TRANSZPORT FOLYAMATOK MODELLEZÉSE

Dr. Iványi Miklósné

professor emeritus

1. Konferencia

Transzport folyamatok modellezése

Tárgya: az anyagi világ objektív tulajdonságainak megismerése,
a mozgásban lévő anyag törvényszerűségeinek megismerése,

Módszere: - megfigyelés - kísérlet
- törvényszerűségek megfogalmazása
- elméletek kidolgozása - kísérleti igazolása
- alkalmazása,

Nyelve: matematika,

A mennyiségek jelölése:

- skalár mennyiségek, $x = x_n \cdot \eta$

η - a változó mértékegysége,

x_n - a változó értéke a választott mértékegység rendszerben,

-vektor mennyiségek, $\vec{x} = \vec{e}_x x_n \cdot \eta$

η - a változó mértékegysége,

x_n - a változó értéke a választott mértékegység rendszerben,

$\vec{e}_x$ - a változó irányába mutató egységvektor,

Mértékegységrendszer I

- 1889 Párizs, Nemzetközi Súly és Mértéküggyi Szervezet (m, kg, s)
- 1960 SI mértékegység rendszer

Fizikai alapmennyiségek SI egységei

Fizikai mennyiség	Egység neve	Jele
Tömeg	kilogramm	kg
Hosszúság	méter	m
Idő	másodperc	s
Elektromos áram	Amper	A
Hőmérséklet	Kelvin	K
Fényerősség	kandela	cd
Anyagmennyiség	mól	mól

Mértékegységrendszer II

SI-prefixumok

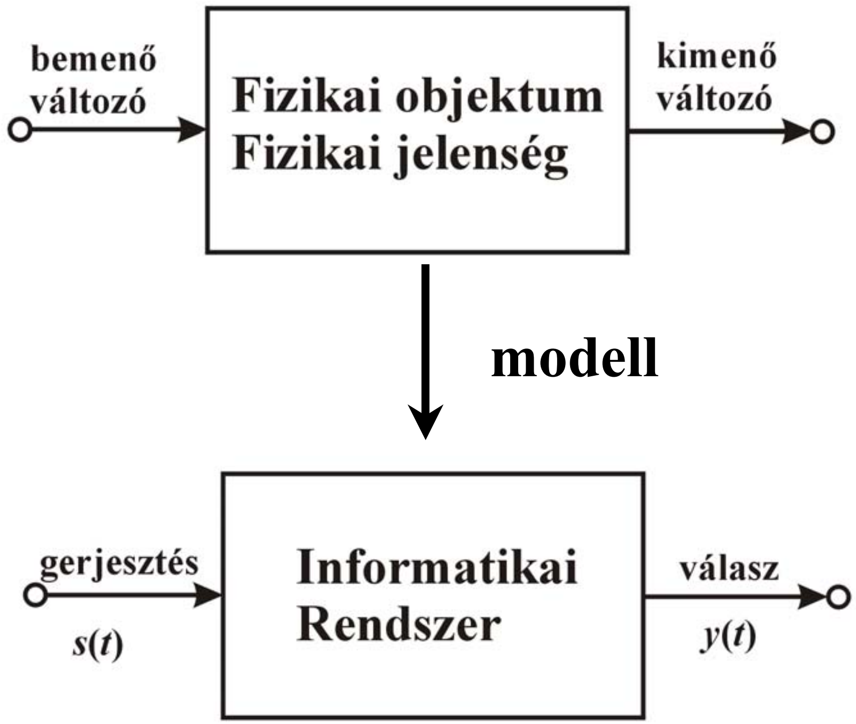
10^{18}	E	exa-	10^{-1}	d	deci-
10^{15}	P	peta-	10^{-2}	c	centi-
10^{12}	T	tera-	10^{-3}	m	mili-
10^{9}	G	giga-	10^{-6}	μ	mikro-
10^{6}	M	mega-	10^{-9}	n	nano-
10^{3}	k	kilo-	10^{-12}	p	piko-
10^{2}	h	hekto-	10^{-15}	f	femto-
10^{1}	da	deka-	10^{-18}	a	atto-

Koherens mértékegység rendszer: egymásból származtatott egységek

A transzport folyamatok modellezése és a Fizika kapcsolata,

- **Mozgástan,**
  - **kinematika,**
  - **statika,**
  - **kinetika,**
  - **szilárdságtan,**
- **Áramlástan,**
- **Hőtan,**
- **Hullámtan,**
  - **Villamosságtan, (Fizika I)**
  - **Elektromágneses hullámok,**
  - **Optikai hullámvezetők,**
- **Hangtan,**
- **Részecske-fizika,**
- **Kvantum mechanika,**
- **Mikro-, és nano-technológiák, stb.**

A Transzport folyamatok modellezésének informatikai kérdése



a gerjesztés válasz kapcsolat:

$$y(t) = \mathcal{H}\{s(t)\},$$

a rendszer operátora:

$$\boxed{\mathcal{H}\{\bullet\} = ?}$$

A vizsgálatok célja megismerni a rendszer operátorát

<u>A rendszer operátora</u>: $\boxed{\mathcal{H}\{\bullet\}=?}$

$$s_1(t)\rightarrow y_1(t)=\mathcal{H}\{s_1(t)\},$$

a) <u>lineáris</u>, ha

$$s_2(t)\rightarrow y_2(t)=\mathcal{H}\{s_2(t)\},$$

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)\rightarrow y(t)=\mathcal{H}\{s_1(t)+s_2(t)\}=y_1(t)+y_2(t),$$

a szuperpozíció elv fennáll,

$$s(t)\rightarrow y(t)=\mathcal{H}\{s(t)\},$$

b) <u>invariáns</u>, ha

$$s(t-T)\rightarrow y(t-T)=\mathcal{H}\{s(t-T)\},$$

időben késleltetett gerjesztéshez késleltetett válasz tartozik,

$$s(t)\rightarrow y(t)=\mathcal{H}\{s(t)\},$$

c) <u>kauzális</u>, ha

$$y(t_a)=\mathcal{H}\{s(t),:t\le t_a,y(t):t<t_a\},$$

t_a időpillanatbeli választ a t_a időpillanatbeli vagy korábbi gerjesztések, valamint a t_a időpillanatnál korábbi válaszok hoznak létre,

I. Kinematika

Dinamika

<u>A kinematika</u>: két tömegpont/test egymáshoz viszonyított térbeli helyzetének időbeli megváltozásával, a mozgás leírásával foglalkozik,

<u>A statika</u>: a mozgás speciális esetét, a nyugalom feltételét tárgyalja. Ekkor két test egymáshoz viszonyított helyzete időben nem változik,

<u>Az anyagi pont, tömegpont:</u> részecske v. test, amely tömege és mérete elhanyagolható a mozgásra vonatkozó egyéb méretekhez képest,
<u>A merev test</u>:
- a test alakja a mozgás során nem változik,
- kontinuum, a teret folytonosan tölti ki,
- anyagi pontok összessége, tömege és mérete van,

A testek mozgása térben és időben történik,

A tér – metrikus, a Newton-i, klasszikus mechanikában a térben történő mérés eredménye nem függ a mozgástól, a mozgó anyagtól,

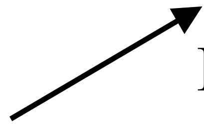
A tér egyes pontjainak helyzetét egy rögzített koordináta, v. vonatkoztatási rendszerben a $\vec{r}$ helyzetvektor írja le, a helyzetvektor hossza $|\vec{r}|$, mértékegysége: méter [m],

$$\left(1\mathrm{m} = 10^{-3}\,\mathrm{km} = 10^{2}\,\mathrm{cm} = 10^{3}\,\mathrm{mm} = 10^{6}\,\mu\mathrm{m}\right)$$

Az idő a klasszikus mechanikában független a testek egymáshoz viszonyított mozgásától és a mozgó anyagtól, a tér minden pontjában azonos módon, egyenletesen telik, mértékegysége a másodperc, szekundum [s],

$$\left(1\mathrm{s} = 10^{3}\,\mathrm{ms} = 10^{6}\,\mu\mathrm{s}\right)$$

Skalár és vektormennyiségek

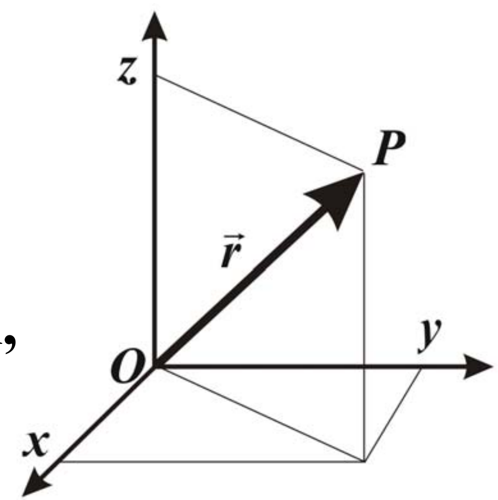
Skalár mennyiség: jellemzője, nagysága,
mértékegysége, (pl. 5 kg)
Vektormennyiség: jellemzője, nagysága, iránya,
mértékegysége, pl.  **F=3N.**

Vektor

A $P(\vec{r})$ **pont helye az ortogonális, Descartes koordináta rendszerben**

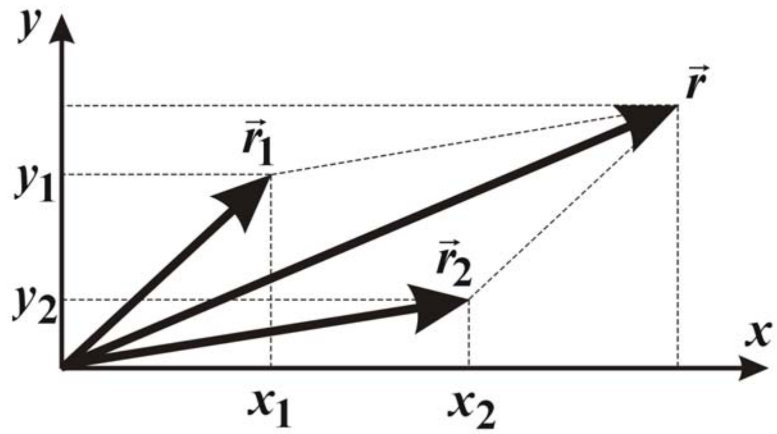
$$P(\vec{r}), \quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

x, y, z **- az** $\vec{r}$ **helyzetvektor koordináta vetületei, rendezői**



Két vektor összege

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$



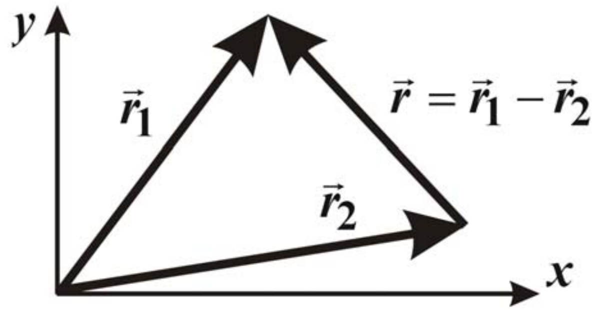
$$\vec{r}_1 = x_1\,\vec{e}_x + y_1\,\vec{e}_y + z_1\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_2 = x_2\,\vec{e}_x + y_2\,\vec{e}_y + z_2\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\vec{e}_z$$

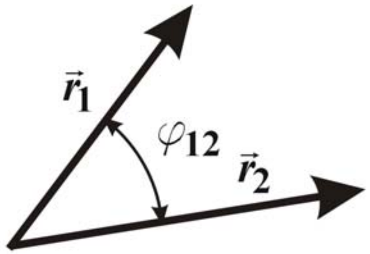
Két vektor különbsége

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

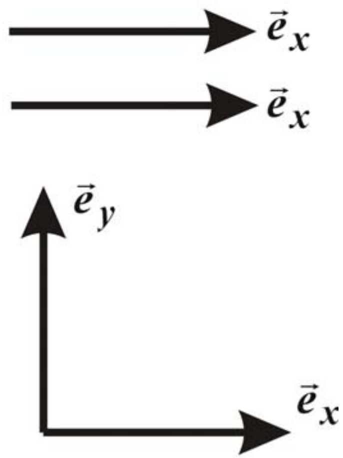


$$\vec{r} = (x_1 - x_2)\vec{e}_x + (y_1 - y_2)\vec{e}_y + (z_1 - z_2)\vec{e}_z$$

<u>Vektorok skalár szorzata</u>=skalár mennyiség



$$\boxed{r = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \stackrel{\Delta}{=} |\vec{r}_1|\,|\vec{r}_2| \cos\varphi_{12}}$$



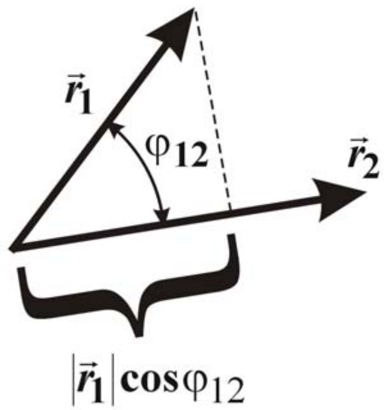
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1,$$
$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1.$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0,$$
$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0.$$

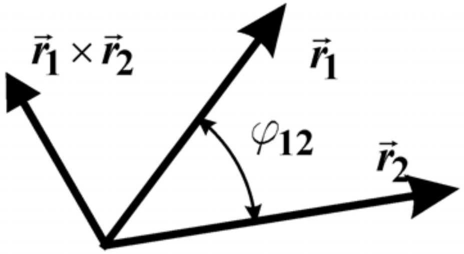
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \left(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z\right)\cdot\left(x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z\right)$$

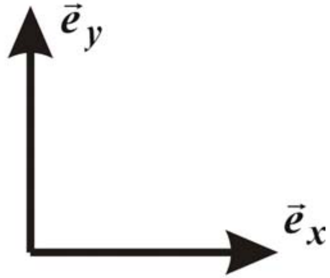
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 = |\vec{r}_2|\,\underbrace{|\vec{r}_1| \cos\varphi_{12}}_{\vec{r}_1 \text{ vetülete}} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$



Vektorok vektoriális szorzata=vektor mennyiség





$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y.$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \overset{\Delta}{=} |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \sin\varphi_{12} \cdot \vec{e}_r}$$

$$\boxed{\vec{r} \perp (\vec{r}_1, \vec{r}_2)} \qquad \boxed{\vec{e}_r \perp (\vec{r}_1, \vec{r}_2)}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0,$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0.$$

A vektoriális szorzat kiértékelése determináns segítségével

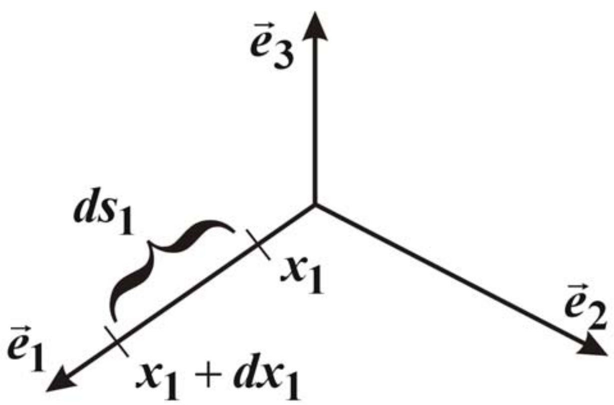
$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x (y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{e}_y (x_1 z_2 - z_1 x_2) + \vec{e}_z (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

A) Tömegpont kinematikája

A mozgás leírása derékszögű koordináta rendszerben

A derékszögű koordináta rendszer koordináta változói: $x_1, x_2, x_3,$



A koordináta tengelyek irányában történő elmozdulások esetén az megtett út:

$$ds_1 = g_1 dx_1, \quad ds_2 = g_2 dx_2, \quad ds_3 = g_3 dx_3,$$

g_1, g_2, g_3 **- koordináta függvények,**

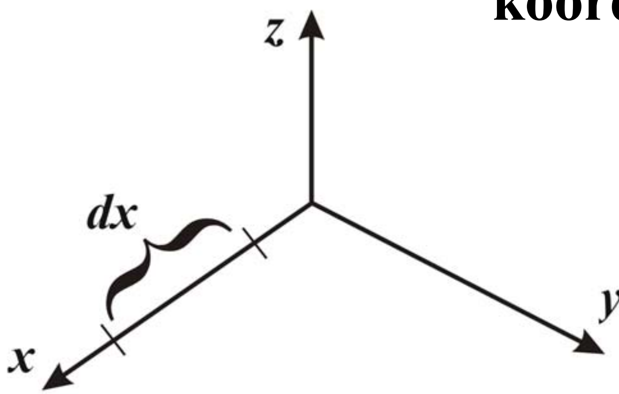
A koordináta tengelyek irányába mutató egységvektorok:

$$\vec{e}_1, \quad |\vec{e}_1| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0,$$

$$\vec{e}_2, \quad |\vec{e}_2| = 1, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0,$$

$$\vec{e}_3, \quad |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0,$$

Descartes koordináta rendszer



koordináta változói: $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$

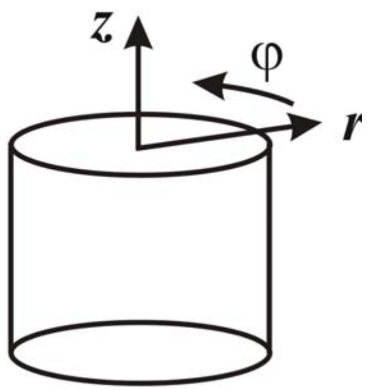
a koordináta tengelyek irányában történő elmozdulások esetén a megtett út (pályaszakasz):

$$ds_1 = dx, \quad ds_2 = dy, \quad ds_3 = dz,$$

a koordináta függvények: $g_1 = 1,\ \ g_2 = 1,\ \ g_3 = 1,$

a koordináta irányú egységvektorok: $\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z,$

