) = 0$$

a szélsőérték számításból $\boxed{R_f = R_b}$

$$\overline{Z}_f = R_f + jX_f = R_b - jX_b = \overline{Z}_b^* \rightarrow \boxed{\overline{Z}_f = \overline{Z}_b^*} \qquad \boxed{P_f\Big)_{\max} = \frac{\left|\overline{U}_T\right|^2}{4R_b}}$$

Példa



$$R = 5\Omega,\quad \omega L = 3\,\Omega,\ \hat{U}_T = \left(2 + j\right)\mathrm{V}$$

$$\overline{Z}_f = ?\quad P_{\overline{Z}_f} = ?$$

$$\overline{Z}_f = \overline{Z}_b^* = \left(R + j\omega L\right)^* = \left(5 + j3\right)^* = \left(5 - j3\right)\Omega$$

$$P_{\overline{Z}_f} = \frac{\left|\hat{U}_T\right|^2}{4R} = \frac{5}{4 \cdot 5} = 0{,}25\ \mathrm{W}$$

Ellenőrző kérdések

1. Adja meg a kondenzátor és a tekercs karakterisztikáját,
2. Ismertesse a szinuszos gerjesztő jel jellemzőit,
3. Ismertesse a komplex számok algebrai és exponenciális alakja közötti kapcsolatot,
4. Ismertesse a komplex számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa kiértékelésére vonatkozó összefüggéseket,

Irodalom

•Iványi Miklósné, Fizika – I, Villamosságtan, (Elöadás vázlat), www.e-oktat.pmmk.pte.hu,

•Fodor György, Hálózatok és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, 2004. (Kód: 55064)

•Fodor György, (Szerk) Villamosságtan példatár, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1998. (Kód: 44 555)

Ellenőrző kérdések

1. Adja meg a kondenzátor és a tekercs karakterisztikáját,
2. Ismertesse a szinuszos gerjesztő jel jellemzőit,
3. Ismertesse a hálózati elemek karakterisztikáit komplex írásmód esetén,
4. Ismertesse a komplex impedancia és admittancia fogalmát.
5. Ismertesse az összekapcsolási kényszerek alakját komplex írásmód esetén,
6. Ismertesse az áram-, és feszültségosztás műveleteit komplex impedancia alkalmazásával.

Irodalom

•Iványi Miklósné, Fizika – I, Villamosságtan, (Elöadás vázlat),
www.e-oktat.pmmk.pte.hu,

•Fodor György, Hálózatok és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, 2004. (Kód: 55064)

•Fodor György, (Szerk) Villamosságtan példatár, Nemzeti tankönyvkiadó,
Budapest, 1998. (Kód: 44 555)

Ellenőrző kérdések

1. **Ismertesse a csatolt tekercsek T helyettesítő kapcsolását és a paraméterek meghatározásának módját,**
2. **Ismertesse a Whistone híd kiegyenlítésének feltételét. Hány paraméter meghatározására alkalmas a híd kapcsolás,**
3. **Ismertesse a soros rezgőkör impedanciáját és áramviszonyait,**
4. **Foglalja össze a párhuzamos rezgőkör jellemzőit,**
5. **Ismertesse szinuszos gerjesztés esetén a pillanatnyi teljesítmény időfüggvényének változását,**
6. **Hogyan határozható meg a hatásos teljesítmény szinuszos gerjesztésű hálózatokban,**
7. **Hogyan definiáljuk a meddő teljesítményt szinuszos gerjesztésű hálózatokban,**
8. **Fejtse ki a teljesítménytényező fogalmát,**
9. **Foglalja össze hogy hogyan lehet szinuszos gerjesztésű hálózathoz egy impedanciát illeszteni.**

Irodalom

- **Iványi Miklósné, Fizika – I, Villamosságtan, (Előadás) 2006,www.e-oktat.pmmf.pte.hu**
- **Fodor György, Hálózatok és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, 2004. (Kód: 55064)**
- **Fodor György, (Szerk) Villamosságtan példatár, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1998. (Kód: 44 555)**

1. Feladat, egy impedancián áram és egy feszültség időfüggvénye

$$i(t) = 1{,}5\cos\omega t \text{ A},\; u(t) = 24\cos\left(\omega t - 30^{\circ}\right)\text{V},$$

a)Határozza meg a feszültség és az áram komplex csúcsértékét,

$$\hat{\bar{U}} = 24e^{-j30^{\circ}}\text{V} = \left(20{,}7846 - j12{,}0000\right)\text{V},\; \hat{\bar{I}} = 1{,}5 \text{ A};$$

b) Határozza meg az impedancia értékét, valamint az impedancia soros, ill. párhuzamos helyettesítő képének elemeit, ha a frekvencia

$$f = 1\text{kHz},\quad \bar{Z} = \frac{\hat{\bar{U}}}{\hat{\bar{I}}} = \frac{24e^{-j30^{\circ}}}{5} = \left(4{,}1569 - j\,2{,}4000\right)\Omega;$$

2. Feladat, egy R=3kΩ ellenállás árama $i(t) = 2\cos\omega t \text{ A},$

Határozza meg az ellenállás feszültségét. $\hat{\bar{U}}_R = R\hat{\bar{I}} = 3 \cdot 2 = 6\,\text{kV},$

3. Feladat, egy L=3mH indukció együtthatójú tekercs árama

$$i(t) = 4{,}5\cos\omega t \text{ A},\quad \omega = 2\frac{\text{krad}}{\text{s}},$$ Határozza meg a tekercs feszültségét.

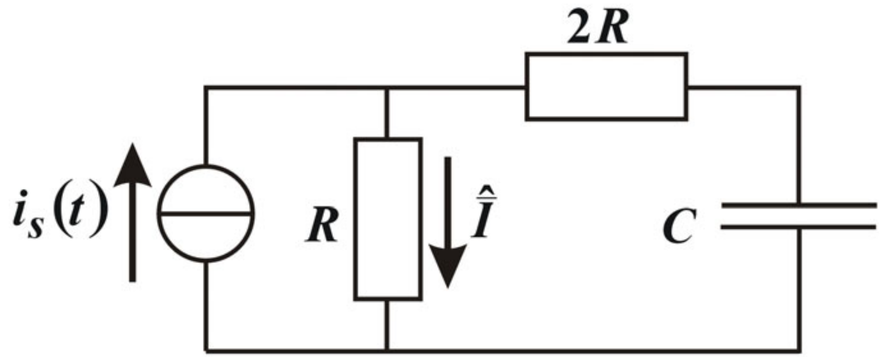
$$\hat{\bar{U}} = j\omega L\hat{\bar{I}} = j2\cdot 10^{3}\cdot 3\cdot 10^{-3}4{,}5 = j27\,\text{V},\; u(t) = 27\cos\left(\omega t + 90^{\circ}\right)\text{V},$$

4. Feladat, egy C=6μF kapacitású kondenzátor feszültsége

$u(t) = 32\cos\omega t$ V, $\omega = 4\dfrac{\text{krad}}{\text{s}}$, Határozza meg a kondenzátor áramát.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{32}{-j\frac{1}{6\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{3}}} = j768\cdot 10^{-3}\,\text{A}, \quad i(t) = 768\cos\left(\omega t + 90^{\circ}\right)\text{mA},$$

5. Feladat, Határozza meg az alábbi hálózatban a R ellenállás $\hat{I}$ áramának komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha az áramforrás forrásárama



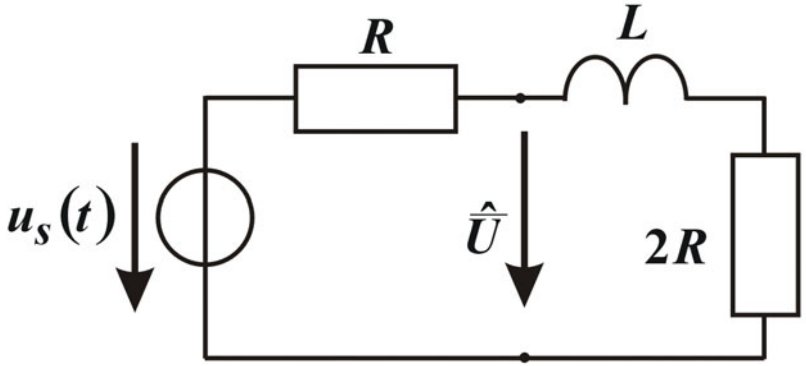
$i_s(t) = 4\cos\omega t$ A,

$R = 3\,\Omega$, $\quad 1/\omega C = 6\,\Omega$,

$$\hat{I} = \hat{I}_s \frac{2R + \frac{1}{j\omega C}}{R + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = 4\frac{6 - j6}{9 - j6} = (3{,}0769 - j\,0{,}6154)\text{A} = 3{,}1379e^{-j11{,}3099}\,\text{A},$$

6. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban a $2R-L$ elemek $\hat{\overline{U}}$ feszültségének komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha a feszültségforrás forrásfeszültsége



$$u_s(t) = 32\cos\omega t\ \mathrm{V},$$

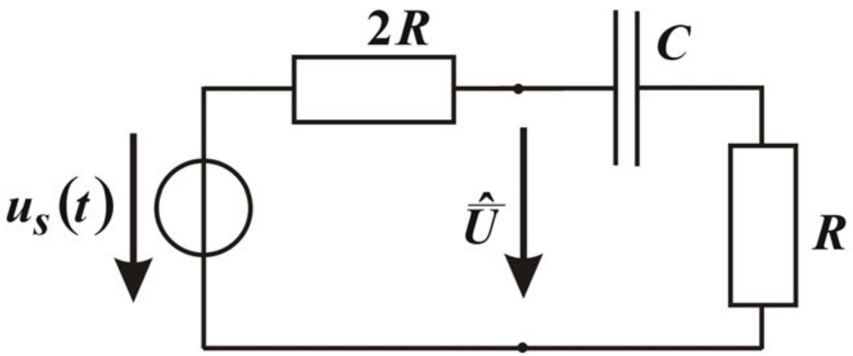
$$R = 3\,\Omega, \quad \omega L = 6\,\Omega,$$

$$\hat{\overline{U}} = \hat{\overline{U}}_s \frac{2R + j\omega L}{R + (2R + j\omega L)} = 32\frac{6 + j6}{9 + j6} = (24{,}6154 + j\,4{,}9231)\mathrm{V} =$$

$$= 25{,}1029e^{j11{,}3099}\mathrm{V},$$

7. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban az $R-C$ elemek $\hat{U}$ feszültségének komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha a feszültségforrás forrásfeszültsége



$$u_s(t) = 36\cos\omega t \text{ V},$$

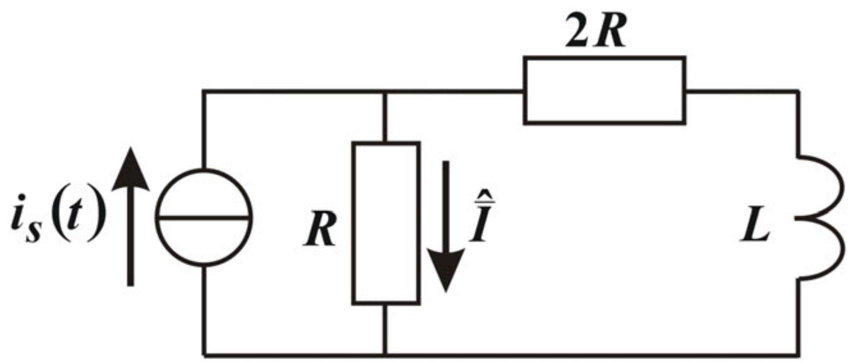
$$R = 4\Omega, \qquad 1/\omega C = 8\,\Omega,$$

$$\hat{U} = \hat{U}_s \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{2R + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = 36\frac{4 - j8}{12 - j8} = (19{,}3846 - j11{,}0769)\text{V} =$$

$$= 22{,}3263e^{-j29{,}7449}\text{V};$$

8. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban az R ellenállás $\hat{I}$ áramának komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha az áramforrás forrásárama



$$i_s(t) = 4{,}8 \cos \omega t \text{ A},$$

$$R = 3\,\Omega, \qquad \omega L = 9\,\Omega,$$

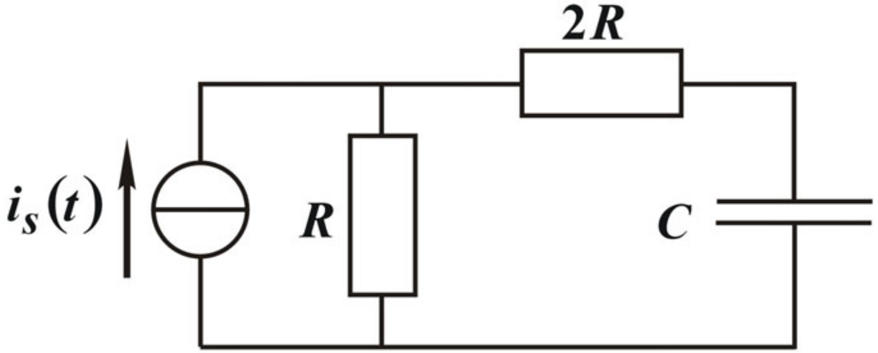
$$\hat{I} = \hat{I}_s \frac{2R + j\omega L}{R + (2R + j\omega L)} = 4{,}8 \frac{6 + j9}{9 + j9} = (4{,}0000 + j\,0{,}8000)\text{A} =$$

$$= 4{,}0792 e^{j11{,}3099} \text{A},$$

Gyakorló feladatok

1. Feladat, Az ábrán látható hálózat gerjesztése $i_s(t) = 3\cos\omega t\ A$,

Határozza meg a kondenzátor feszültségének komplex csúcsértékét, ha



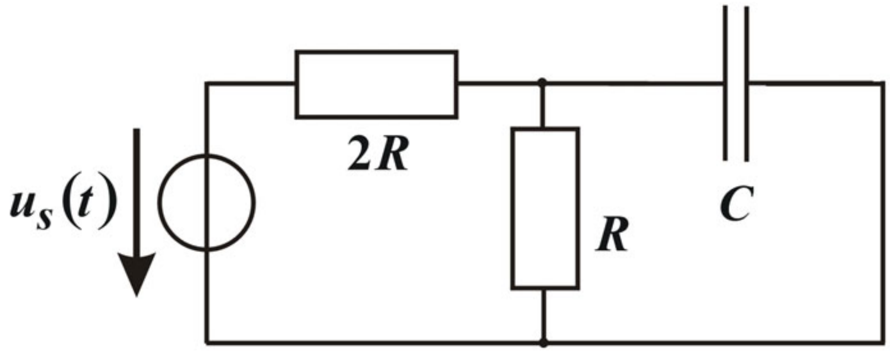
$$R = 3\ \Omega,\quad 1/\omega C = 6\ \Omega,$$

$$\hat{U}_C = \hat{I}_s \frac{R}{R + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \frac{1}{j\omega C}$$

2. Feladat, Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_s(t) = 28\cos\omega t\ V$,

Határozza meg az R ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét, ha

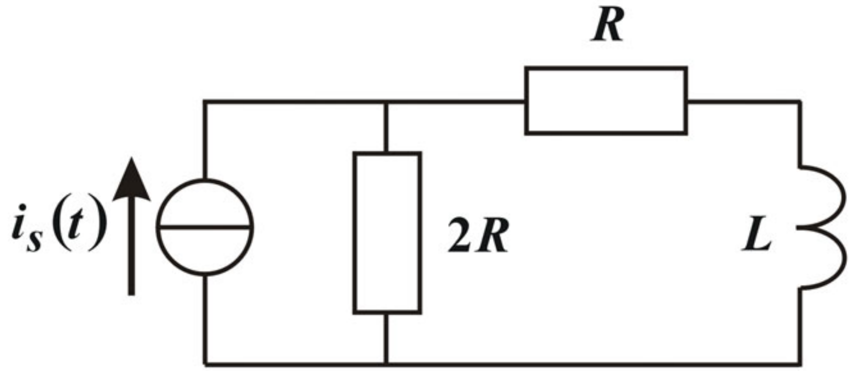
$$R = 3\ k\Omega,\quad 1/\omega C = 3\ k\Omega,$$



$$\hat{U}_R = \hat{U}_s \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{2R + R \times \frac{1}{j\omega C}},$$

<u>3. Feladat,</u> **Az ábrán látható hálózat gerjesztése** $i_s(t) = 5\cos\omega t\ A$,

Határozza meg a 2R ellenállás áramának komplex csúcsértékét, ha



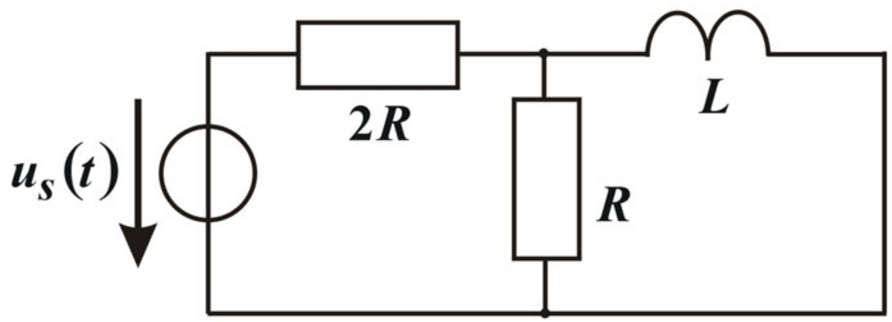
$$R = 4\Omega, \quad \omega L = 4\Omega$$

$$\hat{I}_{2R} = \hat{I}_s \frac{R + j\omega L}{2R + (R + j\omega L)},$$

<u>4. Feladat,</u> **Az ábrán látható hálózat gerjesztése** $u_s(t) = 16\cos\omega t\ V$,

Határozza meg az 2R ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét, ha

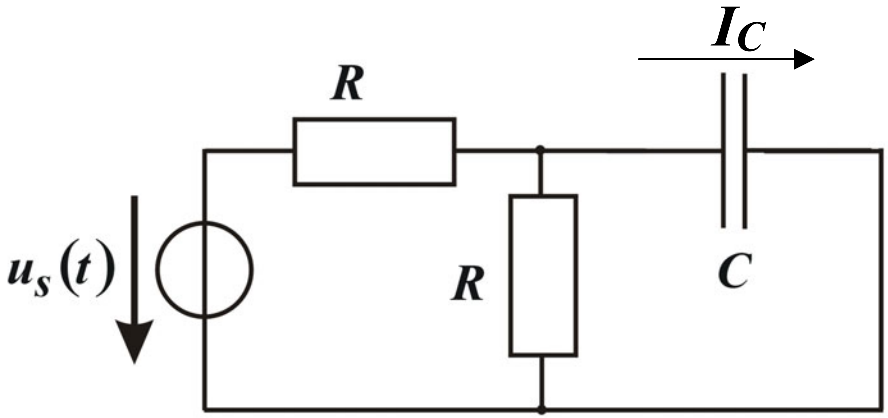
$$R = 4\Omega, \quad \omega L = 8\Omega$$



$$\hat{U}_{2R} = \hat{U}_s \frac{2R}{2R + (R \times j\omega L)},$$

5. Feladat, **Az ábrán látható hálózat gerjesztése** $u_s(t) = 30\cos\omega t$ **V,**

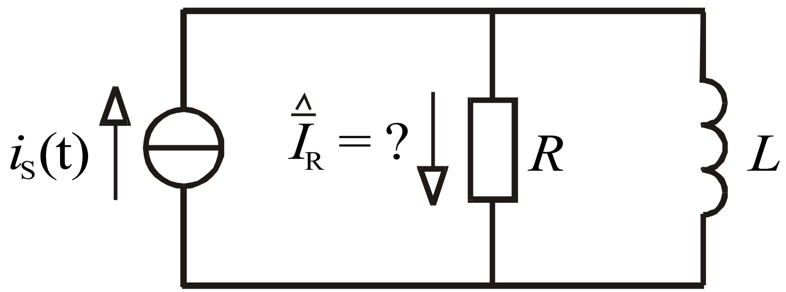
Határozza meg a kondenzátor áramának komplex csúcsértékét, ha



$$R = 2\Omega, \quad 1/\omega C = 2\,\Omega,$$

$$\hat{I}_C = \frac{\hat{U}}{R + R \times \frac{1}{j\omega C}} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}},$$

