# TRANSZPORT FOLYAMATOK MODELLEZÉSE

**Dr. Iványi Miklósné**

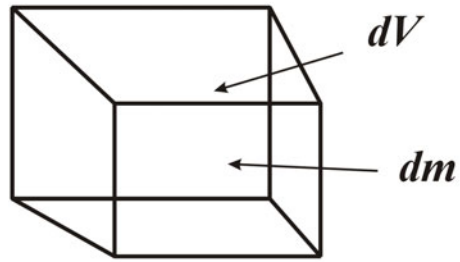
**professor emeritus**

**3. Konferencia**

# Áramlástan

**A cél áramló közegek, folyadékok, gőzök és gázok áramlásának, dinamikai viselkedésének elemzése, a vizsgálat a <u>statisztikai törvények alapján</u> és <u>nem</u> az egyes anyagrészecskék, gáz, víz molekulák dinamikájának elemzésére épül,**

## I. Anyagjellemzők




**1. Sűrűség,** $\lim\limits_{dV \to 0} \dfrac{dm}{dV} = \rho(\vec{r}, t)$, $[\mathrm{kg/m^3}]$,

**2. Fajtérfogat,** $\lim\limits_{dm \to 0} \dfrac{dV}{dm} = \nu(\vec{r}, t)$, $[\mathrm{m^3/kg}]$,

**3. Fajsúly,** $\lim\limits_{dV \to 0} \dfrac{dG}{dV} = \gamma(\vec{r}, t)$, $[\mathrm{N/m^3}]$,

$$\nu = \frac{1}{\rho}, \quad \rho(\vec{r}, t)g = \gamma(\vec{r}, t),$$

**4. Hőmérséklet,** $1\mathrm{K}^{o} = \mathrm{C}^{o} + 273{,}16$

**5. Nyomás,** $p = \dfrac{F}{A}$, $\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}\right]$,

# 6. Folyadékok,

## Ideális folyadék:

- homogén, a teret egyenletesen tölti ki,
- tökéletesen összenyomhatatlan,
- nincs belső súrlódás, nem ébred "csúsztató feszültség",
- a részecskék között nincs vonzóerő, nem ébred "húzófeszültség",
- súrlódásmentes,

## Valóságos folyadék:

- a teret nem egyenletesen tölti ki, nem homogén, sűrűsége, fajsúlya, halmazállapota változhat,
- összenyomható, a fajsúly a nyomás és hőmérséklet függvénye, pl.

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \beta\ p) = \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{E} p\right), \qquad E = \frac{-\Delta p}{\Delta V / V},$$ rugalmassági modulus,

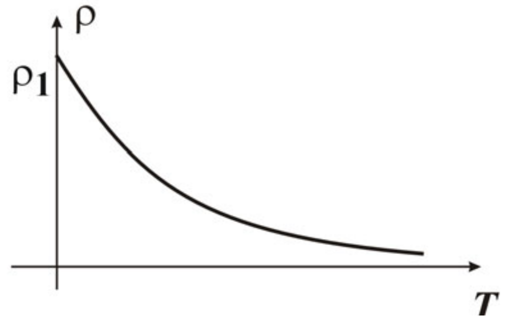
- a folyadék belső súrlódását $\eta$ kinematikai súrlódással jellemezzük, a különböző sebességű rétegek között csúsztatófeszültségek ébrednek, viszkozitással rendelkeznek,
- a molekulák és a környezet között vonzó-taszító-erő lép fel, felszíni feszültségek, kapillaritás,

• <u>az ideális folyadék</u> általában összenyomhatatlan,
(100 bar felett azonban lényeges térfogat változás áll be),
• <u>a valóságos folyadék</u> hőmérséklet függő, tágulása számítható,

ha: $T_1, \rightarrow V_1,$ $\beta\,[1/\mathrm{K}]$ ,

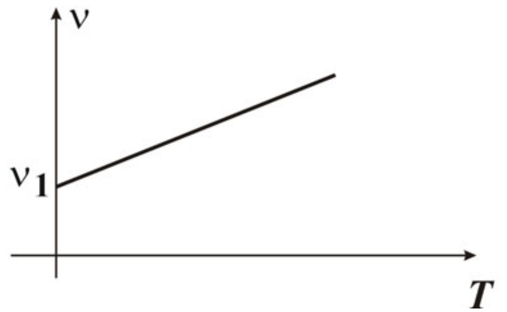
akkor: $T_2 = T_1 + \Delta T, \rightarrow V_2 = V_1(1 + \beta\Delta T),$ köbös tágulási együttható

• hőmérséklet hatására sűrűség változás lép fel,




$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{m}{V_1(1+\beta\Delta T)},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m/V_2}{m/V_1} = \frac{1}{(1+\beta\Delta T)}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{(1+\beta\Delta T)},$$