Henger koordináta rendszer



koordináta változói: $x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z,$

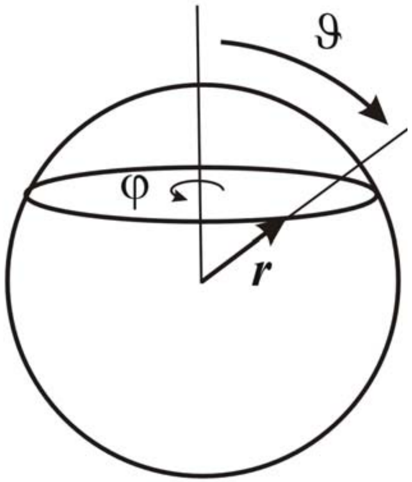
a koordináta tengelyek irányában történő elmozdulások esetén az megtett út:

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\varphi, \quad ds_3 = dz,$$

a koordináta függvények: $g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = 1,$

a koordináta irányú egységvektorok: $\vec{e}_r, \ \vec{e}_\varphi, \ \vec{e}_z,$

Gömbi koordináta rendszer



koordináta változói:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \vartheta, \quad x_3 = \varphi,$$

a koordináta tengelyek irányában történő elmozdulások esetén az megtett út:

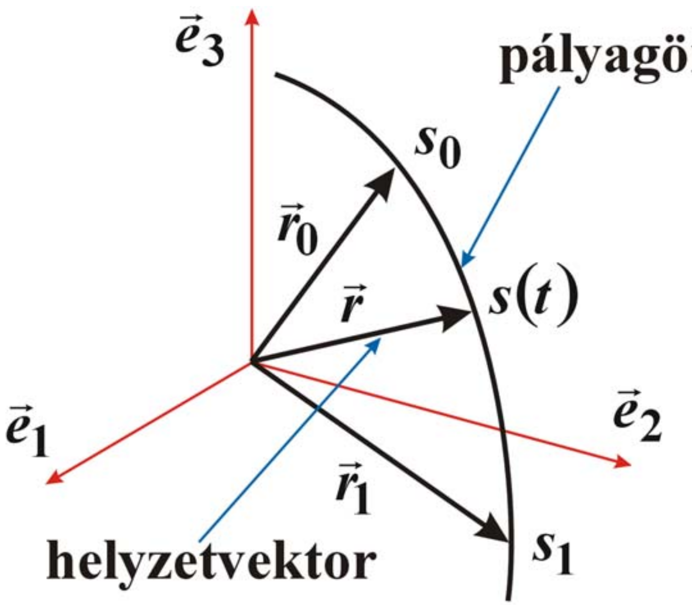
$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r\,d\vartheta, \quad ds_3 = r \sin\vartheta\, d\varphi,$$

a koordináta függvények: $g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = r\sin\vartheta,$

a koordináta irányú egységvektorok: $\vec{e}_r, \quad \vec{e}_\vartheta, \quad \vec{e}_\varphi,$

A mozgás leírása

Az anyagi pont térbeli és időbeli helyváltoztatása az $\vec{r}(t)$ helyzetvektorral adható meg, amely az anyagi pont mozgástörvényét írja le.



A mozgástörvény:
az $\vec{r}$ helyzetvektornak az s pályagörbén való mozgása,

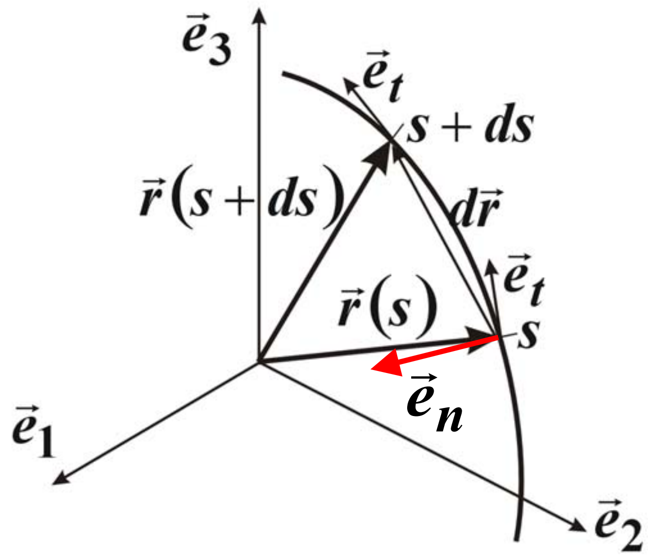
A helyzetvektor és a pályagörbe kapcsolata:

$$t = t_0,\quad s(t_0) = s_0,\quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}(s(t_0)) = \vec{r}_0,$$

$$t = t_1,\quad s(t_1) = s_1,\quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}(s(t_1)) = \vec{r}_1,$$

$$t,\quad s(t) = s,\quad \vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)) = \vec{r},$$

A pályagörbe, görbületi sugár, a pálya síkja, binormális



Az $s(t)$ pályagörbén ds pályaszakasz megtételekor a helyzetvektor $d\vec{r}$ értékkel változik meg,

$$d\vec{r} \approx \vec{e}_t\, ds,$$

$\vec{e}_t$- a pálya érintője irányába mutató egységvektor,

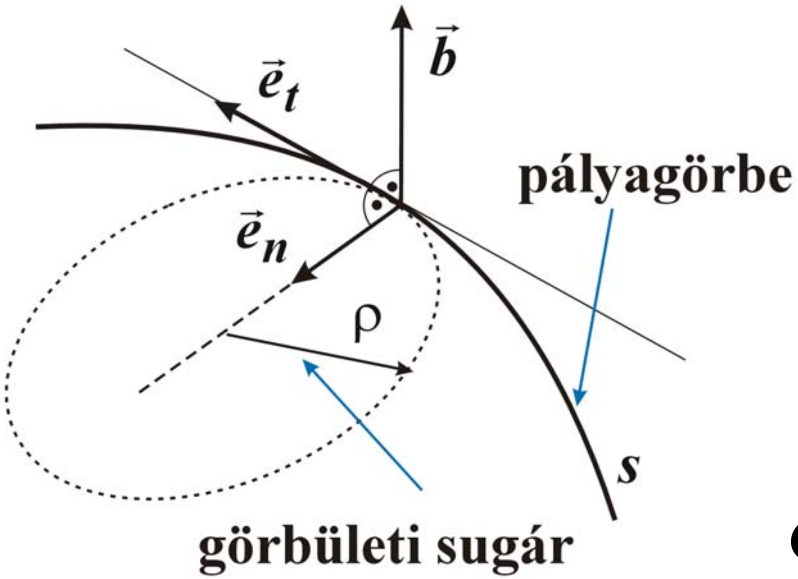
$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}, \qquad |d\vec{r}| \approx ds \qquad \vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

A pálya irányába eső egységvektornak a pálya szerinti deriváltja:

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1, \quad \frac{d}{ds}(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 2\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 0,$$

azaz a pálya irányába eső egységvektor és annak a pályagörbe szerinti deriváltja merőleges egymásra,

A pálya irányába eső egységvektornak a pályagörbe szerinti deriváltja a pályagörbére merőleges, $\vec{e}_n$ normális vektor,



$$\vec{e}_n = \frac{\dfrac{d\vec{e}_t}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{e}_t}{ds}\right|} = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds},$$

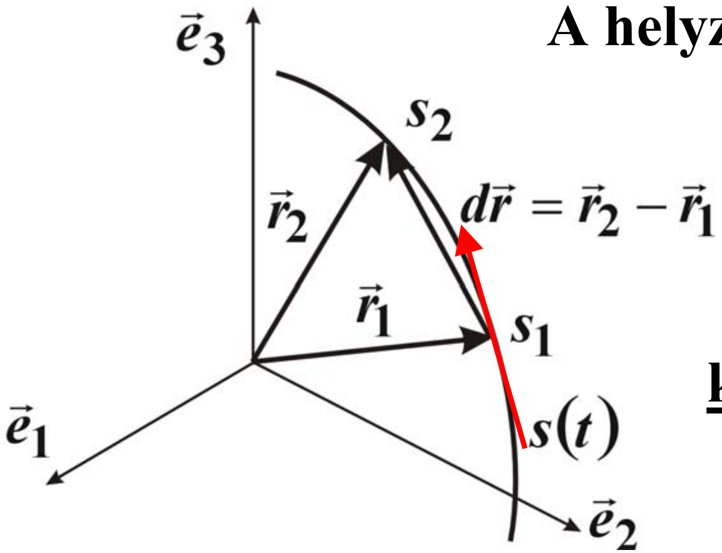
ρ = a pálya görbületi sugara

$$G = \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \frac{1}{\rho} \quad \text{= a pálya görbülete}$$

$\vec{e}_t, \vec{e}_n$ vektorok a pálya simuló síkját határozzák meg,

a pálya simuló síkjára merőleges a binormális vektor, $\vec{e}_t \times \vec{e}_n = \vec{b}$

A sebesség, pályasebesség



A helyzetvektor a pályagörbe pontjai mentén mozog

$$t = t_1, \quad s(t_1) = s_1, \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1,$$

$$t = t_2, \quad s(t_2) = s_2, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2,$$

közepes v. átlagsebesség $\vec{v}_k = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$, [m/s],

pillanatnyi sebesség $\vec{v}(t_1) = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_1}$, $\boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$

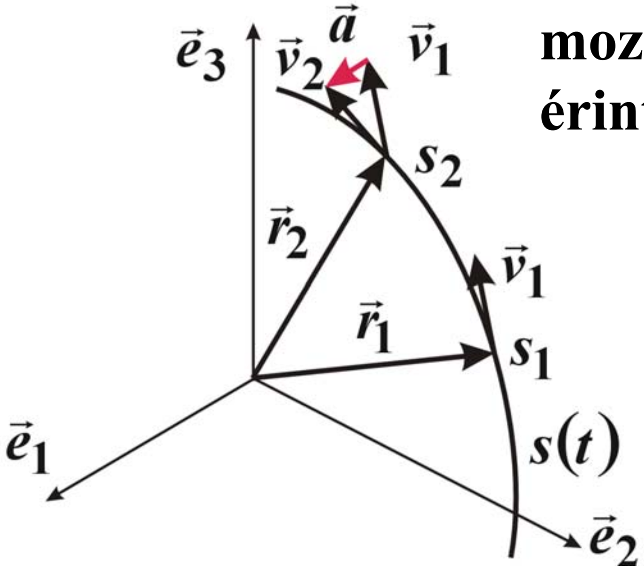
ha a helyzetvektor $\vec{r}(s(t))$ **, akkor**
a pillanatnyi sebesség a pályagörbe érintője irányába mutat

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{e}_t \dot{s} = \vec{e}_t v, \quad \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{e}_t\, \dot{s} = \vec{e}_t v}$$

pályasebesség

A gyorsulás és komponensei



A helyzetvektor a pályagörbe pontjai mentén mozog, a pillanatnyi sebesség a pályagörbe érintője irányába mutat

$$t = t_1, \quad s(t_1) = s_1, \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1,$$

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1 = \vec{e}_t \dot{s}(t_1),$$

$$t = t_2, \quad s(t_2) = s_2, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2,$$

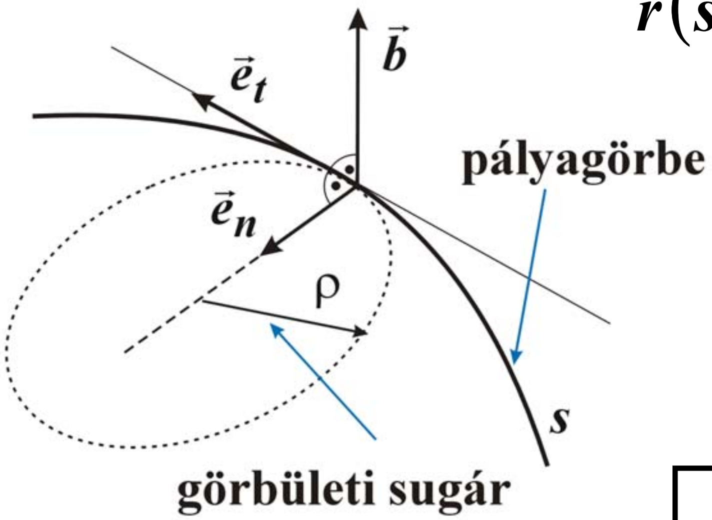
$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}_2 = \vec{e}_t \dot{s}(t_2),$$

A tömegpont gyorsulása

$$\vec{a}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=t_1}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}, \ [\mathrm{m/s^2}],}$$

A helyzetvektor a pályagörbe pontjai mentén mozog, a pillanatnyi sebesség a pályagörbe érintője irányába mutat



$$\dot{\vec{r}}(s(t))=\vec{v}(s(t))=\vec{e}_t(s(t))\,\dot{s}(t)=\vec{e}_t(s(t))\cdot v(t),$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(s(t))}{dt}=\underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}_{\vec{e}_n/\rho}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}v+\vec{e}_t(s(t))\frac{dv}{dt}$$

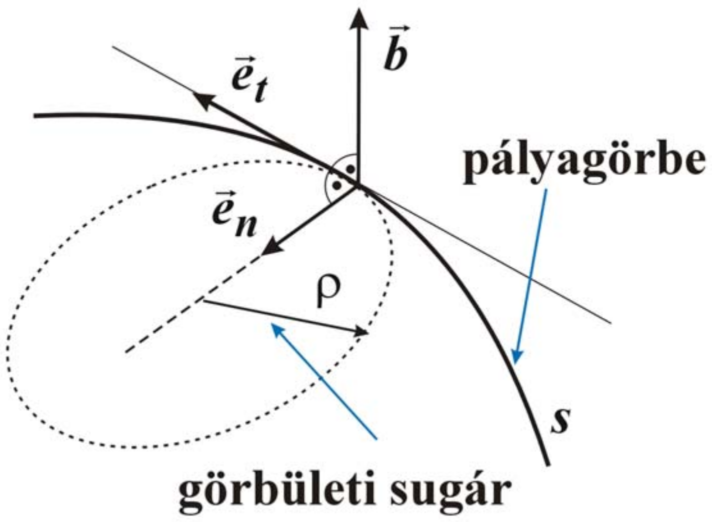
$$\boxed{\vec{a}(t)=\left(\underbrace{\vec{e}_n\frac{1}{\rho}v^2}_{\vec{e}_n a_n}+\underbrace{\vec{e}_t a_t}_{\vec{e}_t a_t}\right)\ [\mathrm{m/s^2}]}$$

$$\boxed{\vec{a}=\vec{e}_n a_n+\vec{e}_t a_t}$$

a pályagörbére merőleges irányú gyorsulás komponens

a pályagörbe érintője irányú gyorsulás komponens

A gyorsulás a pályagörbe simuló síkjában van, azaz merőleges a binormális vektorra,



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{e}_n\frac{1}{\rho}v^2+\vec{e}_t a_t\right)\cdot\vec{b}\;=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{e}_n\frac{1}{\rho}v^2+\vec{e}_t a_t\right)\cdot\left(\vec{e}_t\times\vec{e}_n\right)$$

Matematikai azonosság, a vektori szorzat ciklikus:

$$\vec{z}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{z}\right)=\vec{v}\cdot\left(\vec{z}\times\vec{u}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{\rho}v^2\vec{e}_t\underbrace{\left(\vec{e}_n\times\vec{e}_n\right)}_{0}+a_t\underbrace{\left(\vec{e}_t\times\vec{e}_t\right)}_{0}\cdot\vec{e}_n=0$$

Összefoglalva

$s(t)$ -pályagörbe, $\vec{r}(s(t))$ -helyzetvektor,

a pillanatnyi sebesség: $\boxed{\vec{v}(s(t)) = \dot{\vec{r}}(s(t)) = \vec{e}_t v = \vec{e}_t \dot{s}(t)}$

$\vec{e}_t$ - a pályagörbe érintő irányú egységvektora,

$v(t) = \dot{s}(t)$ - pályasebesség,

a gyorsulás: $\boxed{\vec{a}(s(t)) = \dot{\vec{v}}(s(t)) = \ddot{\vec{r}}(s(t)) = \vec{e}_n a_n + \vec{e}_t a_t}$