6. Feladat, **Az ábrán látható hálózat gerjesztése ,** $i_S(t) = 3\cos\omega t\ A$**,**
adja meg a bejelölt áram komplex amplitúdóját, ha $R = 2\ \Omega$**,** $\omega L = 2\ \Omega$**,**

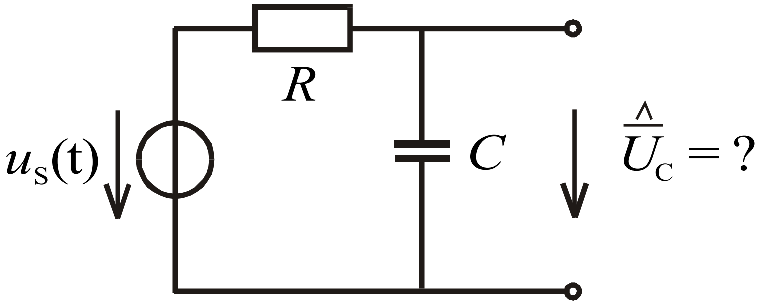


$$\hat{I}_{2R} = \hat{I}_s \frac{j\omega L}{R + j\omega L},$$

<u>7. Feladat,</u> **Az ábrán látható hálózat gerjesztése** $u_S(t) = 6\cos\omega t\ V$,

adja meg a bejelölt feszültség komplex amplitúdóját, ha

$R = 3\ \Omega,\ 1/\omega C = 3\ \Omega,$

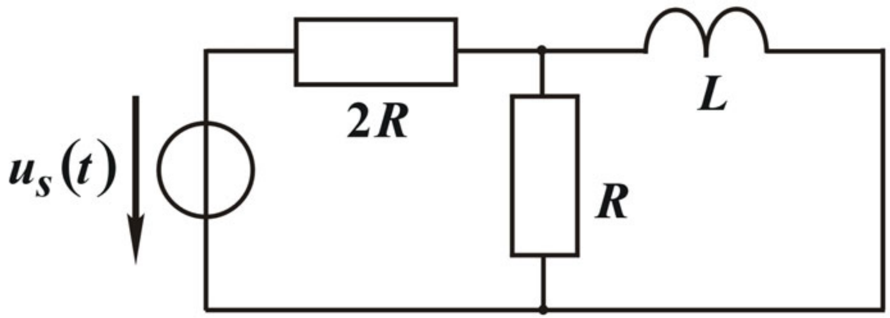


$$\hat{U}_C = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}},$$

<u>8. Feladat,</u> **Az ábrán látható hálózat gerjesztése** $u_S(t) = 12\cos\omega t\ V$,

Határozza meg a tekercs áramának komplex csúcsértékét,

ha $R = 3k\Omega,\quad \omega L = 2k\Omega$

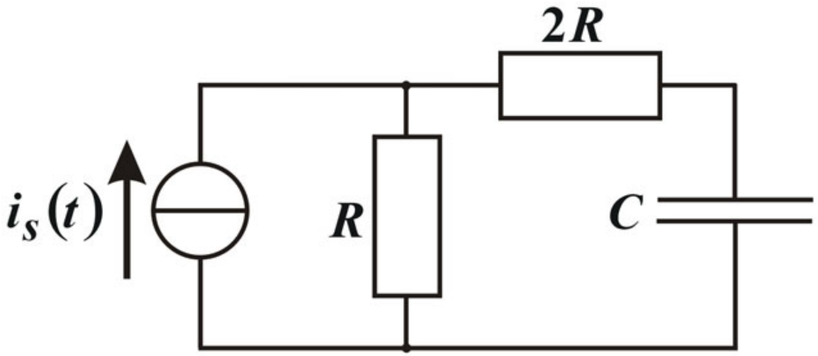


$$\hat{I}_L = \frac{\hat{U}_s}{2R + R \times j\omega L} \frac{R}{R + j\omega L},$$

9. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $i_s(t) = 6\cos\omega t\ A$,
Határozza meg a 2R ellenállás áramának komplex csúcsértékét, ha

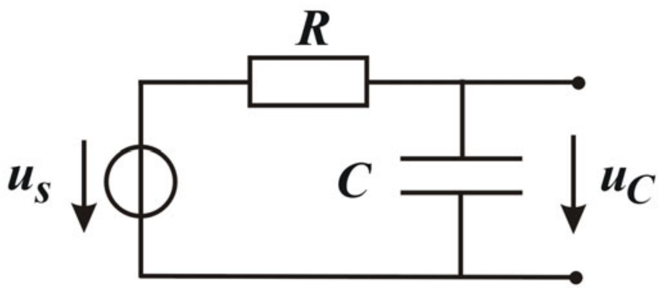
$R = 6\ \Omega$, $1/\omega C = 3\ \Omega$,



$$\hat{\bar{I}}_{2R} = \hat{\bar{I}}_s \frac{R}{R + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)},$$

10. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 4\Omega,\quad u_s(t) = 10\cos\omega t \text{ V}$$

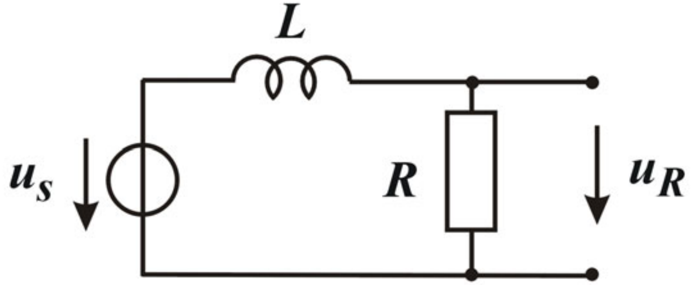
Megoldás $\hat{U}_s = 10\text{V}$

$$\hat{U}_C = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 10\frac{-j4}{2-j4} = (8 - j4)\text{V} = 8{,}9443 e^{-j26{,}56^o}\text{ V}$$

$$u_C(t) = \text{Re}\left\{8{,}94 e^{-j8{,}94^o} e^{j\omega t}\right\} = 8{,}94\cos\left(\omega\text{t} - 8{,}94^o\right)\text{V}$$

11. Feladat,

Határozza meg az ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \omega L = 5\Omega,\ \ u_s(t) = 12\cos\omega t\ \mathrm{V}$$

Megoldás $\hat{U}_s = 12\mathrm{V}$

$$\hat{U}_R = \hat{U}_s \frac{R}{R + j\omega L} = 12\frac{3}{3 + j5} = (3{,}1765 - j\,5{,}2941)\mathrm{V} =$$

$$= 6{,}1739 e^{-j59{,}0362^{\circ}}\,\mathrm{V}$$

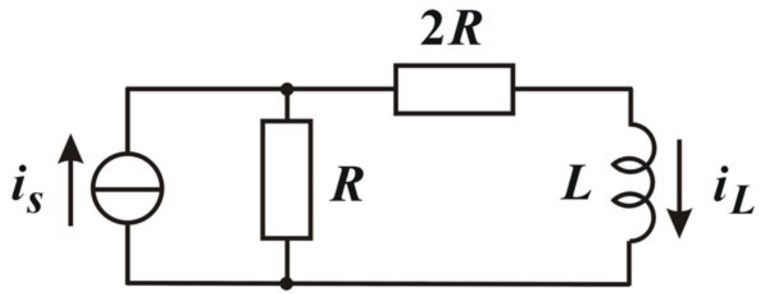
$$u_R(t) = \mathrm{Re}\left\{6{,}1739 e^{-j59{,}0362^{\circ}} e^{j\omega t}\right\} = 6{,}1739\cos\left(\omega \mathrm{t} - 59{,}0362^{\circ}\right)\mathrm{V}$$

12. Feladat,

Határozza meg a tekercs i_L áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett áram valós dőfüggvényét, ha

$$R = 2\Omega,\ \ \omega L = 4\Omega,$$

$$i_s(t) = 6\cos\omega t \text{ A}$$



Megoldás $\hat{\bar{I}}_s = 6\text{A}$

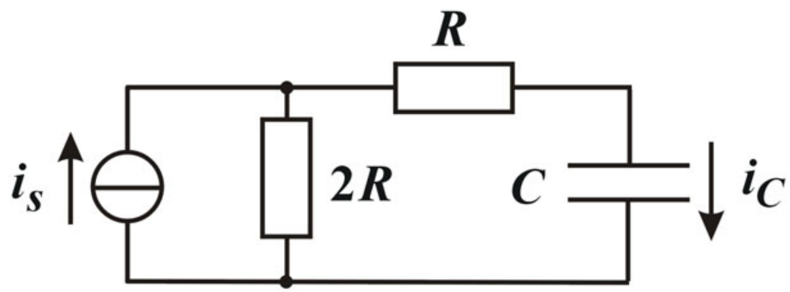
$$\hat{\bar{I}}_L = \hat{\bar{I}}_s \frac{R}{3R + j\omega L} = 6\frac{2}{6 + j4} = (1{,}3846 - j\,0{,}9231)\text{A} =$$

$$= 1{,}6641 e^{-j33{,}6901^\circ}\text{ A}$$

$$i_L(t) = \text{Re}\left\{1{,}6641 e^{-j33{,}6901^\circ} e^{j\omega t}\right\} = 1{,}6641\cos\left(\omega \text{t} - 33{,}6901^\circ\right)\text{A}$$

13. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor u_C feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 6\Omega,$$

$$i_s(t) = 12\cos\omega t\ \mathrm{A}$$

Megoldás $\hat{\bar{I}}_s = 12\,\mathrm{A}$

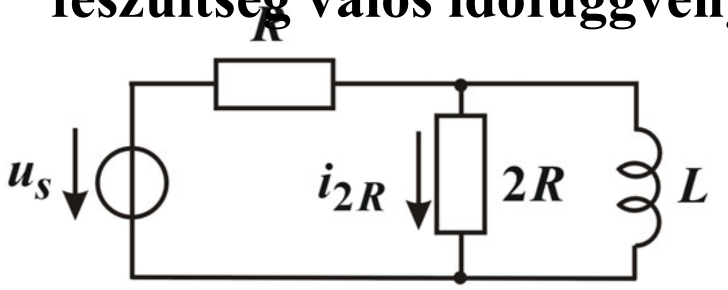
$$\hat{\bar{I}}_C = \hat{\bar{I}}_s \frac{2R}{3R + \frac{1}{j\omega C}} = 12\frac{6}{9 + j6} = (5{,}5385 - j\,3{,}6923)\mathrm{A} =$$

$$= 6{,}6564 e^{-j33{,}6901^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$i_C(t) = \mathrm{Re}\left\{6{,}6564 e^{-j33{,}6901^\circ} e^{j\omega t}\right\} = 6{,}6564\cos\left(\omega t - 33{,}6901^\circ\right)\mathrm{A}$$

14. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor *2R* ellenállás áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \omega L = 6\Omega,$$

$$u_s(t) = 15\cos\omega t\ \text{V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 15\text{V}$$

$$\hat{I}_{2R} = \frac{\hat{U}_s}{R + 2R \times j\omega L}\frac{j\omega L}{2R + j\omega L} = \frac{15}{3 + 6 \times j6} \cdot \frac{j6}{6 + j6} =$$

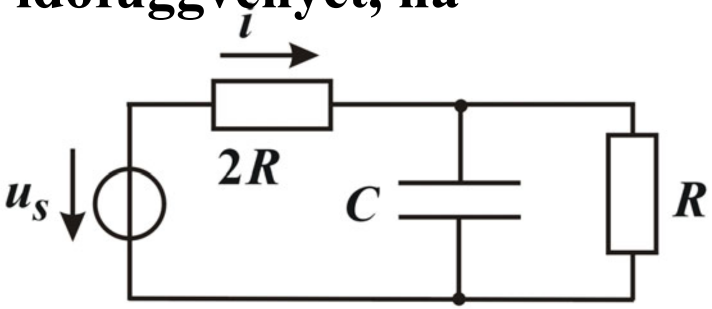
$$= \frac{15}{6 + j3} \cdot \frac{j6}{6 + j6} = (1{,}5 + j0{,}5)\text{A} = 1{,}58114 e^{j18{,}4349^{\circ}}\ \text{A}$$

$$6 \times j6 = \frac{j6 \cdot 6}{6 + j6} = \frac{j6}{1 + j} = 3 + j3$$

$$i_{2R}(t) = \text{Re}\left\{1{,}5811 e^{j18{,}4349^{\circ}} e^{j\omega t}\right\} = 1{,}5811\cos\left(\omega \text{t} + 18{,}4349^{\circ}\right)\text{A}$$

<u>15. Feladat,</u>

Határozza meg a feszültségforrás *i* áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 3\Omega,$$

$$u_s(t) = 6\cos\omega t\ \mathrm{V},$$

<u>Megoldás</u>

$$\hat{\hat{U}}_s = 6\mathrm{V},$$

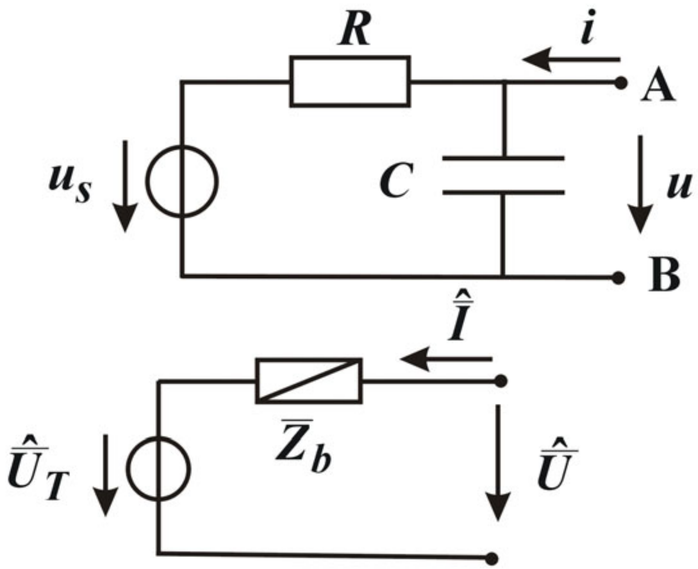
$$\hat{\hat{I}} = \frac{\hat{\hat{U}}_s}{2R + R \times \frac{1}{j\omega C}} = \frac{6}{4 + 2\times(-j3)} = \frac{6}{4 + 1{,}3846 - j\,0{,}9231} =$$

$$= (1{,}0825 + j0{,}1856)\mathrm{A} = 1{,}0983 e^{j9{,}7276^{\circ}}\ \mathrm{A}$$

$$i(t) = 1{,}0983\cos(\omega t + 9{,}7276^{\circ})\mathrm{A}$$

16. Feladat,

Határozza meg a hálózat AB kapcsira vonatkozó Thevenin helyettesítő kapcsolás belső impedanciáját, valamint a helyettesítő forrás forrás-feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett belső impedancia komponenseit, valamint a helyettesítő forrásfeszültség valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 3\Omega,$$

$$u_s(t) = 10\cos\omega t\ \text{V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 10\text{V}$$

$$\hat{U}_T = \hat{U}_{AB} = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 10\frac{-j3}{2-j3} =$$

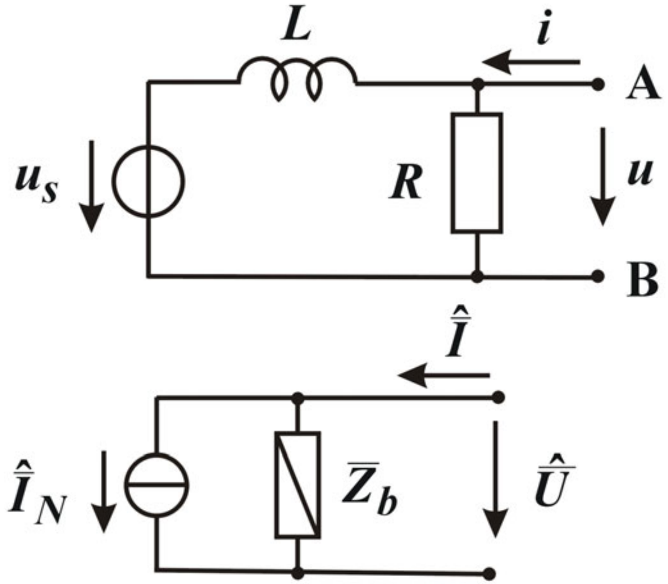
$$= (6{,}9231 - j\,4{,}6154)\text{V} = 8{,}3205e^{-j33{,}6901^{o}}\text{V}$$

$$\overline{Z}_b = R \times \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j3\cdot 2}{2-j3} = (1{,}3846 - j\,0{,}9231)\Omega$$

$$R_b = 1{,}3846\Omega,\ \frac{1}{\omega C_b} = 0{,}9231\Omega \qquad u_T(t) = 8{,}3205\cos\left(\omega t - 33{,}6901^{o}\right)\text{V}$$

17. Feladat,

Határozza meg a hálózat AB kapcsira vonatkozó Norton helyettesítő kapcsolás belső impedanciáját, valamint a helyettesítő forrás forrásáramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett belső impedancia komponenseit, valamint a helyettesítő forrásáram valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \omega L = 2\Omega,$$

$$u_s(t) = 12\cos\omega t\ \text{V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 12\text{V}$$

$$\hat{I}_N = \hat{I}_{rz} = -\frac{\hat{U}_s}{j\omega L} = -\frac{12}{j2} = -j6\text{A} = 6e^{-j90^\circ} A$$

$$i_N(t) = 6\cos(\omega t - 90^\circ)\text{A}$$

$$\overline{Z}_b = R \times j\omega L = \frac{j2\cdot 3}{3 + j2} = (\,0{,}9231 + j1{,}3846)\Omega$$

$$R_b = 0{,}9231\Omega,\quad \omega L_b = 1{,}3846\Omega$$

MŰSZKI FIZIKA I

Dr. Iványi Miklósné

egyetemi tanár

5. Konferencia, Gyakorlat

1. Feladat

Értékelje ki az alábbi komplex műveleteket, exponenciális és algebrai alakban is szorozzuk, ill. osszuk el a komplex számokat,

$$a = 3 + j4 = 5e^{j53{,}1301^{o}}, \qquad b = -2 + j5 = 5{,}3852e^{j111{,}8014^{o}},$$

$$c = a + b = 3 + j4 - 2 + j5 = 1 + j9 = 9{,}0554e^{j83{,}6598^{o}}$$

$$d = a - b = 3 + j4 - \left(-2 + j5\right) = 5 - j1 = 5{,}0990e^{-j11{,}3099^{o}}$$

$$e = a \cdot b = \left(3 + j4\right)\left(-2 + \mathrm{j}5\right) = -26{,}0000 + j7{,}0000 = 26{,}9258e^{j164{,}9315^{o}}$$

$$e = a \cdot b = 5 \cdot 5{,}3852e^{j\left(53{,}1301^{o} + 111{,}8014^{o}\right)} = 26{,}9258\, e^{j164{,}9315^{o}}$$

$$f = a / b = \frac{3 + j4}{-2 + \mathrm{j}5} = 0{,}4828 - j\,0{,}7931 = 0{,}9285e^{-j58{,}6713^{o}}$$

$$f = a / b = \frac{5e^{j53{,}1301^{o}}}{5{,}3852e^{j111{,}8014^{o}}} = 0{,}9285e^{-j58{,}6713^{o}}$$

