TRANSZPORT FOLYAMATOK MODELLEZÉSE

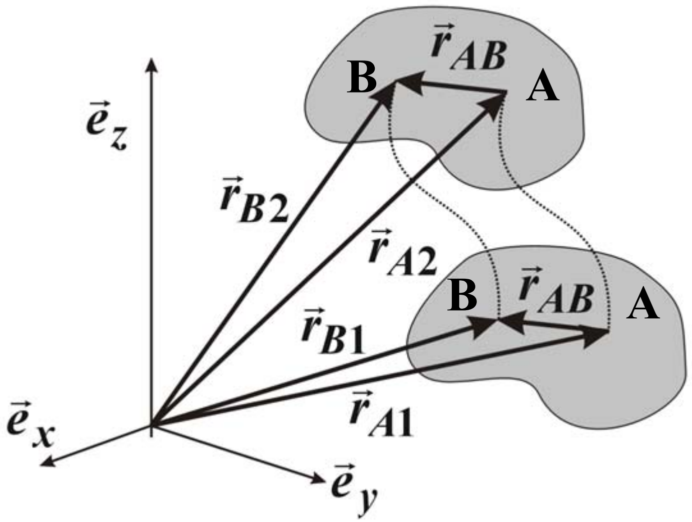
Dr. Iványi Miklósné
professor emeritus

2. Konferencia

B) Merev testek dinamikája,

- **Merev test anyagi pontok összessége, amelyek nem függetlenek egymástól,**
- **a merev test mozgásállapota az anyagi pontok mozgásállapota,**
- **a merev testet három ($\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3,$) pontja definiál egyértelműen,**

1. Merev test haladó mozgása



A merev test A-B pontjainak helyzetvektora

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB}$$

A merev test A-B pontjainak sebessége

$$\vec{v}_B(t) = \frac{d\vec{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} = \vec{v}_A(t)$$

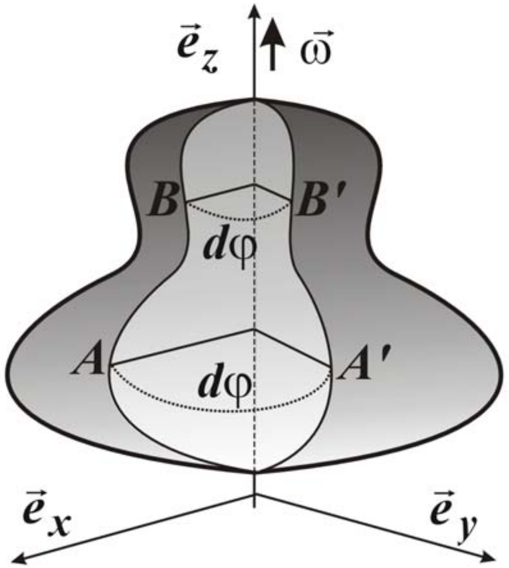
A merev test A-B pontjainak gyorsulása

$$\vec{a}_B(t) = \frac{d\vec{v}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}_A(t)}{dt} = \vec{a}_A(t)$$

A merev test haladó mozgása esetén minden pontjának a sebessége és gyorsulása azonos, a merev test pontjainak pályája egybevágó görbék,

2. Merev test forgó mozgása

2.a. Merev test egyenletes forgó mozgása,



A merev test A-B pontjainak ugyanakkora a szögsebessége: $\vec{\omega} = \text{áll}$

A merev test A-B pontjai ugyanakkora szöggel fordulnak el:

$$\varphi_A = \varphi_{A0} + \omega t,$$
$$\varphi_B = \varphi_{B0} + \omega t,$$

$$d\varphi_A = d\varphi_B = \omega t,$$

2.b. Merev test egyenletesen gyorsuló forgó mozgása,

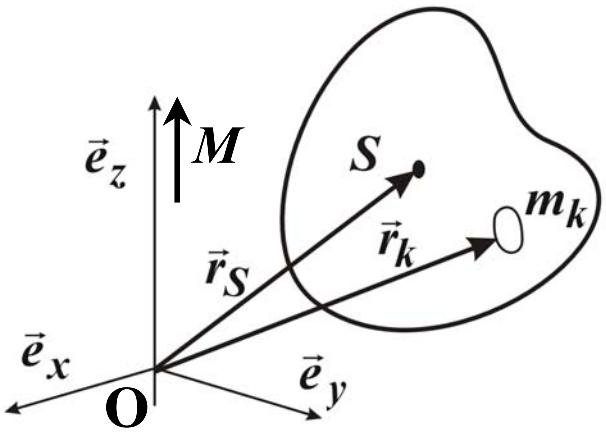
A merev test A-B pontjainak szöggyorsulása állandó: $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon} = \text{áll},$

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_{A0} + \vec{\varepsilon} t,$$
$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_{B0} + \vec{\varepsilon} t,$$

$$\vec{\varphi}_A = \vec{\varphi}_{A0} + \vec{\omega}_{A0} t + \frac{\vec{\varepsilon}}{2} t^2,$$
$$\vec{\varphi}_B = \vec{\varphi}_{B0} + \vec{\omega}_{B0} t + \frac{\vec{\varepsilon}}{2} t^2,$$

$$d\vec{\omega}_A = d\vec{\omega}_B,$$
$$d\vec{\varphi}_A = d\vec{\varphi}_B,$$

2.c. Merev test súlypontja v. tömegközéppontja,



a merev test tömegpontjainak helyzete:

$$\vec{r}_k, \; k = 1,2,\cdots,$$

a merev test tömegpontjainak súlyereje:

$$\vec{F}_{gk} = m_k \vec{g},$$

a merev test tömege: $m = \sum_k m_k,$

a merev test súlyereje: $\vec{F}_g = m\vec{g},$

az *O* pontra a merev test súlyerejének forgatónyomatéka =
= a tömegpontok súlyerejének forgató nyomatékával,

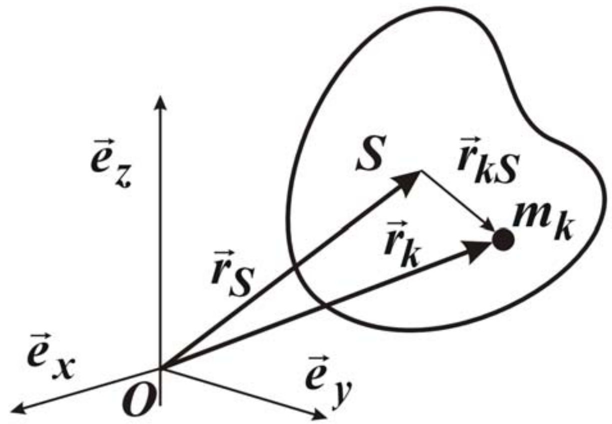
$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_{gk} = \vec{r}_S \times \vec{F}_g,$$

$$\sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{g} = \vec{r}_S \times m\vec{g}, \rightarrow \sum_k \vec{r}_k m_k = \vec{r}_S m,$$

a merev test súlypontja:

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\sum_k \vec{r}_k m_k}{m},}$$

2.d. Merev test statikai nyomatéka, a merev test mozgásmennyisége, impulzusa/lendülete:



$$\vec{I} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt} \sum_k m_k \vec{r}_k ,$$

a merev test statikai nyomatéka az O pontra:

$$\sum_k m_k \vec{r}_k = m \vec{r}_S = \vec{S}_O ,$$

$$\boxed{\vec{S}_O = m \vec{r}_S ,}$$

$$\boxed{\vec{I} = \dot{\vec{S}}_O ,}$$

a súlypont figyelembe vételével: $\vec{r}_k = \vec{r}_S + \vec{r}_{kS} ,$

$$\vec{S}_O = \sum_k m_k \left(\vec{r}_S + \vec{r}_{Sk} \right) = m \vec{r}_S + \sum_k m_k \vec{r}_{kS} = m \vec{r}_S + \vec{S}_S ,$$

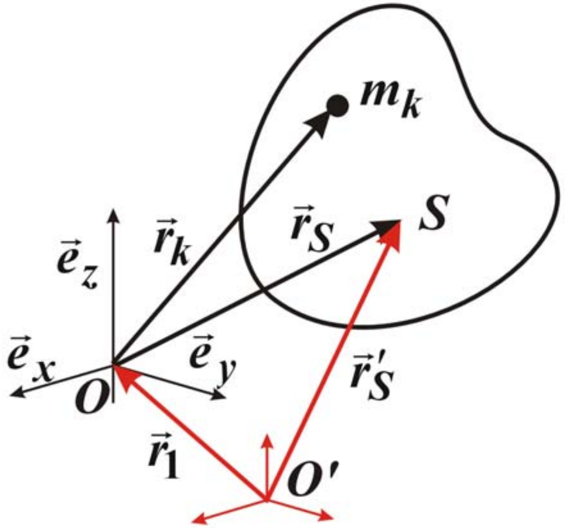
a súlypontra
a statikai nyomaték nulla:

$$\boxed{\vec{S}_S = \vec{S}_O - m \vec{r}_S = 0,} \qquad \boxed{\vec{S}_S \equiv 0,}$$

a merev test impulzusa: $\boxed{\vec{I} = \dot{\vec{S}}_O = m \dot{\vec{r}}_S = m \vec{v}_S ,}$

a merev testre ható külső erők: $\boxed{\dot{\vec{I}} = \vec{F} = m \dot{\vec{v}}_S = m \vec{a}_S = \ddot{\vec{S}}_O ,}$

a merev test súlypontja nem függ
a referencia koordináta rendszer felvételétől,



a statikai nyomaték az *O* pontra:

$$\vec{S}_O = m\vec{r}_S + \vec{S}_S, \qquad \vec{S}_S = \vec{S}_O - m\vec{r}_S = 0,$$

a statikai nyomaték az *O'* pontra:

$$\vec{S}_{O'} = \sum_k m_k\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_k\right) = m\vec{r}_1 + \underbrace{\sum_k m_k\vec{r}_k}_{m\vec{r}_S + \cancel{\vec{S}_S}},$$

$$\vec{S}_{O'} = m\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_S\right) = m\vec{r}'_S + \cancel{\vec{S}_S},$$

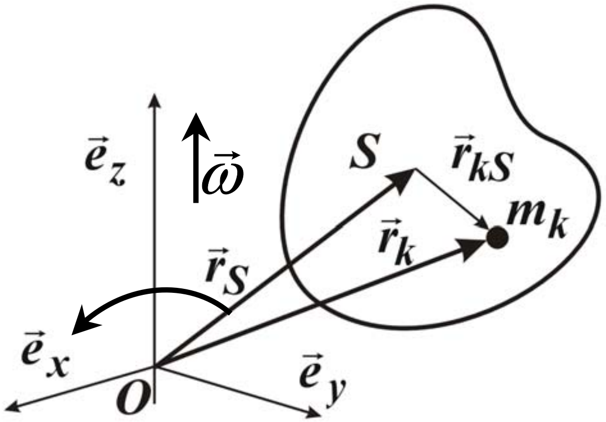
$$\vec{r}'_S = \vec{r}_1 + \vec{r}_S,$$ **a súlypont a helyén marad,**

2.e. A merev test dinamikai jellemzői,

a merev test impulzusa:

$$\vec{I} = \sum_k \vec{I}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = m\dot{\vec{r}}_S = m\vec{v}_S,$$

$$\boxed{\vec{I} = m\vec{v}_S,}$$



ha a merev test a *O* pontja körül forgó mozgást végez: $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$

$$\vec{I} = \sum_k \vec{I}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \vec{\omega} \times \vec{r}_k,$$

$$\vec{I} = \vec{\omega} \times \sum_k m_k \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{S}_O = \vec{\omega} \times m\vec{r}_S,$$

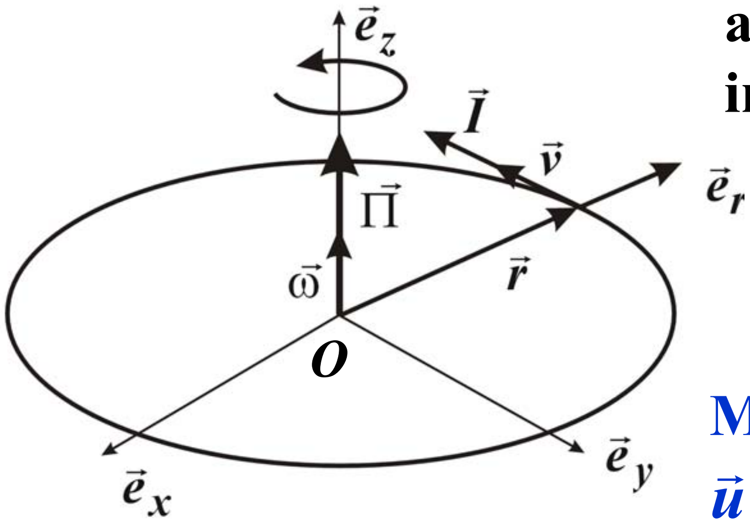
$$\vec{S}_O = m\vec{r}_S + \cancel{\vec{S}_S},$$

<u>forgó mozgásnál</u> a merev test impulzusa az *O* pont körül ω szögsebességgel forgatja az *m* tömeget r_S sugáron,

2.f. A tömegpont dinamikai jellemzői,

egy tömegpont *O* pontra vonatkozó perdülete v. impulzus nyomatéka és inercia nyomatéka:

a tömegpont impulzusa: $\vec{I}_k = m_k \vec{v}_k$, [kgm/s],



a tömegpont perdülete v. impulzus nyomatéka: $\boxed{\vec{\Pi}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k,}$

$$\vec{\Pi}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k, \; [\mathrm{kgm}^2/s],$$

$$\vec{\Pi}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \underbrace{=}_{\vec{v}_k = \vec{\omega}\times\vec{r}_k} m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k),$$

Matematika:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{z}) = (\vec{u}\cdot\vec{z})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{z}$$

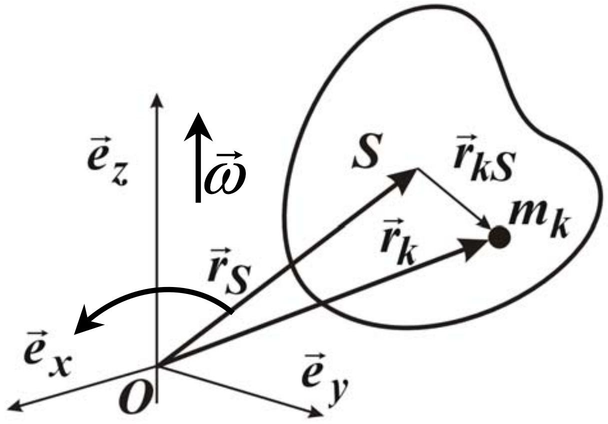
$$\vec{\Pi}_k = m_k \underbrace{(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k)}_{\vec{r}_k^{\,2} = |\vec{r}_k|^2 = r_k^2} \cdot \vec{\omega} - m_k \underbrace{(\vec{r}_k \cdot \vec{\omega})}_{\vec{r}_k \perp \vec{\omega} \to 0} \cdot \vec{r}_k = \underbrace{m_k r_k^2}_{\Theta_k} \vec{\omega} = \Theta_k \vec{\omega},$$

a tömegpont tehetetlenségi/inercia nyomatéka:

$$\boxed{\Theta_k = m_k r_k^2, \quad [\Theta] = 1\mathrm{kg\,m}^2,}$$

a perdület és az inercia nyomaték kapcsolata $\boxed{\vec{\Pi}_k = \Theta_k \vec{\omega},}$

Forgó mozgásnál a merev test *O* pontra vonatkozó perdülete:



a tömegpont impulzusa és perdülete:

$$\vec{I}_k = m_k \vec{v}_k, \qquad \vec{\Pi}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k,$$

a merev test *O* pontra vonatkozó perdülete, impulzus nyomatéka:

$$\boxed{\vec{\Pi}_O = \sum_k \vec{\Pi}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{I}_k,}$$

$$\vec{\Pi}_O = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k r_k^2 \vec{\omega} = \Theta_O \vec{\omega},$$

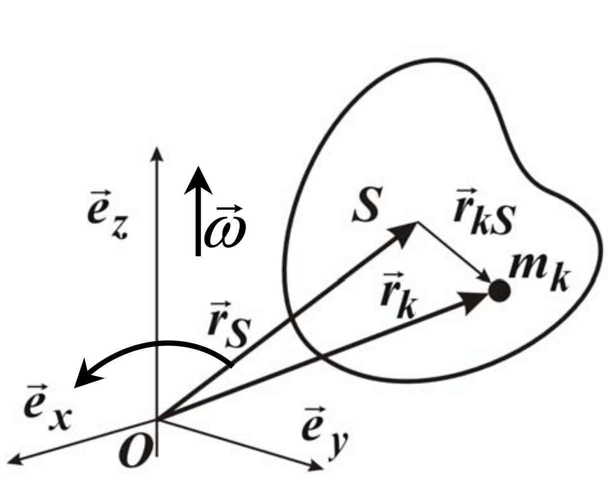
a merev test *O* pontra vonatkoztatott inercia/tehetetlenségi nyomatéka:

$$\boxed{\Theta_O = \sum_k m r_k^2,}$$

a merev test *O* pontra vonatkoztatott perdülete/impulzus nyomatéka:

$$\boxed{\vec{\Pi}_O = \Theta_O \vec{\omega},}$$

A merev test *O* pontra vonatkozó perdülete súlyponti adatokkal:



$$\vec{\Pi}_O = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \Theta_O \vec{\omega},$$

az *O* pontra vett perdület a súlyponti adatokból:

$$\vec{\Pi}_O = \sum_k \left(\vec{r}_S + \vec{r}_{kS}\right) \times \vec{I}_k = \underbrace{\vec{r}_S \times \sum_k \vec{I}_k}_{\vec{r}_S \times \vec{I}} + \underbrace{\sum_k \vec{r}_{kS} \times \vec{I}_k}_{\vec{\Pi}_S = \Theta_s \vec{\omega}},$$

$$\vec{I} = m\dot{\vec{r}}_S = $$

$$= m \underbrace{\vec{v}_S}_{\vec{\omega}\times\vec{r}} = m\vec{\omega} \times \vec{r}_S,$$

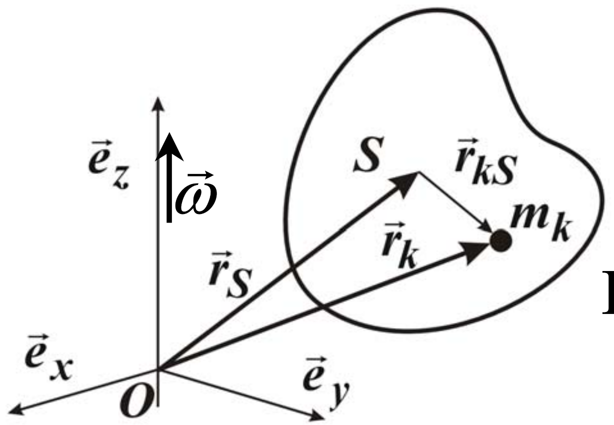
$$\boxed{\vec{\Pi}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{\Pi}_S,}$$

$$\boxed{\Theta_S = \sum_k m r_{kS}^2,}$$

$$\vec{\Pi}_O = \underbrace{\vec{r}_S \times \vec{\omega} \times m\vec{r}_S}_{m\vec{r}_S^2 \vec{\omega}} + \vec{\Pi}_S = \left(m\vec{r}_S^2 + \Theta_s\right)\vec{\omega},$$

a merev test *O* pontra vonatkoztatott perdülete a súlypontra vonatkozó perdület és a és az *m* tömegnek a a súlypont és a forgástengely közti sugár szerinti tehetetlenségi nyomatékából származó perdület összege adja.

Párhuzamos tengelyek tétele, Steiner tétel,



a merev test *O* pontra vonatkozó perdülete:

$$\vec{\Pi}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{\Pi}_S = \vec{r}_S \times m \underbrace{\vec{v}_S}_{\vec{\omega}\times\vec{r}_S} + \Theta_S \vec{\omega},$$

$$\vec{\Pi}_O = m \underbrace{\vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S)}_{\vec{r}_S^{\,2}\vec{\omega}} + \Theta_S \vec{\omega} = \underbrace{\left(m\vec{r}_S^{\,2} + \Theta_S\right)}_{\Theta_O}\vec{\omega},$$

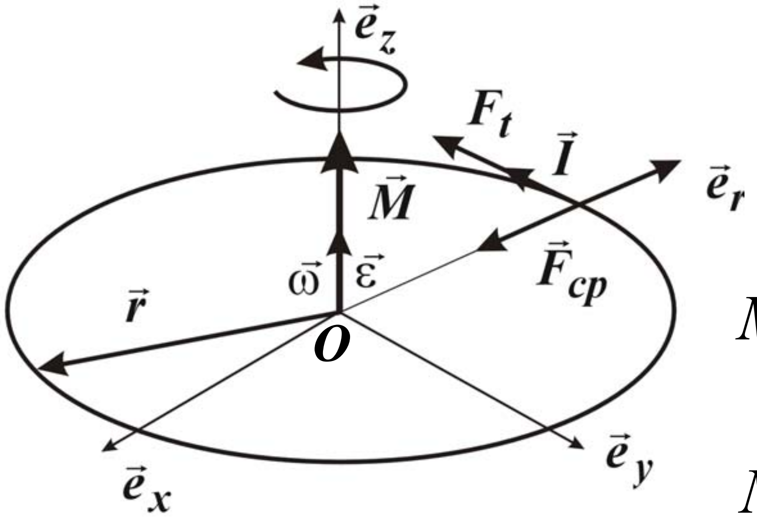
Steiner tétel: $\boxed{\Theta_O = m\vec{r}_S^{\,2} + \Theta_S,}$

a merev test *O* pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka =
= a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték
és a forgástengelynek a súlypont távolságából és a merev test tömegéből számított tehetetlenségi nyomatékok összege,

$$\boxed{\Theta_S = \Theta_O - m\vec{r}_S^{\,2},}$$

merev test súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka a legkisebb

2.g. Egy tömegpont *O* pontra vonatkozó forgató nyomatéka: $\boxed{\vec{M}_k = \dot{\vec{\Pi}}_k,}$



$$\boxed{\left[\vec{M}\right] = 1\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\frac{1}{s} = 1\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} = 1\mathrm{Nm} = 1\mathrm{J},}$$

$$\vec{M}_k = \dot{\vec{\Pi}}_k = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times \vec{I}_k\right) = \underbrace{\dot{\vec{r}}_k}_{\vec{v}_k} \times \vec{I}_k + \vec{r}_k \times \underbrace{\dot{\vec{I}}_k}_{\vec{F}_k},$$

$$\vec{M}_k = \underbrace{\vec{v}_k \times \vec{I}_k}_{\vec{v}_k \| \vec{I}_k \to 0} + \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \qquad \boxed{\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k,}$$

Matematika:

$$\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{z}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{z}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{z}$$

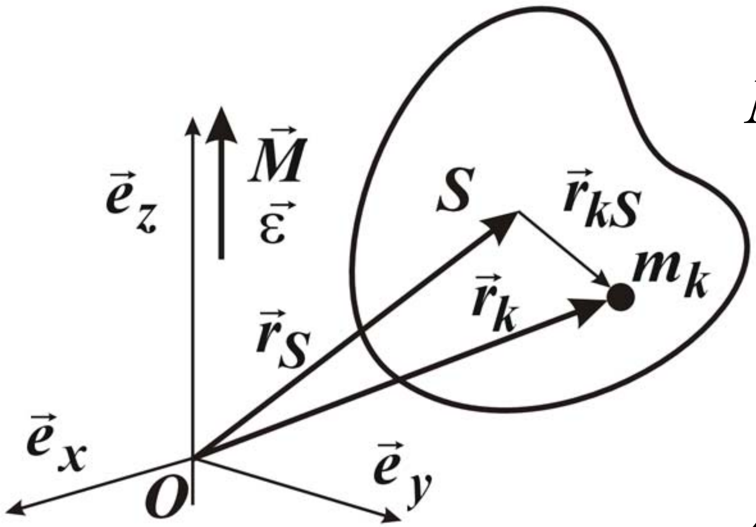
forgatónyomaték
a tangenciális erőből származik:

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \left(\vec{F}_t + \vec{F}_{cp}\right) = \vec{r}_k \times \vec{F}_t + \underbrace{\vec{r}_k \times \vec{F}_{cp}}_{\vec{r}_k \| \vec{F}_{cp} \to 0},$$

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_t = \underbrace{\vec{r}_k \times m_k\left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k\right)}_{\left(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k\right)\cdot\vec{\varepsilon} = r_k^2\vec{\varepsilon}} = m_k r_k^2 \vec{\varepsilon} = \Theta_k \vec{\varepsilon},$$

$$\boxed{\vec{\Pi}_k = \Theta_k \vec{\omega},} \qquad \Theta_k = m_k \vec{r}_k^{\,2}, \qquad \boxed{\vec{M}_k = \dot{\vec{\Pi}}_k = \Theta_k \vec{\varepsilon},}$$

A merev test *O* pontra vonatkozó forgató nyomatéka:



$$\vec{M}_k = \dot{\vec{\Pi}}_k = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times \vec{I}_k\right) = \cancel{\underbrace{\dot{\vec{r}}_k}_{\vec{v}_k} \times \vec{I}_k} + \vec{r}_k \times \underbrace{\dot{\vec{I}}_k}_{\vec{F}_k},$$

$$\vec{M}_k = \dot{\vec{\Pi}}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \Theta_k \vec{\varepsilon}, \quad \Theta_k = m\vec{r}_k^{\,2},$$

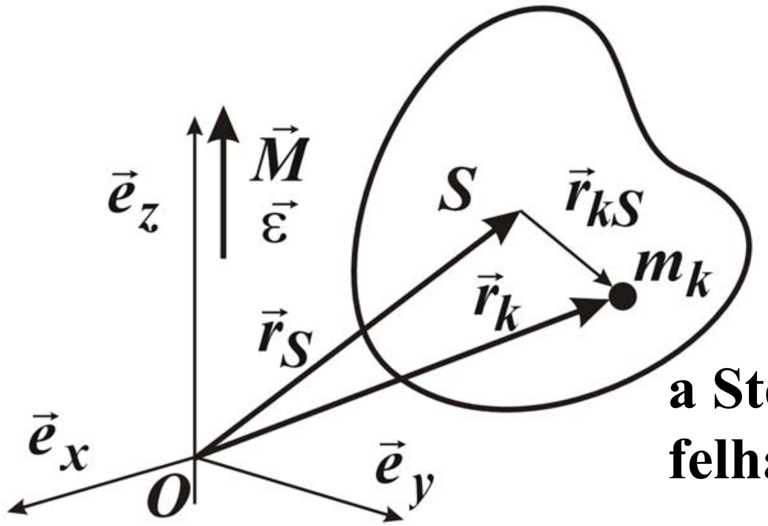
a merev test *O* pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{M}_k = \sum_k \dot{\vec{\Pi}}_k = \sum_k m_k \vec{r}_k^{\,2} \vec{\varepsilon} = \Theta_O \vec{\varepsilon}, \qquad \boxed{\vec{M}_O = \Theta_O \vec{\varepsilon},}$$

a merev test perdületéből:

$$\boxed{\vec{\Pi}_O = \Theta_O \vec{\omega},} \qquad \boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{\Pi}}_O = \Theta_O \dot{\vec{\omega}} = \Theta_O \vec{\varepsilon},}$$

A merev test *O* pontra vonatkozó forgató nyomatéka súlyponti adatokkal:



a merev test *O* pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{\Pi}}_O = \Theta_O \dot{\vec{\omega}} = \Theta_O \vec{\varepsilon},}$$

a Steiner tételt felhasználva:

$$\Theta_O = m\vec{r}_S^{\,2} + \Theta_S,$$

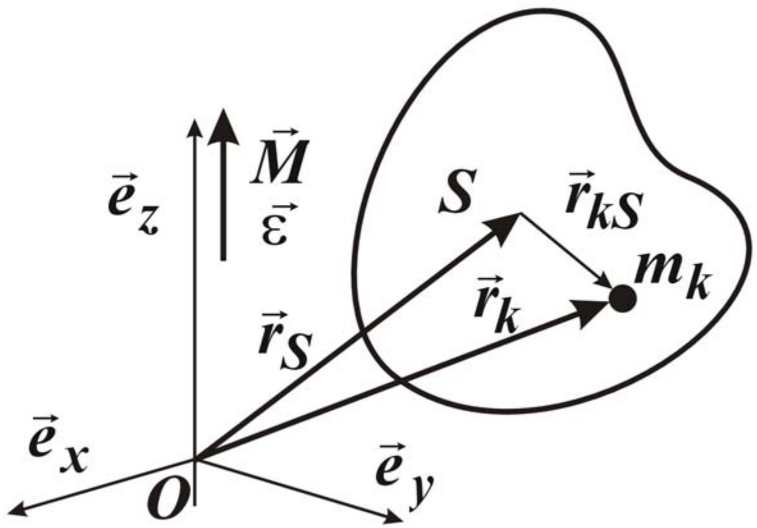
$$\vec{M}_O = \Theta_O \vec{\varepsilon} = \left(m\vec{r}_S + \Theta_S\right)\vec{\varepsilon},$$

a merev test perdülete és forgatónyomatéka a súlyponti adatokkal:

$$\vec{\Pi}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{\Pi}_S, \qquad \overline{M}_O = \dot{\vec{\Pi}}_O = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_S \times \vec{I}\right)}_{\cancel{\dot{\vec{r}}_S \times \vec{I}} + \vec{r}_S \times \dot{\vec{I}}} + \dot{\vec{\Pi}}_S = \vec{r}_S \times \vec{F} + \dot{\vec{\Pi}}_S,$$

a merev test *O* pontra vonatkozó forgatónyomatéka a súlypontra vonatkozó forgatónyomaték és a súlypontnak az O tengely körüli elfordulásához tartozó forgatónyomatékok összege,

2.h. A merev test dinamikai egyensúlya,



a merev test *O* pontra vonatkozó forgatónyomatéka nulla:

$$\overline{M}_O = \underbrace{\vec{r}_S \times \vec{F}}_{1} + \underbrace{\dot{\vec{\Pi}}_S}_{2} = 0,$$

1 : transzlációs egyensúlyi feltétel,

$$\vec{r}_S \times \vec{F} = 0, \qquad \boxed{\sum_k \vec{F}_k = 0,}$$

ha a merev testre ható erők összege nulla, az nyugalomban van, ill. egyenes vonalú egyenletes mozgást végez,

2 : rotációs, v. forgási egyensúlyi feltétel,

$$\dot{\vec{\Pi}}_S = 0, \qquad \boxed{\sum_k \vec{M}_k = 0,}$$

$$\vec{M}_S = 0,$$

ha a merev testre nem hat forgatónyomaték, az nyugalomban van,

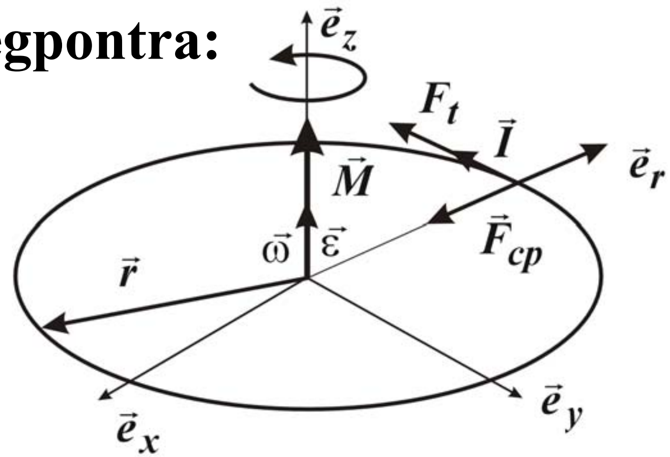
3. Forgó mozgás energiaviszonyai,

3.1. A munkavégzés, energia,

a vektori szorzás ciklikus

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

tömegpontra:

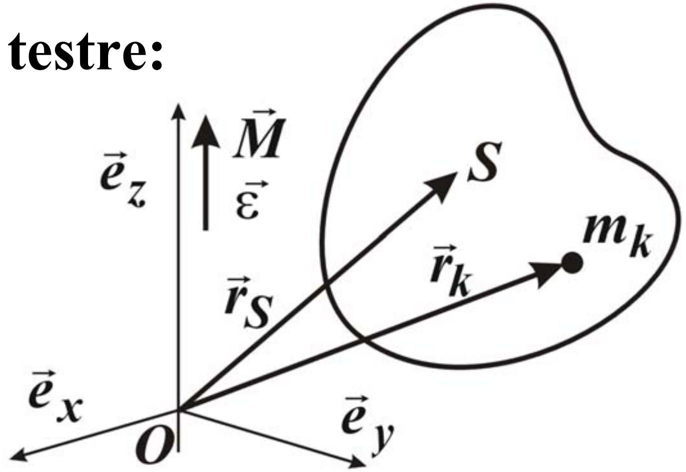


$$\frac{d\vec{r}_k}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_k$$

$$dW_k=\vec{F}_k\cdot d\vec{r}_k=\vec{F}_k\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_k dt,$$

$$dW_k=\underbrace{\vec{\omega}\,dt}_{d\vec{\varphi}}\cdot\underbrace{\vec{r}_k\times\vec{F}_k}_{\vec{M}_k}=\vec{M}_k\cdot d\vec{\varphi},$$

merev testre:



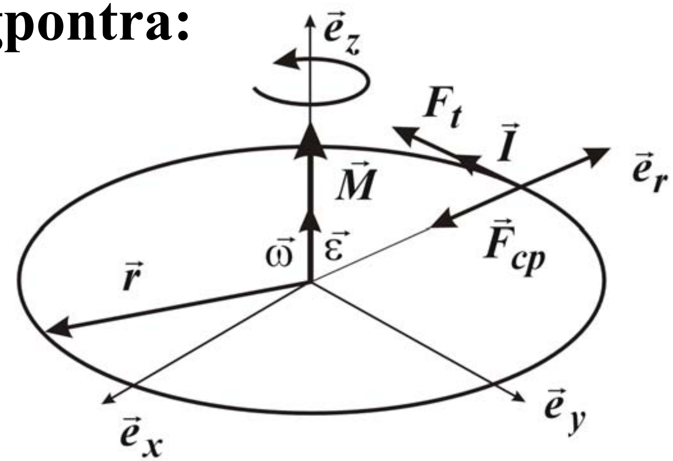
$$dW=\sum_k dW_k=\sum_k \vec{M}_k\cdot d\vec{\varphi}=\vec{M}\cdot d\vec{\varphi}$$

$$W=\left(\vec{r}_S\times\vec{F}\right)\cdot\vec{\varphi},$$

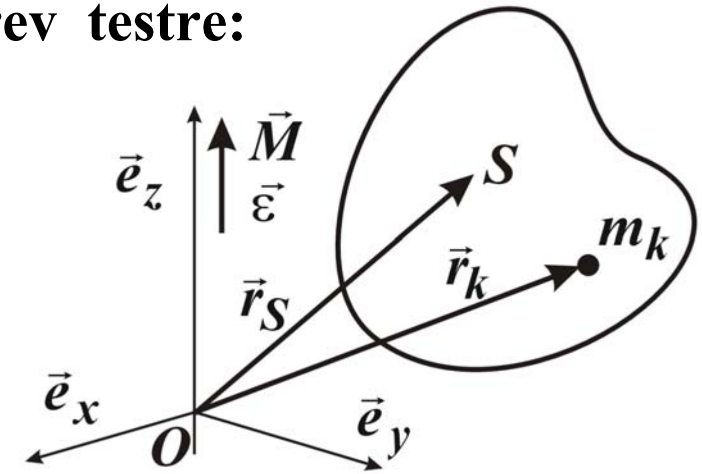
$$\boxed{W=\vec{M}_O\cdot\vec{\varphi}}$$

3.2. A forgó mozgás teljesítménye,

tömegpontra:



merev testre:



$$P_k = \frac{dW_k}{dt} = \vec{F}_k \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k,$$

$$P_k = \vec{F}_k \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_k \times \vec{F}_k,$$

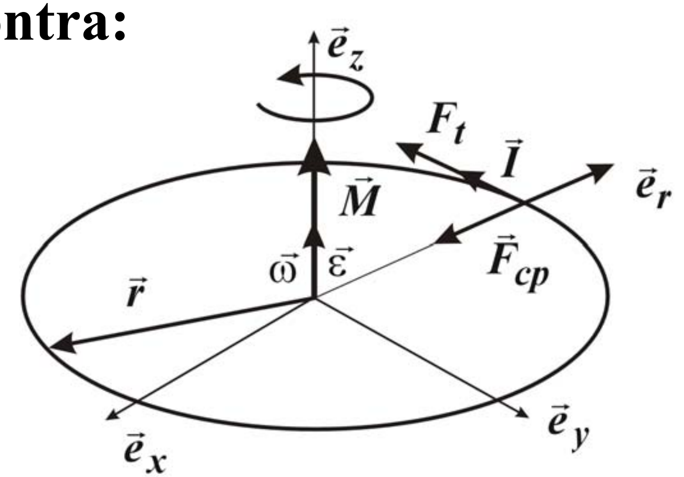
$$\boxed{P_k = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_k,}$$

$$P = \sum_k P_k = \vec{\omega} \cdot \sum_k \vec{M}_k = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O,$$

$$\boxed{P = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O,}$$

3.3. A mozgási energia és a perdület kapcsolata,

tömegpontra:



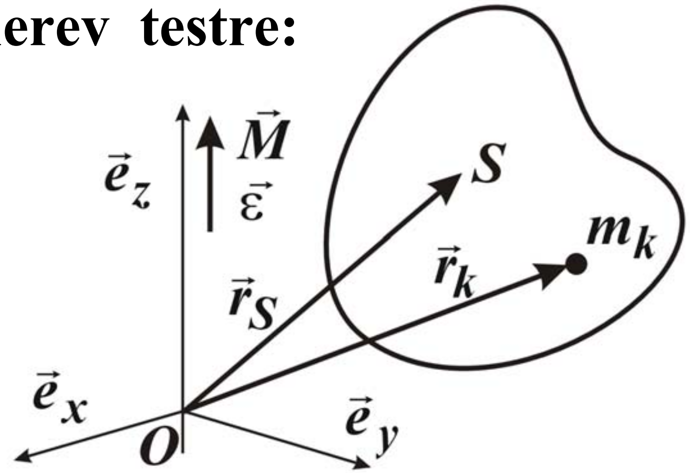
$$W_{mk} = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_k\right),$$

$$W_{mk} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k\right),$$

$$W_{mk} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_k \times \vec{I}_k\right) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_k ,$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \Theta_k \vec{\omega}^2 ,}$$

merev testre:



$$W_m = \sum_k W_{mk} ,$$

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_k \vec{\Pi}_k ,$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \Theta_O \vec{\omega}^2 ,}$$

3.4. Merev testek haladó és forgó mozgása, Összefoglalás I

haladó mozgás	**forgó mozgás**
helyzetvektor, a súlypont helyzete, $\vec{r}_s$ $\quad \vec{r}_s = \sum_k m_k \vec{r}_k \Big/ m$	szögelfordulás, $\vec{\varphi}$
sebesség, $\vec{v}_s = \dot{\vec{r}}_s$	szögsebesség, $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
gyorsulás, $\vec{a}_s = \dot{\vec{v}}_s = \ddot{\vec{r}}_s$	szöggyorsulás, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
tömeg, m	tehetetlenségi nyomaték, $\Theta = \sum_k m_k \vec{r}_k^{\,2}, \quad \Theta_s = \sum_k m_k \vec{r}_{ks}^{\,2}$
impulzus, $\vec{I} = m\vec{v}_s$	az impulzus nyomaték, v. perdület, $\vec{\Pi}_s = \Theta_s \vec{\omega}$

Merev testek haladó és forgó mozgása, Összefoglalás II

haladó mozgás	**forgó mozgás**
az impulzus tétel, az erő, $\vec{F} = \dot{\vec{I}} = m\dot{\vec{v}}_s = m\vec{a}_s = m\ddot{\vec{r}}_s$	az impulzus nyomaték tétel, a forgató nyomaték, $\vec{M}_s = \dot{\vec{\Pi}}_s = \Theta_s\vec{\varepsilon} = \Theta_s\dot{\vec{\omega}} = \Theta_s\ddot{\vec{\varphi}}$
erőlökés, $d\vec{I} = \vec{F}_s dt$	nyomaték lökés, $d\vec{\Pi}_s = \vec{M}_s dt$
elemi munka, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	elemi munka, $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
a teljesítmény, $P = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}_s$	teljesítmény, $P = dW/dt = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
a kinetikus, mozgási energia, $W_m = \frac{1}{2} m\vec{v}_s^2$	a kinetikus, forgási energia, $W_m = \frac{1}{2}\Theta\vec{\omega}^2$

4. Merev testek egyensúlya, Statika

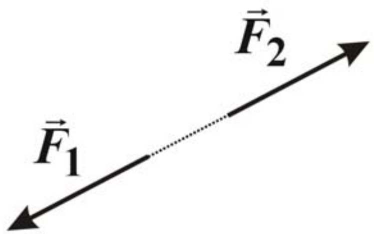
transzlációs egyensúly és rotációs v. forgási egyensúly:

$$\boxed{\sum_k \vec{F}_k = 0,} \qquad \boxed{\sum_k \vec{M}_k = 0,}$$

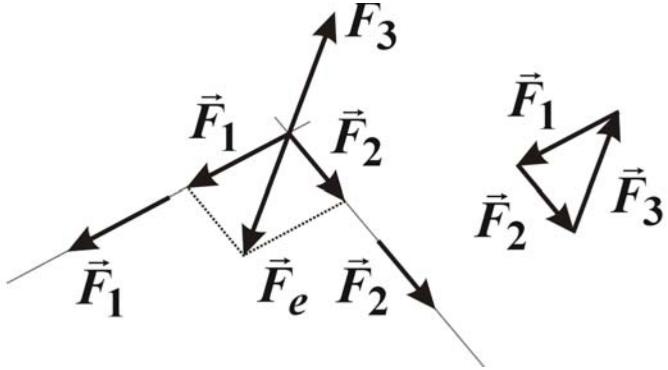
4.1. Axiómák:

a) Az erő: vektor mennyiség,
van: nagysága és iránya, hatásvonala, támadási pontja,
eredője: vektoriálisan összegződik,

b) Két erő egyensúlya: két közös hatásvonalú, azonos nagyságú, ellentétes irányú erő egyensúlyban van, ha eredőjük nulla,



c) <u>Három erő egyensúlya</u>: ha a három erő egy síkban van,

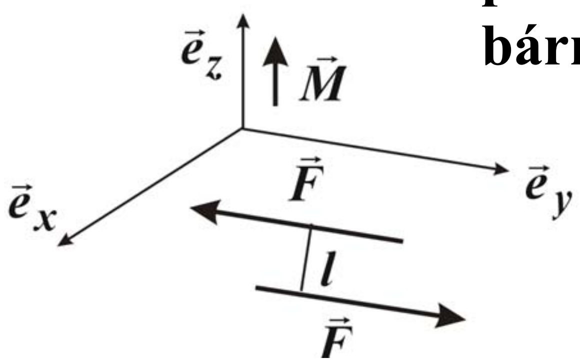


hatásvonalaik egy pontban metszik egymást,
zárt sokszöget alkotnak,
a vektorok nyílfolyama egységes,

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_3,$$

d) Speciális eset: <u>erőpár</u>:

két egyenlő nagyságú, ellentétes irányú,
párhuzamos hatásvonalú erők,
bármely pontra vett forgatónyomatéka azonos,



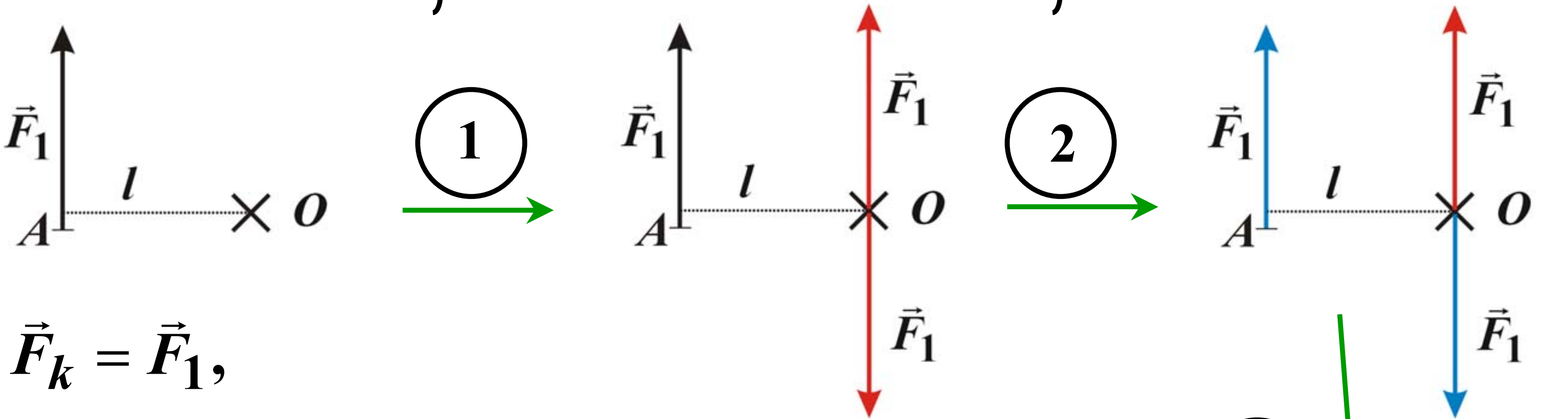
$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} \,,$$