$a_n = \frac{1}{\rho} v^2$, - a pályagörbére merőleges irányú gyorsulás,

$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$, - a pályagörbe menti gyorsulás,

ρ - a pályagörbe görbületi sugara,

Összefoglalva

ha az $\vec{a}(s(t))$ ismert, az inverz kapcsolat:

a pillanatnyi sebesség:

$$\vec{v}(s(t)) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{0} \vec{a}(\tau)\, d\tau}_{\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0} + \int_{\tau=0}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau = \vec{v}_0 + \int_{\tau=0}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau$$

$\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0$ kezdeti érték, a megfigyelés kezdetén a tömegpont sebessége

a helyzetvektor:

$$\vec{r}(s(t)) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{0} \vec{v}(\tau)\, d\tau}_{\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0} + \int_{\tau=0}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau = \vec{r}_0 + \int_{\tau=0}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau$$

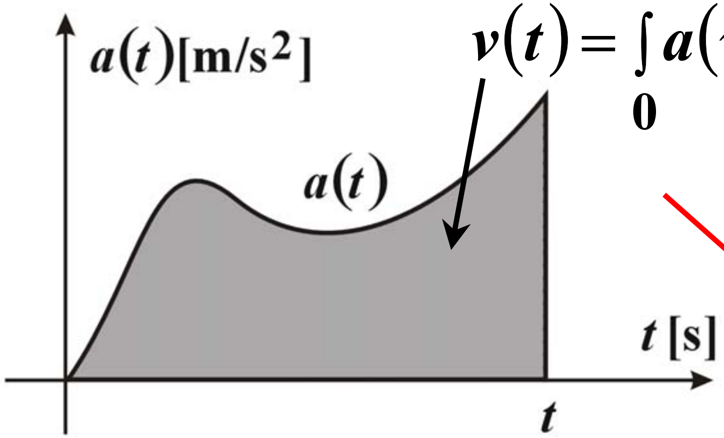
$\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0$ kezdeti érték, a megfigyelés kezdetén a tömegpont helyzetvektora

<u>Foronómiai görbék</u>, a tömegpont mozgását szemléltető görbék,

$$a(t) = a_t(t)$$

pályagyorsulás-idő karakterisztika,

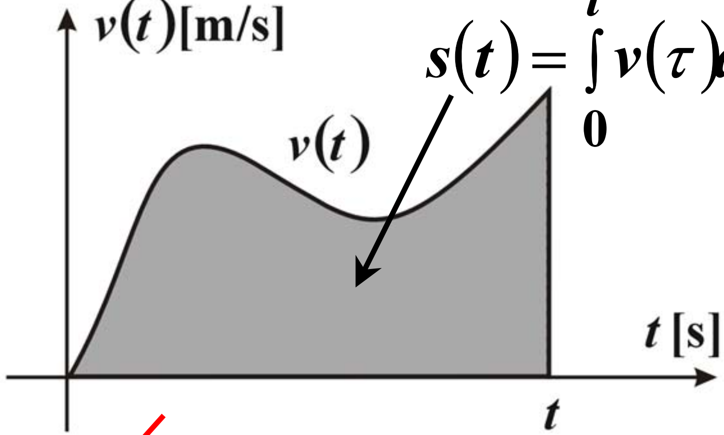
$$v(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$$



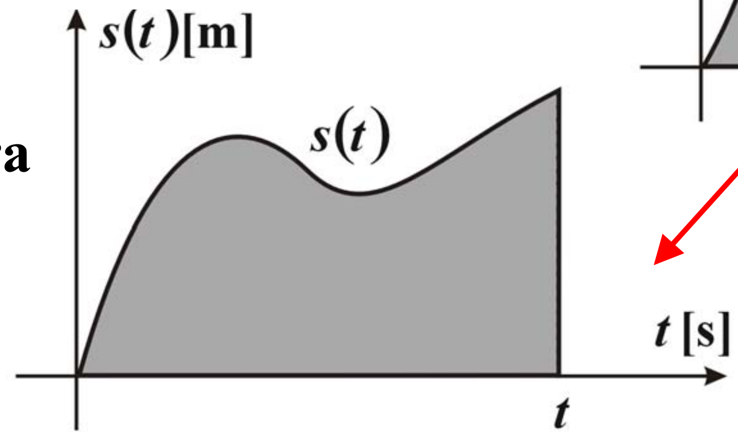
$$v(t)$$

pályasebesség-idő karakterisztika,

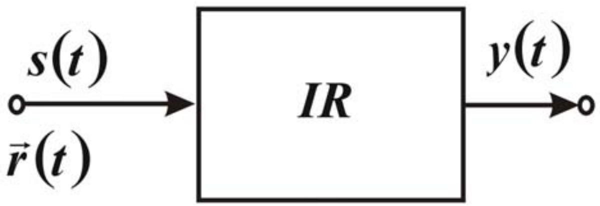
$$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$$



$s(t)$ menetábra



A kinematikai analízis feladata,



direkt feladat
analízis

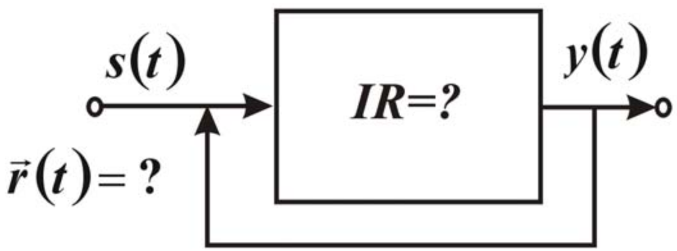
$\dot{\vec{r}}, \vec{v}, \vec{\omega},$
$\ddot{\vec{r}}, \vec{a}, \vec{\varepsilon},$
$\vec{I}, \dot{\vec{I}}, \vec{F},$

$\mathcal{H}\{s(t)\}$ **-ismert,**

adott gerjesztéshez keresett a válasz,

$$y(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} = ?$$

A kinematikai szintézis feladata,



inverz feladat
szintézis

$\dot{\vec{r}}, \vec{v}, \vec{\omega},$
$\ddot{\vec{r}}, \vec{a}, \vec{\varepsilon},$
$\vec{I}, \dot{\vec{I}}, \vec{F},$

adott válasz estén keresett a rendszer operátora és a gerjesztés,

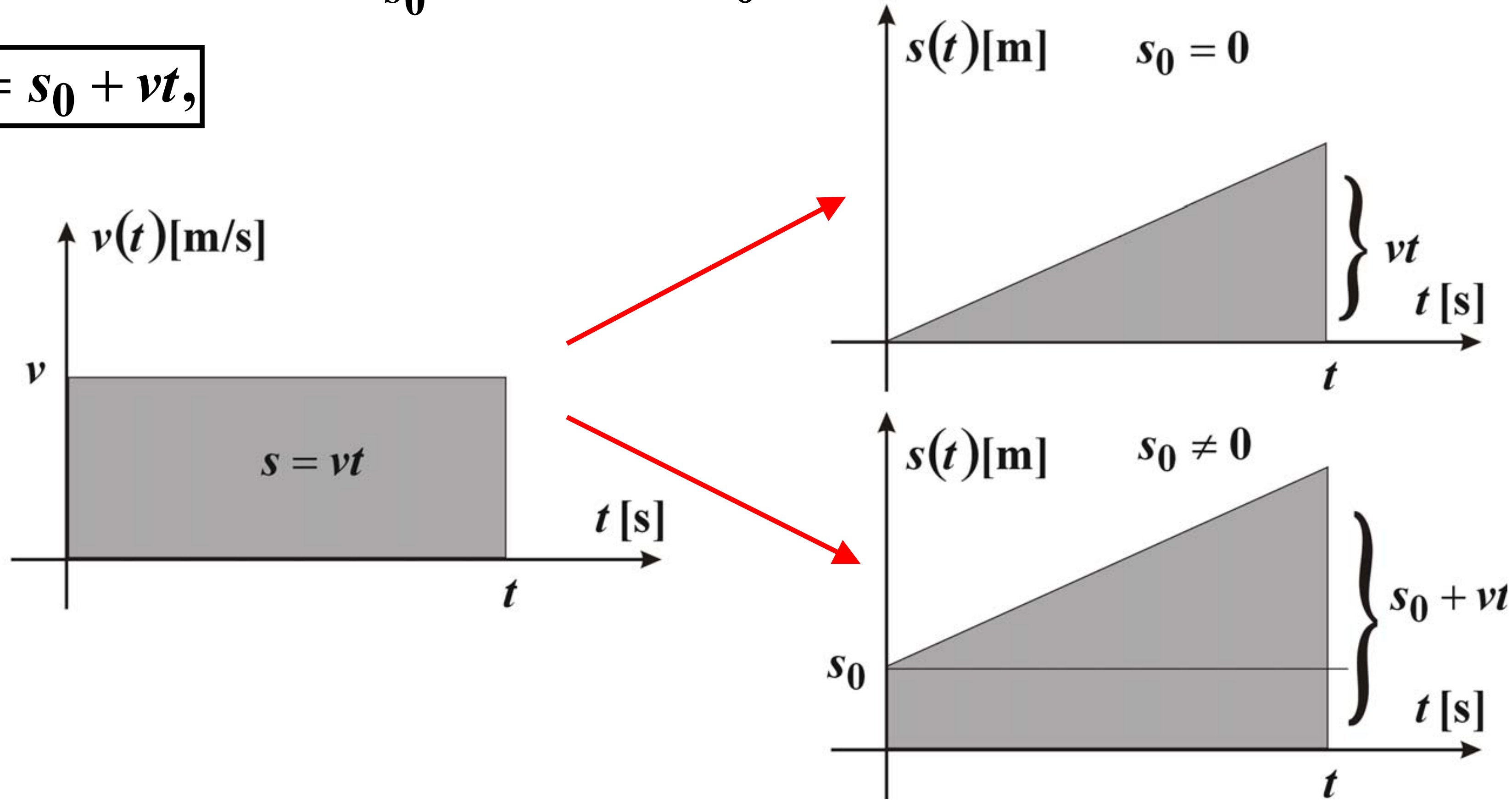
robotika

Speciális esetek,

1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás, $\vec{a}(t) \equiv 0, \quad v(t) = v = \text{áll.}$

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad ds = v\,dt, \quad \int_{s_0}^{s} ds = s - s_0 = \int_0^t v\,d\tau = vt,$$

$$\boxed{s = s_0 + vt,}$$



2. Egyenletesen gyorsuló mozgás,

$$\boxed{a_t(t) \equiv a = \text{áll},}$$

ha a $t = 0$ pillanatban $\vec{v}(0) = \vec{v}_0, \quad s(0) = s_0,$

a sebesség:

$$a = \frac{dv(t)}{dt}, \qquad \int_{v_0}^{v} dv = v - v_0 = \int_0^t a d\tau = at, \qquad \boxed{v(t) = v_0 + at,}$$

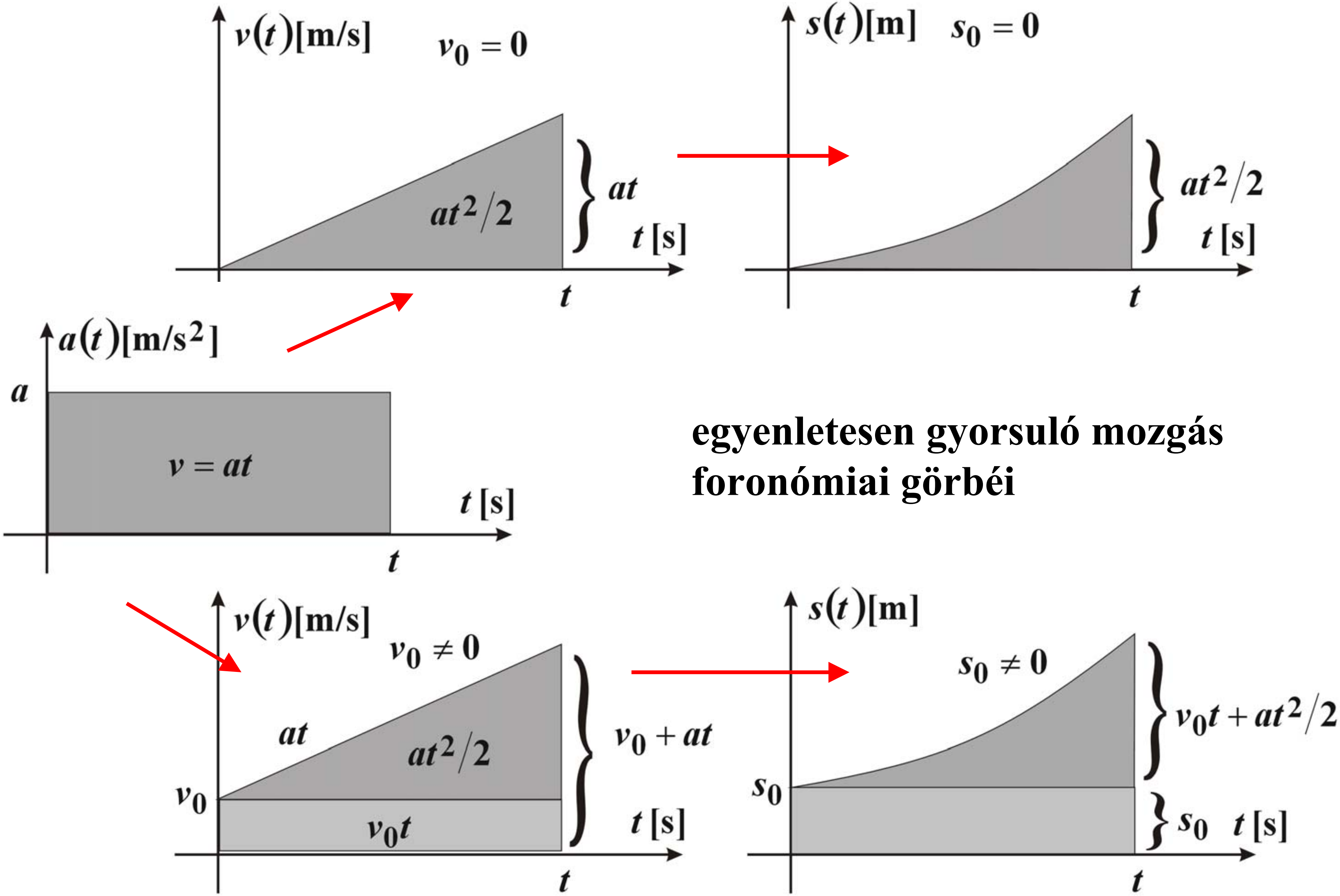
a gyorsuló mozgás ideje: $\quad t = \dfrac{v - v_0}{a}$

$$\left(t = \frac{\vec{v}}{\vec{a}} = \frac{\vec{v}}{\vec{a}} \cdot \frac{\vec{a}}{\vec{a}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right),$$

a megtett út: $\quad v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}, \qquad \displaystyle\int_{s_0}^{s} ds(\tau) = \int_0^t v(\tau) d\tau,$

$$s - s_0 = \int_0^t (v_0 + a\tau) d\tau = v_0 t + a\frac{t^2}{2}, \qquad \boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2},}$$

$$s(t) = s_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = s_0 + \frac{1}{2}\frac{\left(v^2 - v_0^2\right)}{a},$$



egyenletesen gyorsuló mozgás foronómiai görbéi

<u>3. A hajítás</u>, Gallilei, Newton: a Föld közelében a gravitáció hatására fellépő mozgások leírása,

A szabadon eső test g=9,81 m/s^2 ~10 m/s^2 gyorsulással esik a föld felé,

A hajítás egy egyenes vonalú egyenletes mozgás és egy egyenletesen gyorsuló mozgás eredője,

A mozgástörvény: $t = t_0, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0,$

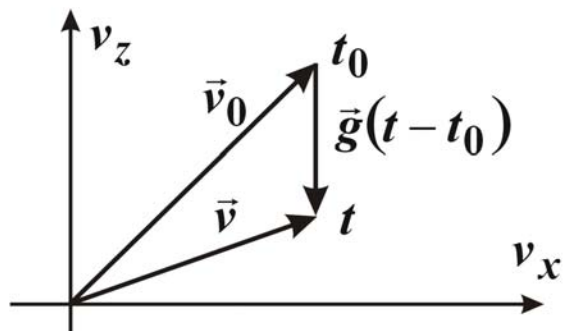
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} = \acute{a}ll,}$$

<u>A sebesség</u> a *t* időpillanatban $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g},$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{g}\, d\tau = \vec{g}(t - t_0),$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0)}$$

hodográf



A helyzetvektor: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},\ d\vec{r} = \vec{v}dt,\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0)$