2. Feladat, két feszültség időfüggvénye

$$u_1(t) = 15\cos\omega t \text{ V},\; u_2(t) = 24\sin\left(\omega t + 30^o\right)\text{V},$$

a)Határozza meg a feszültségek komplex csúcsértékeit,

$$u_1(t) = 15\cos\omega t \text{ V} = \text{Re}\left\{15e^{j\omega t}\right\}\text{V},\; \hat{\bar{U}}_1 = 5\text{V},$$

$$u_2(t) = 24\sin\left(\omega t + 30^o\right)\text{V} = \text{Re}\left\{24(-j)e^{j\left(\omega t + 30^o\right)}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{\underbrace{24(-j)e^{j30^o}}_{\hat{\bar{U}}_2} \cdot e^{j\omega t}\right\}, \rightarrow \hat{\bar{U}}_2 = 24e^{-j60^o}\text{ V} = \left(12{,}0000 - j20{,}7846\right)\text{V},$$

b) Határozza meg a két feszültség összegének és komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét.

$$\hat{\bar{U}}_3 = \hat{\bar{U}}_1 + \hat{\bar{U}}_2 = 15 + 24e^{-j60^o} =$$

$$= 15 + \left(12{,}0 - j20{,}7864\right) = \left(27{,}0000 - j20{,}7846\right)\text{V} = 34{,}0735e^{-j37{,}5891^o}\text{ V},$$

$$u_3(t) = \text{Re}\left\{34{,}0735e^{-j37{,}5891^o}e^{j\omega t}\right\} = 34{,}0735\cos\left(\omega t - 37{,}5891^o\right)\text{V},$$

<u>3. Feladat,</u> két feszültség időfüggvénye

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\mathrm{V}, \quad u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\mathrm{V}$$

a)Határozza meg a feszültségek komplex csúcsértékeit,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{-j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{U}_1 = (-10 - j20)\mathrm{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\}, \ \hat{U}_2 = (30 + j10)\mathrm{V},$$

b) Határozza meg a két feszültség összegének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = (-10 - j20) + (30 + j10) = (20{,}00 - j10{,}00)\mathrm{V} =$$

$$= 22{,}3607e^{-j26{,}5651^{\mathrm{o}}}\mathrm{V},$$

$$u_3(t) = \mathrm{Re}\left\{22{,}3607e^{-j26{,}5651^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\} = 22{,}3607\cos\left(\omega\mathrm{t} - 26{,}5651^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{V}$$

c) Határozza meg a két feszültség különbségének komplex csúcsértékét, valamint valós időfüggvényét,

$$u_1(t) = (20\sin\omega t - 10\cos\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{-j20e^{j\omega t} - 10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(-10 - j20)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{22{,}3607e^{-j116{,}5651}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{U}_1 = (-10 - j20)\mathrm{V},$$

$$u_2(t) = (30\cos\omega t - 10\sin\omega t)\mathrm{V} = \mathrm{Re}\left\{30e^{j\omega t} + j10e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(30 + j10)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{31{,}6228e^{j18{,}4349^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\},\ \hat{U}_2 = (30 + j10)\mathrm{V},$$

$$\hat{U}_4 = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = (-10 - j20) - (30 + j10) = (-40{,}00 - j30{,}00)\mathrm{V} =$$

$$= 50{,}00e^{-j143{,}1301^{\mathrm{o}}}\mathrm{V},$$

$$u_3(t) = \mathrm{Re}\left\{50{,}00e^{-j143{,}1301^{\mathrm{o}}}e^{j\omega t}\right\} = 50{,}00\cos\left(\omega \mathrm{t} - 143{,}1301^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{V},$$

4. Feladat, egy impedancián áram és egy feszültség időfüggvénye

$$i(t) = 1{,}5\cos\omega t \text{ A},\ \ u(t) = 24\cos\left(\omega t - 30^{o}\right)\text{V},$$

a)Határozza meg a feszültség és az áram komplex csúcsértékét,

$$\hat{\overline{U}} = ?,\ \ \hat{\overline{I}} = ?$$

b) Határozza meg az impedancia értékét, valamint az impedancia soros, ill. párhuzamos helyettesítő képének elemeit, ha a frekvencia

$$f = 1\text{kHz},$$

5. Feladat, egy R=3kΩ ellenállás árama $i(t) = 2\cos\omega t \text{ A},$
Határozza meg az ellenállás feszültségét.

6. Feladat, egy L=3mH indukció együtthatójú tekercs árama

$$i(t) = 4{,}5\cos\omega t \text{ A},\quad \omega = 2\frac{\text{krad}}{\text{s}},$$

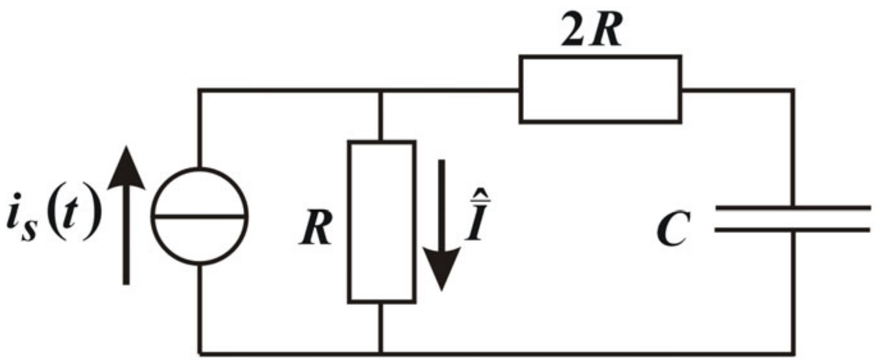
Határozza meg a tekercs feszültségét.

7. Feladat, egy C=6μF kapacitású kondenzátor feszültsége

$$u(t) = 32\cos\omega t \text{ V}, \quad \omega = 4\frac{\text{krad}}{\text{s}},$$

Határozza meg a kondenzátor áramát.

8. Feladat, Határozza meg az alábbi hálózatban a R ellenállás $\hat{\hat{I}}$ áramának komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha az áramforrás forrásárama $i_s(t) = 4\cos\omega t$ A, $R = 3\ \Omega$, $1/\omega C = 6\ \Omega$,

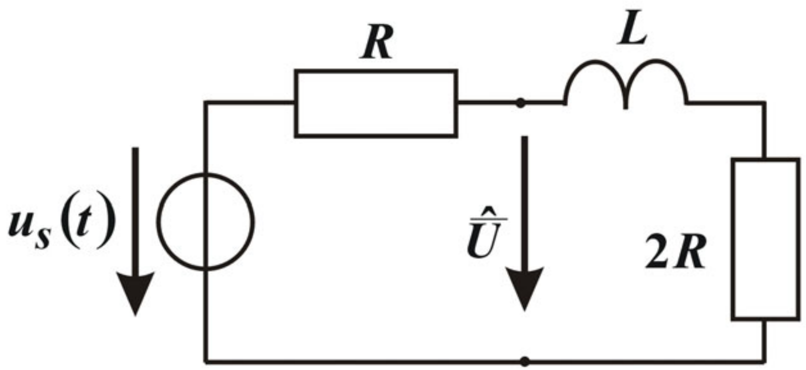


$$\hat{\hat{I}} = \hat{\hat{I}}_s \frac{2R + \frac{1}{j\omega C}}{R + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = 4\frac{6 - j6}{9 - j6} = (3{,}0769 - j\,0{,}6154)\text{ A},$$

9. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban a $2R-L$ elemek $\hat{U}$ feszültségének komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha a feszültségforrás forrásfeszültsége

$$u_s(t) = 32\cos\omega t \text{ V}, \qquad R = 3\,\Omega, \qquad \omega L = 6\,\Omega,$$

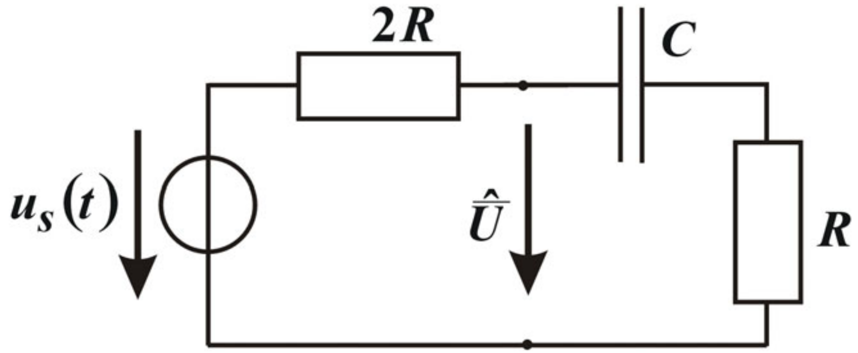


$$\hat{U} = \hat{U}_s \frac{2R + j\omega L}{R + (2R + j\omega L)} = 32\frac{6 + j6}{9 + j6} = (24{,}6154 + j4{,}9231)\text{ V},$$

10. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban az $R-C$ elemek $\hat{U}$ feszültségének komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha a feszültségforrás forrásfeszültsége

$$u_s(t) = 36\cos\omega t \text{ V}, \qquad R = 4\Omega, \qquad 1/\omega C = 8\,\Omega,$$

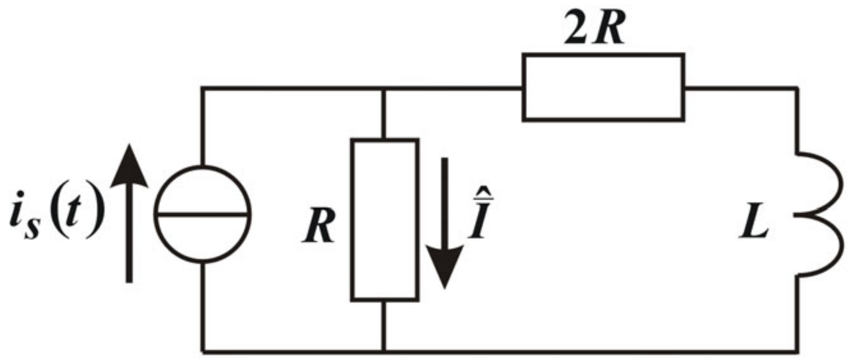


$$\hat{U} = \hat{U}_s \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{2R + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = 36\frac{4 - j8}{12 - j8} = \left(19{,}3846 - j11{,}0769\right)\text{V},$$

11. Feladat,

Határozza meg az alábbi hálózatban az R ellenállás $\hat{I}$ áramának komplex csúcsértékét exponenciális alakban, ha az áramforrás forrásárama

$$i_s(t) = 4{,}8\cos\omega t \text{ A}, \qquad R = 3\,\Omega, \qquad \omega L = 9\,\Omega,$$

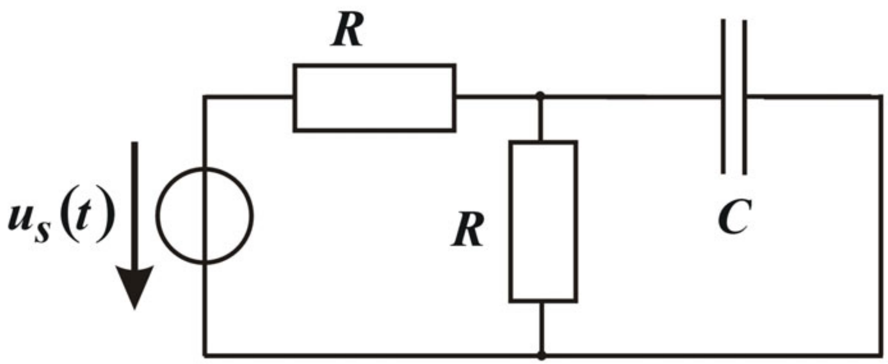


$$\hat{I} = \hat{I}_s \frac{R}{R + (2R + j\omega L)} = 4{,}8\frac{3}{9 + j9} = (0{,}8000 + j\,0{,}8000)\text{ A},$$

12. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_s(t) = 30\cos\omega t$ V,
Határozza meg a kondenzátor áramának komplex csúcsértékét, ha

$R = 2\Omega, \quad 1/\omega C = 2\,\Omega,$

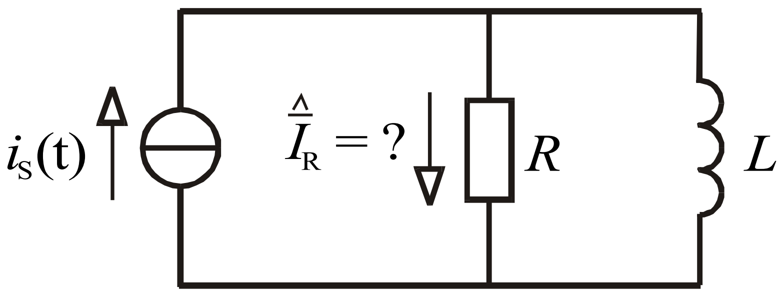


$$\hat{\bar{I}}_C = \frac{\hat{\bar{U}}}{R + R \times \frac{1}{j\omega C}} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{30}{2 + 2\times(-j2)} \cdot \frac{2}{2 - j2} = (3{,}0000 + j\,6{,}0000)\,\text{A}$$

13. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése , $i_S(t) = 3\cos\omega t\ A$**,**
adja meg a bejelölt áram komplex amplitúdóját, ha

$$R = 2\ \Omega,\ \ \omega L = 2\ \Omega,$$

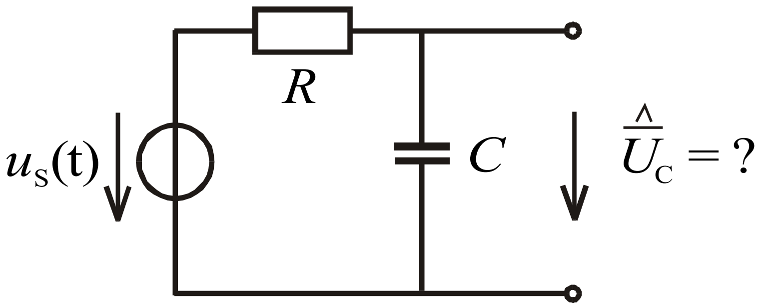


$$\hat{\hat{I}}_R = \hat{\hat{I}}_s \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = 3\frac{j2}{2+j2} = (1{,}5000 + j1{,}5000)\ \mathrm{A},$$

14. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_S(t) = 6\cos\omega t\ V$,
adja meg a bejelölt feszültség komplex amplitúdóját, ha

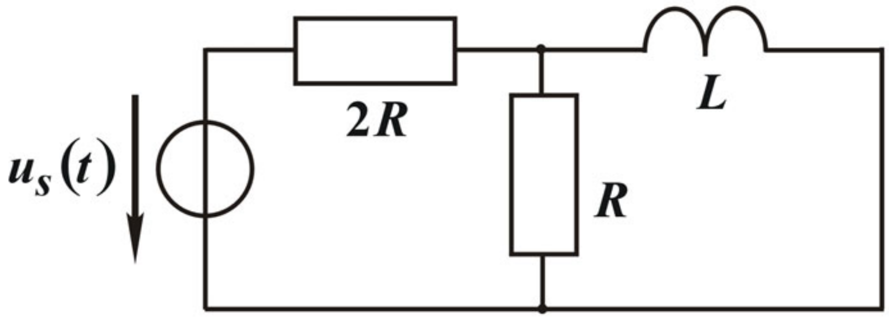
$$R = 3\ \Omega, \quad 1/\omega C = 3\ \Omega,$$



$$\hat{U}_C = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 6\frac{-j3}{3-j3} = (3{,}0000 - j\,3{,}0000)\,\mathrm{V},$$

15. Feladat,

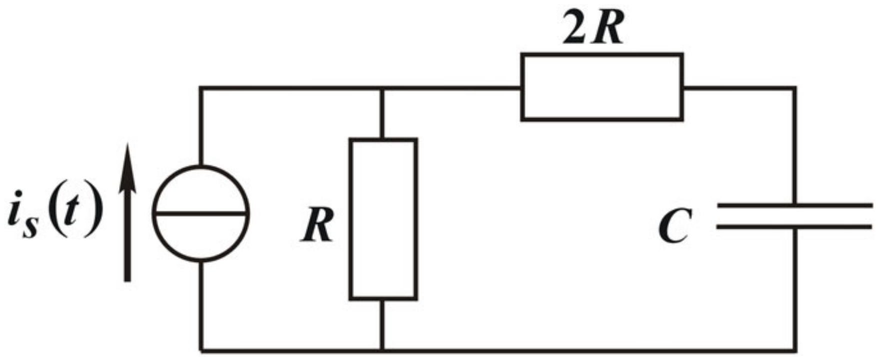
Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_S(t) = 12\cos\omega t\ V$,
Határozza meg a tekercs áramának komplex csúcsértékét,
ha $R = 3k\Omega, \quad \omega L = 2k\Omega$



$$\hat{\bar{I}}_L = \frac{\hat{\bar{U}}_s}{2R + R \times j\omega L} \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{12}{6 + 3 \times j2} \cdot \frac{3}{3 + j2} = (1{,}0000 - j\,1{,}0000)\,\mathrm{mA},$$

16. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $i_s(t) = 3\cos\omega t\ A,$
Határozza meg a kondenzátor feszültségének komplex csúcsértékét, ha $R = 3\ \Omega, \quad 1/\omega C = 6\ \Omega,$



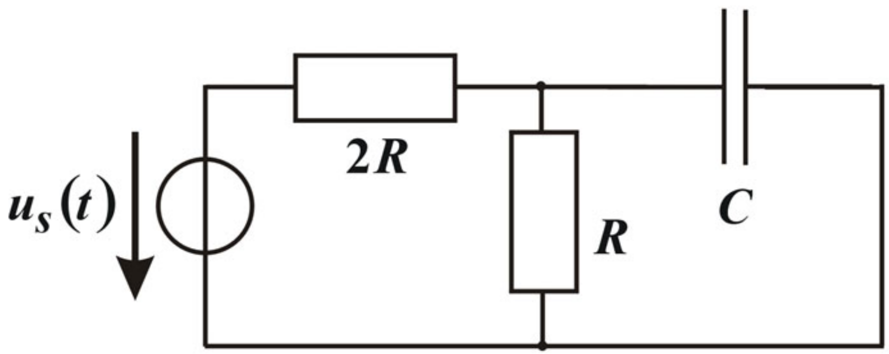
$$\hat{U}_C = \hat{I}_s \frac{R}{R + \left(2R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \cdot \frac{1}{j\omega C} = 3\frac{3}{9 - j6} \cdot (-j6) = (2{,}7692 - j\,4{,}1538)\,\mathrm{V}$$

17. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_s(t) = 28\cos\omega t\ V$,

Határozza meg az R ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét,

ha $R = 3\ k\Omega,\quad 1/\omega C = 3\ k\Omega,$

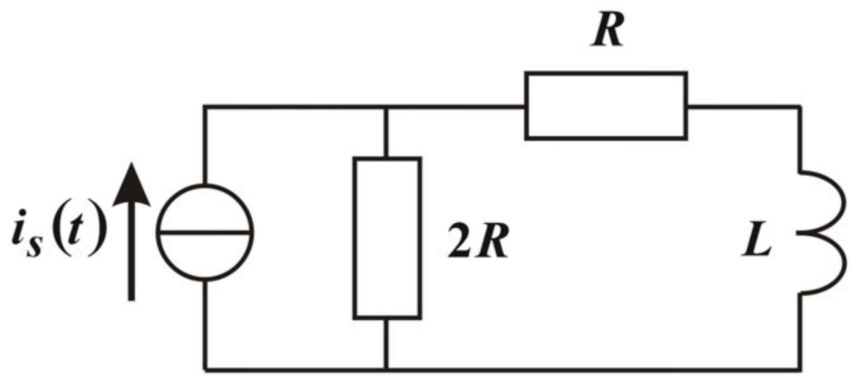


$$\hat{\overline{U}}_R = \hat{\overline{U}}_s \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{2R + R \times \frac{1}{j\omega C}} = 28 \frac{3 \times (-j3)}{6 + 3 \times (-j3)} = (6{,}4615 - j\,4{,}3077)\,\mathrm{V},$$

18. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $i_s(t) = 5\cos\omega t\ A$,
Határozza meg a 2R ellenállás áramának komplex csúcsértékét, ha

$$R = 4\Omega, \quad \omega L = 4\Omega$$



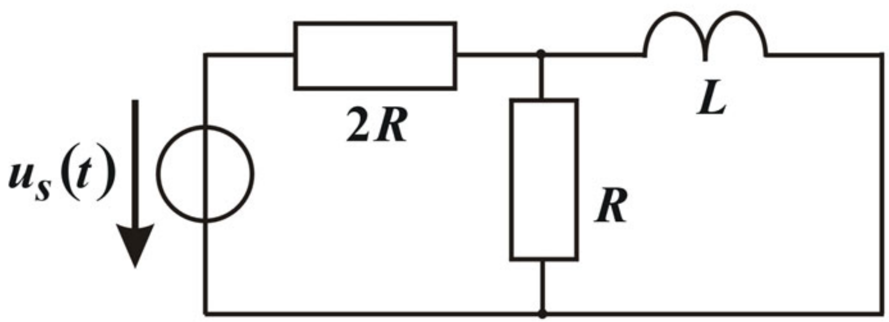
$$\hat{\hat{I}}_{2R} = \hat{\hat{I}}_s \frac{R + j\omega L}{2R + (R + j\omega L)} = 5\frac{4 + j4}{12 + j4} = (2{,}0000 + j1{,}0000)\,\mathrm{A},$$

19. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $u_s(t) = 16\cos\omega t\ V$,

Határozza meg az 2R ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét, ha

$$R = 4\Omega, \quad \omega L = 8\Omega$$

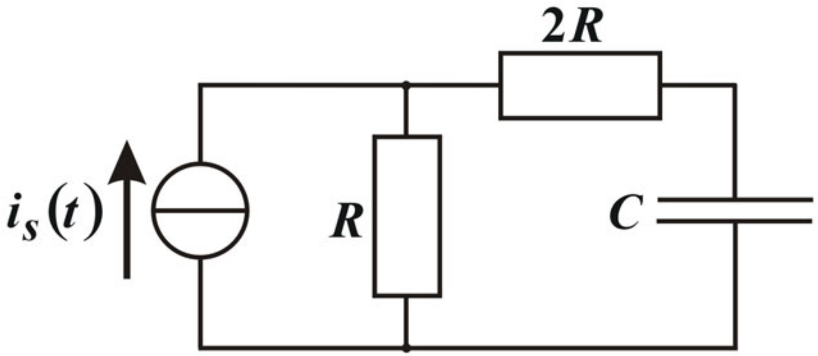


$$\hat{\bar{U}}_{2R} = \hat{\bar{U}}_s \frac{2R}{2R + (R \times j\omega L)} = 16 \frac{8}{8 + 4 \times j8} = (11{,}2000 - j\,1{,}6000)\,\mathrm{V},$$

20. Feladat,

Az ábrán látható hálózat gerjesztése $i_s(t) = 6\cos\omega t\ A$,
Határozza meg a 2R ellenállás áramának komplex csúcsértékét, ha

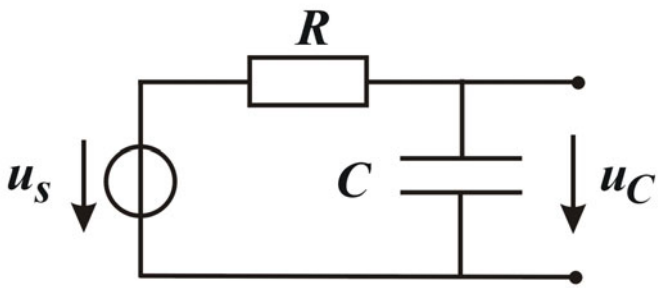
$R = 6\ \Omega$, $\quad 1/\omega C = 3\ \Omega$,



$$\hat{\bar{I}}_{2R} = \hat{\bar{I}}_s \frac{R}{R+\left(2R+\frac{1}{j\omega C}\right)} = 6\frac{6}{18-j3} = (1{,}9459 + j0{,}3243)\,\text{A},$$

21. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 4\Omega,\ \ u_s(t) = 10\cos\omega t\ \text{V}$$

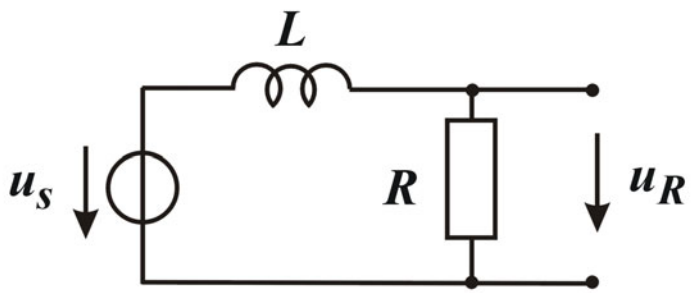
Megoldás $\hat{U}_s = 10\text{V}$

$$\hat{U}_C = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 10\frac{-j4}{2 - j4} = (8 - j4)\text{V} = 8{,}9443e^{-j26{,}56^o}\,\text{V}$$

$$U_C = \frac{\left|\hat{U}_C\right|}{\sqrt{2}} = \frac{8{,}94}{\sqrt{2}} = 6{,}32\text{V} \qquad u_C(t) = 8{,}94\cos(\omega\text{t} - 26{,}56^o)\text{V}$$

22. Feladat,

Határozza meg az ellenállás feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \ \omega L = 5\Omega,\ \ u_s(t) = 12\cos\omega t\ \text{V}$$

Megoldás $\hat{\bar{U}}_s = 12\text{V}$

$$\hat{\bar{U}}_R = \hat{\bar{U}}_s \frac{R}{R + j\omega L} = 12\frac{3}{3 + j5} = (3{,}1765 - j\,5{,}2941)\text{V} =$$

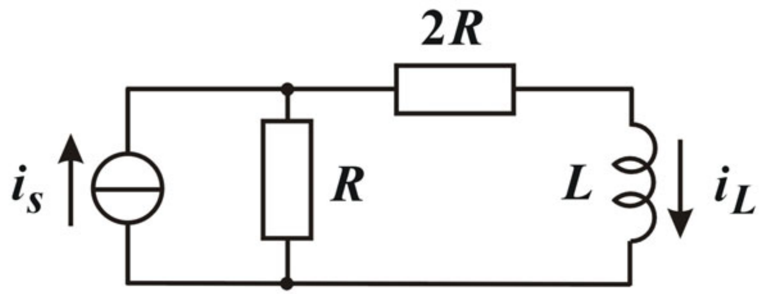
$$= 6{,}1739 e^{-j59{,}0362^{\circ}}\,\text{V}$$

$$U_R = \frac{\left|\hat{\bar{U}}_R\right|}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}1739}{\sqrt{2}} = 4{,}3656\text{V}$$

$$u_R(t) = 6{,}1739\cos(\omega t - 59{,}0362^{\circ})\text{V}$$

23. Feladat,

Határozza meg a tekercs i_L áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett áram valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega,\ \omega L = 4\Omega,$$

$$i_s(t) = 6\cos\omega t\ \text{A}$$

Megoldás $\hat{\hat{I}}_s = 6\text{A}$

$$\hat{\hat{I}}_L = \hat{\hat{I}}_s \frac{R}{3R + j\omega L} = 6\frac{2}{6 + j4} = (1{,}3846 - j\,0{,}9231)\text{A} =$$