4.2. Erőrendszer redukálása egy pontba:

az *A* pontban ható erők eredője redukálható az *O* pontba,

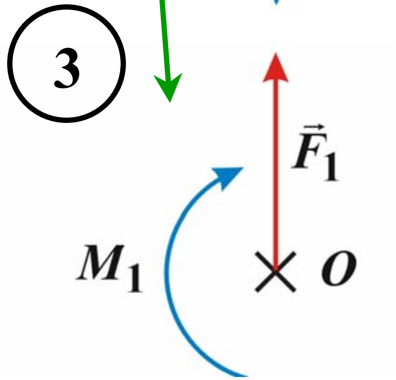
az *O* pontokban elhelyezett két ellentétes irányú, azonos nagyságú erővel,

amely az *O* pontban a erő nagyságát és forgató nyomatékát adja



$$\sum_k \vec{F}_k = \vec{F}_1,$$

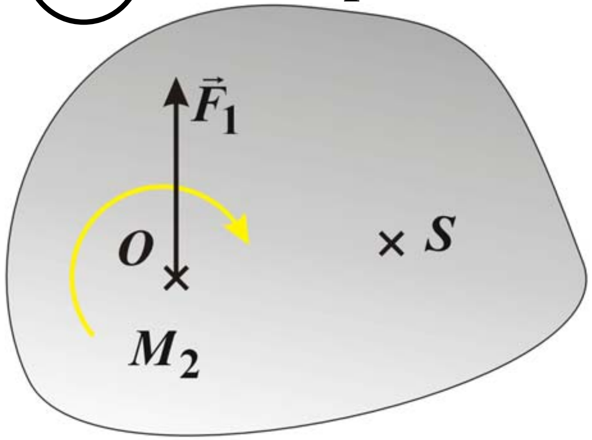
$$\sum_k M_k = F_1\, l = M_1,$$



4.3. Merev testre ható erőrendszer redukálható a súlypontba

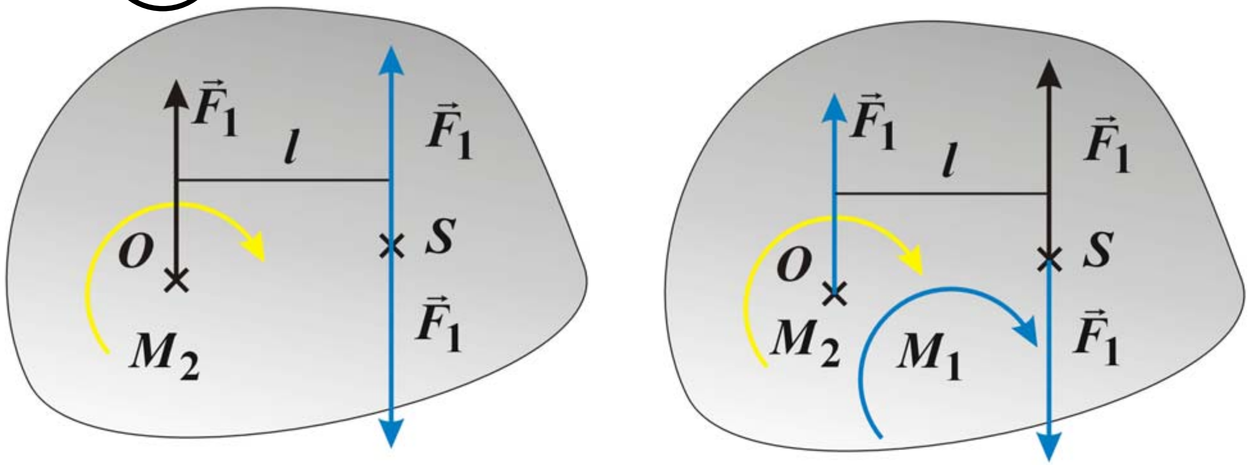
1

Az O pontban hat az F_1 erő és az M_2 forgató nyomaték,

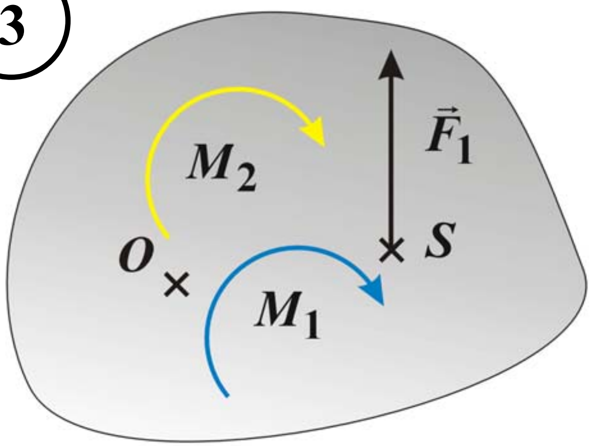


**Az F_1 erő redukciója az S súlypontba:
az F_1 erő hat az S pontban és fellép
az M_1 forgató nyomaték,**

2



3



**az eredmény a súlypontban ható F_1 erő és az
$M_1 + M_2$ forgatónyomatékok összege,**

C) Merev testek kényszermozgása,

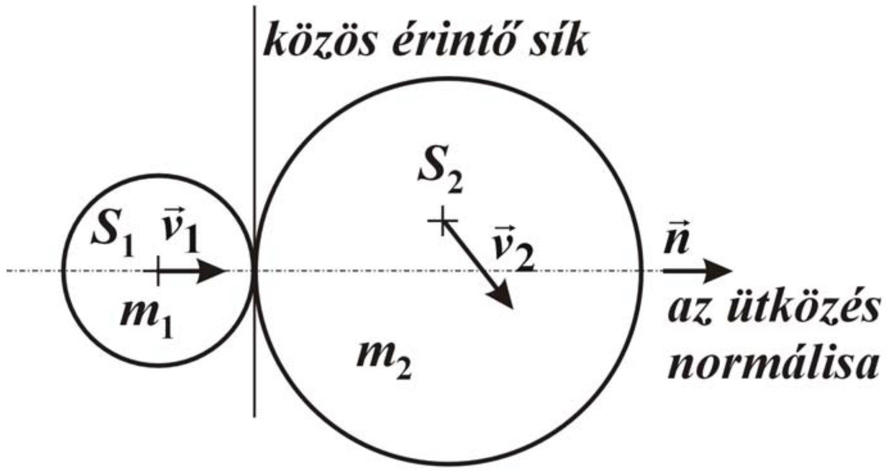
1. Két merev test ütközése,

Feltételek:

- rövid idő alatt, t és $t+\Delta t$ idő alatt következik be, $\Delta t \to 0$,
- ez alatt a test helyzetét nem változtatja meg,
- csak a két test kölcsönhatását vizsgáljuk,
a külső erők hatásától eltekintünk,

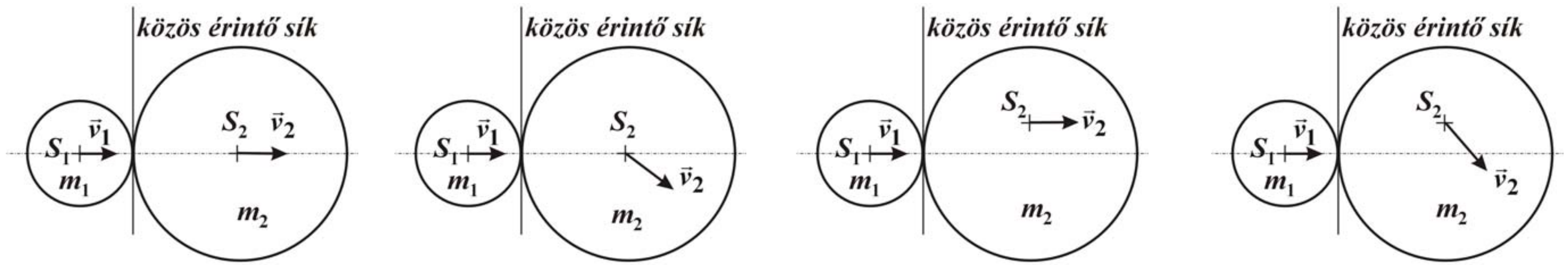
Alapfogalmak:

- a közös érintő sík,
- az ütközés normálisa,



1.1. Az ütközés osztályozása, I:

- **egyenes az ütközés**, ha az ütközés pillanatában a két test súlypontjának sebessége **párhuzamos** az ütközési normálissal,
- **ferde az ütközés**, ha az ütközés pillanatában a két test súlypontjának sebessége **nem párhuzamos** az ütközési normálissal,
- az ütközés **centrikus**, ha az ütközési normális **átmegy** a testek súlypontjain,
- az ütközés **excentrikus**, ha az ütközési normális **nem megy át** a testek súlypontjain



centrikus, egyenes, ütközés | centrikus, ferde ütközés | excentrikus, egyenes, ütközés | excentrikus, ferde, ütközés

Az ütközés osztályozása, II:

- az ütközés rugalmas, ha a két test mozgásmennyisége és mozgási energiája az ütközés során nem változik,
  - ütközés előtt a két test impulzusa $\vec{I}(t)$, utána $\vec{I}(t+\Delta t)$,
  - ütközés előtt a két test mozgási energiája $W(t)$, utána $W(t+\Delta t)$,

  az impulzus és energia megmaradási tételek alapján:

$$\vec{I}(t)-\vec{I}(t+\Delta t)=0, \rightarrow \vec{I}(t)=\vec{I}(t+\Delta t),$$

$$W(t)-W(t+\Delta t)=0, \rightarrow W(t)=W(t+\Delta t),$$

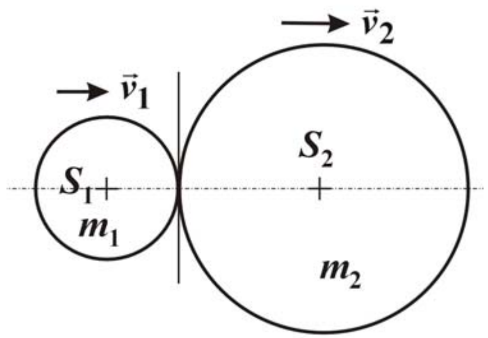
- az ütközés rugalmatlan, ha a két test mozgásmennyisége az ütközés során nem változik, az ütközés előtti mozgási energiája azonban veszteség formájában hő és hang energiává alakul,

$$\vec{I}(t)-\vec{I}(t+\Delta t)=0, \rightarrow \vec{I}(t)=\vec{I}(t+\Delta t),$$

$$W(t)\neq 0, \quad W(t+\Delta t)=0,$$

1.2. Centrikus ütközések, az ütközési normális átmegy a testek súlypontjain

a) Rugalmatlan ütközés, a két test mozgásmennyisége az ütközés során nem változik



ütközés előtt a tömegek sebessége: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$,

ütközés után a tömegek közös sebessége: $\vec{u}$,

a tömegek ütközés előtti impulzusa megegyezik az ütközés utáni impulzussal (az impulzus vektor, az egyenlőség a vektor komponensekre áll fenn):

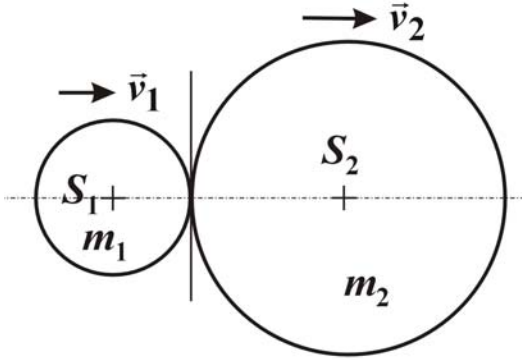
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

ütközés után a tömegek közös sebessége: $$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

az ütközési normális irányú komponensére: $$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

az ütközés érintősík irányú komponensére: $$u_\tau = \frac{m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}}{m_1 + m_2},$$

<u>1. példa</u>, rugalmatlan, centrikus ütközés előtt a két tömeg azonos irányban mozog,

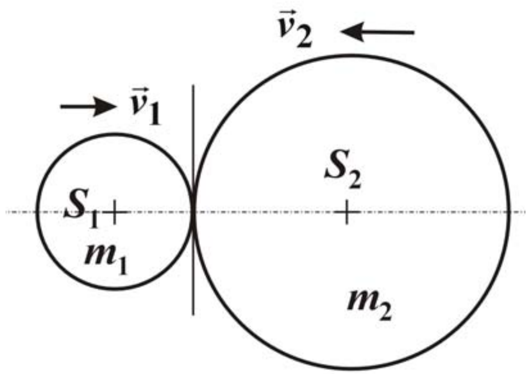


$$m_1 = 5\,\text{kg},\quad v_1 = 5\,\text{m/s},\quad m_2 = 10\,\text{kg},\quad v_2 = 3\,\text{m/s},$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{5\cdot 5 + 10\cdot 3}{15} = 3{,}6667\,\text{m/s},$$

a két tömeg azonos irányban folytatja a mozgást,

<u>2. példa</u>, rugalmatlan, centrikus ütközés előtt a két tömeg ellentétes irányban, egymással szemben mozog,



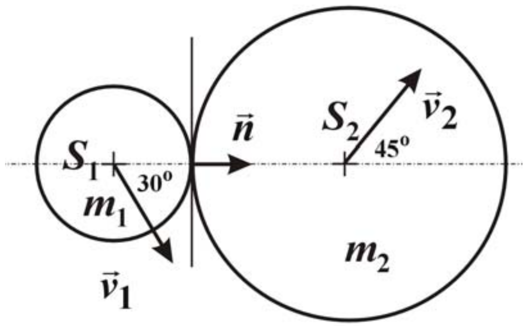
$$m_1 = 5\,\text{kg},\quad v_1 = 3\,\text{m/s},$$

$$m_2 = 10\,\text{kg},\quad v_2 = 5\,\text{m/s},$$

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{5\cdot 3 - 10\cdot 5}{15} = -2{,}3333\,\text{m/s},$$

ütközés után az 1. tömeg sebessége ellenkező irányú lesz,

3. példa, **Két tömeg centrikus, rugalmatlan, ferde ütközése,**



$$m_1 = 5\,\text{kg},\quad v_1 = 5\,\text{m/s},\quad \alpha_1 = 30^o,$$

$$m_2 = 10\,\text{kg},\quad v_2 = 3\,\text{m/s},\quad \alpha_2 = 45^o,$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

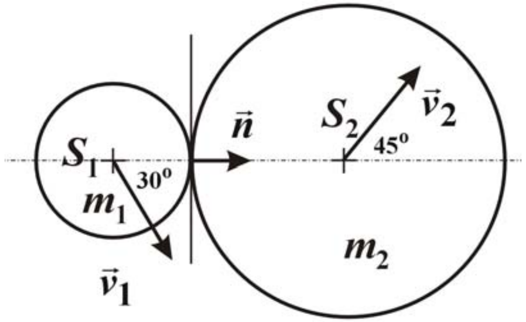
$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = (m_1 + m_2)u_n,\qquad m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau} = (m_1 + m_2)u_\tau,$$

az ütközési normális irányába eső sebesség komponensek:

$$v_{1n} = 5\cdot\cos 30^o = 4{,}3301\,\text{m/s},\quad v_{2n} = 3\cdot\cos 45^o = 2{,}1213\,\text{m/s},$$

ütközés után az ütközési normális irányú sebesség:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2},\quad u_n = \frac{5\cdot 4.3301 + 10\cdot 2{,}1213}{15} = 2{,}8576\,\text{m/s},$$



$$m_1 = 5\,\text{kg}, \quad v_1 = 5\,\text{m/s}, \quad \alpha_1 = 30^o,$$

$$m_2 = 10\,\text{kg}, \quad v_2 = 3\,\text{m/s}, \quad \alpha_2 = 45^o,$$

ütközés előtt az érintősík irányú sebesség komponensek:

$$v_{1\tau} = -5 \cdot \sin 30^o = -2{,}5000\,\text{m/s}, \quad v_{2\tau} = 3 \cdot \sin 45^o = 2{,}1213\,\text{m/s},$$

ütközés után az érintősík irányú sebesség:

$$u_\tau = \frac{m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}}{m_1 + m_2}, \quad u_\tau = \frac{-2{,}5 \cdot 5 + 10 \cdot 2{,}1213}{15} = 0{,}5809\,\text{m/s},$$

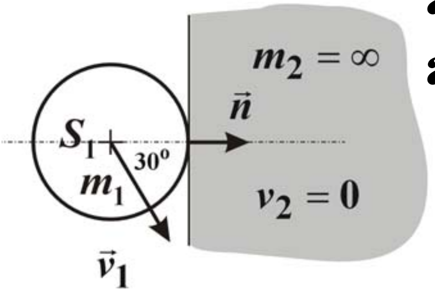
ütközés után a közös sebesség nagysága:

$$u = \sqrt{u_n^2 + v_{1\tau}^2} = \sqrt{2{,}8576^2 + 0{,}5809^2} = 2{,}9160\,\text{m/s},$$

ütközés után a közös sebesség iránya az ütközési normálishoz:

$$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{u_\tau}{u_n}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{0{,}5809}{2{,}8576}\right) = 11{,}4907^o,$$

4. példa, Végtelen tömeghez, falhoz való rugalmatlan ütközés esetén a végtelen nagy tömeg elnyeli az impulzust, a normális irányú komponenst:

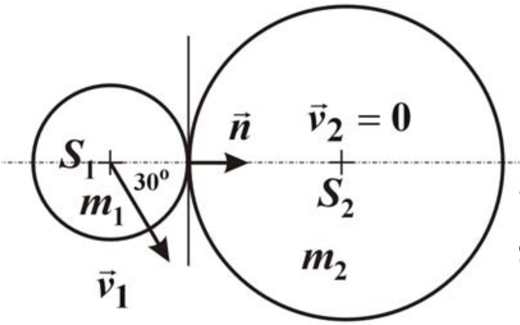


$$m_1 v_{1n} + 0 = (m_1 + m_2) u_n, \rightarrow u_n = 0,$$

$$m_1 v_{1\tau} + 0 = m_1 u_\tau, \rightarrow u_\tau = v_{1\tau},$$

(*szorzat értéke*)

5. példa, rugalmatlan ferde ütközés álló tömeghez:



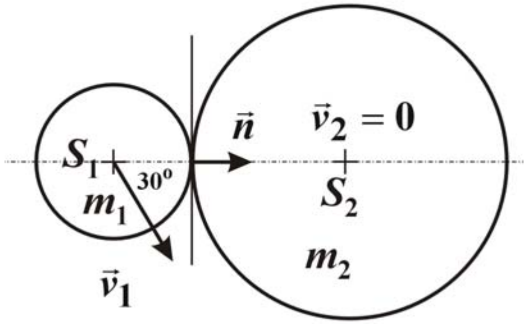
$$m_1 = 5\,\text{kg}, \quad v_1 = 3\,\text{m/s}, \quad m_2 = 10\,\text{kg}, \quad v_2 = 0,$$

az ütközési normális és tangenciális irányába eső sebesség komponensek:

$$v_{1n} = 3 \cdot \cos 30^o = 2{,}5981\,\text{m/s}, \; v_{1\tau} = 3 \cdot \sin 30^o = 1{,}5\,\text{m/s},$$

az ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből a normális irányú sebesség komponens:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n}}{m_1 + m_2} = \frac{5 \cdot 2{,}5981}{15} = 0{,}8660\,\text{m/s},$$



az ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből a tangenciális irányú sebesség komponens:

$$u_\tau = \frac{m_1 v_{1\tau}}{m_1 + m_2} = \frac{5 \cdot 1{,}5}{15} = 0{,}5\ \mathrm{m/s},$$

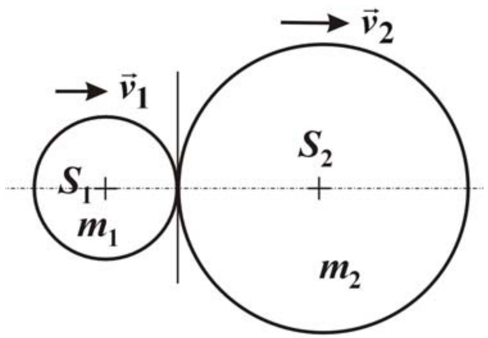
ütközés után a közös sebesség nagysága:

$$u = \sqrt{u_n^2 + v_\tau^2} = \sqrt{0{,}8660^2 + 0{,}5^2} = 1{,}0\ \mathrm{m/s},$$

a sebesség iránya z ütközési normálishoz:

$$\alpha = \mathrm{arc\ tg}\left(\frac{u_\tau}{u_n}\right) = \mathrm{arc\ tg}\left(\frac{0{,}5}{0{,}866}\right) = 30{,}0^o,$$

b) Rugalmas ütközéskor az impulzusok mellet a tömegek kinetikai energiája is változatlan,



ütközés előtt a tömegek sebessége: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$,

ütközés után a tömegek sebessége: $\vec{u}_1, \vec{u}_2$,

az impulzusra és a kinetikus energiára vonatkozó egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} & m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ & \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2, \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} & m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ & \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2) = \frac{1}{2}m_2(\vec{u}_2^2 - \vec{v}_2^2), \end{aligned}\right.$$

a második egyenletet elosztva az elsővel:

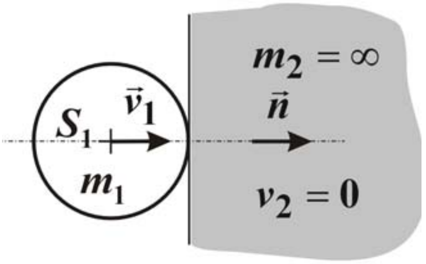
$$\frac{1}{2}\frac{m_1(\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2)}{m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)} = \frac{1}{2}\frac{m_2(\vec{u}_2^2 - \vec{v}_2^2)}{m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)},$$

nevezetes szorzatok:

$$\boxed{\begin{aligned} & m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ & (\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = (\vec{u}_2 + \vec{v}_2), \end{aligned}}$$

a két egyenletből, ha normális és tangenciális sebességekre bontjuk, négy egyenlethez jutunk, az ismeretlen sebességek meghatározhatók,

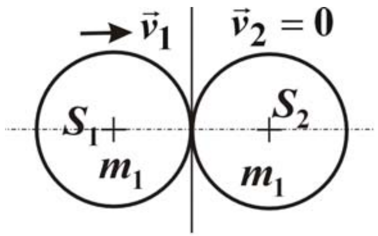
6. példa, Végtelen tömeghez, falhoz való rugalmas ütközés esetén:



$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + 0 = m_1\vec{u}_1 + 0, &\rightarrow m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right) = 0, \\ \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2, &\rightarrow \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2\right) = 0, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = 0, \\ \vec{u}_1 = -\vec{v}_1, \end{aligned}$$

a tömeg a falról visszapattan,

7. példa, rugalmas ütközés álló tömeghez: ha a két tömeg egyenlő,



az impulzusok egyenlőségéből:

$$v_1 = u_1 + u_2, \rightarrow v_1 - u_1 = u_2,$$

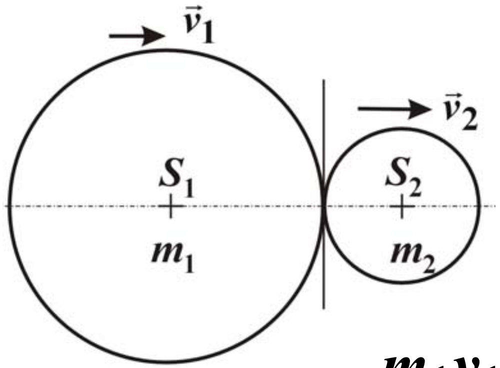
a kinetikus energiákra vonatkozó egyenletből:

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2, \rightarrow v_1 + u_1 = u_2,$$

a két egyenlet megoldásából: $u_1 = 0, \quad u_2 = v_1,$

az első tömeg elveszti sebességét, megáll,
míg a másik tömeg az első sebességével halad tovább,

8. példa, **Két tömeg centrikus rugalmas ütközése,**



$$m_1 = 5\,\mathrm{g}, \qquad v_1 = 6\,\mathrm{m/s},$$

$$m_2 = 4\,\mathrm{g}, \quad v_2 = 2\,\mathrm{m/s},$$

ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \rightarrow \boxed{m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2),}$$

ütközés előtti és utáni kinetikus energiák egyenlőségéből:

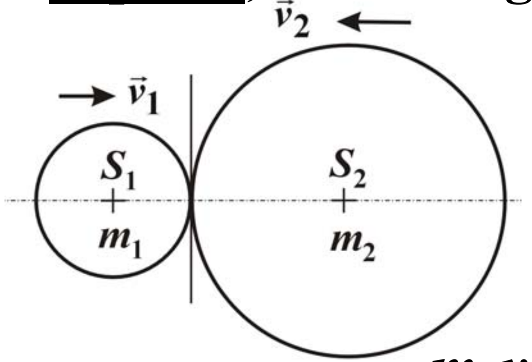
$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2, \rightarrow \boxed{m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right),}$$

a második egyenletet elosztva az elsővel, a megoldandó egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2), \\ (v_1 + u_1) &= (u_2 + v_2), \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5(6 - u_1) &= 4(u_2 - 2), \\ (6 + u_1) &= (u_2 + 2), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 30 - 5u_1 &= 4u_2 - 8, \\ -24 - 4u_1 &= -4u_2 - 8, \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{u_1 = \frac{22}{9}\,\mathrm{m/s},}} \quad \left.\begin{aligned} 30 - 5u_1 &= 4u_2 - 8, \\ 30 + 5u_1 &= 5u_2 + 10, \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{u_2 = \frac{58}{9}\,\mathrm{m/s},}}$$

9. példa, **Két tömeg centrikus rugalmas ütközése,**



$$m_1 = 3\,\mathrm{g}, \quad v_1 = 5\,\mathrm{m/s},$$
$$m_2 = 4\,\mathrm{g}, \quad v_2 = 2\,\mathrm{m/s},$$

ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \rightarrow \boxed{m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2),}$$

ütközés előtti és utáni kinetikus energiák egyenlőségéből:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2, \rightarrow \boxed{m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right),}$$