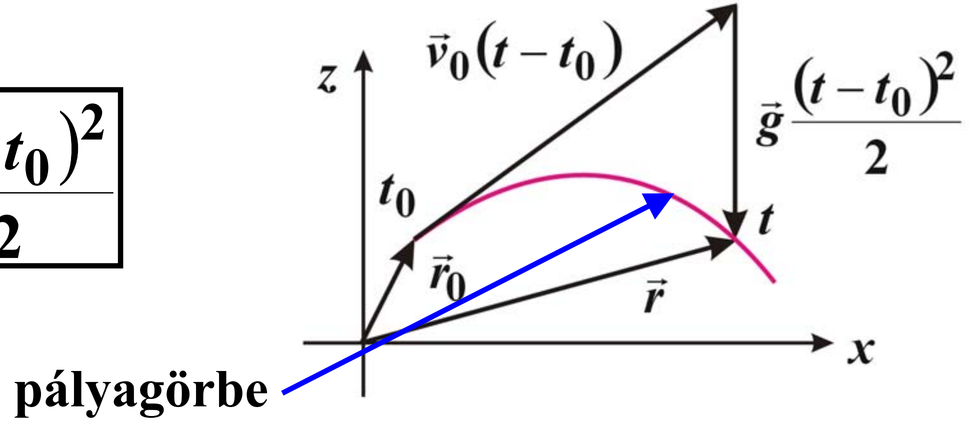
$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 d\tau + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \vec{g}(\tau - t_0) d\tau}$$

helyettesítéses integrál

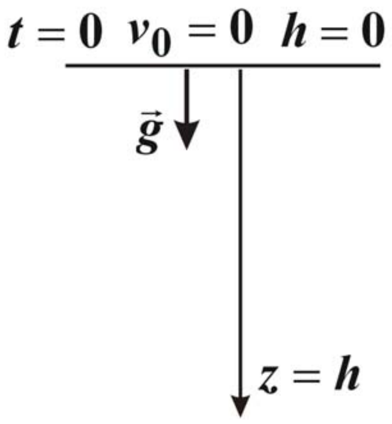
$$\tau - t_0 = x, \qquad d\tau = dx, \quad \longrightarrow \quad \tau = t_0,\ x = 0, \qquad \tau = t,\ x = t - t_0,$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{g}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{t-t_0} = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{g}\frac{(t - t_0)^2}{2},$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{g}\frac{(t - t_0)^2}{2}}$$



3.a. A szabadesés, a=g=9,81 m/s^2 , állandó,



$$v = v_0 + gt, \longrightarrow \boxed{v = gt}$$

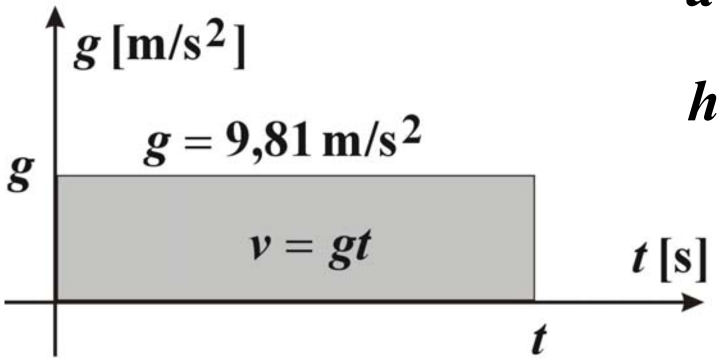
$$h = h_0 + v_0 t + g\frac{t^2}{2}, \longrightarrow \boxed{h = g\frac{t^2}{2}}$$

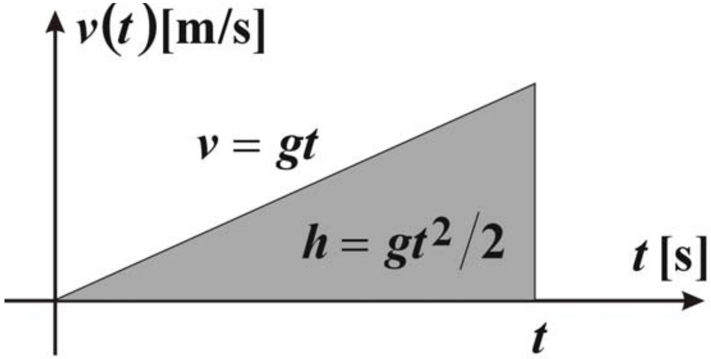
a h út megtételéhez szükséges idő: $\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

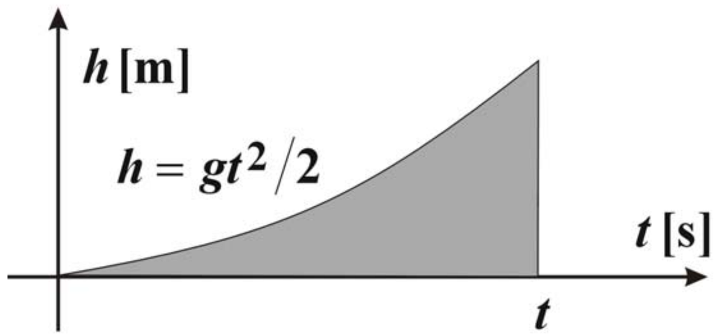
h út megtétele után a sebesség:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

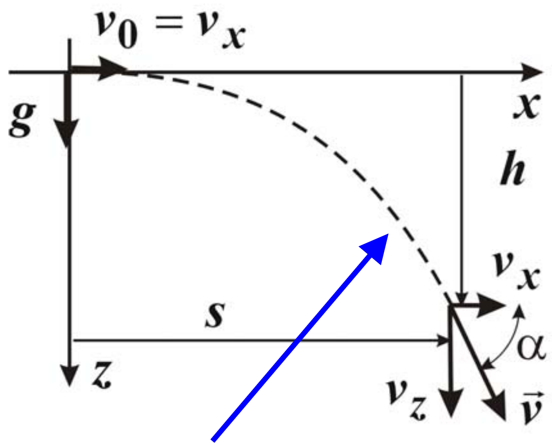
$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$







3.b. A vízszintes hajítás, egy függőleges irányú gyorsuló mozgás és egy vízszintes irányú egyenletes sebességű mozgás eredője,



pályagörbe

a t=0 pillanatban

vízszintes irányban: $a_x = 0, \quad v_x = v_0 =$ áll.

függőleges irányban: $a_z = g, \quad v_y = 0,$

a t pillanatban

vízszintes irányban:

$$a_x = 0, \quad v_x = v_0, \quad s = v_0 t$$

függőleges irányban:

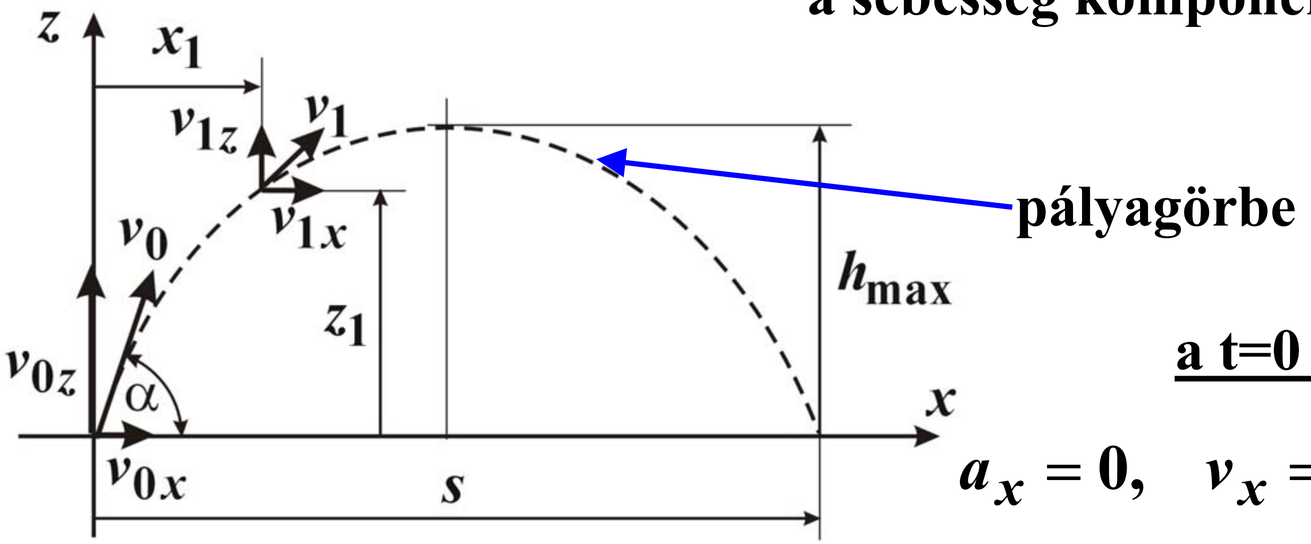
$$a_z = g, \quad v_z = gt, \quad h = g\frac{t^2}{2},$$

a sebesség vektor: $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2},$

a sebesség vektor iránya: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_z}{v_x},$

3.c. A ferde hajítás, α szög alatt hajítva el a tömegpontot,

a sebesség komponensek:



$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0z} = v_0 \sin\alpha,$$

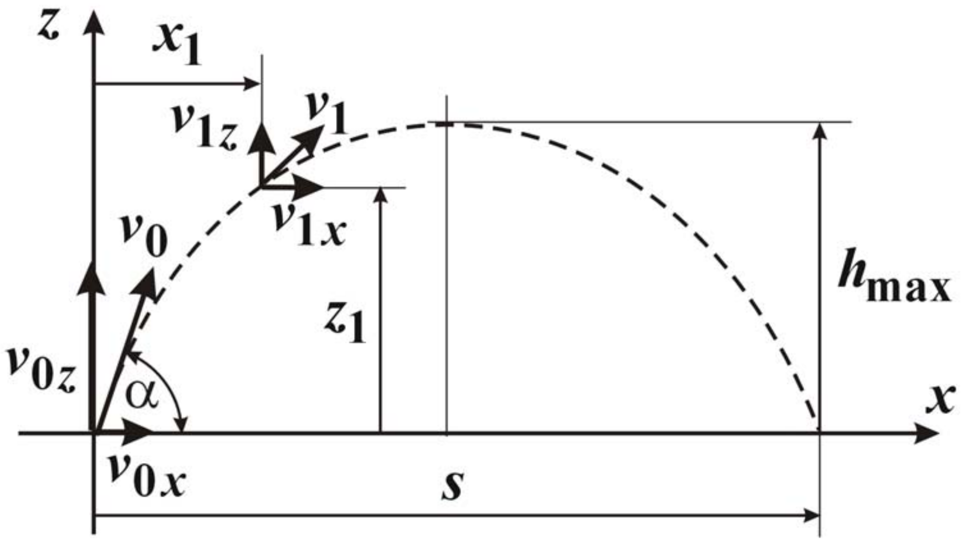
a t=0 pillanatban

$$a_x = 0, \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad x = 0,$$
$$a_z = -g, \quad v_z = v_{0z} = v_0 \sin\alpha, \quad z = 0,$$

a t_1 pillanatban

$$a_x = 0, \quad v_{1x} = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad x_1 = v_{1x} t_1 = v_0 \cos\alpha \, t_1,$$
$$a_z = -g, \quad v_{1z} = v_{0z} - g t_1 = v_0 \sin\alpha - g t_1,$$
$$z_1 = v_{0z} t_1 - g \frac{t_1^2}{2} = v_0 \sin\alpha \, t_1 - g \frac{t_1^2}{2}, \qquad v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2}$$

Az emelkedés időtartama:



$$v_z = v_{0z} - gt = v_0 \sin\alpha - gt = 0,$$

$$t_{em} = \frac{v_{0z}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

Az emelkedés maximális magassága:

$$h_{max} = v_{0z} t_{em} - g\frac{t_{em}^2}{2},$$

$$h_{max} = v_{0z}\frac{v_{0z}}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{0z}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0z}^2}{2g},$$

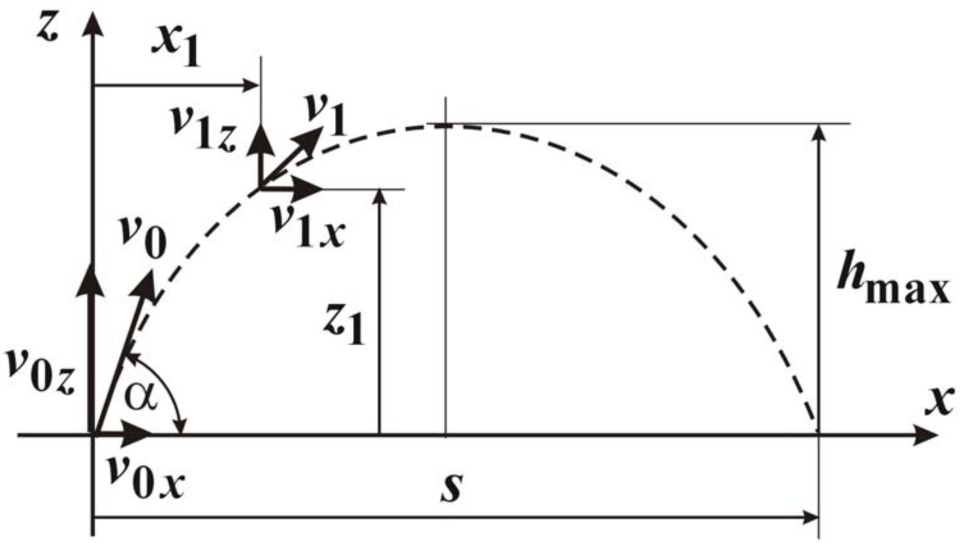
$$h_{max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

A süllyedés ideje:

$$h_{max} = \frac{g}{2} t_s^2 = \frac{v_{0z}^2}{2g},$$

$$t_s = \sqrt{\frac{v_{0z}^2}{g^2}} = \frac{v_{0z}}{g} = t_{em},$$

A teljes repülés ideje: $t_{rep} = t_{em} + t_s = 2t_{em} = \dfrac{2v_{0z}}{g},$



A vízszintesen megtett út:

$$s = v_{0x} t_{rep} = v_{0x} \frac{2v_{0z}}{g},$$

$$s = \frac{2v_0 \cos\alpha \cdot v_0 \sin\alpha}{g},$$

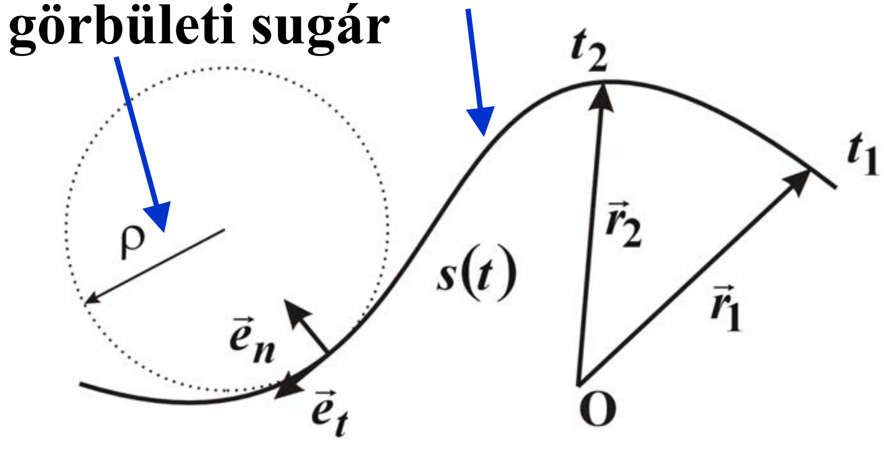
$$s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g},$$

Megjegyzés:

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

<u>4. Mozgás görbe vonalú pályán,</u>

<u>Emlékeztető:</u>



a helyzetvektor: $\vec{r}(s(t))$,

a sebességvektor:

$$\vec{v}(s(t)) = \dot{\vec{r}}(s(t)) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{e}_t(s(t))}\frac{ds}{dt} = \vec{e}_t v,$$

a pályagörbe érintő vektora: $\vec{e}_t(s(t))$

a gyorsulásvektor:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(s(t)) = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e}_t(s(t))}{dt}}\,v + \vec{e}_t\frac{dv}{dt},$$

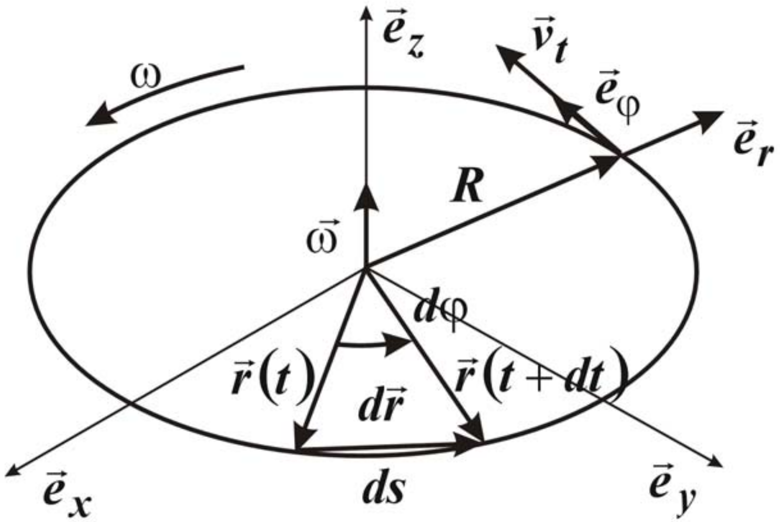
$$\underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}_{\vec{e}_n/\rho}\frac{ds}{dt}v = \frac{\vec{e}_n}{\rho}v^2$$

$$\vec{a}(t) = \vec{e}_n\frac{v^2}{\rho} + \vec{e}_t a_t, \quad [\mathrm{m/s^2}],$$

$$\vec{a} = \vec{e}_n a_n + \vec{e}_t a_t, \quad \underbrace{a_n = \frac{v^2}{\rho}}_{\text{a pályára merőleges irányú gyorsulás}}, \quad \underbrace{a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v}}_{\text{a pályamenti, tangenciális irányú gyorsulás}}$$

a pályára merőleges irányú gyorsulás **a pályamenti, tangenciális irányú gyorsulás**