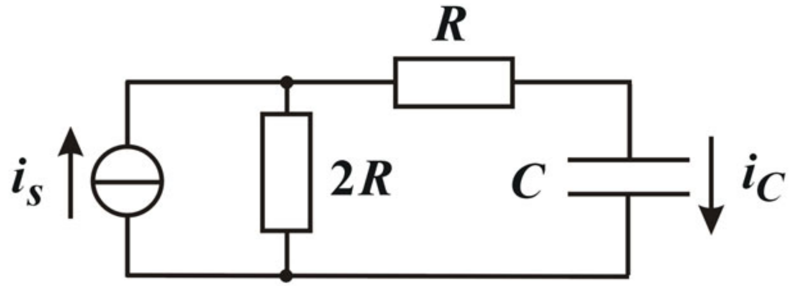
$$= 1{,}6641 e^{-j33{,}6901^{\circ}}\ \text{A}$$

$$I_L = \frac{\left|\hat{\hat{I}}_L\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}6641}{\sqrt{2}} = 1{,}1767\text{A}$$

$$i_L(t) = 1{,}6641\cos(\omega \text{t} - 33{,}6901^{\circ})\text{A}$$

24. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor u_C feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega, \quad \frac{1}{\omega C} = 6\Omega,$$

$$i_s(t) = 12\cos\omega t \text{ A}$$

Megoldás $\quad \hat{\bar{I}}_s = 12\text{A}$

$$\hat{\bar{I}}_C = \hat{\bar{I}}_s \frac{2R}{3R + \frac{1}{j\omega C}} = 12\frac{6}{9 + j6} = (5{,}5385 - j\,3{,}6923)\text{A} =$$

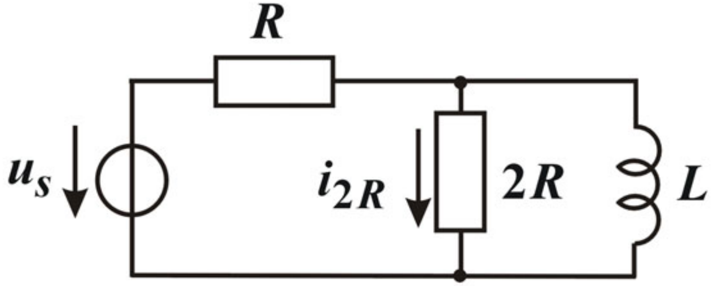
$$= 6{,}6564 e^{-j33{,}6901^{\circ}} \text{ A}$$

$$i_C(t) = 6{,}6564\cos(\omega t - 33{,}6901^{\circ})\text{A}$$

$$I_C = \frac{\left|\hat{\bar{I}}_C\right|}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}6564}{\sqrt{2}} = 4{,}7068\text{A}$$

25. Feladat,

Határozza meg a kondenzátor *2R* ellenállás áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 3\Omega,\ \ \omega L = 6\Omega,$$

$$u_s(t) = 15\cos\omega t\ \mathrm{V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 15\mathrm{V}$$

$$\hat{I}_{2R} = \frac{\hat{U}_s}{R + 2R \times j\omega L}\frac{j\omega L}{2R + j\omega L} = \frac{15}{3 + 6 \times j6} \cdot \frac{j6}{6 + j6} =$$

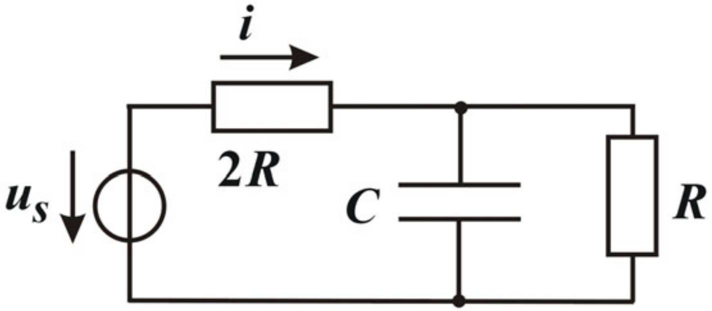
$$= \frac{15}{6 + j3} \cdot \frac{j6}{6 + j6} = (1{,}5 + j0{,}5)\mathrm{A} = 1{,}58114 e^{j18{,}4349^o}\ \mathrm{A}$$

$$6 \times j6 = \frac{j6 \cdot 6}{6 + j6} = \frac{j6}{1 + j} = 3 + j3$$

$$I_{2R} = \frac{\left|\hat{I}_{2R}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}5811}{\sqrt{2}} = 1{,}1180\mathrm{A} \qquad i_{2R}(t) = 1{,}5811\cos\left(\omega \mathrm{t} + 18{,}4349^o\right)\mathrm{A}$$

26. Feladat,

Határozza meg a feszültségforrás *i* áramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett feszültség valós effektív értékét, valamint valós időfüggvényét, ha



$$R = 2\Omega, \quad \frac{1}{\omega C} = 3\Omega,$$

$$u_s(t) = 6\cos\omega t \text{ V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 6\text{V}$$

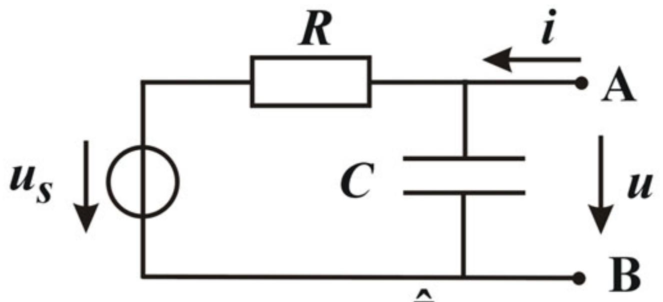
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{2R + R \times \frac{1}{j\omega C}} = \frac{6}{4 + 2 \times (-j3)} = \frac{6}{4 + 1{,}3846 - j\,0{,}9231} =$$

$$= (1{,}0825 + j0{,}1856)\text{A} = 1{,}0983 e^{j9{,}7276^\circ} \text{ A}$$

$$I = \frac{|\hat{I}|}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}0983}{\sqrt{2}} = 0{,}7766\text{A} \qquad i(t) = 1{,}0983\cos(\omega t + 9{,}7276^\circ)\text{A}$$

27. Feladat,

Határozza meg a hálózat AB kapcsira vonatkozó Thevenin helyettesítő kapcsolás belső impedanciáját, valamint a helyettesítő forrás forrás-feszültségének komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett belső impedancia komponenseit, valamint a helyettesítő forrásfeszültség valós időfüggvényét, ha

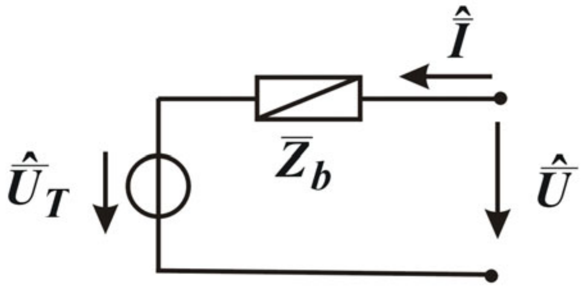


$$R = 2\Omega,\ \frac{1}{\omega C} = 3\Omega,$$

$$u_s(t) = 10\cos\omega t\ \text{V}$$

Megoldás

$$\hat{U}_s = 10\text{V}$$



$$\hat{U}_T = \hat{U}_{AB} = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 10\frac{-j3}{2-j3} =$$

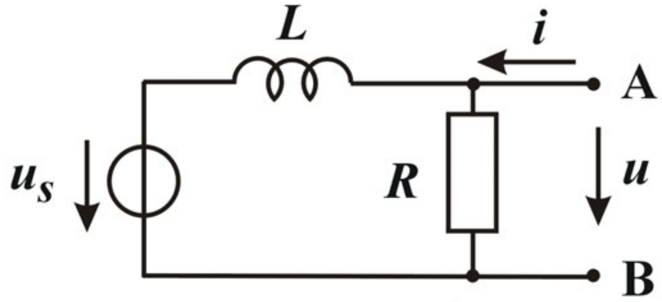
$$= (6{,}9231 - j\,4{,}6154)\text{V} = 8{,}3205 e^{-j33{,}6901^{\circ}}\,\text{V}$$

$$\overline{Z}_b = R \times \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j3 \cdot 2}{2-j3} = (1{,}3846 - j\,0{,}9231)\Omega$$

$$R_b = 1{,}3846\Omega,\ \frac{1}{\omega C_b} = 0{,}9231\Omega \qquad u_T(t) = 8{,}3205\cos(\omega t - 33{,}6901^{\circ})\text{V}$$

<u>28. Feladat,</u>

Határozza meg a hálózat AB kapcsira vonatkozó Norton helyettesítő kapcsolás belső impedanciáját, valamint a helyettesítő forrás forrásáramának komplex csúcsértékét algebrai és exponenciális alakban. Adja meg a keresett belső impedancia komponenseit, valamint a helyettesítő forrásáram valós időfüggvényét, ha

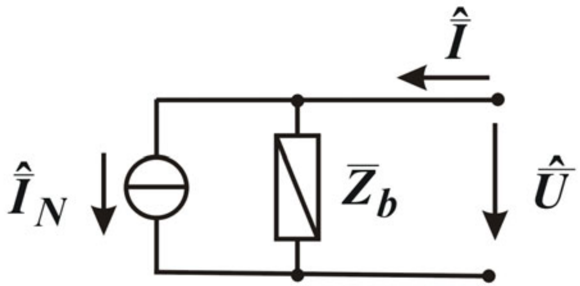


$$R = 3\Omega,\ \ \omega L = 2\Omega,$$

$$u_s(t) = 12\cos\omega t \text{ V}$$

<u>Megoldás</u>

$$\hat{\overline{U}}_s = 12\text{V}$$



$$\hat{I}_N = \hat{I}_{rz} = -\frac{\hat{\overline{U}}_s}{j\omega L} = -\frac{12}{j2} = j6\text{A} = 6e^{j90^o}\,A$$

$$i_N(t) = 6\cos\left(\omega t + 90^o\right)\text{A}$$

$$\overline{Z}_b = R \times j\omega L = \frac{j3\cdot 3}{3 + j2} = (\,0{,}9231 + j1{,}3846)\Omega$$

$$R_b = 0{,}9231\Omega,\ \ \ \omega L_b = 1{,}3846\Omega$$