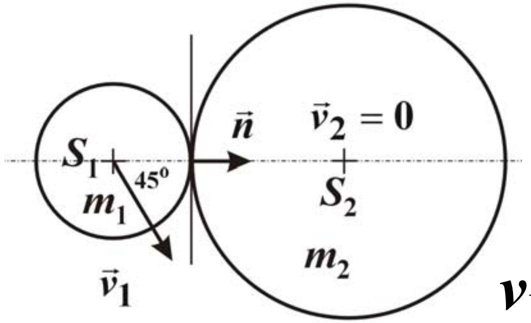
a második egyenletet elosztva az elsővel, a megoldandó egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 + v_2), \\ (v_1 + u_1) &= (u_2 - v_2), \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3(5 - u_1) &= 4(u_2 + 2), \\ (5 + u_1) &= (u_2 - 2), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 15 - 3u_1 &= 4u_2 + 8, \\ -20 - 4u_1 &= -4u_2 + 8, \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{u_1 = -\frac{20}{7}\,\mathrm{m/s},}} \quad \left.\begin{aligned} 15 - 3u_1 &= 4u_2 + 8, \\ 15 + 3u_1 &= 3u_2 - 6, \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{u_2 = \frac{28}{7}\,\mathrm{m/s},}}$$

az 1. tömeg visszafordul, a 2. tömeg tovább halad,

10. példa, Két tömeg centrikus, rugalmas, ferde ütközése,



$$m_1 = 1\,\text{kg}, \quad v_1 = 2\,\text{m/s},$$

$$m_2 = 7\,\text{kg}, \quad v_2 = 0,$$

a $\vec{v}_1$ sebesség komponensei:

$$v_{1n} = 2 \cdot \cos 30^o = 1{,}7321\,\text{m/s}, \quad v_{1\tau} = 2 \cdot \sin 30^o = 1\,\text{m/s},$$

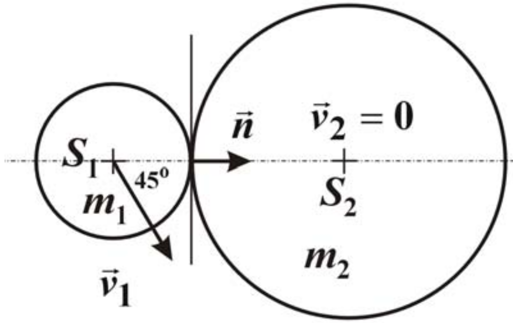
az ütközés előtti és utáni impulzusok, valamint a mozgási energiák egyenlőségéből:

$$\boxed{\begin{aligned} &m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ &(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = (\vec{u}_2 + \vec{v}_2), \end{aligned}}$$

az ütközési normális irányú sebesség komponensek

$$\left.\begin{aligned} &m_1(v_{1n} - u_{1n}) = m_2(u_{2n} - v_{2n}), \\ &(v_{1n} + u_{1n}) = (u_{2n} + v_{2n}), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1{,}7321 - u_{1n}) = 7u_{2n}, \\ &(1{,}7321 + u_{1n}) = u_{2n}, \end{aligned}$$

a két egyenlet megoldásából $u_{1n} = -1{,}2991\,\text{m/s}, \quad u_{2n} = 0{,}4330\,\text{m/s},$



$$m_1 = 1\,\text{kg}, \quad v_1 = 2\,\text{m/s},$$

$$m_2 = 7\,\text{kg}, \quad v_2 = 0,$$

a $\vec{v}_1$ sebesség komponensei:

$$v_{1n} = 2 \cdot \cos 30^o = 1{,}7321\,\text{m/s}, \quad v_{1\tau} = 2 \cdot \sin 30^o = 1\,\text{m/s},$$

az ütközés előtti és utáni impulzusok, valamint a mozgási energiák egyenlőségéből:

$$\boxed{\begin{aligned} &m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2),\\ &(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = (\vec{u}_2 + \vec{v}_2), \end{aligned}}$$

az ütközés érintősík irányú sebesség komponensek

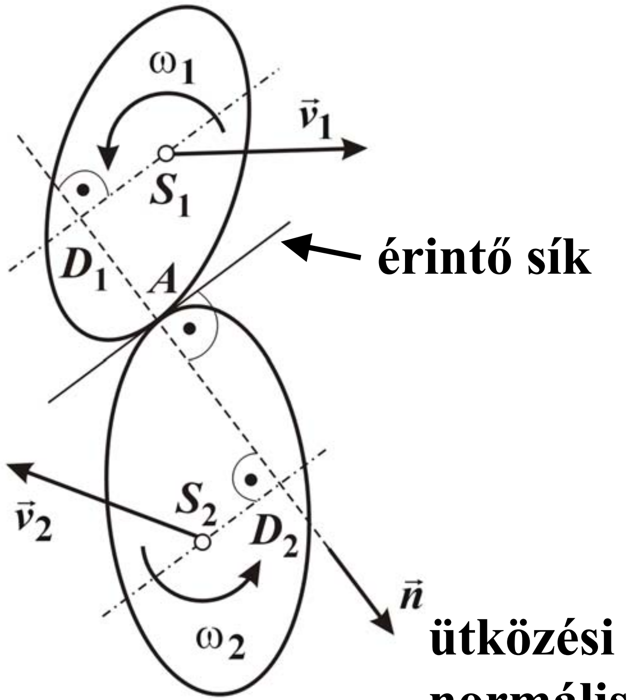
$$\left.\begin{aligned} &m_1(v_{1\tau} - u_{1\tau}) = m_2(u_{2\tau} - v_{2\tau}),\\ &(v_{1\tau} + u_{1\tau}) = (u_{2\tau} + v_{2\tau}), \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &(1 - u_{1\tau}) = 7u_{2\tau},\\ &(1 + u_{1\tau}) = u_{2\tau}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &u_{1\tau} = -0{,}7500\,\text{m/s},\\ &u_{2\tau} = 0{,}2500\,\text{m/s}, \end{aligned}$$

az 1. tömeg ütközés utáni sebessége és iránya: $u_1 = 1.5000\ \text{m/s},\ \alpha_1 = -150^o,$

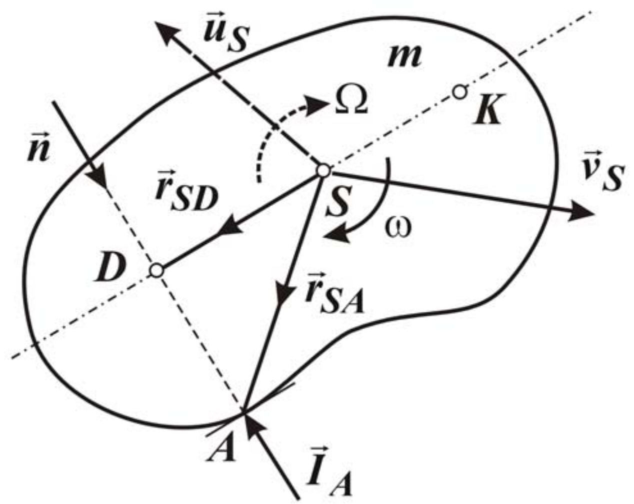
az 2. tömeg ütközés utáni sebessége és iránya: $u_2 = 0.5000\ \text{m/s},\ \alpha_2 = 30^o,$

az 1. tömeg visszalökődik, a két tömeg ellentétes irányban indul el,

1.3. Excentrikus ütközések,



1. merev test

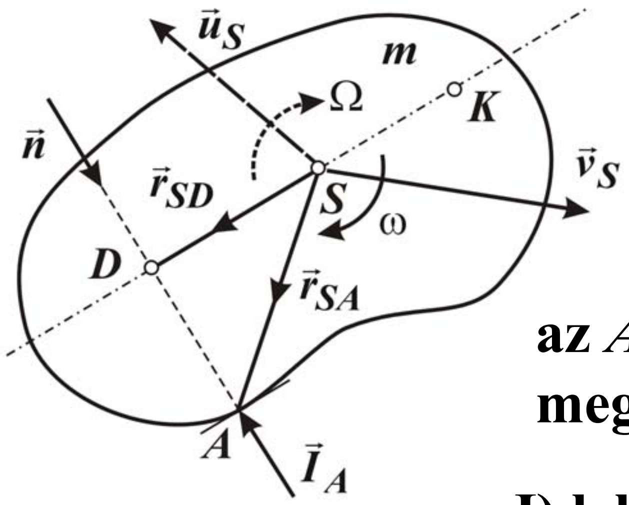


a súlypont ütközés előtti sebessége és szögsebessége: $\vec{v}_S, \omega,$

a súlypont ütközés utáni sebessége és szögsebessége: $\vec{u}_S,\ \Omega,$

az *A* ütközési pontban a merev testet impulzus éri, megváltozik a test a sebessége és a perdülete:

1. merev test



a súlypont ütközés előtti sebessége és szögsebessége: $\vec{v}_S, \omega,$

a súlypont ütközés utáni sebessége és szögsebessége: $\vec{u}_S, \; \Omega,$

az *A* ütközési pontban a merev testet impulzus éri, megváltozik a test a sebessége és a perdülete:

I) lehetséges megoldás:

Az ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből: $\vec{I}_A + m\vec{v}_s = m\vec{u}_s,$

és az ütközés előtti és utáni perdület egyenlőségéből:

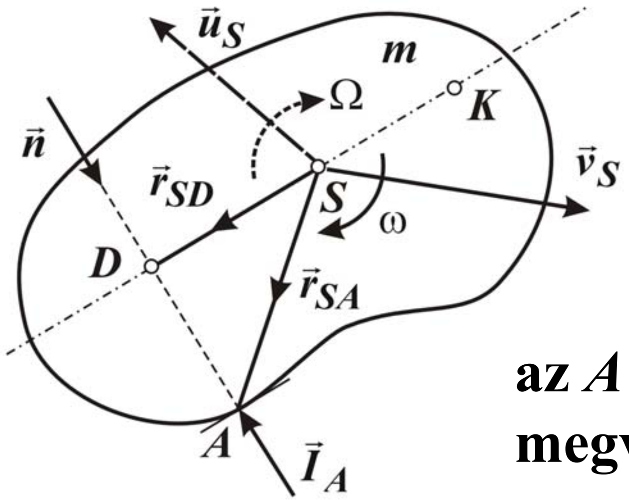
$$\vec{\Pi}_S = \vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A + \Theta_S \vec{\omega} = \Theta_S \vec{\Omega},$$

az új sebességek és szögsebességek meghatározhatók (4 egyenlet a komponensekre),

II) lehetséges megoldás: redukált tömeg bevezetése

visszavezethető centrális ütközésre ha a merev testet helyettesítjük egy redukált tömeggel, ***hol helyezzük el és mekkora legyen ez a redukált tömeg?***

1. merev test



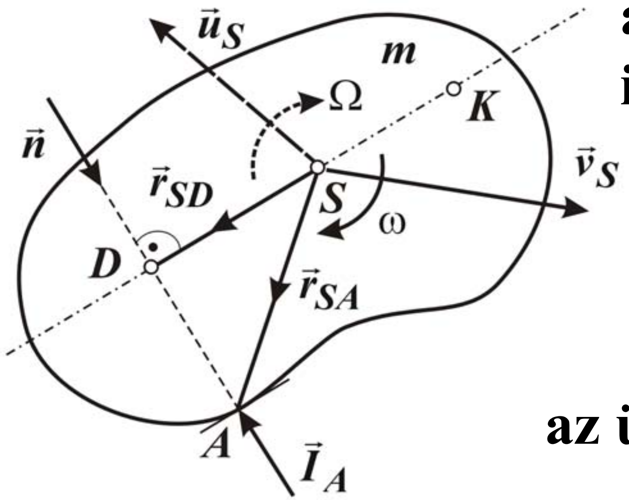
a súlypont ütközés előtti sebessége és szögsebessége: $\vec{v}_S, \omega,$
ütközés utáni sebessége és szögsebessége: $\vec{u}_S, \ \Omega,$

az A ütközési pontban a merev tesetet impulzus éri, megváltozik a merev test a sebessége és a perdülete:

$$\Delta\vec{I} = m\vec{u}_s - m\vec{v}_s = \vec{I}_A, \rightarrow \vec{u}_s - \vec{v}_s = \frac{\vec{I}_A}{m},$$

$$\Delta\vec{\Pi} = \Theta_S\vec{\Omega} - \Theta_S\vec{\omega} = \vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A, \rightarrow \vec{\Omega} - \vec{\omega} = \frac{1}{\Theta_S}\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A,$$

1. merev test



az ütközés D <u>talppontjában</u> a redukált tömeg az impulzussal arányosan változtatja sebességét,

a <u>*D*</u> pont sebessége ütközés előtt és után:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SD},$$

$$\vec{u}_D = \vec{u}_S + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{SD},$$

az ütközési talppontban a sebesség megváltozása:

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \underbrace{\vec{u}_S - \vec{v}_S}_{\frac{\vec{I}_A}{m}} + \underbrace{\left(\vec{\Omega} - \vec{\omega}\right)}_{\frac{1}{\Theta_S}\left(\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A\right)} \times \vec{r}_{SD} = \frac{\vec{I}_A}{m} + \frac{1}{\Theta_S}\left(\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A\right) \times \vec{r}_{SD},$$

$$\boxed{\frac{1}{m_D} = \frac{1}{m} + \frac{\vec{r}_{SD}^{\,2}}{\Theta_S},}$$

matematika:

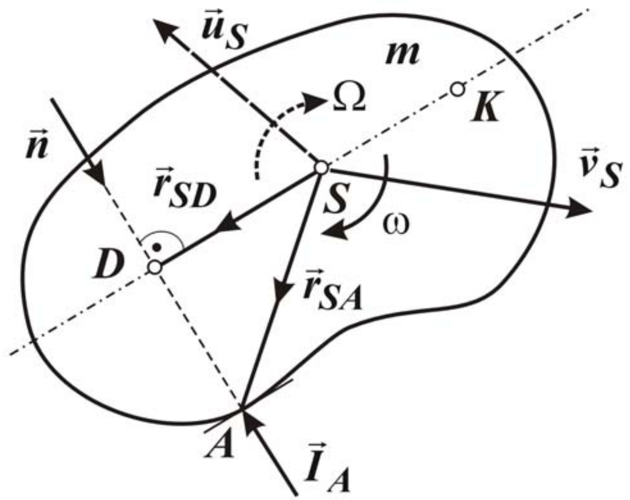
$$\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{z}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{z}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{z},$$

$$\left(\vec{v} \times \vec{z}\right) \times \vec{u} = -\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{z}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{z} - \left(\vec{u} \cdot \vec{z}\right)\vec{v},$$

redukált tömeg

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \frac{\vec{I}_A}{m} + \frac{1}{\Theta_S}\underbrace{\left(\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}_{SD}\right)}_{\vec{r}_{SD}^{\,2}}\vec{I}_A - \underbrace{\frac{1}{\Theta_S}\left(\vec{r}_{SD} \cdot \vec{I}_A\right)\vec{r}_{SD}}_{\vec{r}_{SD} \perp \vec{I}_A \rightarrow \vec{r}_{SD} \cdot \vec{I}_A = 0} = \frac{\vec{I}_A}{m_D},$$

1. merev test



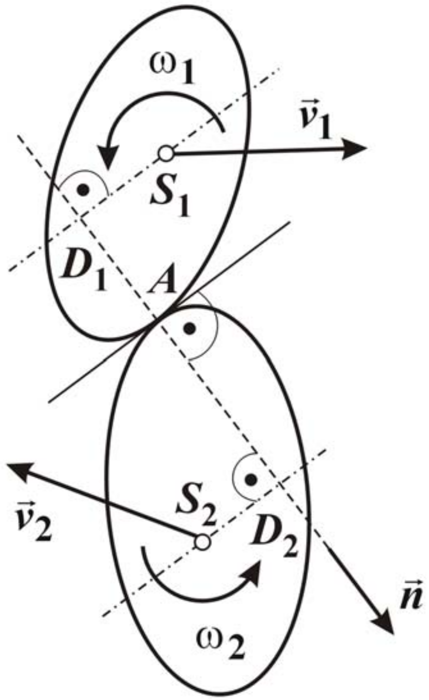
a D pontban a redukált tömeg ismeretében az A pontbeli impulzus hatására a sebesség változása:

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\Theta_S} \left(\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}_{SD} \right) \right) \vec{I}_A = \frac{\vec{I}_A}{m_D},$$

a redukált tömeg: $\boxed{\frac{1}{m_D} = \frac{1}{m} + \frac{\vec{r}_{SD}^{\,2}}{\Theta_S},}$

A redukált tömegeket a megfelelő D pontokba helyezve, a centrális ütközés szabályai szerint lehet eljárni,

Két excentrikusan ütköző merev test



***D*₁**

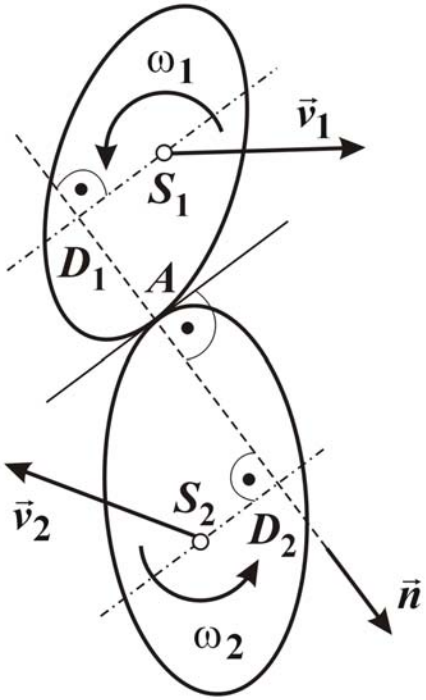
D_1, D_2 pontokban elhelyezve az egyes merev testek m_{D1}, m_{D2} redukált tömegeit, a centrális ütközés szabályai szerint járunk el,

az egyes testekre ható oda-vissza ható erőimpulzusokkal a centrális ütközésnél ismert összefüggést kapjuk:

$$m_{D1}\vec{v}_{D1} + m_{D2}\vec{v}_{D2} = m_{D1}\vec{u}_{D1} + m_{D2}\vec{u}_{D2},$$

ha az ütközés rugalmas, akkor az impulzus-megmaradás mellett az energia-megmaradási egyenletet is figyelembe kell venni:

$$\frac{1}{2}m_{D1}\vec{v}_{D1}^{2} + \frac{1}{2}m_{D2}\vec{v}_{D2}^{2} = \frac{1}{2}m_{D1}\vec{u}_{D1}^{2} + \frac{1}{2}m_{D2}\vec{u}_{D2}^{2},$$



a két egyenlet rendezéséből:

$$m_{D1}\left(\vec{v}_{D1}-\vec{u}_{D1}\right)=m_{D2}\left(\vec{u}_{D2}-\vec{v}_{D2}\right),$$

$$m_{D1}\left(\vec{v}_{D1}^{\,2}-\vec{u}_{D1}^{\,2}\right)=m_{D2}\left(\vec{u}_{D2}^{\,2}-\vec{v}_{D2}^{\,2}\right),$$

a második egyenletet az első egyenlettel elosztva:

$$\left(\vec{v}_{D1}+\vec{u}_{D1}\right)=\left(\vec{u}_{D2}+\vec{v}_{D2}\right),$$

végül, rugalmas ütközéskor az ütközési normális irányában elhelyezett redukált tömegek ismeretében a sebességek a centrális ütközés szabályai szerint meghatározhatók:

$$m_{D1}\left(\vec{v}_{D1}-\vec{u}_{D1}\right)=m_{D2}\left(\vec{u}_{D2}-\vec{v}_{D2}\right),$$

$$\left(\vec{v}_{D1}+\vec{u}_{D1}\right)=\left(\vec{u}_{D2}+\vec{v}_{D2}\right),$$

<u>C) Merev testek kényszermozgása,</u>

<u>1. Két merev test ütközése</u>, (3. előadás)
<u>2. Mechanikai hullámmozgás</u>

hullámmozgás: energiát, impulzust szálit,

•<u>Longitudinális hullám</u>: a hullámmozgással páthuzamos az anyagi részecskék kimozdulása, pl. harmonikus rezgőmozgás, rugómozgás,

•<u>Tranzverzális hullám</u>: a hullám terjedési irányára merőleges az anyagi részecskék kimozdulása, pl. kötélen haladó hullámmozgás, elektromágneses hullámok,

2.1. Longitudinális hullámmozgás bevezető,

Matematikai Összefoglaló

$g(t) \longrightarrow$ **dinamikus elem** $\longrightarrow x(t)$

Az $x(t)$ elmozdulásra, mint változóra vonatkozó mozgásegyenlet egy másodrendű differenciál egyenlet,a (RE) rendszeregyenlet,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k_1\frac{dx(t)}{dt}+k_0x(t)=g(t),$$

megoldása, összetevőkre bontással,

$$x(t)=x_f(t)+x_g(t),$$

az $x_f(t)$ szabad válasz a homogén differenciálegyenletet elégíti ki, $g(t)=0$

$$\frac{d^2x_f(t)}{dt^2}+k_1\frac{dx_f(t)}{dt}+k_0x_f(t)=0,$$

a szabad választ a következő alakban keressük, $x_f(t)=Me^{\lambda t}$,

$$\lambda^2Me^{\lambda t}+k_1\lambda Me^{\lambda t}+k_0Me^{\lambda t}=\underbrace{\left(\lambda^2+k_1\lambda+k_0\right)}Me^{\lambda t}=0,$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+k_1\lambda+k_0=0, \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{sajátértékek}\\ \lambda_1,\lambda_2\end{array}\right.$

az $x_f(t)$ szabad válasz: $x_f(t) = M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t}$,

az $x_g(t)$ gerjesztett válasz kielégíti a teljes differenciál egyenletet,

$$\frac{d^2 x_g(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx_g(t)}{dt} + k_0 x_g(t) = g(t),$$

lineáris rendszerben a gerjesztett válasz hasonlít a gerjesztésre,
a gerjesztett választ próbafüggvény módszerrel keressük;

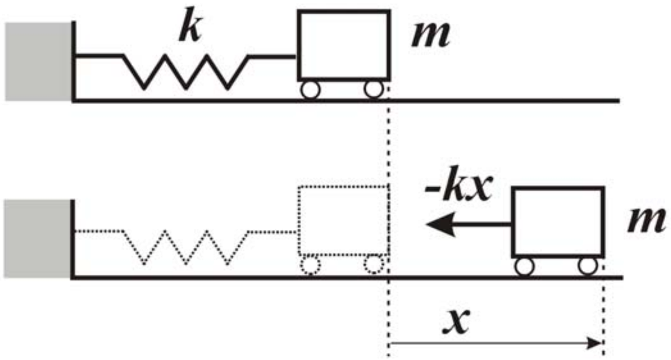
a RE megoldása: $x(t) = M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + x_g(t)$,

Az M_1 és az M_2 konstansokat a kezdeti feltételekből határozzuk meg:

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = M_1 + M_2 + x_g(t=0), \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dot{x}_g(t=0), \end{aligned}\right\} \longrightarrow M_1, M_2.$$

3. Harmonikus rezgőmozgás, longitudinális hullámok

3.1. Csillapítatlan szabad rezgés mozgásegyenlete:



a rugót nyugalmi helyzetéből kitérítve,
az m tömegre a rugóerő hat: $-kx(t)=m\ddot{x}(t)$,
elengedve rezgőmozgás jön létre,

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+kx(t)=0,}$$

A mozgásegyenlet= Rendszer Egyenlet= Homogén Differenciál Egyenlet,

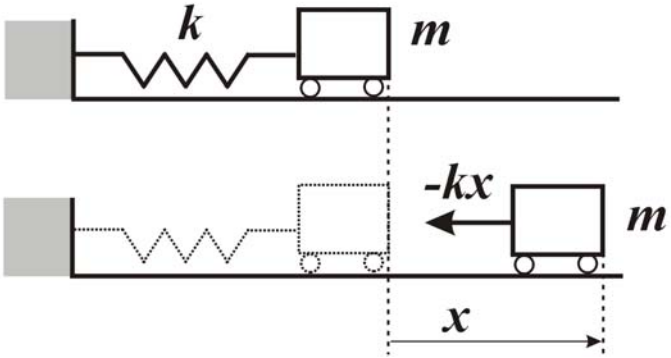
a RE megoldása a szabad válasz: $g(t)=0,\rightarrow x_g(t)\equiv 0,\Rightarrow x(t)=x_f(t)$,

a szabad válasz $x_f(t)=d\,e^{\lambda t}$ általános alakját a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus egyenletből a sajátértékek:

$$m\lambda^2 de^{\lambda t}+kde^{\lambda t}=\left(m\lambda^2+k\right)de^{\lambda t}0,\rightarrow \lambda_{12}=\sqrt{-\frac{k}{m}}=\pm j\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm j\omega_0,$$