4.1. Mozgás görbe vonalú síkpályán, körmozgás,



a tömegpont helyzetvektora:

$$\vec{r} = R\,\vec{e}_r(\varphi(t)),$$

a tömegpont elmozdulása:

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = ds\,\vec{e}_\varphi(t),$$

$$ds(t) = R\,d\varphi(t),$$

a tömegpont sebessége:

$$\vec{v}(s(t)) = \dot{\vec{r}}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{e}_\varphi\, R\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega=\dot{\varphi}} = \vec{e}_\varphi v,$$

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi}$$

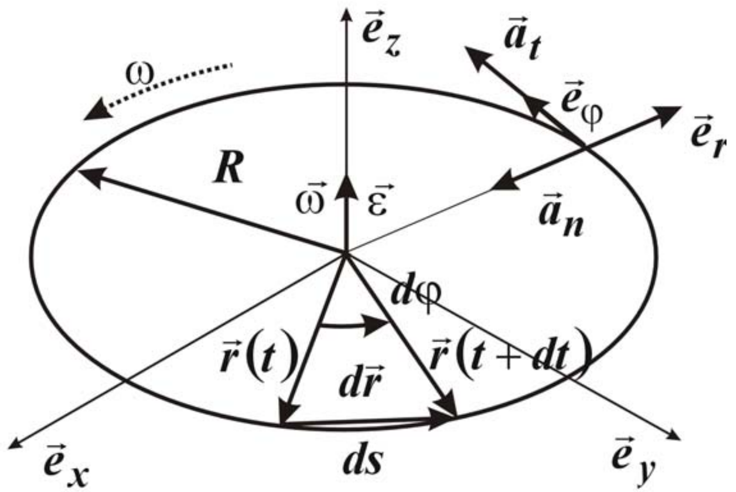
kerületi/pálya sebesség nagysága: $R\omega = v,$

a szögsebesség: $\boxed{\omega = \dot{\varphi},}$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_r \longrightarrow \vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi = \underbrace{\omega\vec{e}_z}_{\vec{\omega}} \times \underbrace{\vec{e}_r R}_{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z}$$



a tömegpont gyorsulása:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{1}+\underbrace{\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}}_{2}$$

1 → $$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}=\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\omega=\dot{\varphi}}\vec{e}_z\times\vec{r}=R\ddot{\varphi}(t)\underbrace{\vec{e}_z\times\vec{e}_r}_{\vec{e}_\varphi}=R\underbrace{\ddot{\varphi}}_{\ddot{\varphi}=\varepsilon}(t)\vec{e}_\varphi=a_t\,\vec{e}_\varphi=\vec{a}_t,$$

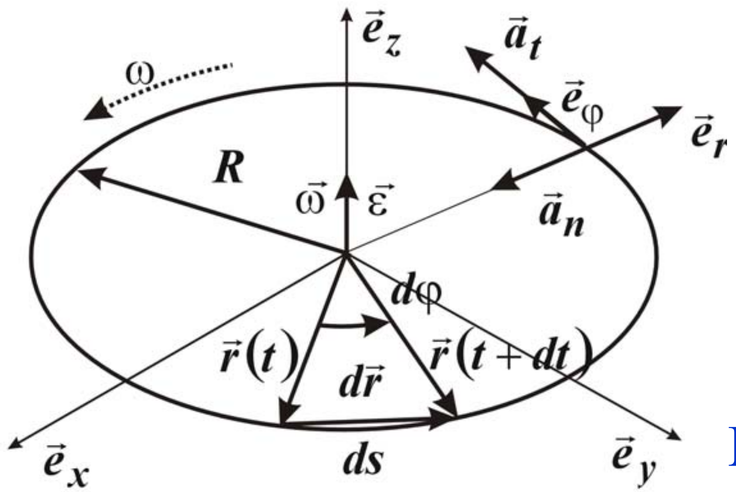
$\ddot{\varphi}=\varepsilon$

ε **-szöggyorsulás**

$$\dot{\vec{\omega}}=\vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\,\vec{e}_z=\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z,\qquad \vec{r}=R\,\vec{e}_r,\qquad \vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\cdot\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a}_t=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r},}\qquad \boxed{a_t=R\varepsilon,}$$

kerületi/szöggyorsulás,
pályamenti gyorsulás,



a tömegpont gyorsulása:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{r}=R\,\vec{e}_r,$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{1}+\underbrace{\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}}_{2}$$

Matematika:

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{z})=(\vec{u}\cdot\vec{z})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{z}$$

2 $\rightarrow$ $$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{\vec{\omega}\perp\vec{r},\rightarrow\vec{\omega}\cdot\vec{r}\equiv 0}\vec{\omega}-\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})}_{\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}=|\vec{\omega}|^2=\omega^2}\vec{r}=-\omega^2\vec{r}=-\omega^2R\,\vec{e}_r=\vec{a}_n$$

$$\boxed{\vec{a}_n=\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\omega^2\vec{r},} \qquad \boxed{a_n=-R\omega^2,}$$

a pályára merőleges irányú gyorsulás, centripetális gyorsulás

A körmozgás gyorsulása

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

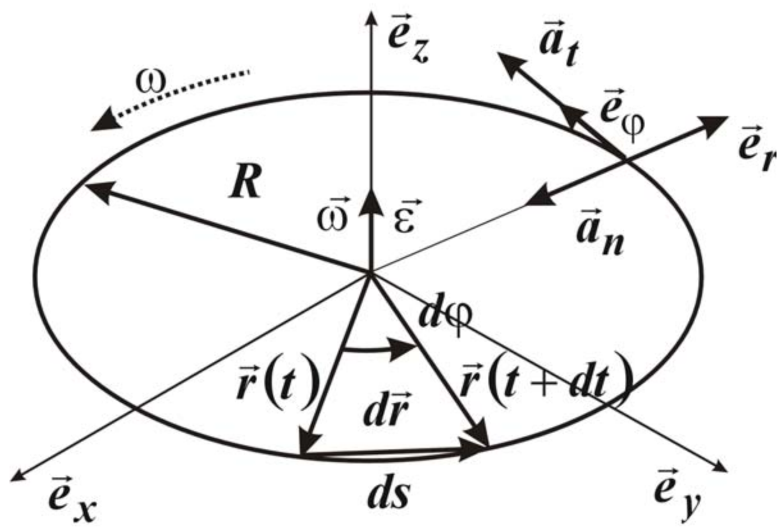
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_t &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \\ \vec{a}_n &= \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}, = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon} = \dot{\omega}\, \vec{e}_z = \ddot{\varphi}\, \vec{e}_z, \rightarrow \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_t$$

$$\vec{r} = R\, \vec{e}_r,$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} = \vec{a}_n$$

a tömegpont gyorsulása:

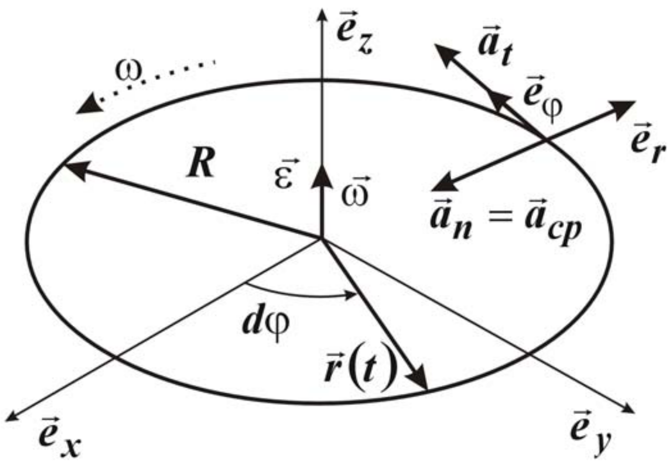


$$\vec{a}(t) = \vec{e}_\varphi a_t + \vec{e}_r a_n$$

$$\vec{a}(t) = \vec{e}_\varphi R\varepsilon - \vec{e}_r R\omega^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= R\varepsilon = R\ddot{\varphi}, \\ a_n &= -R\omega^2 = -v\omega = -\frac{v^2}{R}, \end{aligned}}$$

<u>Egyenletes körmozgás:</u> állandó sebességgel forgó mozgás



Minthogy $\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{pályasebesség}} = v = áll.$ $\quad v = R\omega, \quad \omega = áll.$

a szögsebesség állandó,

Ha a szögelfordulás egyenletes, $\varphi(t) = \omega\, t,$

a pályasebesség állandó $\dot{\varphi}(t) = \omega, \quad \ddot{\varphi}(t) = 0,$

$$\boxed{a_t = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon = 0}$$

nincs tangenciális, pálya irányú gyorsulás, szöggyorsulás

a normális irányú, <u>centripetális gyorsulás</u>,

$$\boxed{a_n = -R\omega^2 = -v\omega = -\frac{v^2}{R},}$$

egy teljes körülfordulás ideje a periódus idő $\omega T = 2\pi,$ $\boxed{T = 2\pi/\omega\ [\mathrm{s}],}$

a másodpercenkénti keringések száma:

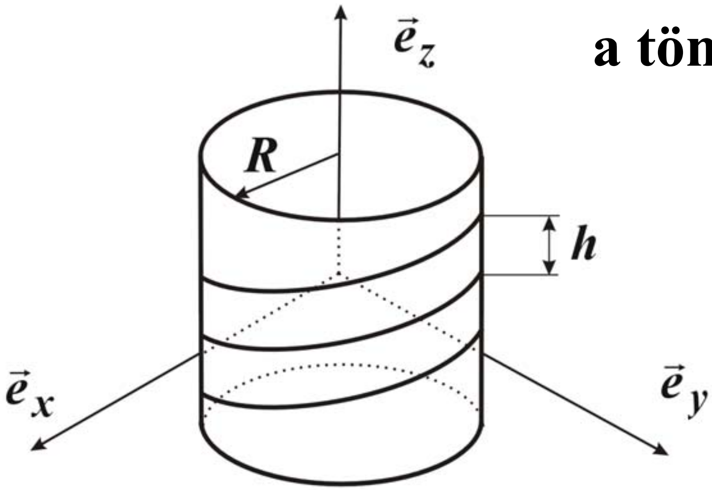
$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ [\text{ford/s}]}$$

a precenkénti keringések száma=<u>fordulatszám:</u>

$$\boxed{n = 60 f = \frac{60}{T} = 60\frac{\omega}{2\pi}\ [\text{ford/perc}]}$$

4.2. Mozgás térgörbén,

pl. állandó menetemelkedésű csavarvonal mentén (egy henger palástján), egy körmozgás és egy haladó mozgás eredője,

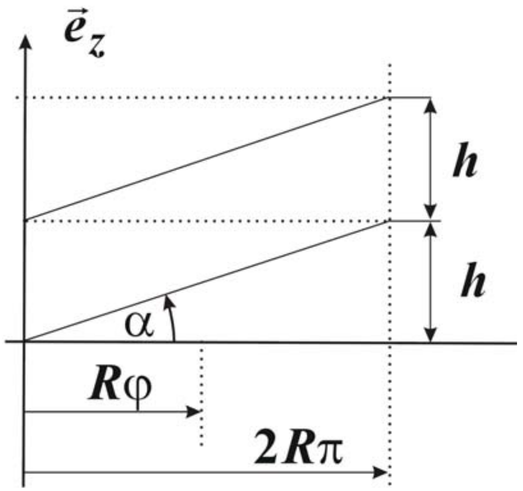


a tömegpont helyzetvektora:

$$\vec{r} = R\,\vec{e}_r(t) + \frac{\varphi(t)}{2\pi} h\vec{e}_z,$$

$$\varphi(t) = \omega\, t,$$

a menetemelkedés szöge: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{h}{2R\pi}$



a tömegpont sebessége:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\underbrace{\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt}}_{\omega\,\vec{e}_\varphi} + \frac{h}{2\pi}\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi}\omega\,\vec{e}_z = v_\varphi\,\vec{e}_\varphi + v_z\,\vec{e}_z$$

II. Kinetika

Tömegpont kinetikája

1. Newton axiómái (törvényei)

1.1. Newton I. törvénye, a tehetetlenségi örvény,

Minden test (anyagi pont) nyugalomban marad v. megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg más testek kölcsönhatásai mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszerítik,

Ha egy testre, tömegpontra ható erők eredője zérus, akkor a test nyugalomban van,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \longrightarrow \vec{v} \equiv 0, \quad \text{ill.} \quad \vec{v} = \text{áll.}$$

Newton I, törvénye olyan vonatkoztatási, inercia rendszert jelent, amely a kölcsönhatásokat nem veszi figyelembe,

1.2. Newton II. törvénye,

A mozgás megváltozása az *m* tömegpont mozgásmennyiségének, impulzusának/lendületének megváltozása okozza.

Az *m* tömegpont impulzusa: $$\boxed{\vec{I}(\vec{r},t) = m\,\vec{v}(\vec{r},t),\quad [I] = \mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},}$$

Az *m* tömegpontra ható erő:

$$\boxed{\dot{\vec{I}}(\vec{r},t) = \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},t),\quad [\vec{F}] = 1\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\mathrm{N},\ (\mathrm{newton}),}$$

$$\dot{\vec{I}} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}},$$

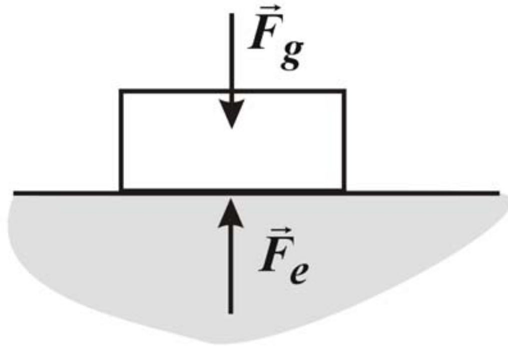
$$m = \acute{a}ll.$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},t) = m\vec{a}(\vec{r},t),}$$ **Newton II.**

Ha több erő hat egy testre, azok hatásai összegződnek, (a lineáris rendszeren a szuperpozíció érvényes), $$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_i,$$

1.3. Newton III. törvénye,

hatás-ellenhatás, kölcsönhatás törvénye,



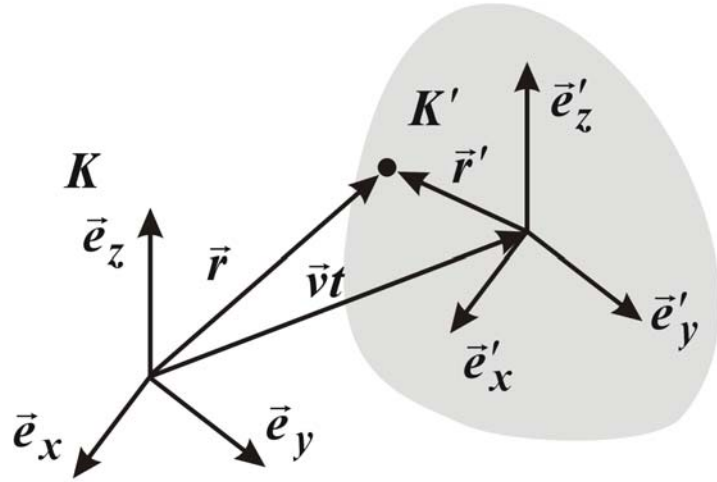
Az akció erővel együtt mindig fellép egy vele azonos nagyságú, de ellentétes irányú reakcióerő, $\vec{F}_g - \vec{F}_e = 0,$

Kiegészítések:

a) Galilei-féle transzformáció,

a K álló és a *v* állandó sebességgel mozgó K' rendszerekben a tömegpont gyorsulás és ennek megfelelően az erő ugyanakkora,

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}t, \quad \vec{v} = \text{áll.} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,',$$



b) D'Alambert elv,

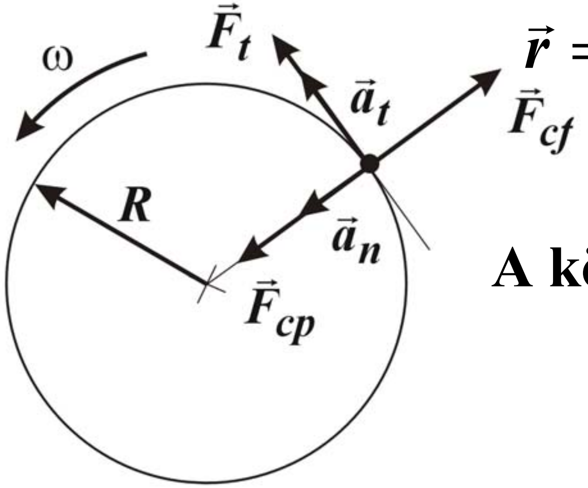
kinetikai egyensúlyi állapot áll fenn, ha

$$\vec{F}(\vec{r},t) - m\vec{a}(\vec{r},t) = 0,$$

1.4. Az erőtörvények alkalmazása

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_t &= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r},\\ \vec{a}_n &= \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}, = -\omega^2\vec{r}\end{aligned}}$$

a) Tömegpont körmozgásának kinetikája,



$$\vec{r} = R\,\vec{e}_r$$

A körmozgás impulzusa/lendülete: $\vec{I} = m\vec{v} = m\,\vec{\omega}\times\vec{r},$

A körmozgásnál fellépő erők:

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}},$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\varepsilon}\times\vec{r} - m\,\omega^2\vec{r} = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp},$$

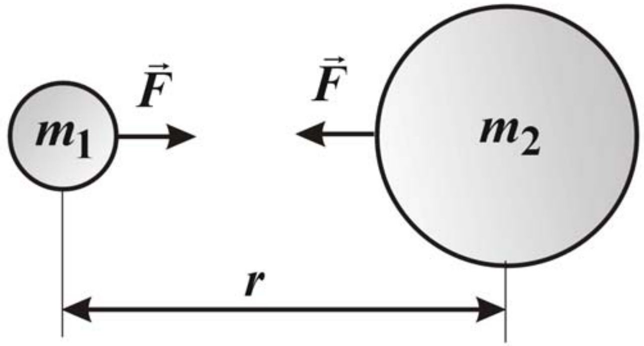
Newton II, centripetális erő,

$$\vec{F}_{cp} = m\,\vec{a}_n = -\vec{e}_r mR\,\omega^2 = -m\,\omega^2\vec{r} = -\vec{e}_r mv\omega = -\vec{e}_r m\frac{v^2}{R}$$

Newton III, $\rightarrow$ a reakció erő, centrifugális erő, $\vec{F}_{cp} = -\vec{F}_{cf}$

A pálya menti gyorsító erő: $\vec{F}_t = m\,\vec{a}_t = m\underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\varepsilon\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r = \varepsilon R\,\vec{e}_\varphi} = \vec{e}_\varphi mR\,\varepsilon,$

b) Bolygómozgás dinamikája, **Newton-féle gravitációs törvény,**



tömegvonzás lép fel, $F = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$,

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2},$$ **Cavendish, 1798**

A föld felszínén 1 kg tömegre ható erő,

$$m_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg},$$

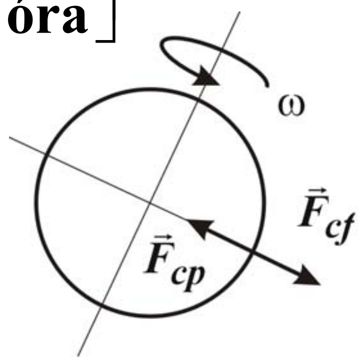
$$D_F = 1{,}274 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m},$$

$$F_g = \gamma \frac{m_F \cdot 1}{\left(D_F/2\right)^2} = 9{,}812\,\mathrm{N},$$

A Föld forgásából származó centrifugális erő: $\omega_F = \dfrac{2\pi}{24}\left[\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{óra}}\right]$

$$F_{cf} = F_{cp} = m a_n = m v^2 / R_F = m\, R_\mathrm{F}\, \omega_F^2 = 0{,}0337\,\mathrm{N},$$

$$g = \left(F_g - F_{cf}\right)/1 \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$



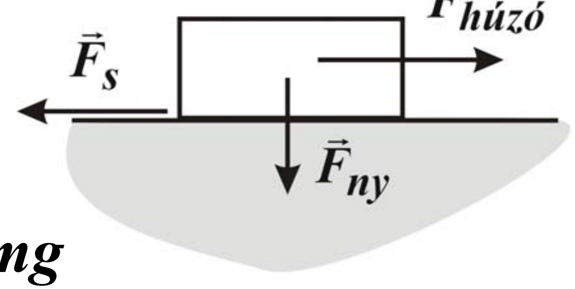
c) Testek súlya, a súlyerő,

A gravitációs gyorsulásból a tömegpontra/testekre ható erő a súlyerő,

$$\vec{F}_g = m\,\vec{g}, \quad \left[F_g\right] = 1\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\mathrm{N},$$

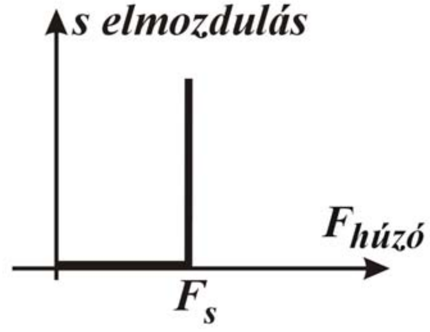
$m = 1\mathrm{kg}$ tömeg súlya $F_g = mg = 1\cdot 9{,}81 = 9{,}81\mathrm{N} \approx 10\mathrm{N},$

d) A súrlódási erő,



d/1) A csúszó súrlódás, a súrlódási erő iránya ellentétes a mozgás irányával $F_s = \mu\, F_{ny} = \mu\, mg$

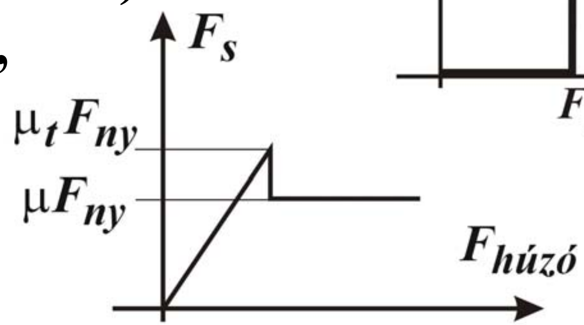
μ – a súrlódási tényező, a felület minőségétől függ



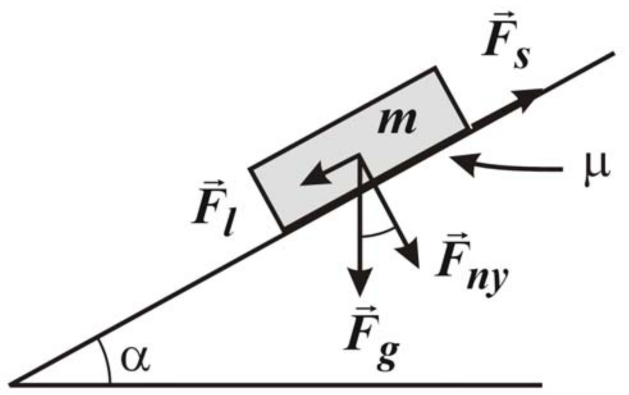
d/2) A tapadási súrlódás, (nyugvó súrlódás)
a felületek nem csúsznak el egymáson,

$$\mu_t > \mu, \quad \mu_t F_{ny} > \mu F_{ny},$$

nyugvó tömeg elindításához
nagyobb erő kell, mint mozgatásához,



d/3) Súrlódás lejtőn való mozgásnál,



az m tömegű test súlya: $F_g = mg$,

a lejtő irányú erő: $F_l = F_g \sin\alpha$,

a lejtő felületét nyomó nyomóerő:

$F_{ny} = F_g \cos\alpha$,

a súrlódási erő: $F_s = \mu F_{ny}$,

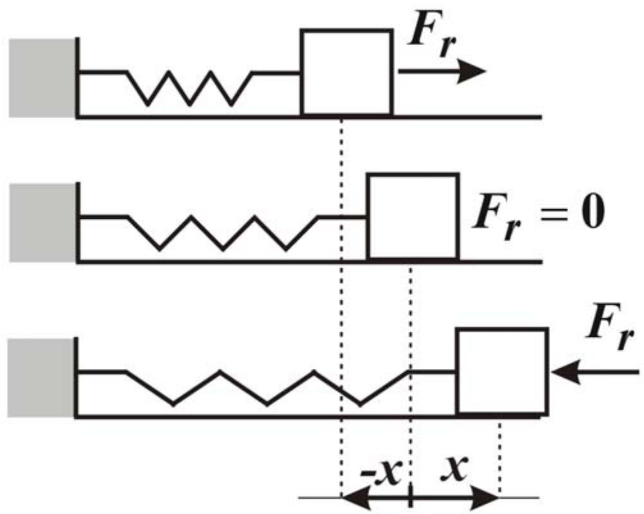
A test gyorsuló mozgással lecsúszik a lejtőn, ha $F_l \geq F_s$,

$$F_{gy} = F_l - F_s = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = ma, \qquad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

A megcsúszás határán: $F_l = F_s$, $\quad mg\sin\alpha = \mu\, mg\cos\alpha$,

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha,$$ **μ-mérésének módja,**

e) Rugóerő, lineáris kapcsolat az erő és a kitérés között,



a visszatérítő erő arányos az elmozdulással

$$\vec{F}_r(x) = -k\, x\vec{e}_x,$$

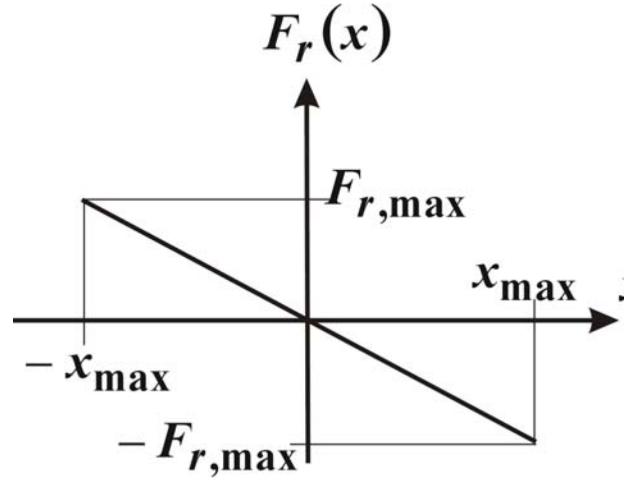
$$k\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$ **- a rugóállandó,**

A mozgásegyenlet:

$$\vec{F}_r(x) = -k\, x\vec{e}_x = m\ddot{x}\vec{e}_x = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{e}_x = ma(t)\vec{e}_x = m\vec{a},$$

A rugómozgás gyorsulása:

$$\vec{a} = a(t)\vec{e}_x = \ddot{x}\vec{e}_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{e}_x = -\frac{kx\vec{e}_x}{m},$$



2. Az impulzus tétel,

Az *m* tömegpont mozgásmennyiségének, impulzusának megváltozása a tömegpont kinetikai egyenletét eredményezi.

$m =$ áll. **az impulzus:** $\boxed{\vec{I}(\vec{r},t) = m\,\vec{v}(\vec{r},t),}$

az erőhatás az impulzus megváltozásához vezet: $\boxed{\dot{\vec{I}}(\vec{r},t) = \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},t) = m\vec{a}(\vec{r},t),}$

$\vec{I}(t_0) = m\vec{v}_0,$ $\quad \vec{F}(\vec{r},t) = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}(\vec{r},t)\right),$

$\vec{I}(t) = m\vec{v},$

impulzustétel: $\boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{F}(\vec{r},\tau)\,d\tau = \int_{m\vec{v}_0}^{m\vec{v}} d(m\vec{v}) = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = d\vec{I}(\vec{r},t),}$

Ha $\vec{F} =$ **áll. és** $t_0 = 0,\quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0,\quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0,$

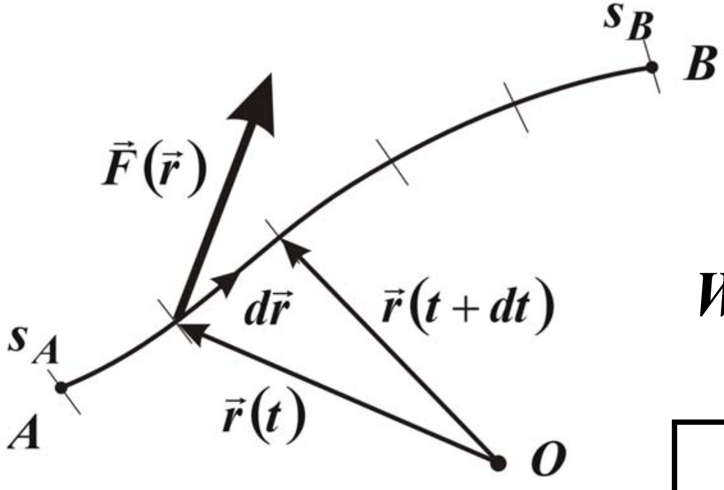
a mozgásegyenlet:

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0,\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2,$$

3. Tömegpont dinamikája, energiaviszonyok

3.1. A munka, az *m* tömegpont *A* pontból *B* pontba mozdítunk el, munkát végzünk,

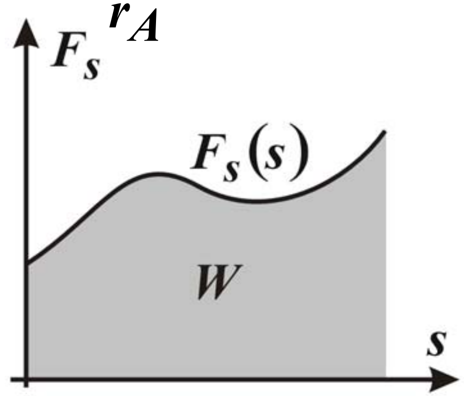


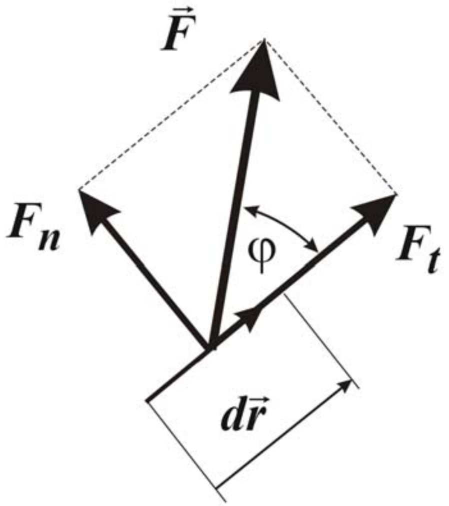
$$dW = F_t(\vec{r})\,dr = \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\varphi\,,$$

$$W_{AB} = \int_{W_A}^{W_B} dW = W_B - W_A = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\,,$$

$$\boxed{W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\,,}$$

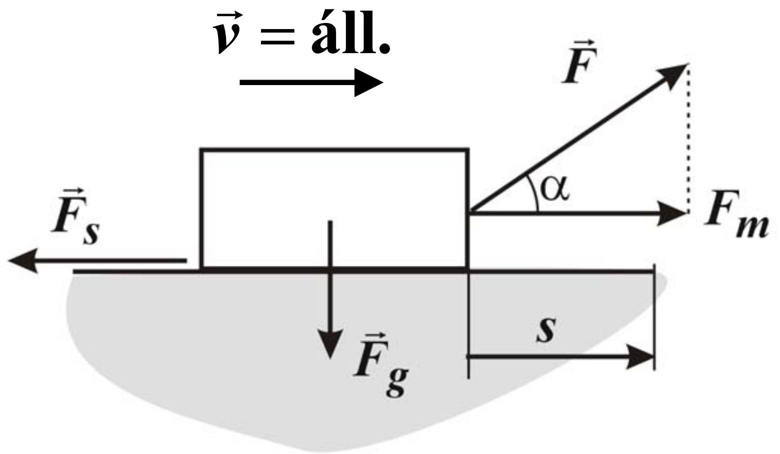
$$\boxed{[W] = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{J}, (\mathrm{joule}),}$$





$$\boxed{W_{AB}(t) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r}\,,}$$

Tömeg mozgatása egyenletes sebességgel,



az F erő út irányába eső komponense:

$$F_m = F\cos\alpha,$$

a súrlódási erő: $F_s = \mu F_g = \mu mg,$

az m tömeg akkor mozog állandó sebességgel, ha:

$$\boxed{\sum_k \vec{F}_k = 0,} \longrightarrow F_m = -F_s,$$

ekkor a m tömegnek s úton való elmozdításakor végzett munka:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = F_m\, s,$$

a súrlódás legyőzésére a rendszerbe betáplált munkavégző képesség:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = -F_s\, s = -\mu\, mg\, s,$$

3.2. A kinetikus v. mozgási energia,

az *m* tömegpont impulzusmegváltozása munkavégzést eredményez:

$$W(t) = \int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{I}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r}, \qquad \vec{I}(\vec{r},t) = m\vec{v}(\vec{r},t),$$

$$W(t) = \int_{\vec{r}} m\dot{\vec{v}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} m \frac{d\vec{v}}{dr} \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}} m\, \vec{v}\, d\vec{v}, \qquad \boxed{W_m(t) = \frac{1}{2} m\, \vec{v}(t)^2,}$$

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = v^2,$$

egy $\vec{v}$ sebességgel mozgó tömegpont <u>mozgási energiája</u> :

$$\boxed{W_m(t) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m\, v(t)^2,}$$

$$[W_m] = 1\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 1\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} = 1\mathrm{Nm} = 1\mathrm{J},$$

$$W_m(t) = \int_{\vec{v}} m\, \vec{v}\, d\vec{v} = \int_{\vec{v}} \vec{I}(\vec{r},t) \cdot d\vec{v}, \qquad \boxed{W_m(t) = \int_{\vec{v}} \vec{I}(\vec{r},t) \cdot d\vec{v},}$$

$$W_m(t) = \int_{\vec{v}} m\,\vec{v}\,d\vec{v} = \int_{\vec{v}} \vec{I}(\vec{r},t)\cdot d\vec{v},$$

pl. Határozza meg mekkora impulzussal kell meglökni egy v_1 sebességű testet, hogy mozgási energiája W legyen.