ω_0 − a rugómozgás saját-körfrekvenciája

a szabad válasz: $x(t)=d_1e^{j\omega_0 t}+d_2e^{-j\omega_0 t}$,



a szabad válasz: $x(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t}$,

egyik megoldási mód: a konstansok meghatározása

kezdeti feltételek: $\begin{cases} t = 0, \quad x(0) = x_0, \\ t = 0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0, \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 = d_1 + d_2, \\ \dot{x}(0) = v(0) &= v_0 = j\omega_0 d_1 - j\omega_0 d_2, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} v_0 + j\omega_0 x_0 &= 2 j\omega_0 d_1, \\ v_0 - j\omega_0 x_0 &= 2 j\omega_0 d_2, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{v_0 + j\omega_0 x_0}{2 j\omega_0}, \\ d_2 &= \frac{v_0 - j\omega_0 x_0}{-2 j\omega_0}, \end{aligned}\right\} \quad d_2 = d_1^*, \begin{cases} d_1 + d_2 = x_0, \\ d_1 - d_2 = \dfrac{v_0}{j\omega_0}, \end{cases}$$

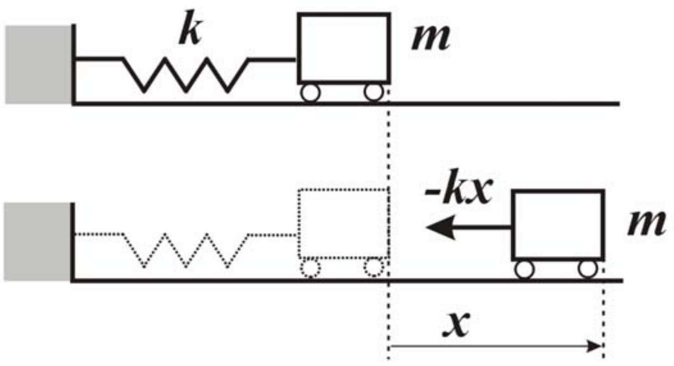
a d1, d2 konstansok komplex konjugált párt alkotnak

a szabad válasz:

$$x(t) = d_1 \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t} + d_2 \underbrace{e^{-j\omega_0 t}}_{\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t} = (d_1 + d_2)\cos\omega_0 t + j(d_1 - d_2)\sin\omega_0 t,$$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

másik megoldási mód: **a szabad válasz az Euler formula alkalmazásával**



$$x(t) = d_1 \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t} + d_2 \underbrace{e^{-j\omega_0 t}}_{\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t} =$$

$$= (d_1 + d_2)\cos\omega_0 t + j(d_1 - d_2)\sin\omega_0 t,$$

$$A = d_1 + d_2, \quad B = j(d_1 - d_2),$$

új változók bevezetésével: $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$

A,B **állandók a kezdeti feltételekből:**

a kezdeti elmozdulás: $t = 0, \quad x(0) = x_0 = A\cos 0 + B\cancel{\sin}\, 0, \rightarrow A = x_0,$

a mozgás sebessége: $v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t,$

$$t = 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = -A\omega_0 \cancel{\sin}\, 0 + B\omega_0 \cos 0, \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0},$$

a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás: $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$

A csillapítatlan szabad rezgés mozgásegyenletének megoldása:

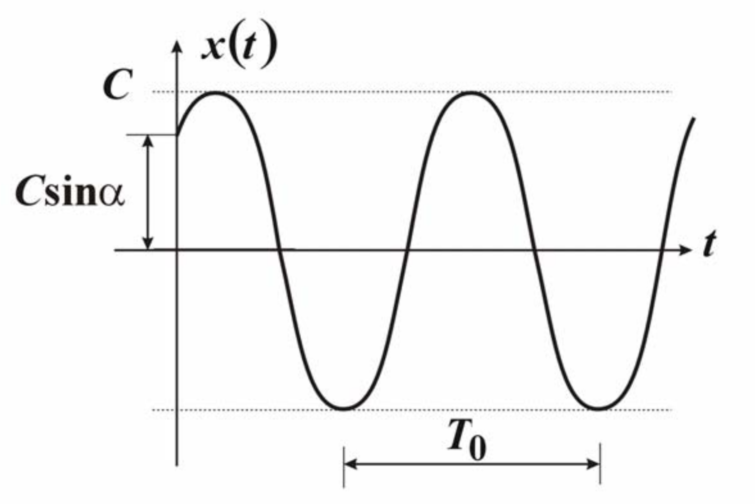
$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0,}$$

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$x(t) = C\cos\alpha\sin\omega_0 t + C\sin\alpha\cos\omega_0 t,$$

$$A = C\sin\alpha = x_0, \quad B = C\cos\alpha = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{A}{B},$$

a harmonikus rezgőmozgás egyenlete: $\boxed{x(t) = C\sin(\omega_0 t + \alpha),}$



α – kezdőfázis,

ω_0 – saját körfrekvencia, [rad/s],

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$ **– a rezgő rendszerre jellemző,**

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0},$$ **– saját rezgésidő,**

1. Példa,

Egy 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz 200g tömeget csatlakoztatunk a vízszintes síkban, amelyet 5 cm-rel megnyújtunk, majd elengedés után 4cm/s sebességgel kezd el mozogni. Határozza meg a kialakuló csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciáját, valamint a rezgés amplitúdóját és kezdőfázisát.

Megoldás:

A rugó mozgásegyenlete: $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0, \rightarrow 0{,}2\ddot{x}(t)+3{,}2x(t)=0,$

Megoldása a szabadválasz: $x(t)=x_f(t)=d\,e^{\lambda t},$

A karakterisztikus polinom és a sajátértékek:

$$0{,}2\lambda^2+3{,}2=0, \rightarrow \lambda_{12}=\sqrt{-\frac{3{,}2}{0{,}2}}=\pm j4=\pm j\omega_0,$$

A rezgő rendszer saját (kör)frekvenciája: $\omega_0=4\,\mathrm{rad/s},$

A rezgő rendszer elmozdulása: $x(t)=d_1\,e^{\lambda_1 t}+d_2\,e^{\lambda_2 t},$

Figyelembe véve, hogy d_1, d_2 komplex konjugált párok:

$$d_1=|d_1|e^{j\delta},\; d_2=d_1^*=|d_1|e^{-j\delta}$$

A rezgő rendszer elmozdulása:

$$x(t) = d_1\, e^{\lambda_1 t} + d_2\, e^{\lambda_2 t} = |d_1| e^{j\delta} e^{j\omega_0 t} + |d_1| e^{-j\delta} e^{-j\omega_0 t} =$$

$$= |d_1| 2 \frac{e^{j(\omega_0 t + \delta)} + e^{-j(\omega_0 t + \delta)}}{2} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ |d_1| e^{j\delta} e^{j\omega_0 t} \right\} =$$

$$= 2|d_1| \cos(\omega_0 t + \delta),$$

A kezdeti feltételekből:

$$x(t=0) = x_0 = 0{,}05 = d_1 + d_2,$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = 0{,}04 = \underbrace{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2}_{\lambda_1 = j\omega_0,\ \lambda_2 = -j\omega_0,} = j\omega_0 (d_1 - d_2) = j4(d_1 - d_2),$$

Az első egyenletet megszorozva *j*4 értékkel és a két egyenletet összeadva

$$\left.\begin{aligned} 0{,}05 \cdot j4 &= j4(d_1 + d_2) \\ 0{,}04 &= j4(d_1 - d_2) \end{aligned}\right\} +, \rightarrow d_1 = \frac{0{,}04 + 0{,}05 \cdot j4}{2 \cdot j4} = 0{,}025 - j\,0{,}005$$

$$d_1 = 0{,}025 - j\,0{,}005 = 0{,}0255 e^{-j11{,}3099^{o}}$$

Tehát a rezgő rendszer $x(t) = 2|d_1|\cos(\omega_0 t + \delta)$, **elmozdulása:**

$$x(t) = 2 \cdot 0{,}0255\cos\left(4t - 11{,}3099^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{m} = 0{,}051\cos\left(4t - 11{,}3099^{\mathrm{o}}\right),$$

azaz a t=0 pillanatban a rugó kitérése:

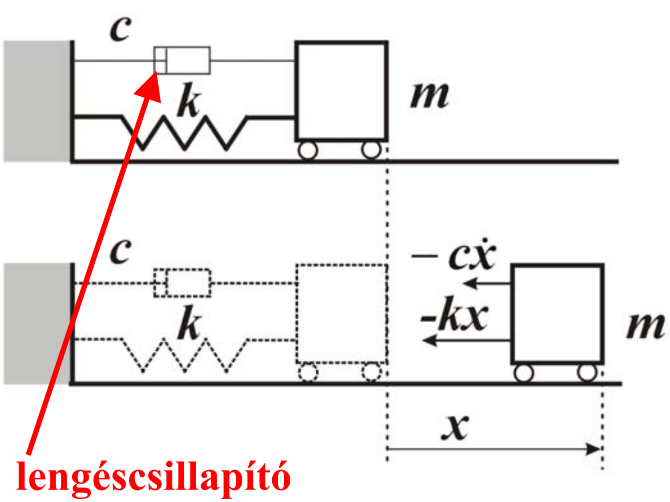
$$x_0 = 0{,}0510\cos(-11{,}3099^{\mathrm{o}}) = 0{,}05\,\mathrm{m},$$

a t=0 pillanatban az elmozdulás sebessége:

$$v_0 = \dot{x}(0) = 4 \cdot 0{,}051 sin\left(-11{,}3099^{\mathrm{o}}\right) = -0{,}0400\,\mathrm{m/s},$$

azaz a t=0 pillanatban a rugó sebessége a kitéréssel ellenkező irányú lesz.

3.2. Csillapított szabad rezgés,



az *m* tömegre a rugóerő és a sebességgel arányos csillapító erő hat:

$$\boxed{-kx(t)-c\dot{x}(t)=m\ddot{x}(t),}$$

a csillapított szabad rezgés mozgásegyenlete:

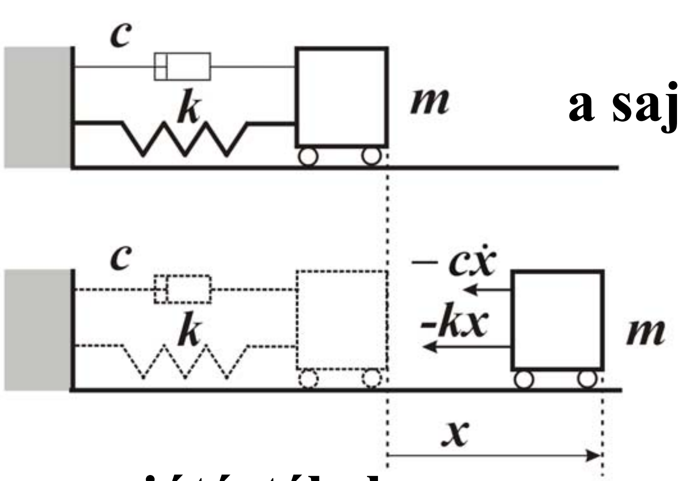
$$\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0,}$$

mozgásegyenlete általános megoldása=szabad válasz:

$$g(t)=0 \rightarrow x_g(t)=0; \Rightarrow x(t)=x_f(t)=d\,e^{\lambda t},$$

a karakterisztikus egyenletből: $m\lambda^2+c\lambda+k=0,$

a sajátértékek: $\lambda_{12}=-\dfrac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\dfrac{k}{m}},$



a sajátértékek: $\lambda_{12} = -\dfrac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \dfrac{k}{m}}$,

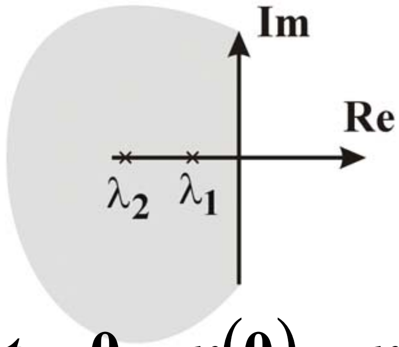
3.2. a) eset, <u>nagy csillapítású a rendszer</u>:

$$r = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} > 0,\ \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m},\ \boxed{c > 2\sqrt{km},}$$

a sajátértékek negatív valós értékek:

$$\lambda_1 = -\rho + r = -\rho_1,$$

$$\lambda_2 = -\rho - r = -\rho_2,$$



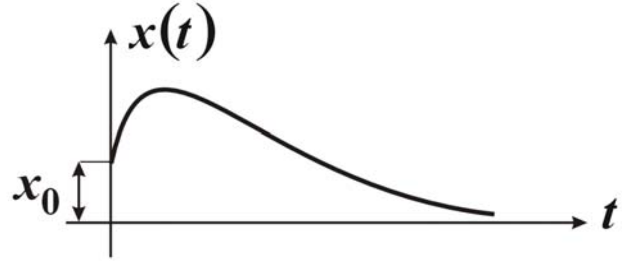
a mozgó rendszer kitérése:

$$x(t) = d_1 e^{-\rho_1 t} + d_2 e^{-\rho_2 t},$$

kezdeti feltételek:

$$\left.\begin{aligned} t = 0,\quad x(0) &= x_0 = d_1 + d_2, \\ t = 0,\quad \dot{x}(0) &= v_0 = -\rho_1 d_1 - \rho_2 d_2, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} d_1 &= \frac{\rho_2 x_0 + v_0}{\rho_2 - \rho_1}, \\ d_2 &= \frac{\rho_1 x_0 + v_0}{\rho_1 - \rho_2}, \end{aligned}$$

az általános megoldás, a szabad válasz, két monoton csökkenő exponenciális görbe összege, nincs rezgés:



2. Példa,

Egy 2,8 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú, rugóhoz 200g tömeget csatlakoztatunk a vízszintes síkban, amelyet 5 cm-rel megnyújtunk, majd elengedés után 4cm/s sebességgel kezd el mozogni. Határozza meg a mozgó rendszer sajátértékeit, valamint adja meg a csillapított mozgó rendszer kitérését az idő függvényében.

Megoldás:

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0,\rightarrow 0{,}2\ddot{x}(t)+2{,}8\dot{x}(t)+3{,}2x(t)=0,$$

Megoldása a szabadválasz: $x(t)=x_f(t)=d\,e^{\lambda t},$

A karakterisztikus polinom és a sajátértékek: $0{,}2\lambda^2+2{,}8\lambda+3{,}2=0,$

$$\lambda_{12}=\frac{-2{,}8\pm\sqrt{2{,}8^2-4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}}{2\cdot 0{,}2},\rightarrow \lambda_1=-1{,}2554\,\frac{1}{\mathrm{s}},\ \lambda_2=-12{,}7446\,\frac{1}{\mathrm{s}},$$

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t)=d_1\,e^{\lambda_1 t}+d_2\,e^{\lambda_2 t},$

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t) = d_1\, e^{\lambda_1 t} + d_2\, e^{\lambda_2 t}$,

A kezdeti feltételekből d_1, d_2 meghatározhatók:

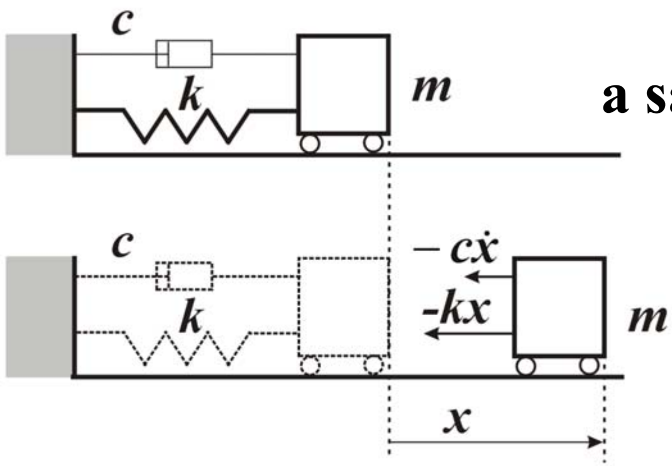
A t=0 pillanatban a rugó kitérése: $x_0 = 0{,}05 = d_1 + d_2$,

A t=0 pillanatban a rugó sebessége: $v_0 = 0{,}04 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$,

$$d_1 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_2 - 0{,}04}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0{,}0589\ \text{m}, \quad d_2 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_1 - 0{,}04}{\lambda_1 - \lambda_2} = -0{,}0089\ \text{m},$$

A mozgó rendszer elmozdulása:

$$x(t) = \left(0{,}0589\, e^{-1{,}2554t} - 0{,}0089\, e^{-12{,}7446t}\right)\text{m},$$

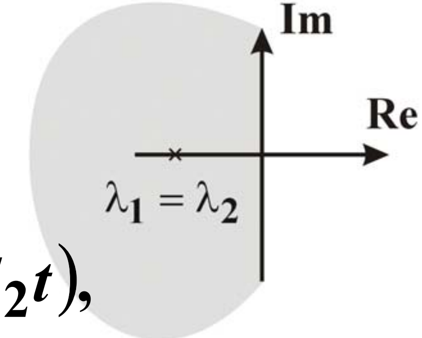


a sajátértékek: $$\lambda_{12} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}},$$

3.2. b) eset, <u>kritikus csillapítású a rendszer</u>:

$$r = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0,\ \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m},\ \boxed{c = 2\sqrt{km},}$$

két azonos nagyságú,
negatív, valós értékű sajátérték: $$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\rho,$$



az általános megoldás, a szabad válasz valós,

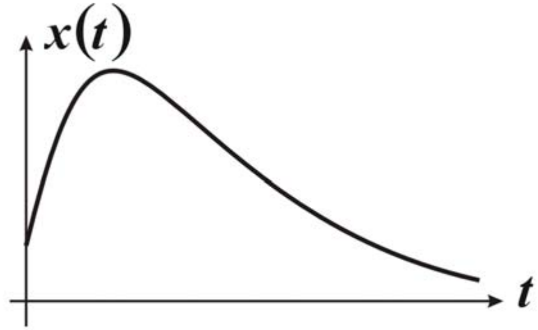
$$x(t) = e^{-\rho t}(d_1 + d_2 t),$$

kezdeti feltételek: t=0,

$$x(0) = x_0 = d_1, \rightarrow \underline{\underline{d_1 = x_0}},$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \left[-\rho(d_1 + td_2) + d_2\right]e^{-\rho t}\Big|_{t=0},$$

$$v_0 = -\rho d_1 + d_2, \rightarrow \underline{\underline{d_2 = v_0 + \rho d_1}},$$



d_1, d_2 valós értékű, nincs rezgés,
az exponenciális tényező gyorsabban csökken, mint ahogy t nő,

<u>3. Példa,</u>

Egy 1.6 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú, rugóhoz 200g tömeget csatlakoztatunk a vízszintes síkban, amelyet 5 cm-rel megnyújtunk, majd elengedés után 4cm/s sebességgel kezd el mozogni. Határozza meg a mozgó rendszer sajátértékeit, valamint adja meg a csillapított mozgó rendszer kitérését az idő függvényében.

<u>Megoldás:</u>

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0,\rightarrow 0{,}2\ddot{x}(t)+1{,}6\dot{x}(t)+3{,}2x(t)=0,$$

Megoldása a szabadválasz: $x(t)=x_f(t)=d\,e^{\lambda t},$

A karakterisztikus polinom és a sajátértékek: $0{,}2\lambda^2+1{,}6\lambda+3{,}2=0,$

$$\lambda_{12}=\frac{-1{,}6\pm\sqrt{1{,}6^2-4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}}{2\cdot 0{,}2}=-4,\rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-4\,\frac{1}{\mathrm{s}},$$

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t)=(d_1+td_2)\,e^{\lambda_1 t},$

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t) = (d_1 + td_2)\, e^{\lambda_1 t}$,

A kezdeti feltételekből d_1, d_2 meghatározhatók:

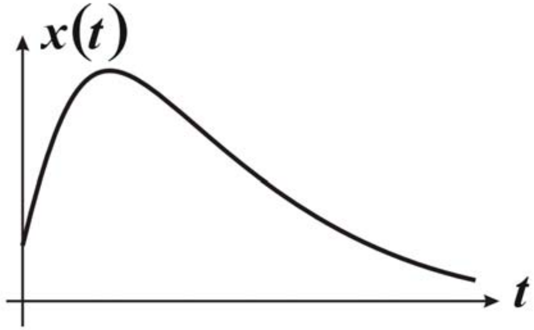
A t=0 pillanatban a rugó kitérése: $x_0 = 0{,}05 = d_1$,

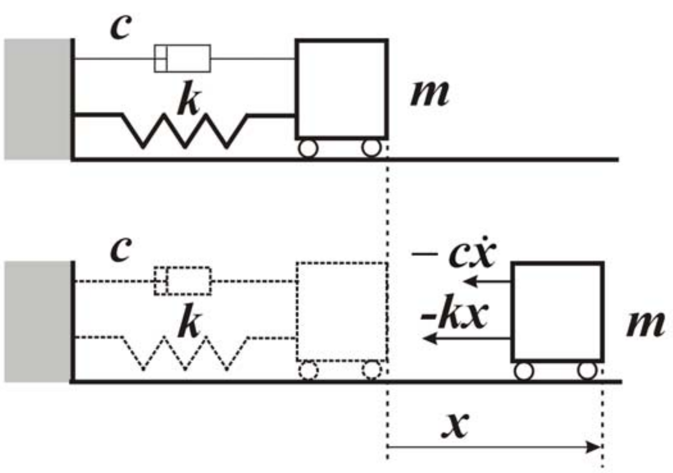
A t=0 pillanatban a rugó sebessége: $v_0 = 0{,}04 = \lambda_1 d_1 + d_2 = -4d_1 + d_2$,

$$d_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}, \quad d_2 = 0{,}04 + 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}2400\,\mathrm{m},$$

A mozgó rendszer elmozdulása egy időben csillapodó mozgás:

$$x(t) = (0{,}05 + 0{,}24t)\, e^{-4t}\ \mathrm{m},$$





a sajátértékek: $\lambda_{12} = -\dfrac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \dfrac{k}{m}},$

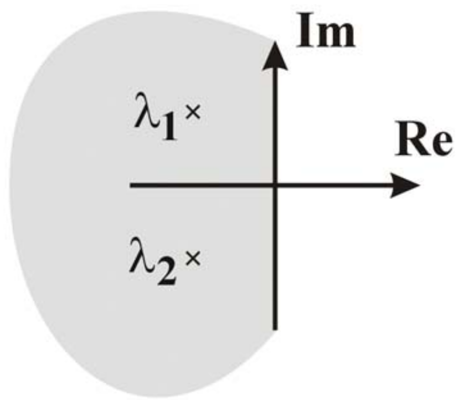
3.2. c) eset, <u>kis csillapítású a rendszer</u>:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0, \quad \left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}, \quad \boxed{c < 2\sqrt{km},}$$

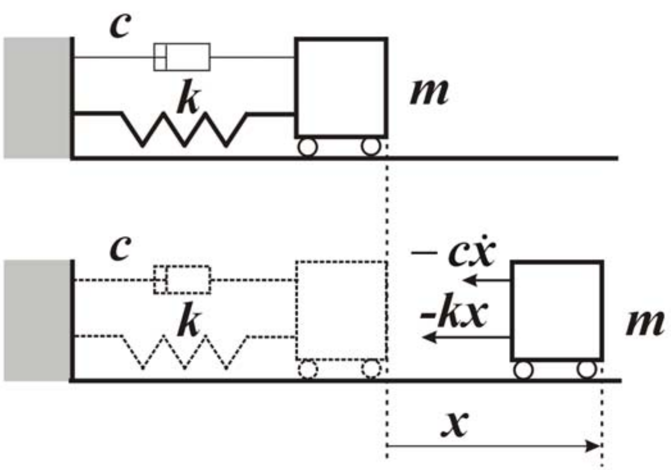
$$\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_1, \qquad \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = j\omega_1,$$