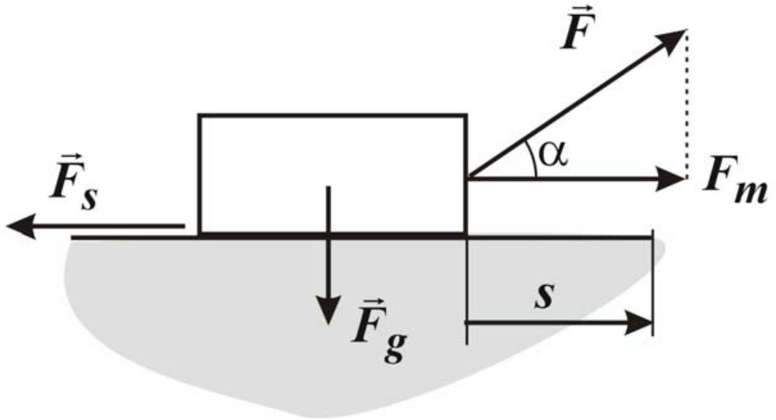
$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 + \int_{v_1}^{v_2} mv\cdot dv = \frac{1}{2}mv_1^2 + m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = m\frac{v_2^2}{2}, \rightarrow v_2$$

$$I = m(v_2 - v_1) = m\Delta v,$$

ui. $v_2 = v_1 + \Delta v,$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(v_1 + \Delta v)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + \underbrace{2v_1\Delta v + \Delta v^2}\right)$$

A gyorsító erő munkája,



ha a húzóerő út irányú komponense nagyobb, mint a súrlódási erő:

$$F_m > F_s, \quad F_{gy} = F_m - F_s,$$

a súrlódási és a mozgató erők munkájának eredője gyorsítja a tömeget:

$$W_m - W_s = \left(\vec{F} - \vec{F}_s\right) \cdot \vec{s} = F_{gy} s = ma\ s,$$

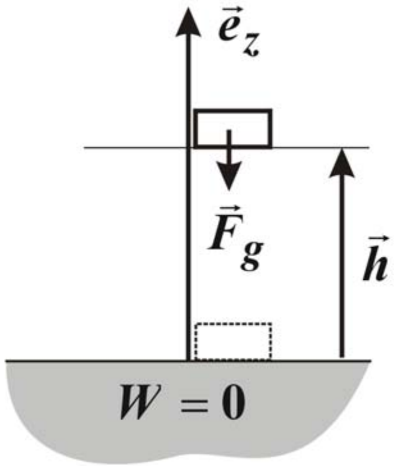
ha a gyorsító erő állandó, $v(0) = 0,$ kezdősebességnél $s = \dfrac{a}{2} t^2,$

$$W_{gy} = W_m - W_s = ma\,\frac{a}{2} t^2 = \frac{1}{2} m (at)^2, \quad v = at,$$

$$W_{gy} = \frac{1}{2} m\,(at)^2 = \frac{1}{2} m\,v^2,$$

3.3. A helyzeti v. potenciális energia,

Az *m* tömegű testre ható nehézségi erő: $F_g = mg$,



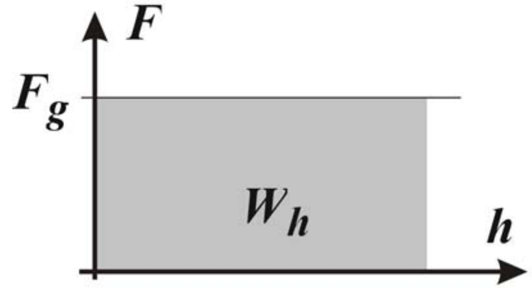
az *m* tömeget *h* magasságra felemelve a nehézségi erő leküzdésére befektetett munka:

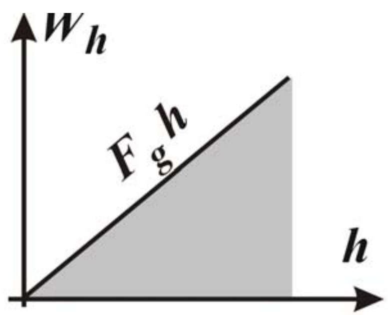
$$W_h = \vec{F}_g \cdot \vec{h} = mg\,h,$$

az *m* tömeg munkavégző képességét, potenciális energiáját növeli meg,

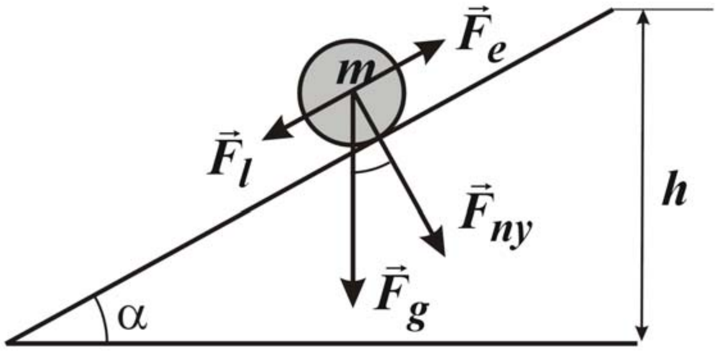
az *m* tömeget *h* magasságról leejtve, a nehézségi erő munkát végez, az *m* tömeg elveszti munkavégző képességét, potenciális energiáját,

$$W_h = 0,$$





<u>Emelés lejtőn</u>, a nehézségi erő munkája,



az *m* tömeg súlyereje: $\vec{F}_g = m\vec{g}$,

a súlyerő lejtő irányú komponense:

$F_l = F_g \sin\alpha$,

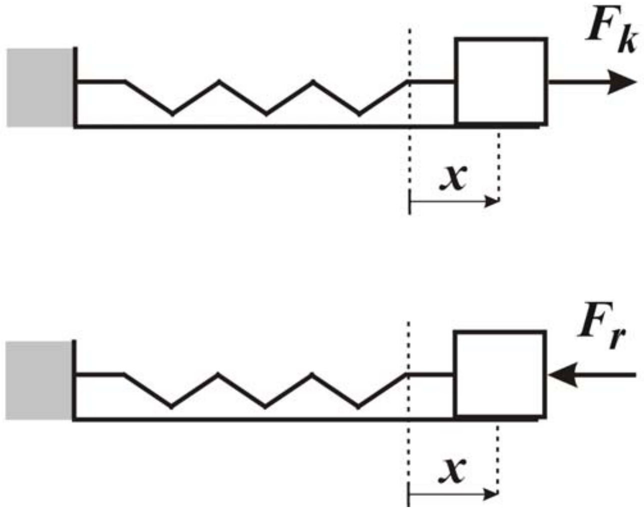
a lejtő hossza: $l = h/\sin\alpha$,

az *m* tömegnek a lejtőn *h* magasságig való emelésekor végzett munka, a helyzeti energia:

$$W_h = F_e\, l = F_g \sin\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = mg\, h,$$

a nehézségi erő munkája a függőleges elmozdulástól függ,

Rugóerő munkája, a rugó potenciális energiája,



a rugóerő: $\vec{F}_r = -k\,\vec{x},$

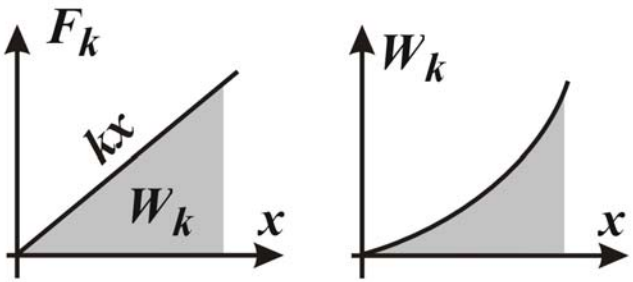
a rugót megfeszítő külső erő:

$$\vec{F}_k = -\vec{F}_r = k\,\vec{x},$$

az x távolságra megnyújtott rugó rugóerejének munkája:

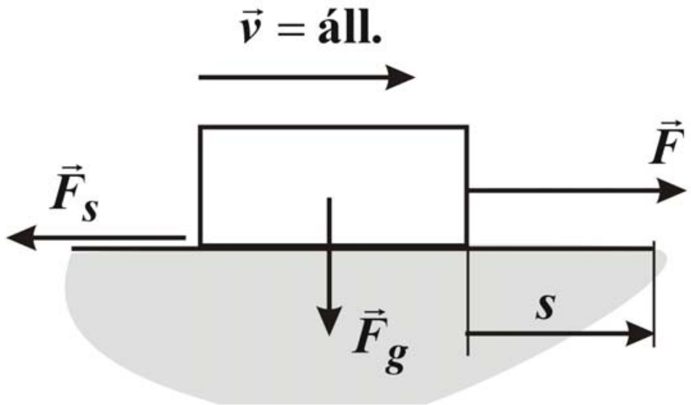
$$W_r = \int_0^x \vec{F}_r(x)\,d\vec{x} = -\int_0^x kx\,dx = -k\,\frac{x^2}{2},$$

a rugó megfeszítésekor a külső erő által a rendszerbe betáplált munka, a rugó potenciális energiája:



$$W_k = -W_r = k\,\frac{x^2}{2},$$

3.4. A belső energia, a súrlódási hő,



a súrlódási erő: $F_s = \mu\, F_g = \mu\, mg$,

az m tömeg állandó sebességgel mozog

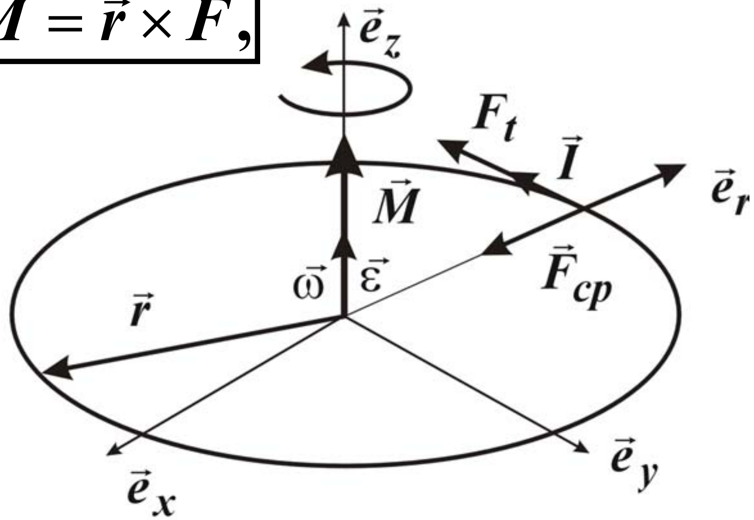
$$\vec{F} = -\vec{F}_s,$$

a súrlódás legyőzésére a rendszerbe betáplált munka/energia hővé alakul:

$$W_{gen} = \vec{F}\cdot\vec{s} = -F_s s = W_{hő},$$

3.5. A forgató nyomaték,

$\boxed{\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F},}$



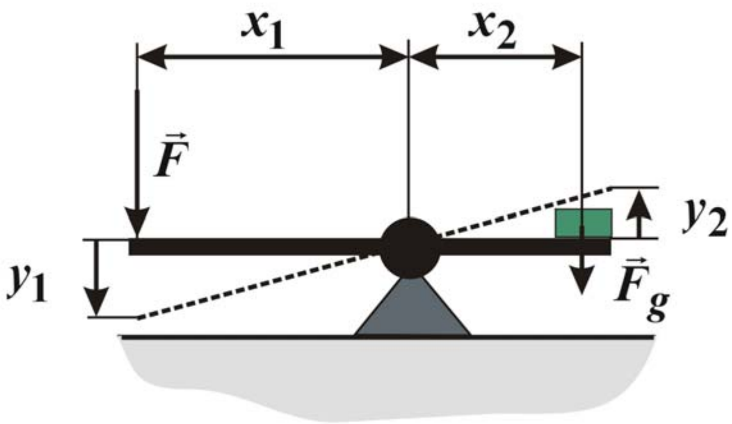
$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \underbrace{\vec{r}\times\left(\vec{F}_t + \vec{F}_{cp}\right)}_{\vec{r}\,\|\,\vec{F}_{cp}\rightarrow\vec{r}\times\vec{F}_{cp}=0} = \vec{r}\times\vec{F}_t,$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}_t = \underbrace{\vec{r}\times m\left(\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\right)}_{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)\cdot\vec{\varepsilon}=r^2\vec{\varepsilon}} = mr^2\vec{\varepsilon},$$

forgatónyomaték a tangenciális erőből származik,

3.5.1. Erőátviteli eszközök,

Az emelő:



az emelő forgási középpontjára a hatóerő és a súlyerő forgatónyomatéka azonos, egyensúly lép fel,

az *F* erő munkája fedezi az *m* tömeg felemelésének munkáját:

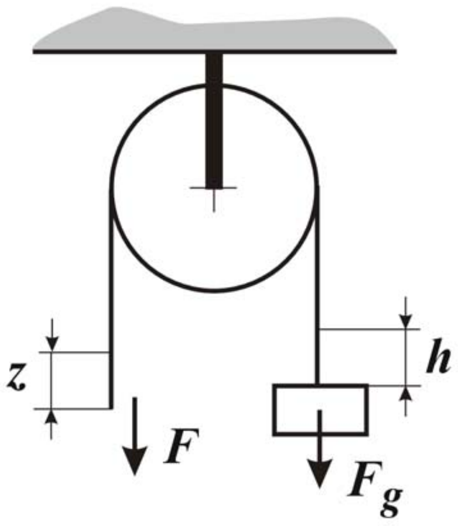
$$F_{emelő}\, x_1 = F_g\, x_2,$$

az emelő erő: $$F_{emelő} = F_g \frac{x_2}{x_1},$$

az *m* tömeg függőleges elmozdulása az α fordulási szög egyenlőségéből:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = y_2 / x_2 = y_1 / x_1, \qquad y_2 = y_1 \frac{x_2}{x_1},$$

A csiga:

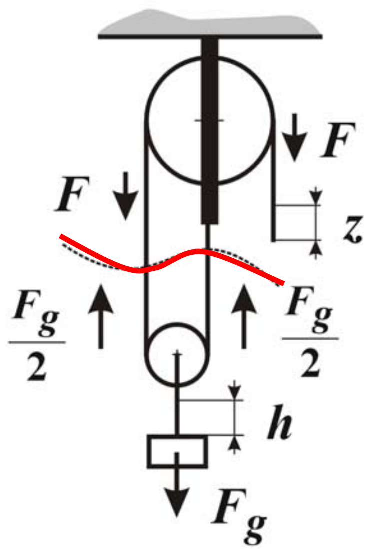


súlyerő és a húzóerő nyomatéka egyenlő,
a csiga mindkét oldalán a kötélben ugyanakkora
erő ébred: $F = F_g$,

az emelő erő: $F = F_g$,

az m tömeg függőleges elmozdulása során a
munkavégzés azonos a húzóerő által
végzett munkával: $W_{F_g} = W_F, \rightarrow F_g h = F \cdot z$