<u>A sajátértékek komplex konjugáltak:</u>

$$\omega_1 < \omega_0, \qquad \lambda_1 = -\rho + j\omega_1, \quad \lambda_2 = -\rho - j\omega_1,$$



a mozgásegyenlete megoldása: $x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t},$



a mozgásegyenlete megoldása:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t},$$

a kezdeti feltételekhez illesztve a megoldást:

$$t = 0, \quad x(0) = x_0 = d_1 + d_2,$$

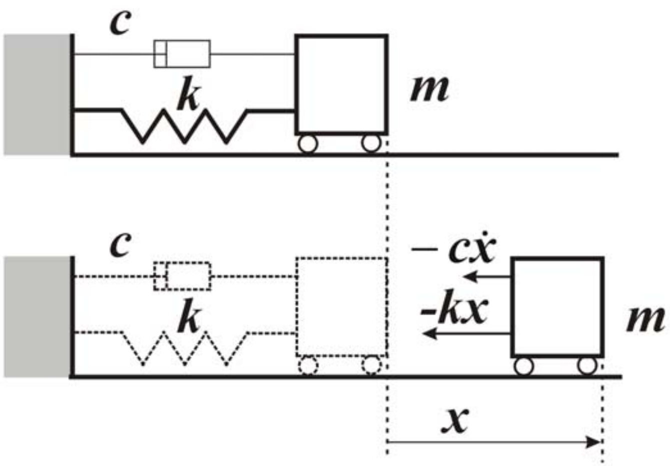
$$t = 0, \quad v(0) = v_0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2,$$

$$d_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(-\rho - j\omega_1)x_0 - v_0}{(-\rho - j\omega_1) - (-\rho + j\omega_1)} = \frac{(-\rho - j\omega_1)x_0 - v_0}{-2j\omega_1},$$

$$d_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(-\rho + j\omega_1)x_0 - v_0}{(-\rho + j\omega_1) - (-\rho - j\omega_1)} = \frac{(-\rho + j\omega_1)x_0 - v_0}{2j\omega_1},$$

$$d_1 = |d_1| e^{j\delta}, \; d_2 = d_1^* = |d_1| e^{-j\delta},$$

$$|d_1| = \frac{\sqrt{(-\rho x_0 - v_0)^2 + (\omega_1 x_0)^2}}{2\omega_1}, \qquad \delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega_1 x_0}{-\rho x_0 - v_0}\right) + 90^o,$$



a mozgásegyenlete megoldása:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$d_1 = |d_1| e^{j\delta},\; d_2 = d_1^* = |d_1| e^{-j\delta},$$

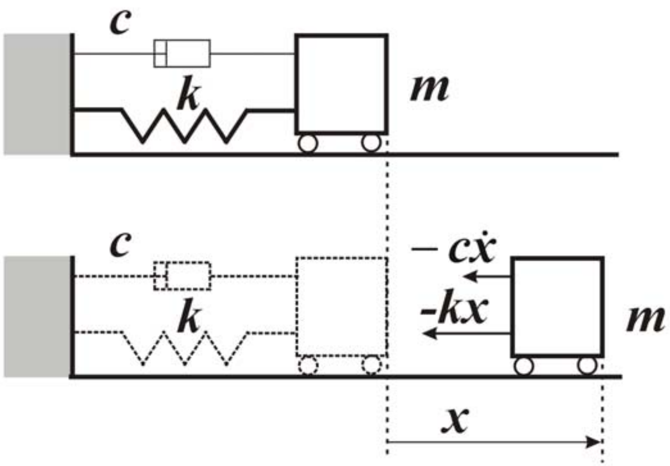
$$x(t) = d_1\, e^{\lambda_1 t} + d_2\, e^{\lambda_2 t} = |d_1| e^{j\delta} e^{(-\rho + j\omega_1)t} + |d_1| e^{-j\delta} e^{(-\rho - j\omega_1)t} =$$

$$= |d_1| e^{-\rho t}\, 2\, \frac{e^{j(\omega_1 t + \delta)} + e^{-j(\omega_1 t + \delta)}}{2} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ |d_1| e^{-\rho t} e^{j(\omega_1 t + \delta)} \right\} =$$

$$= 2|d_1| e^{-\rho t} \cos(\omega_1 t + \delta),$$

a mozgásegyenlet egy csillapított szabad rezgést ír le

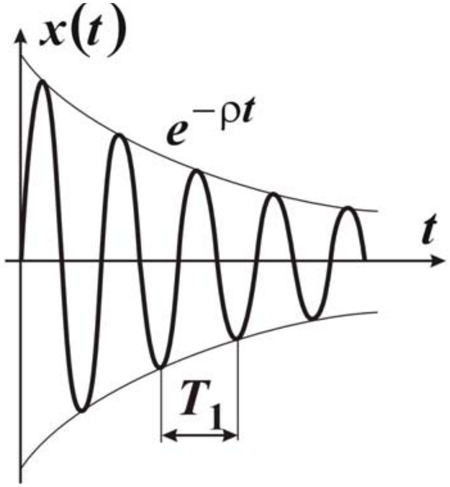
$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{ |d_1| e^{-\rho t} e^{j(\omega_1 t + \delta)} \right\} = 2|d_1| e^{-\rho t} \cos(\omega_1 t + \delta),$$

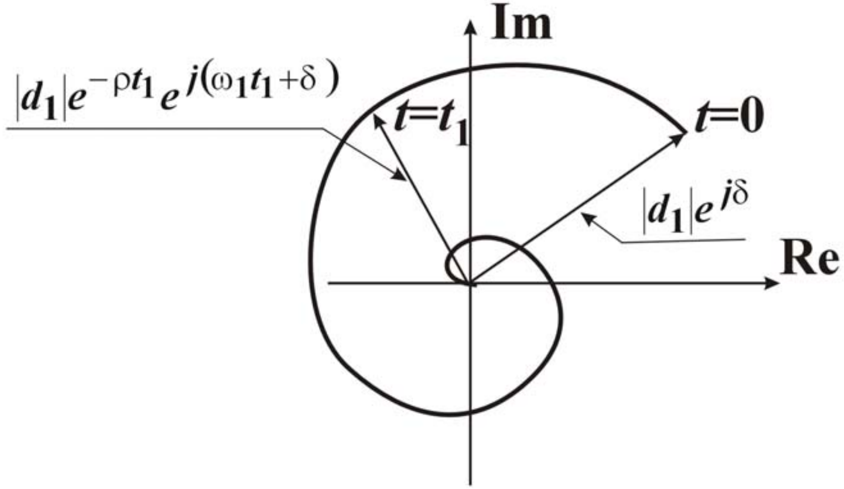


a mozgásegyenlet megoldása egy exponenciálisan csillapított szabad rezgést ír le:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{ |d_1| e^{-\rho t} e^{j(\omega_1 t + \delta)} \right\} =$$

$$= 2|d_1| e^{-\rho t} \cos(\omega_1 t + \delta),$$





a saját rezgésidő hosszabb, mint a csillapítatlan rezgésé:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1},$$

a saját körfrekvencia kisebb mint a csillapítatlan esetben

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}} < \omega_0,$$

4. Példa,

Egy 0,8 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú, rugóhoz 200g tömeget csatlakoztatunk a vízszintes síkban, amelyet 5 cm-rel megnyújtunk, majd elengedés után 4cm/s sebességgel kezd el mozogni. Határozza meg a mozgó rendszer sajátértékeit, valamint adja meg a csillapított mozgó rendszer kitérését az idő függvényében.

Megoldás:

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0,\rightarrow 0{,}2\ddot{x}(t)+0{,}8\dot{x}(t)+3{,}2x(t)=0,$$

Megoldása a szabadválasz: $x(t)=x_f(t)=d\,e^{\lambda t}$,

A karakterisztikus polinom és a sajátértékek: $0{,}2\lambda^2+0{,}8\lambda+3{,}2=0$,

$$\lambda_{12}=\frac{-0{,}8\pm\sqrt{0{,}8^2-4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}}{2\cdot 0{,}2},\qquad \begin{cases}\lambda_1=(-2{,}0000+j3{,}4641)\frac{1}{\mathrm{s}},\\ \lambda_2=(-2{,}0000-j\,3{,}4641)\frac{1}{\mathrm{s}},\end{cases}$$

$$\lambda_2=\lambda_1^*$$

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t)=d_1\,e^{\lambda_1 t}+d_2\,e^{\lambda_2 t}$,

A mozgó rendszer elmozdulása: $x(t) = d_1\, e^{\lambda_1 t} + d_2\, e^{\lambda_2 t}$,

A kezdeti feltételekből d_1, d_2 meghatározhatók:

A t=0 pillanatban a rugó kitérése: $x_0 = 0{,}05 = d_1 + d_2$,

A t=0 pillanatban a rugó sebessége: $v_0 = 0{,}04 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$,

$$d_1 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_2 - 0{,}04}{\lambda_2 - \lambda_1} = (0{,}0250 - j\,0{,}0202)\,\mathrm{m} = 0{,}0321 e^{-j38{,}9483^{\mathrm{o}}}\,\mathrm{m},$$

$$d_1 = |d_1| e^{j\delta},\; d_2 = d_1^* = |d_1| e^{-j\delta},$$

$$d_2 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_1 - 0{,}04}{\lambda_1 + \lambda_2} = (0{,}0250 + j\,0{,}0202)\,\mathrm{m},$$

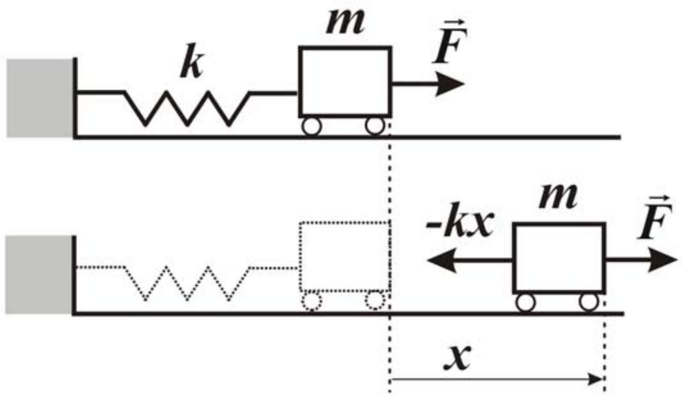
A mozgó rendszer elmozdulása egy csillapodó rezgőmozgás:

$$x(t) = 0{,}0321 e^{-2{,}0000t}\left(e^{j\left(3{,}4641t - 38{,}9483^{\mathrm{o}}\right)} + e^{-j\left(3{,}4641t - 38{,}9483^{\mathrm{o}}\right)} \right) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}0321 e^{-2{,}0000t} \cos\left(3{,}4641t - 38{,}9483^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{m},$$

$$\omega_1 = 3{,}4641\,\mathrm{rad/s} < \omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s},$$

3.3. Állandó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgések,



a csillapítatlan gerjesztett rezgés mozgásegyenlete: $\boxed{m\ddot{x}(t)+kx(t)=F,}$

megoldása: $x(t)=x_f(t)+x_g(t),$

a szabad válasz és a gerjesztett válasz összege

$$m\ddot{x}_f(t)+kx_f(t)=0,\rightarrow x_f(t)=d\,e^{\lambda t},\quad \lambda_{12}=\pm j\omega_0,$$

a szabad válasz:

$$x_f(t)=d_1e^{j\omega_0 t}+d_2e^{-j\omega_0 t}$$

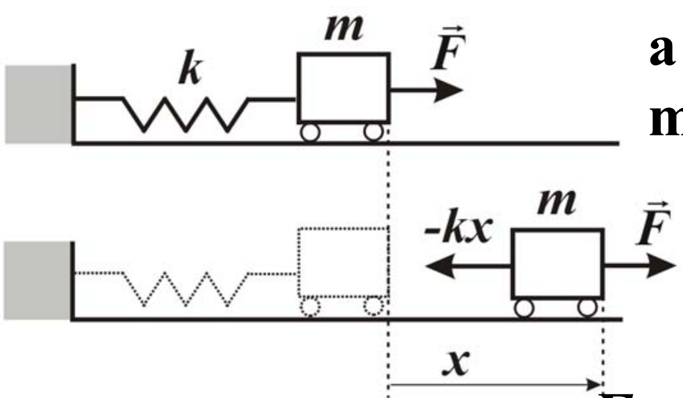
a lineáris rendszergerjesztett válasza hasonlít a gerjesztésre

a gerjesztés állandó erő, ezért a gerjesztett válasz konstans/állandó:

$$x_g(t)=X_g,\ \dot{x}_g(t)=0,\ \ddot{x}_g(t)=0,\ m\underbrace{\ddot{x}_g(t)}_{0}+k\underbrace{x_g(t)}_{X_g}=F,\rightarrow X_g=\frac{F}{k},$$

a gerjesztett rendszer válasza:

$$x(t)=x_f(t)+x_g(t)=d_1e^{j\omega_0 t}+d_2e^{-j\omega_0 t}+\frac{F}{k},$$



a gerjesztett rendszer válasza a mozgásegyenlet megoldása:

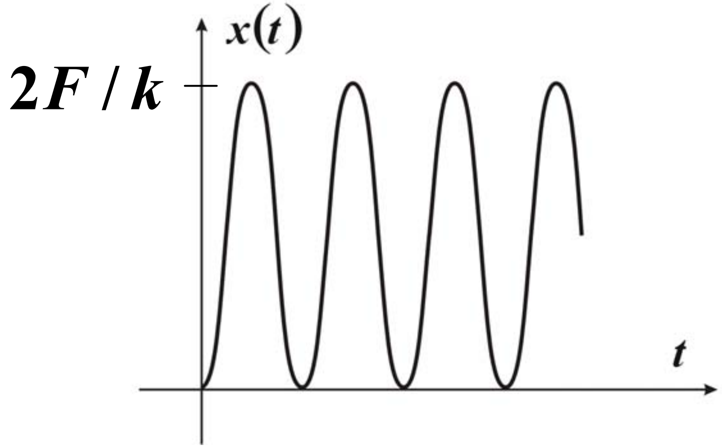
$$x(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t} + \frac{F}{k},$$

a kezdeti feltételekhez illesztve a megoldást:

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad v(0) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 = d_1 + d_2 + \frac{F}{k}, \\ v(0) &= 0 = j\omega_0 (d_1 - d_2), \end{aligned}\right\} \rightarrow d_1 = d_2 = -\frac{F}{2k}$$

$$x(t) = -\frac{F}{2k}\, 2\, \frac{\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)}{2} + \frac{F}{k} = -\frac{F}{k}\cos\omega_0 t + \frac{F}{k} = \frac{F}{k}\left(1 - \cos\omega_0 t\right),$$



a csillapítatlan, állandó erővel gerjesztet rendszer válasza, 0 és 2F/k között F/k állandó amplitúdójú rezgés

5. Példa,

Egy 3,2 N/m rugóállandójú, nyugalomban lévő rugóhoz 200g tömeget csatlakoztatunk a vízszintes síkban, amelyet 4,8N állandó erővel gerjesztünk. Határozza meg a mozgó rendszer sajátértékeit, valamint adja meg a kialakuló, csillapítatlan rezgőmozgás amplitúdóját.

Megoldás:

A csillapítatalan rezgőmozgás mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=F,\rightarrow 0{,}2\ddot{x}(t)+3{,}2x(t)=5,$$

Megoldása a szabad-, és a gerjeszett válasz összege:

$$x(t)=x_f(t)+x_g(t)=d\,e^{\lambda t}+x_g(t),$$

A szabad válaszhoz tartozó karakterisztikus polinom és a sajátértékek:

$$0{,}2\lambda^2+3{,}2=0,\rightarrow \lambda_{12}=\pm j\omega_0,\rightarrow \lambda_1=j4\,\frac{1}{\mathrm{s}},\ \lambda_2=-j4\,\frac{1}{\mathrm{s}},$$

A gerjesztettválasz konstans:

$$x_g(t)=X_g,\rightarrow \ddot{x}_g(t)=0,\Rightarrow X_g=4{,}8/3{,}2=1{,}5\,\mathrm{m},$$

A rezgő rendszer elmozdulása: $$x(t)=d_1\,e^{j4t}+d_2\,e^{-j4t}+1{,}5$$

A rezgő rendszer elmozdulása: $x(t) = d_1\, e^{j4t} + d_2\, e^{-j4t} + 1{,}5$

A kezdeti feltételekből:

A t=0 pillanatban a rugó kitérése: $x_0 = 0 = d_1 + d_2 + 1{,}5$

A t=0 pillanatban a rugó sebessége: $v_0 = 0 = j\omega_0 (d_1 - d_2),$

$$d_1 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_2 - 0{,}04}{\lambda_2 - \lambda_1} = (0{,}0250 - j\,0{,}0202)\,\mathrm{m} = 0{,}0321 e^{-j38{,}9483^o}\,\mathrm{m},$$

$$d_1 = |d_1| e^{j\delta},\ d_2 = d_1^* = |d_1| e^{-j\delta},$$

$$d_2 = \frac{0{,}05 \cdot \lambda_1 - 0{,}04}{\lambda_1 + \lambda_2} = (0{,}0250 + j\,0{,}0202)\,\mathrm{m},$$

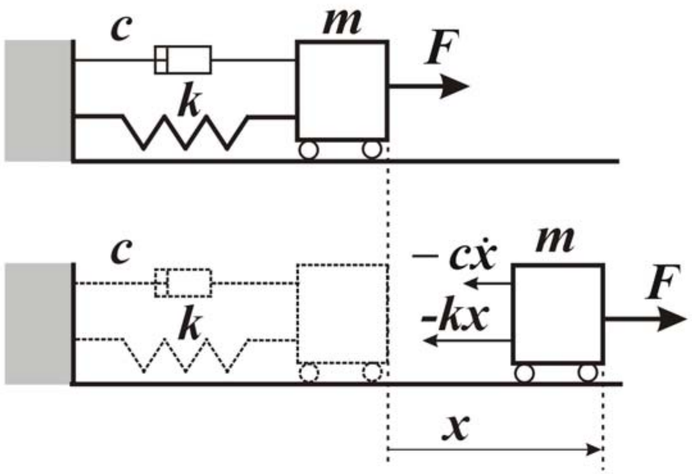
A mozgó rendszer elmozdulása egy csillapodó rezgőmozgás:

$$x(t) = 0{,}0321 e^{-2{,}0000t} \left(e^{j\left(3{,}4641t - 38{,}9483^o\right)} + e^{-j\left(3{,}4641t - 38{,}9483^o\right)} \right) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}0321 e^{-2{,}0000t} \cos\left(3{,}4641t - 38{,}9483^o\right)\mathrm{m},$$

$$\omega_1 = 3{,}4641\,\mathrm{rad/s} < \omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s},$$

3.4. Állandó erővel gerjesztett csillapított rezgések,



a rendszer mozgását leíró egyenlet:

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F,}$$

a mozgásegyenlet megoldása:

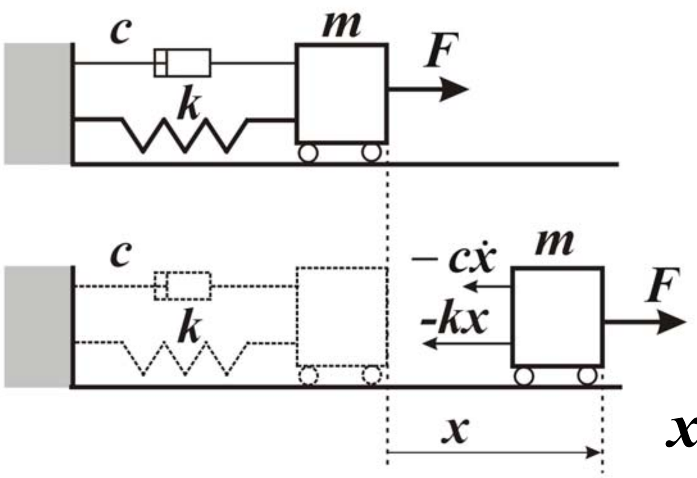
$$x(t)=x_f(t)+x_g(t)=de^{\lambda t}+x_g(t),$$

a gerjesztett válasz: $$m\underbrace{\ddot{x}_g(t)}_{0}+c\underbrace{\dot{x}_g(t)}_{0}+k\underbrace{x_g(t)}_{X_g}=F,\rightarrow X_g=\frac{F}{k},$$

a szabad válasz <u>kis csillapítás esetén</u>: $$x(t)=d_1e^{\lambda_1 t}+d_2e^{\lambda_2 t},$$

$$\lambda_1=\lambda_2^*,\rightarrow \lambda_1=-\rho+j\omega_1,\ \lambda_2=-\rho-j\omega_1,$$

a teljes megoldás: $$x(t)=d_1e^{\lambda_1 t}+d_2e^{\lambda_2 t}+\frac{F}{k},$$



a teljes megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F}{k},$$

a kezdeti feltételekhez illesztve a megoldást:

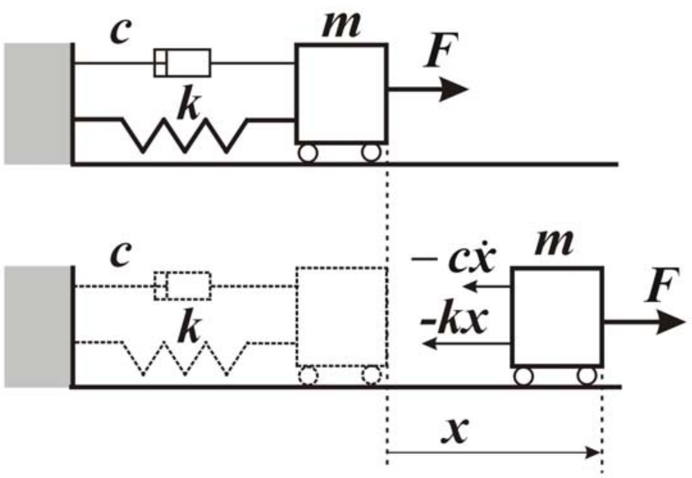
$$x(0) = 0 = d_1 + d_2 + \frac{F}{k},\; v(0) = 0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2,$$

$$d_1 = -\frac{F}{k}\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{F}{k}\frac{(-\rho - j\omega_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{F}{k}\frac{(-\rho - j\omega_1)}{-2j\omega_1} = -\frac{F}{2k}\left(1 + j\frac{\rho}{\omega_1}\right),$$

$$d_2 = d_1^*,\; d_1 = -\frac{F}{2k}\left(1 + j\frac{\rho}{\omega_1}\right) = -\frac{F}{2k}\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{j\delta},\; \delta = arctg\left(\frac{\rho}{\omega_1}\right),$$

a kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

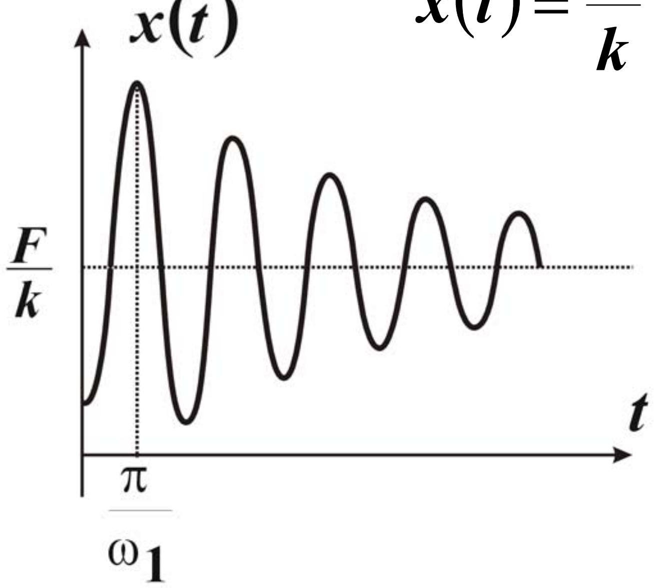
$$x(t) = \frac{F}{k} - \frac{F}{2k}\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{-\rho t}\left(e^{j(\omega_1 t + \delta)} + e^{-j(\omega_1 t + \delta)}\right),$$



állandó erővel gerjesztett kis csillapítású rezgőmozgás esetén a kezdeti feltételekhez illesztett megoldásegy csillapított harmonikus rezgőmozgás:

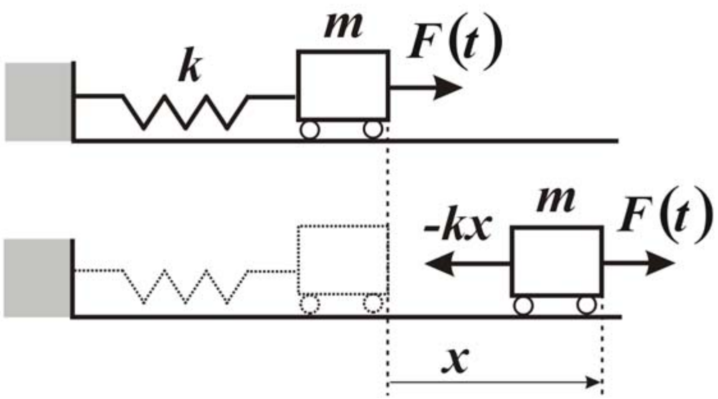
a kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$x(t) = \frac{F}{k} - \frac{F}{2k}\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{-\rho t}\left(e^{j(\omega_1 t+\delta)} + e^{-j(\omega_1 t+\delta)}\right),$$



$$x(t) = \frac{F}{k}\left(1 - \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{-\rho t}\cos(\omega_1 t + \delta)\right),$$

3.5. Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgések,



a csillapítatlan gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+kx(t)=F\sin\omega t=F(t),}$$

a mozgásegyenlet megoldása:

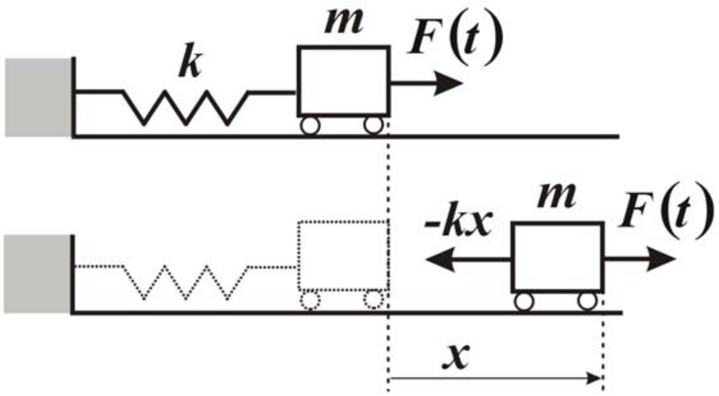
$$x(t)=x_f(t)+x_g(t)=de^{\lambda t}+x_g(t),$$

a gerjesztett válasz:

$$m\ddot{x}_g(t)+kx_g(t)=F\sin\omega t,\rightarrow x_g(t)=X_0\sin\omega t,$$

$$\left(k-\omega^2 m\right)X_0=F,\rightarrow X_0=\frac{F}{k-\omega^2 m}=\frac{F}{k}\frac{1}{1-\underbrace{\frac{\omega^2 m}{k}}_{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}}=\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

$$x_g(t)=\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\sin\omega t,$$



a szabad válasz:

$$x_f(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$\lambda_1 = j\omega_0,\ \lambda_2 = -j\omega_0,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a teljes megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\sin\omega t,$$

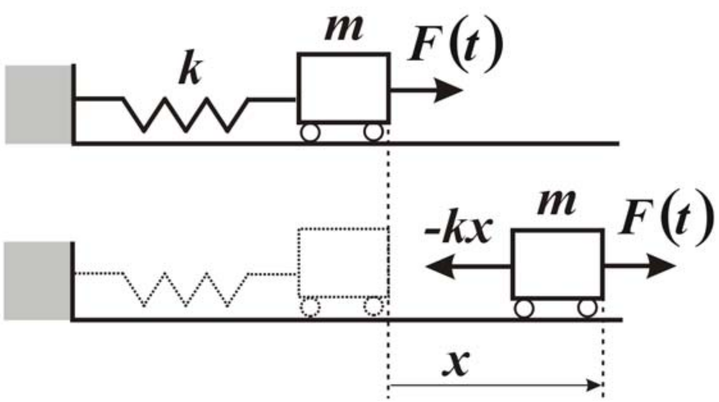
a megoldás illesztése a kezdeti feltételekhez:

a t=0 pillanatban az elmozdulás: $x(0) = 0 = d_1 + d_2,$

a t=0 pillanatban a sebesség: $v(0) = 0 = j\omega_0(d_1 - d_2) + \omega\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\cdot 1,$

$$d_1 = -\frac{\omega}{2j\omega_0}\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2},\quad d_2 = \frac{\omega}{2j\omega_0}\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2},$$

$$x_f(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} = -\frac{\omega}{\omega_0}\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\underbrace{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}}_{\sin\omega_0 t},$$



a kezdeti feltételekhez illesztett megoldás két harmonikus rezgés szuperpozíciója:

$$x(t)=\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right),$$

ha a két körfrekvencia közel van egymáshoz: $\omega/\omega_0\approx 1,\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Matematika:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$x(t)\approx\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}(\sin\omega t-\sin\omega_0 t),$$

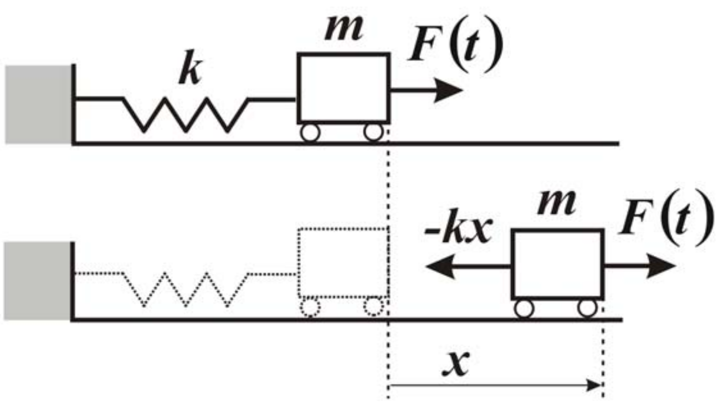
$$x(t)=\frac{F}{k}\frac{2}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right),$$

lebegés jön létre

$$x(t)\approx\frac{F}{k}\frac{2}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cos\omega t,$$

kis frekvenciájú rezgés hullám

nagy frekvenciájú rezgés hullám

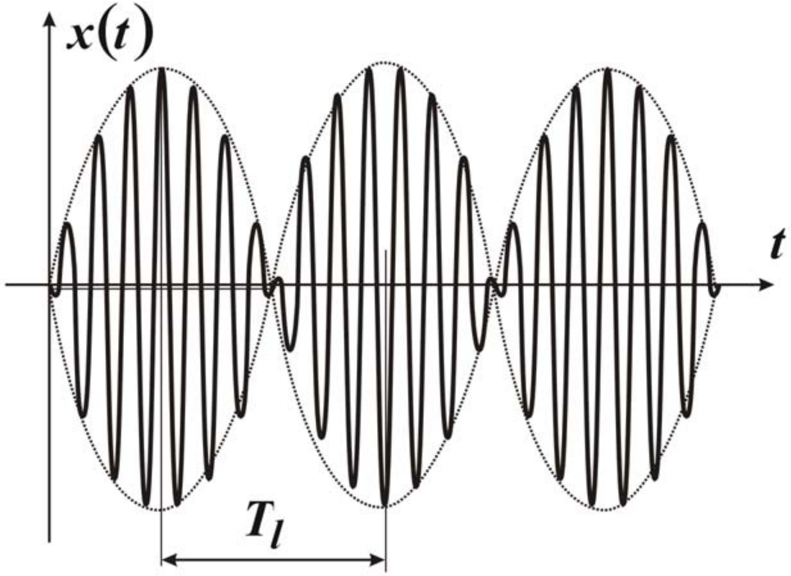


lebegés jön létre

$$x(t) \approx \frac{F}{k}\frac{2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cos\omega t,$$

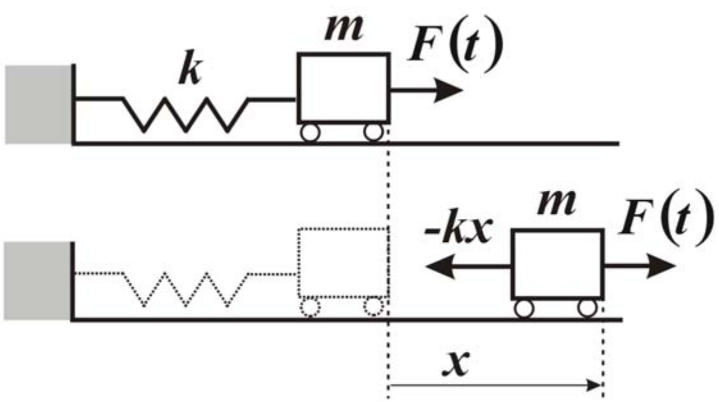
kis frekvenciájú,
hosszú periódusidejű
rezgés hullám

nagy frekvenciájú,
rövid periódusidejű
rezgés hullám



a lebegés periódus ideje:

$$T_l = \frac{2\pi}{(\omega-\omega_0)/2} = \frac{4\pi}{\omega-\omega_0}$$



rezonancia vizsgálat I:

$$x(t)=\frac{F}{k}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right),$$

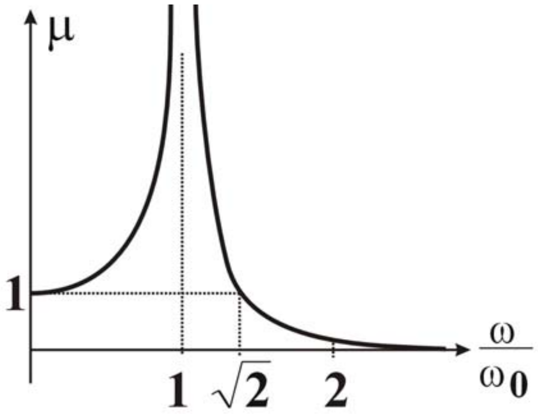
$$x(t)=\frac{F\omega_0}{k}\frac{\omega_0\sin\omega t-\omega\sin\omega_0 t}{\omega_0^2-\omega^2},$$

rezonancia tényező:

$$\mu=\frac{1}{\left|1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right|},$$

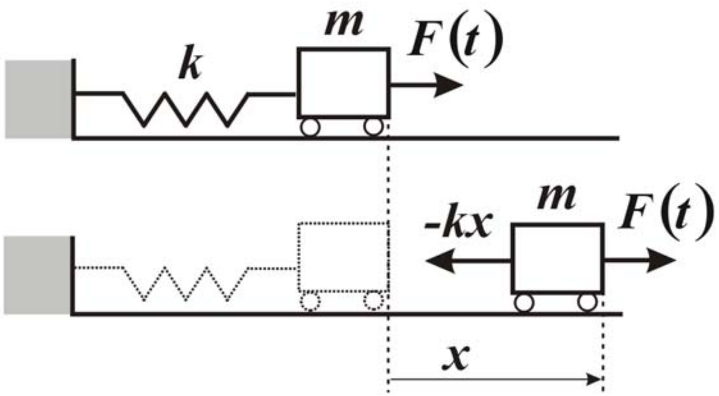
rezonancia esetén: $x(t)\Big|_{\omega=\omega_0}=\frac{0}{0}=?$

határérték-L'Hospital: $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}x(t)=\frac{F\omega_0}{k}\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega_0 t\cos\omega t-\sin\omega_0 t}{-2\omega},$



$$\lim_{\omega\to\omega_0}x(t)=\frac{F}{2k}\sin\omega_0 t-\frac{F\omega_0}{2k}t\cos\omega_0 t,$$

rezonancia esetén a megoldás határértéke az idővel lineárisan növekvő amplitúdójú harmonikus rezgőmozgás:



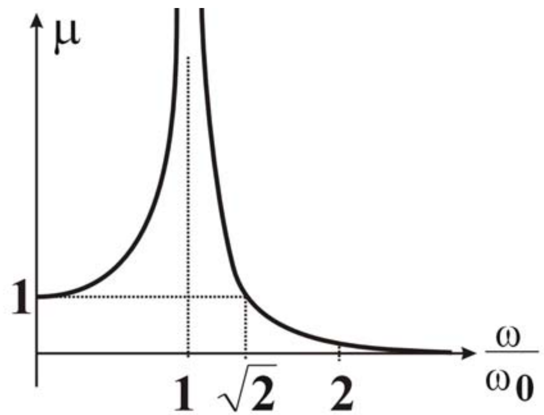
rezonancia vizsgálat II:

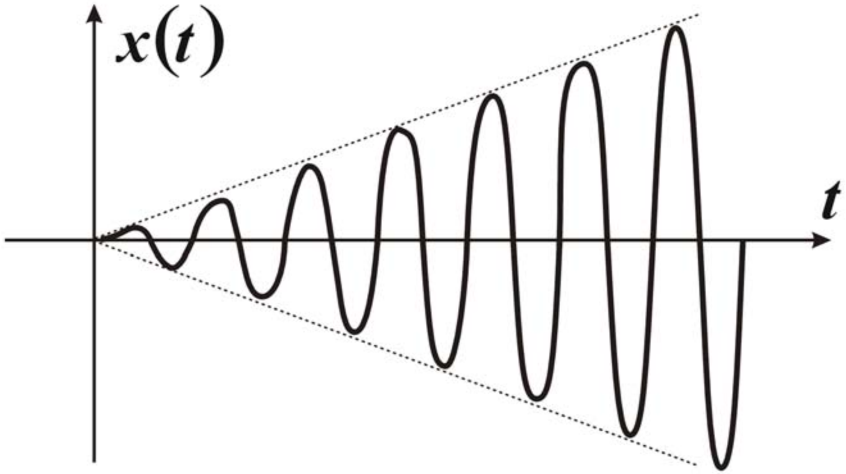
$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t) = \frac{F}{2k} \sin \omega_0 t - \frac{F\omega_0}{2k} t \cos \omega_0 t,$$

rezonancia esetén a megoldás határértéke az idővel lineárisan növekvő amplitúdójú harmonikus rezgőmozgás:

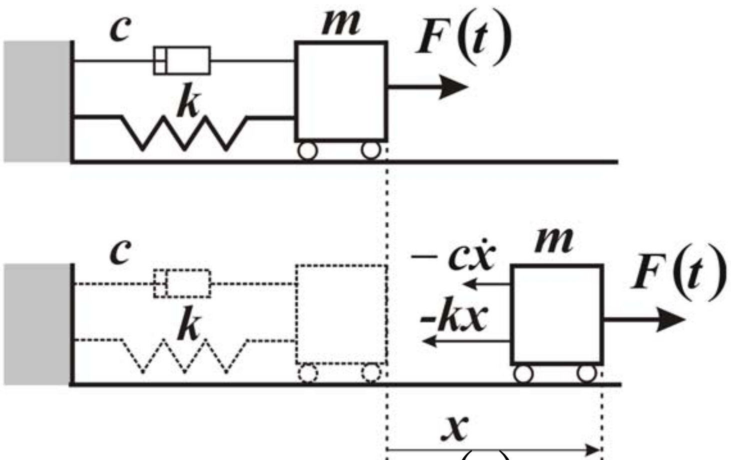
rezonancia tényező:

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right|},$$





3.6. Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgések,



harmonikus erővel gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$\boxed{m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\sin\omega t=F(t),}$$

a gerjesztett válasz: $x_g(t)=X_0\sin(\omega t-\varphi),$

Komplex formalizmus:

$$F(t)=F\sin\omega t=\mathrm{Im}\left\{Fe^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\hat{F}e^{j\omega t}\right\},$$

$$x_g(t)=X_0\sin(\omega t-\rho)=\mathrm{Im}\left\{X_0e^{-j\rho}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\hat{X}e^{j\omega t}\right\},$$

$$m\,\mathrm{Im}\left\{(j\omega)^2\hat{X}e^{j\omega t}\right\}+c\,\mathrm{Im}\left\{j\omega\hat{X}e^{j\omega t}\right\}+k\,\mathrm{Im}\left\{\hat{X}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\hat{F}e^{j\omega t}\right\},$$

$$\left(-\omega^2m+j\omega c+k\right)\hat{X}=\hat{F},$$

$$\hat{X}=\frac{\hat{F}}{\left(-\omega^2m+j(\omega c)+k\right)}=\frac{F}{\sqrt{\left(k-\omega^2m\right)^2+(\omega c)^2}}e^{-j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega c}{k-\omega^2m}\right)}$$

$$x_g(t) = X_0 \sin(\omega t - \rho) = \mathrm{Im}\left\{X_0 e^{-j\rho} e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\hat{\bar{X}} e^{j\omega t}\right\},$$

$$\hat{\bar{X}} = \frac{\hat{\bar{F}}}{\left(-\omega^2 m + j(\omega c) + k\right)} = \frac{F}{\sqrt{\left(k - \omega^2 m\right)^2 + (\omega c)^2}} e^{-j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)}$$

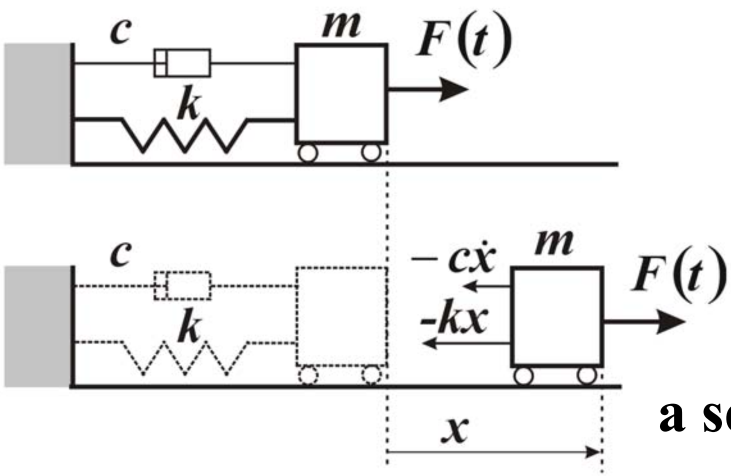
$$X_0 = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right),$$

kis csillapítású a szabad válasz: $x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$,

$$\lambda_1 = -\rho + j\omega_1, \; \lambda_2 = -\rho - j\omega_1,$$

a teljes megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + X_0 \sin(\omega t - \varphi),$$



a teljes megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + X_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

a kezdeti feltételekhez illesztve:

az elmozdulás: $x(0) = 0 = d_1 + d_2,$

a sebesség: $v(0) = 0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + X_0 \omega \cos\varphi,$

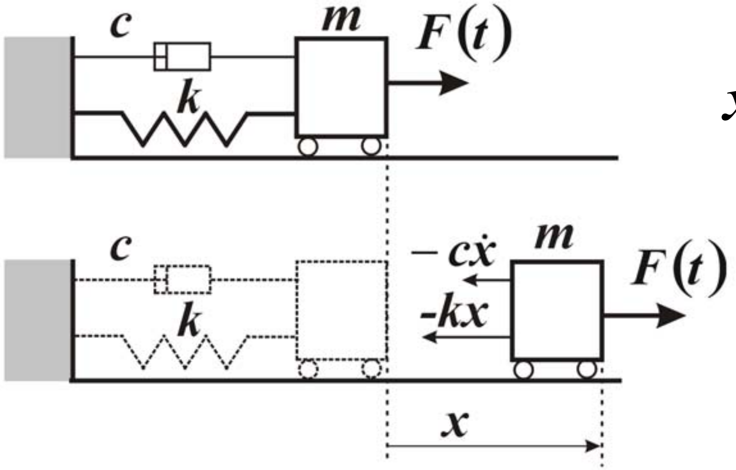
$$d_1 = \frac{X_0 \omega \cos\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{X_0 \omega \cos\varphi}{2 j \omega_1}, \quad d_2 = \frac{X_0 \omega \cos\varphi}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{X_0 \omega \cos\varphi}{2 j \omega_1}, \quad d_2 = d_1^*,$$

a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t) = -\frac{X_0 \omega \cos\varphi}{\omega_1} e^{-\rho t} \underbrace{\left(\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \right)}_{\sin \omega_1 t} + X_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

$$X_0 = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

$$x(t) = X_0 \left(\sin(\omega t - \varphi) - e^{-\rho t} \frac{\omega \cos\varphi}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$



$$x(t) = X_0\left(\sin(\omega t - \varphi) - e^{-\rho t}\frac{\omega\cos\varphi}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right),$$

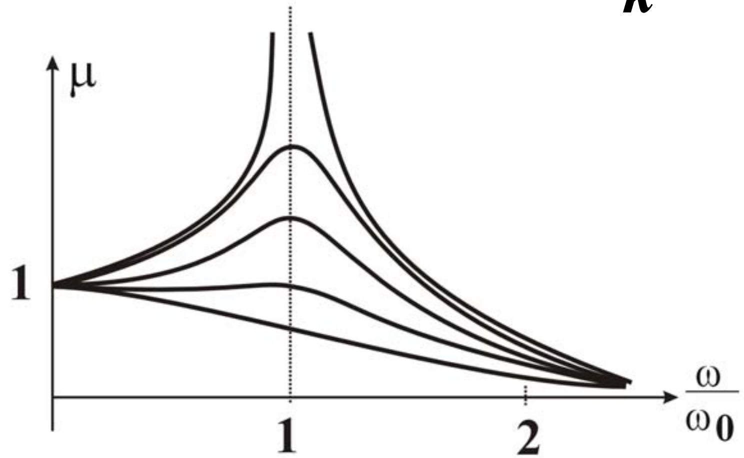
$$X_0 = \frac{F}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

a második tag gyorsan lecseng, az állandósult állapothoz tartozó gerjesztett válasz:

$$x_g(t) = \mu\frac{F}{k}\sin(\omega t - \varphi),$$

a rezonancia tényező:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$



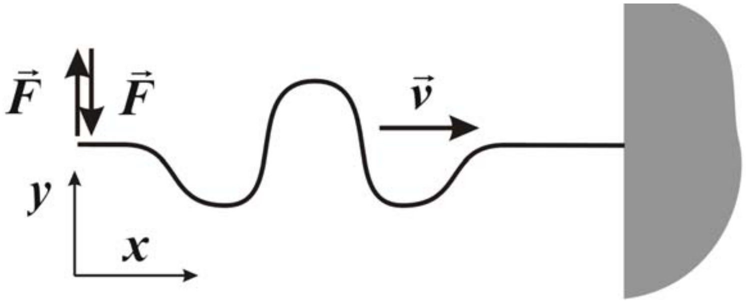
Függőhíd, USA, Washington State,
1940. június-november, szél kb. 70 km/óra

Tacoma Narrows Bridge

4. Harmonikus rezgőmozgás, tranzverzális hullámok

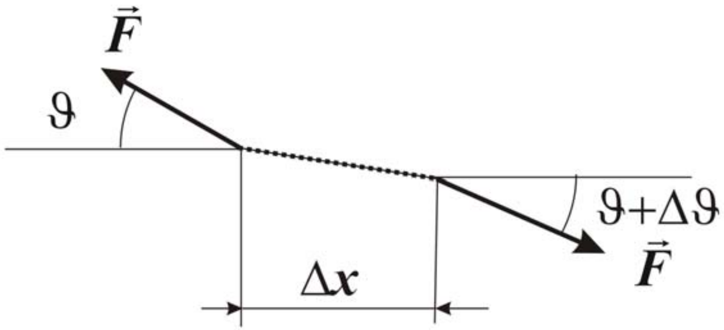
4.1. 1D hullámegyenlet

egy kötelet mozgatva, egységnyi hossz tömege: $\mu = m/l$ **[kg/m],**



a kötél elemi tömegeinek *y* irányú kitérése a hely és az idő függvénye: $y(x,t)$

a kötél elemi szakaszára ható erők: és az erők komponensei

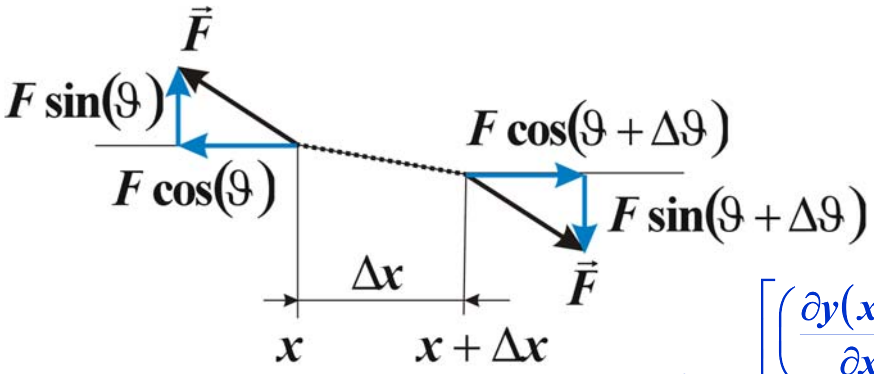


(a) $\vartheta -$ **kicsi,**

$$\cos(\vartheta) \approx \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) \approx 1,$$

$$\sin(\vartheta) \approx \mathrm{tg}(\vartheta) \approx \frac{dy}{dx},$$

(b) $F =$ **áll.**



$$F_x = -F_x(x) + F_x(x+\Delta x) = 0,$$

$$F_y = F_y(x+\Delta x) - F_y(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)_x\right]}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2},$$

$$F_y = F\left[\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)_x\right] = F\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

a Δx szakasz elemi tömege y-irányú gyorsuló mozgásba kezd

$$F_y = ma_y, \quad F\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\cancel{\Delta x} = \mu\cancel{\Delta x}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},$$

a hullám terjedési sebessége:

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = v, \qquad \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\boxed{v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},}$$

1D hullámegyenlet, a tranzverzális mozgást végző tömegpontok mozgásegyenlete,

4.2. A hullámegyenlet megoldása

$$\boxed{v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},}$$

4.2. a) A megoldás haladó hullám

a megoldás alakja: $y(x,t) = f(t \mp x/v)$,
retardált (késleltetett) hullámok, idő szükséges az információ, az elmozdulás továbbításához,

igazolás: $\dfrac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial t^2} = f(t \mp x/v)$, $\dfrac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} f(t \mp x/v)$,

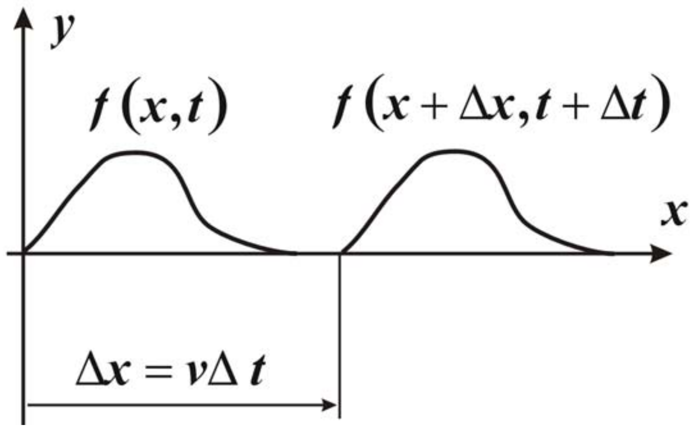
$v = \dfrac{dx}{dt}$ **= áll. -fázissebesség, a hullám *x*-irányú terjedésének sebessége**

+ *x* tengely irányában haladó hullám,

$$y^+(x,t) = f^+(x,t) = f^+(t - x/v),$$

- *x* tengely irányában haladó hullám,

$$y^-(x,t) = f^-(x,t) = f^-(t + x/v),$$



4.2. b) A hullámegyenlet megoldása periodikus gerjesztés esetére

$$\boxed{v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},}$$

A hullámmozgást gerjesztő erő a komplex formalizmus alkalmazásával:

$$F(t) = F\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{F e^{j\omega t}\right\},$$

A vizsgált rendszer lineáris, ezért a hullámmozgás is szinuszos lesz:

$$y(x,t) = Y(x)\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{\hat{\hat{Y}}(x) e^{j\omega t}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 \hat{\hat{Y}}(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t}\right\}, \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mathrm{Re}\left\{(j\omega)^2 \hat{\hat{Y}}(x) e^{j\omega t}\right\},$$

$$\boxed{v^2 \frac{\partial^2 \hat{\hat{Y}}(x)}{\partial x^2} = (j\omega)^2 \hat{\hat{Y}}(x),}$$

a megoldás alakja: $\hat{\hat{Y}}(x) = Y e^{kx},$

$$v^2 k^2 \left(\cancel{Y_0 e^{kx}}\right) = (j\omega)^2 \left(\cancel{Y_0 e^{kx}}\right),$$

$$k = \mp j\frac{\omega}{v} = \mp j k_0,$$

az *y* irányú kitérés *x* szerinti változása

$$Y(x) = Y^+ e^{-jk_0 x} + Y^- e^{+jk_0 x},$$

az y irányú kitérés x szerinti változása: $\hat{\hat{Y}}(x) = Y^{+}e^{-jk_0 x} + Y^{-}e^{+jk_0 x}$,

$k = \mp j\dfrac{\omega}{v} = \mp jk_0$, **$k_0$ - cirkuláris hullámszám,**

$k_0 = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{1}{v} = \dfrac{2\pi}{\Lambda}$,

T - a kötélen haladó hullám periódus ideje,

Λ - a kötélen haladó hullám hullámhossza,

$Y^{+}e^{-jk_0 x}$ **-a pozitív x irányban terjedő hullám komponens,**

$Y^{-}e^{+jk_0 x}$ **-a negatív x irányban terjedő hullám komponens,**

a periodikus gerjesztésű hullámmozgás teljes megoldása:

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\left(Y^{+}e^{-j\omega x/v} + Y^{-}e^{j\omega x/v}\right)e^{j\omega t}\right\},$$

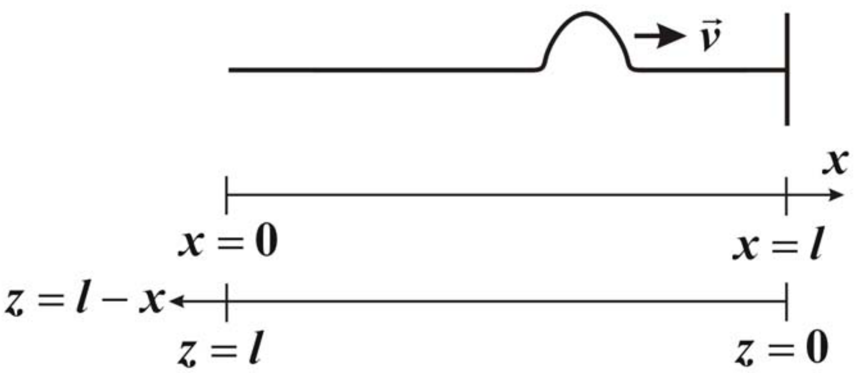
$$\boxed{y(x,t) = \underbrace{Y^{+}\cos\omega(t - x/v)}_{\text{a +x irányban haladó hullám}} + \underbrace{Y^{-}\cos\omega(t + x/v)}_{\text{a -x irányban haladó hullám}},}$$

4.3. Hullámok reflexiója, visszaverődése

4.3. a) A befogás figyelembe vétele: $\hat{\bar{Y}}(x) = Y^{+}e^{-jk_0 x} + Y^{-}e^{+jk_0 x}$,

a befogásnál a kötél kitérése:

$$\hat{\bar{Y}}(l) = Y^{+}e^{-jk_0 l} + Y^{-}e^{+jk_0 l},$$



a befogásnál
a beeső és a reflektált komponens:

$$Y_2^{+} = Y^{+}e^{-jk_0 l}, \quad Y_2^{-} = Y^{-}e^{+jk_0 l},$$

a befogásnál a reflexiós tényező:

$$\boxed{r_2 = r(x = l) = \frac{Y^{-}e^{jk_0 l}}{Y^{+}e^{-jk_0 l}} = \frac{Y_2^{-}}{Y_2^{+}},}$$

a befogástól induló
koordináta rendszer bevezetése: $x - l = z$

$$\hat{\bar{Y}}(x) = Y^{+}e^{-jk_0 x} + Y^{-}e^{+jk_0 x} = Y_2^{+}e^{jk_0(l-x)} + Y_2^{-}e^{-jk_0(l-x)},$$

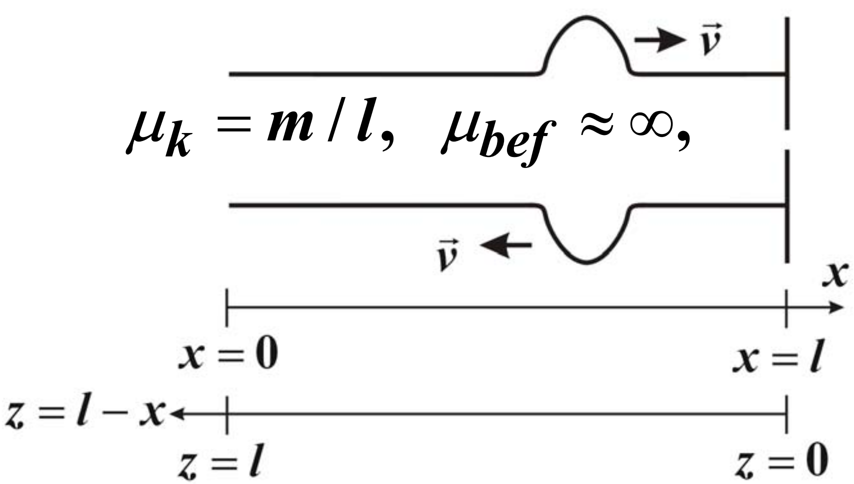
$$\hat{\bar{Y}}(x) = Y_2^{+}e^{jk_0(l-x)} + Y_2^{-}e^{-jk_0(l-x)} = \boxed{Y_2^{+}\left(e^{jk_0(l-x)} + r_2 e^{-jk_0(l-x)}\right)},$$

$$\hat{\hat{Y}}(x) = Y_2^+ e^{jk_0(l-x)} + Y_2^- e^{-jk_0(l-x)} = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} + r_2 e^{-jk_0(l-x)}\right),$$

a reflexió tényező a kötél mentén:

$$r(x) = \frac{Y^- e^{jk_0 x}}{Y^+ e^{-jk_0 x}} = \frac{Y_2^- e^{-jk_0(l-x)}}{Y_2^+ e^{+jk_0(l-x)}} = \frac{Y_2^-}{Y_2^+} e^{-j2k_0(l-x)} = r_2 e^{-j2k_0(l-x)},$$

<u>4.3. b) Merev falhoz való csatlakozás esetén:</u>



$$\hat{\hat{Y}}(x) = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} + r_2 e^{-jk_0(l-x)}\right),$$

a befogott végen reflexió lép fel:

$$r_2 = \frac{\dfrac{1}{\mu_{bef}} - \dfrac{1}{\mu_k}}{\dfrac{1}{\mu_{bef}} + \dfrac{1}{\mu_k}} = -1,$$

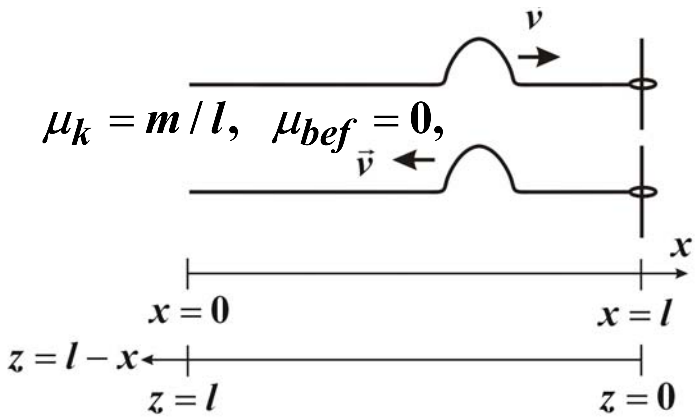
a merev falhoz csatlakozó kötélen a beérkező hullám ellenkező fázisban verődik vissza,

4.3. c) reflexió szabad végű kötélen:

$$\hat{Y}(z) = Y_2^+ e^{jk_0(l-x)} + Y_2^- e^{-jk_0(l-x)},$$

a szabad végen reflexió lép fel:

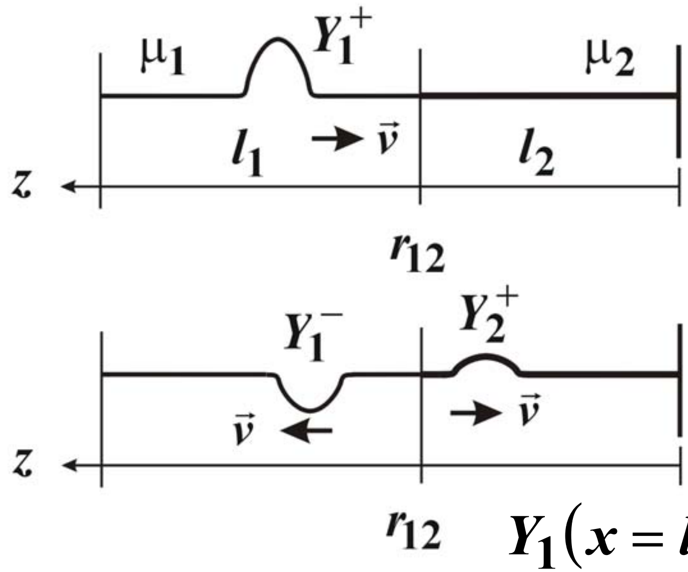
$\mu_k = m/l, \quad \mu_{bef} = 0,$



$$r_2 = \frac{\frac{1}{\mu_{bef}} - \frac{1}{\mu_k}}{\frac{1}{\mu_{bef}} + \frac{1}{\mu_k}} = +1$$

a szabad végű kötélen a reflektált hullám azonos fázisban halad végig,

4.3. d) Reflexió két különböző kötél csatlakozásánál:



két különböző anyagállandójú kötél csatlakozásánál reflexió lép fel, az 1. szakasz végén és a 2. szakasz elején a kitérés azonos,

$$r_{12} = \frac{\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}}, \mu_1 < \mu_2, \rightarrow r_{12} < 0,$$

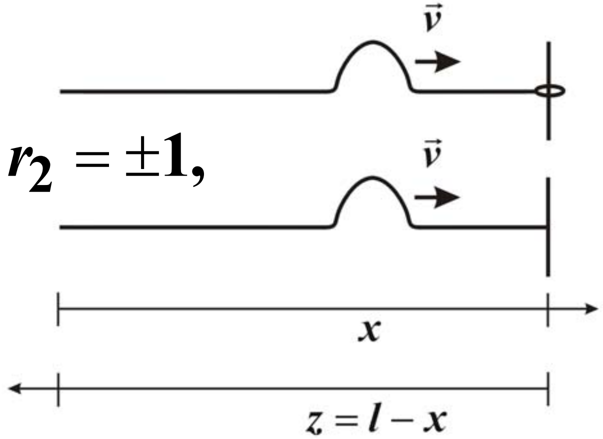
$$Y_1(x = l_1) = Y_1^+ + Y_1^- = Y_1^+(1 + r_{12}) = Y_2^+ = Y_2(z = l_1),$$

4.4. Állóhullámok kialakulása

$$\hat{Y}(x) = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} + r_2 e^{-jk_0(l-x)} \right),$$

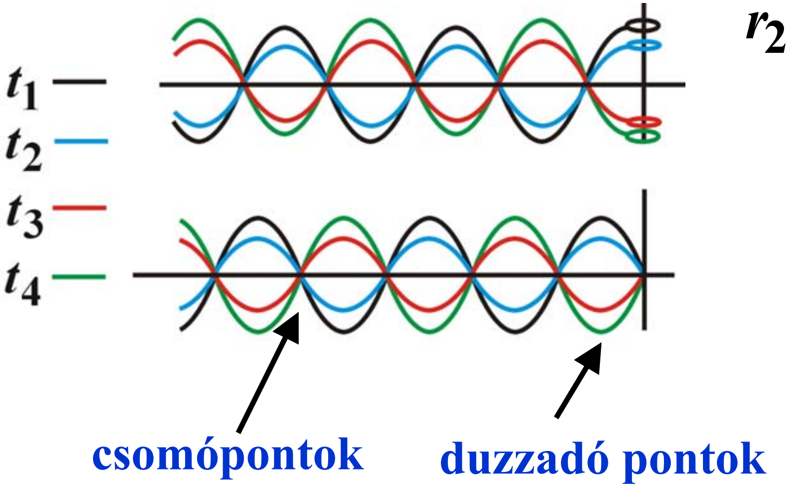
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta,$$

$r_2 = \pm 1,$



$$r_2 = +1, \quad \hat{Y}(x) = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} + 1 e^{-jk_0(l-x)} \right) =$$
$$= 2Y_2^+ \cos k_0 (l - x),$$

$$r_2 = -1, \quad \hat{Y}(x) = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} - 1 e^{-jk_0(l-x)} \right) =$$
$$= 2Y_2^+ j \sin k_0 (l - x),$$



a hely szerint állóhullámok alakulnak ki,

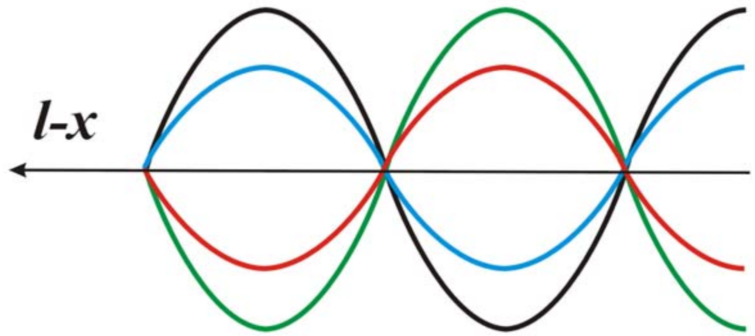
$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \hat{Y}(x) e^{j\omega t} \right\},$$

$$r_2 = +1, \quad y(z,t) = Y_2^+ 2\cos\omega t \cdot \cos k_0 (l - x),$$

$$r_2 = -1, \quad y(z,t) = Y_2^+ 2\sin\omega t \cdot \sin k_0 (l - x),$$

4.4. a) a csomópontok helye r_2=1 esetén :

$$r_2 = +1, \quad \hat{\hat{Y}}(x) = 2Y_2^+ \cos k_0(l - x),$$

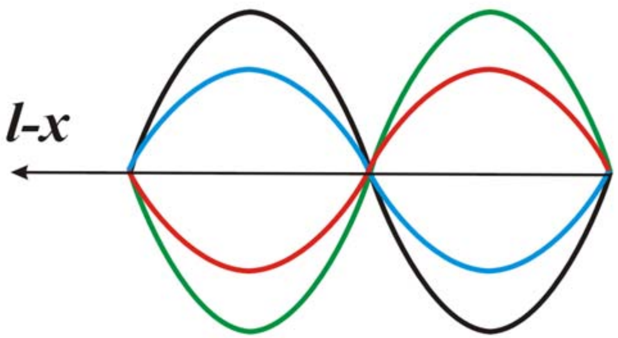


$$k_0(l - x) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \; n = 0,1,2,\cdots,$$

$$(l - x) = (2n + 1)\frac{\pi/2}{k_0} = (2n + 1)\frac{\pi/2}{2\pi/\Lambda} = (2n + 1)\frac{\Lambda}{4},$$

4.4. b) a csomópontok helye r_2=-1 esetén :

$$r_2 = -1, \quad \hat{\hat{Y}}(x) = 2Y_2^+ j \sin k_0(l - x),$$



$$k_0(l - x) = 2n\frac{\pi}{2}, \; n = 0,1,2,\cdots,$$

$$(l - x) = 2n\frac{\pi/2}{k_0} = 2n\frac{\pi/2}{2\pi/\Lambda} = 2n\frac{\Lambda}{4},$$

Ellenőrző kérdések I

- Ismertesse a merev testek haladó és forgó mozgására vonatkozó összefüggéseket,
- Ismertesse a merev test súlypontja, statikai nyomatéka és impulzusa fogalmát és meghatározásának módját,
- Ismertesse a merev test forgó mozgásnál fellépő perdület, forgatónyomaték, tehetetlenségi nyomaték fogalmát és meghatározásának módját,
- Ismertesse a párhuzamos tengelyek tételét, a Steiner tételt, és a merev test egyensúlyi feltételeit,
- Ismertesse a merev test forgómozgásánál fellépő energiaviszonyokat,
- Ismertesse a merev testek statikai egyensúlyi feltételét,
- Ismertesse a a centrikus, egyenes és ferde ütközés számítási módszereit,
- Foglalja össze a rugalmas és rugalmatlan ütközés összefüggéseit,
- Foglalja össze merev testek excentrikus ütközése során a redukált tömeg bevezetésének elveit.

Ellenőrző kérdések II

- Ismertesse a longitudinális hullámterjedés jellemzőit,
- Ismertesse a csillapítatlan szabad rezgés mozgásegyenletét és megoldását,
- Ismertesse a csillapított szabad rezgés mozgásegyenletét és megoldását, térjen ki a kis csillapítású szabad rezgések elemzésére,
- Ismertesse az állandó erővel gerjesztett csillapítatlan és csillapított rezgések viselkedését,
- Foglalja össze a harmonikus erővel gerjesztett csillapított és csillapítatlan rezgések viselkedését,
- Ismertesse a lebegés és a rezonancia jelenségét,
- Ismertesse az 1D hullámegyenletet és a retardálás fogalmát,
- Ismertesse az 1D hullámegyenlet megoldását szinuszos gerjesztés esetére,
- Ismertesse a hullámok reflexiójára, az állóhullámok kialakulására vonatkozó összefüggéseket.

Irodalom

Tankönyv:

Transzport folyamatok modellezése, előadás vázlat, www.e-oktat.pmmf.pte.hu

Ivanyi A. Transzport folyamatok modellezése, tankönyv, (megjelenés alatt), 2010.

Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Ajánlott irodalom:

M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő, (szerk), Mosgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, ISBN 963 19 2353 3,

Felhasznált irodalom:

Béda Gyula, Bezák Gáspár, Kinematika és dinamika, Műegyetemi Kiadó, 1989. ISBN 963 420 596 8

Györgyi József, Dinamika, Műegyetemi Kiadó, 2003, ISBN 963 420 712 X

Szőke Béla, Fizika 2, Előadás vázlat, 2004,

M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő, (szerk), Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 19967, ISBN 963 19 2850 0.

Irodalom

Tankönyv:

Transzport folyamatok modellezése, előadás vázlat, www.e-oktat.pmmk.pte.hu

Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5, (15, 18 fejezetek)

Ajánlott irodalom:

M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő, (szerk), Mosgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, ISBN 963 19 2353 3,

Felhasznált irodalom:

Béda Gyula, Bezák Gáspár, Kinematika és dinamika, Műegyetemi Kiadó, 1989. ISBN 963 420 596 8

Györgyi József, Dinamika, Műegyetemi Kiadó, 2003, ISBN 963 420 712 X

Szőke Béla, Fizika 2, Előadás vázlat, 2004.

Gyakorló feladatok I,

Megoldandó feladatok a merev testek dinamikája, valamint az ütközés témaköréből.

<u>Tankönyv, (TK)</u>: Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához,
LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

<u>Feladatok:</u>

<u>X. fejezet,</u> 10-1, 10-3, 10-4, 10-5, 10-9, 10-10, 10-11, 10A-14, 10A-19, 10B-24, 10B-28 feladatok,

<u>XI. fejezet</u>, 11-1, 11-2, 11-4, 11-5, 11B-8 feladatok,

<u>XII. fejezet</u>, 12-6,12-7, 12-14, 12B-19 feladatok,

<u>XIII. fejezet</u>, 13-6, 13-7, 13B-10, 13C-27, 13C-28 feladatok.

<u>IX. fejezet,</u> 9-1, 9-2, 9-3, 9A-4, 9 B-7, 9B-11, 9B-12, 9C-34, 9C-43 feladatok

<u>Gyakorló feladatok II</u>,

Megoldandó feladatok a merev testek kényszermozgása, a harmonikus rezgőmozgás témaköréből.

<u>Tankönyv, (TK)</u>: Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

<u>Feladatok:</u>

<u>XV. fejezet</u>, 15-1, 15-2, 15-3, 15-4, 15-6, 15-10, 15A-10, 15C-37, 15C-39 feladatok, súrlódással csillapított rezgési feladatok megoldása, rugók függőleges rezgőmozgása,

<u>XVIII. fejezet</u>, 18-1, 18A-5 feladatok, reflexió számítása, állóhullámok hullámhosszának meghatározása