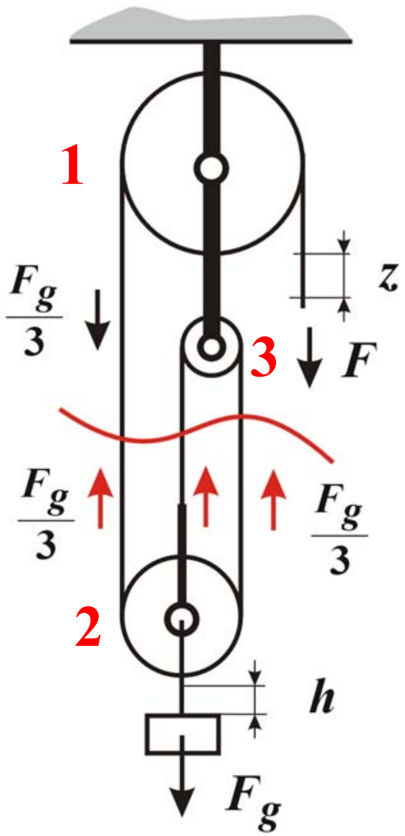
a teher emelkedése : $h = z$,



a mozgó csiga egyik szára a súlyerő felével emel,
a kötelek elvágásakor az álló csiga kötélereje,
a húzóerő, a súlyerő fele: $F = F_g / 2$,

az m tömeg emelkedése során a a súlyerő
és a húzóerő munkája azonos, így :

$$F_g h = F\ z, \quad h = z/2,$$



a 2. számú mozgó csigára rögzített súlyerővel a három kötélerővel tart egyensúlyt, amelyek nagysága: $F_g/3$

a 3. számú rögzített tengely körül elforduló csiga köteleiben a súlyerő harmada lép fel, a két kötélerő forgatónyomatéka egyensúlyban van,

az 1. számú csiga köteleiben fellépő erők forgatónyomatékai egyenlőségéből az emelőerő: $F = F_g/3$,

az elemlőerő munkája fedezi a súlyerő emeléséhez szükséges munkát,

$W_{F_g} = W_F$, **a teher emelkedése :** $h = z/3$,

3.6. A teljesítmény,

az időegység alatt végzett munka a teljesítmény:

$$P(t) = \lim_{dt \to =} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW(t)}{dt}, \qquad \boxed{P(t) = \dot{W}(t),}$$

$$\boxed{[P] = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\mathrm{W} \quad (\mathrm{watt}),}$$

elemi úton való elmozduláskor végzett munka: $dW(t) = \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r},$

$$P(t) = \frac{d}{dt}\int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\dot{\vec{r}} = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{v}} \vec{F} \cdot d\vec{v},$$

$$\boxed{P(t) = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{v}} \dot{\vec{I}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{v},}$$

teljesítményt az erő és a mozgásmennyiség/impulzus időbeli megváltozása eredményez,

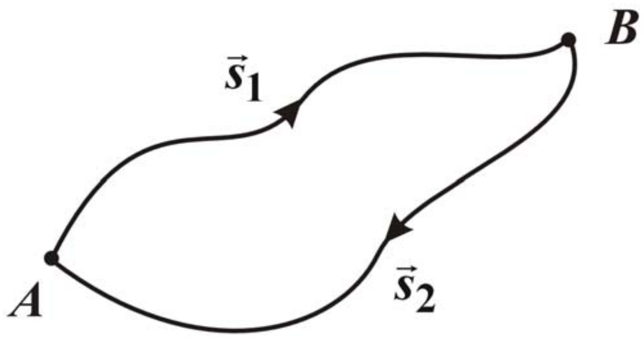
Ha $\vec{F}(\vec{r},t) = \vec{F}(\vec{r})$, időben állandó:

$$P(t) = \int_{\vec{v}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{v},$$

Ha $\vec{F}, \vec{v}$, időben állandó:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

4. A konzervatív erőtér,



tömegpontot elmozdítva A-B-A
mechanikai értelemben
nincs munkavégzés

$$\int\limits_{\substack{A\\(\vec{s}_1)}}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int\limits_{\substack{B\\(\vec{s}_2)}}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0,$$

$$\boxed{\oint\limits_{\vec{s}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0,}$$

$$\int\limits_{\substack{A\\(\vec{s}_1)}}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\substack{B\\(\vec{s}_2)}}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_{\substack{A\\(\vec{s}_2)}}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

a végzett munka nem függ
az út alakjától, csak
az elmozdulás végpontjaitól függ,

5. A mechanikai energia-megmaradás tétele,

egy mechanikai rendszer összes energiája állandó,

$$W_m + W_h + W_s + \int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{áll},$$

A mechanikai energiaegyensúlyi egyenlet,

egy mechanikai rendszerbe betáplált energia fedezi egyrészt a rendszer belső energiájának megváltozását, másrészt a rendszer munkavégzésre fordított energiáját,

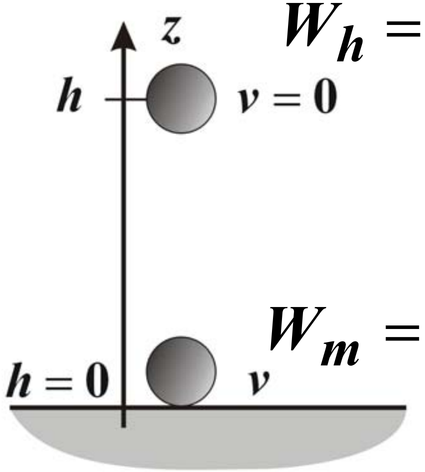
a rendszerbe betáplált energia: W_{gen},

$$\boxed{W_{gen} = W_{belső} + \int_{s} \vec{F} \cdot d\vec{r},}$$

a rendszer belső energiája: $W_{belső}$,

a rendszer munkavégző képessége: $\int_{s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$,

5.1. A helyzeti és a mozgási energia kapcsolata,



$$W_h = mgh,$$

$$W_m = \frac{1}{2}mv^2,$$

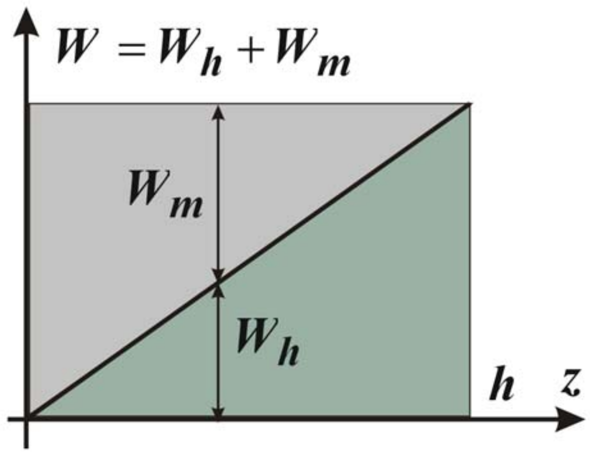
egy *m* tömegpontot *h* magasságból leejtve elveszti potenciális energiáját, a rendszerben felhalmozott belső energiáját,

a tömegpont a talajra *v* sebességgel érkezik, mozgási energiával rendelkezik,

helyzeti energia ⟶ mozgási energia

$$W_h = mgh = \frac{1}{2}mv^2 = W_m,$$

energia diagram:

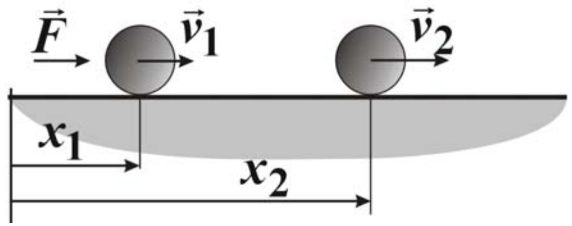


a rendszer össz-energiája állandó:

$$W_h + W_m = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{áll},$$

5.2. A kinetikai energia és a gyorsító erő munkája,

egy m tömegpontot $\vec{v}_1$ sebességről $\vec{v}_2$ sebességre gyorsít egy $\vec{F}$ erő,



a tömegpont mozgási energia megváltozását

$$dW_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

az F gyorsító erőnek a $dx = x_2 - x_1$ úton végzett munkája fedezi

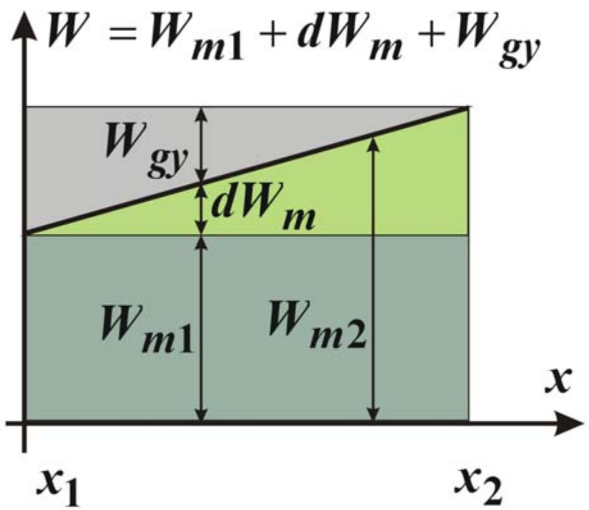
$$W_{gy} = F\,dx = F\left(x_2 - x_1\right),$$

$$dW_m = W_{gy}, \quad dW_m + W_{gy} = \text{áll},$$

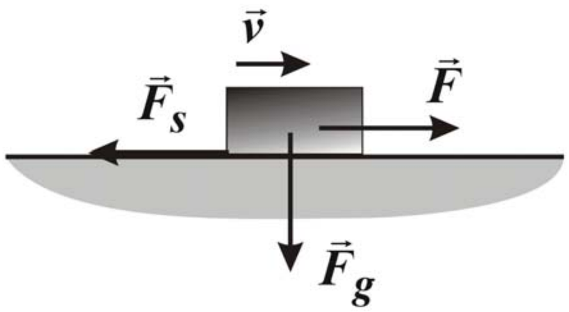
a rendszer össz-energiája állandó

$$W = W_{m1} + dW_m + W_{gy} = \text{áll},$$

energia diagram:



5.3. A kinetikai energia és a súrlódási erő munkája,



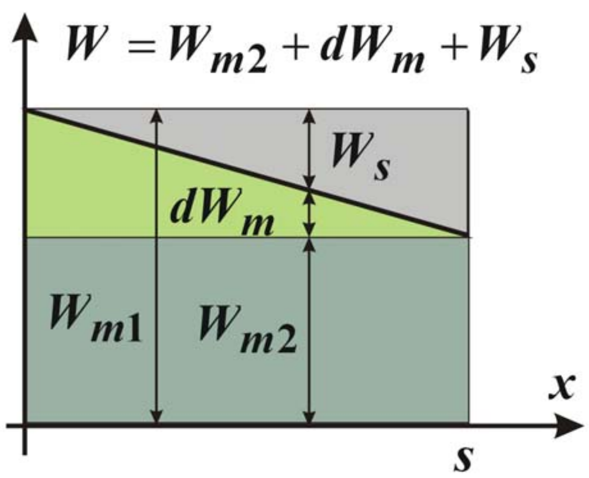
a tömegpontra ható erő egyensúlyt tart a súrlódási erővel, egyenletes a mozgás:

$$F = -F_s = -\mu F_g = -\mu\, mg,$$

a v sebességgel mozgó test kinetikai energia megváltozása fedezi az s úton fellépő súrlódási veszteséget:

$$W_s = F\, s = \mu\, mg\, s,$$

energia diagram:



$$dW_m = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = W_s = \mu\, mg\, s,$$

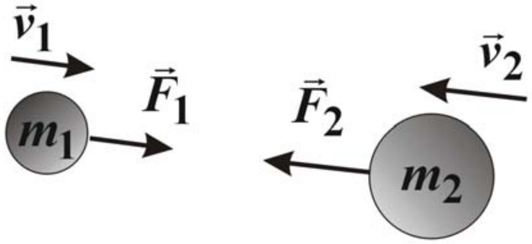
a rendszer össz-energiája állandó

$$W_{m1} = W_{m2} + dW_m + W_s = \text{áll},$$

6. Az impulzus-megmaradás tétele,

egy mechanikai rendszerben két tömegpont kölcsönhatásba kerülhet, a két tömegpont összeütközik, mozgásállapota megváltozik,

Newton III. törvénye: $$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \;\rightarrow\; \dot{\vec{I}}_1 = -\dot{\vec{I}}_2, \;\rightarrow\; \sum_k \dot{\vec{I}}_k = 0,$$



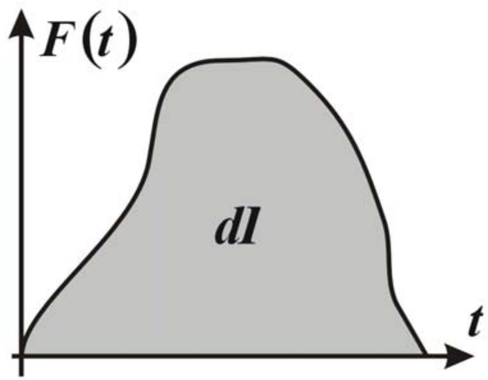
$$\sum_k \frac{d\vec{I}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_k \vec{I}_k = 0, \longrightarrow \boxed{\sum_k \vec{I}_k = 0,}$$

az impulzus-megmaradási tétel: $$\boxed{\sum_k m\vec{v}_k = 0,}$$

az impulzus megváltozása erőhatás fellépésével jár,

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}, \quad d\vec{I} = \vec{F}dt, \quad \int_{\vec{I}_1}^{\vec{I}_2} d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt,$$

$$d\vec{I}(\vec{r},t) = \vec{I}_1(\vec{r},t_1) - \vec{I}_2(\vec{r},t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r},t)dt,$$



Ellenörző kérdések

Mi a pályagörbe, a helyzetvektor,

- **Hogyan határozható meg egy tömegpont sebessége, gyorsulása, elmozdulása,**
- **Milyen kapcsolat van a gyorsulás, sebesség és a megtett út között, ismertesse a fenti kapcsolatokat a forronómiai görbék segítségével.**
- **Ismertesse az egyenes vonalú egyenletes és az egyenletesen gyorsuló mozgás törvényszerűségeit,**
- **Ismertesse a vízszintes és a ferde hajítás mozgástörvényeit.**
- **Foglalja össze a görbe vonalú-, és a körmozgás mozgástörvényeit,**
- **Foglalja össze Newton törvényeit,**
- **Ismertesse Newton törvényeit, és az impulzus megmaradás tételét,**
- **Ismertesse a munka és a teljesítmény fogalmát és meghatározásának módját,**
- **Ismertesse a helyzeti-, és a mozgási energia fogalmát és meghatározásának módját,**
- **Ismertesse a forgó mozgásnál fellépő forgatónyomaték fogalmát és meghatározásának módját,**
- **Ismertesse a konzervatív erőtér fogalmát és az energia-, és az impulzus-megmaradás tételét.**

Irodalom

Tankönyv

Transzport folyamatok modellezése, előadás vázlat, www.e-oktat.pmmf.pte.hu

Ivanyi A. Transzport folyamatok modellezése, Tankönyv, (megjelenés alatt) Pollack Press, 2010.

Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5, (1, 2, 3 fejezetek)

Javasolt Irodalom:

M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő, (szerk), Mozgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, ISBN 963 19 2353 3,

Felhasznált irodalom:

Béda Gyula, Bezák Gáspár, Kinematika és dinamika, Műegyetemi Kiadó, 1989. ISBN 963 420 596 8

Györgyi József, Dinamika, Műegyetemi Kiadó, 2003, ISBN 963 420 712 X

Szőke Béla, Fizika 2, Előadás vázlat, 2004.

Gyakorló feladatok,

a) Az SI mértékegység rendszer, távolság, idő, sebesség, gyorsulás egységei, átváltás az egységek között, mértékegység származtatás út, sebesség, gyorsulás esetén,

b) Megoldandó feladatok a haladó mozgás, a gyorsuló mozgás (üldözési feladatok), és a hajítás témaköréből,

Tankönyv, (TK): Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Feladatok:

II. fejezet, 2-1, 2-4, 2-5, 2-8, 2-9, 2-10, 2B-17, 2B-18, 2B-21, 2B-26, 2A-30, 2B-36, 2B-38 feladatok,

III. fejezet, 3-8, 3-9, 3-10, 3B-16, 3B-17, 3B-18, 3B-19, 3-20, 3C-28, 3C-34, 3C-36, feladatok.

c) Megoldandó feladatok a körmozgás témaköréből.

d) Feladat megoldások Newton mozgástörvényének alkalmazásával, az erő, a munka, az energia, a teljesítmény, a konzervatív erők és energia-, és impulzus-megmaradás témaköréből.

Tankönyv, (TK): Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához,
LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Feladatok:

IV. fejezet, 4-1, 4-2, 4-4, 4A-10, 4A-11, 4B-21, 4C-27 feladatok,
V. fejezet, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 5-7, 5-8, 5-9, 5-11, 5-14, 5B-15, 5B-19, 5B-21, 5B-22, 5B-31, 5A-29, 5B-31, 5A-33, 5B-35, 5B-38, 5B-50, 5B-51, 5B-52, 5B-55, 5B-56, 5B-61, 5B-64, 5B-65 feladatok.
VI. fejezet, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6, 6-8, 6-9, 6-10, 6-12, 6-14, 6-15, 6-16, 6B-6, 6B-8, 6B-10, 6B-14, 6B-15, 6A-16, 6B23, 6A25, 6B28, 6B30, 6A-49, 6C-62, feladatok,
VII. fejezet, 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5, 7-6, 7-7, 7-8, 7A-6, 7A-10, 7B-12, 7B-13, 7B-15, 7B-16, 7B-18, 7B-24, 7C-46, 7C-49, feladatok,
VIII. fejezet, 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6 feladatok.