• fajtérfogat változás lép fel,

$$\nu_2 = 1/\rho_2 = \nu_1(1+\beta\Delta T),$$

**7. Gázok,** állapotváltozásukat a gáztörvények írják le,

**állapotváltozók**: térfogat-$V$, hőmérséklet -$T$, nyomás-$p$,

termikus állapotegyenletek az állapotváltozók kapcsolatát írja le,

ideális gázra az általánosított gáztörvény: $\boxed{\frac{p}{\rho} = RT,}$ R-gázállandó,

**7.a. Izotermikus állapotváltozás:** $T_1=T_2=$áll.

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_1}{m/V_1} = RT, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_2}{m/V_2} = RT, \rightarrow \boxed{p_1 V_1 = p_2 V_2,}$$ Boyle–Mariotte törvény

**7.b. Állandó térfogat melletti állapotváltozás:** $V_1=V_2=$áll.

$$\frac{p_1}{m/V} = RT_1, \quad \frac{p_2}{m/V} = RT_2, \rightarrow \boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},}$$ Gay–Lussac I. törvénye

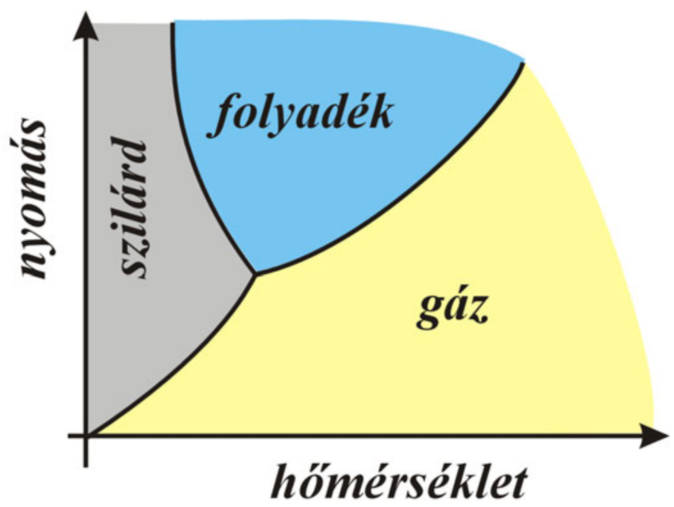
**7.c. Izobár állapotváltozás:** $p_1=p_2=$áll.

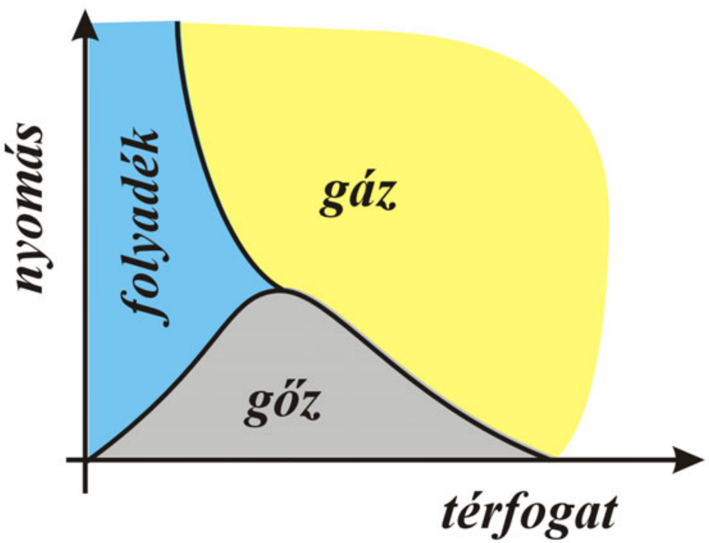
$$\frac{p}{m/V_1} = RT_1, \quad \frac{p}{m/V_2} = RT_2, \rightarrow \boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},}$$ Gay–Lussac II. törvénye

**<u>7.d. Adiabatikus állapotváltozás:</u> a gáz nyomása és térfogata is változhat, de a környezettel nincs energia-kapcsolata, nem ad le és nem vesz fel energiát. (hőtani vizsgálatoknál tárgyaljuk részletesen)**

**<u>7.e. Poltropikus állapotváltozás:</u> általános állapotváltozás, mindhárom állapotváltozó mellett a környezettel energiakapcsolatba is lép a gáz. (hőtani vizsgálatoknál tárgyaljuk részletesen)**

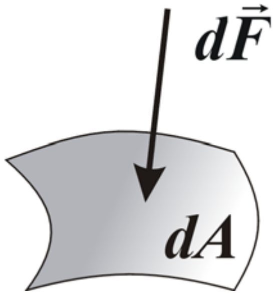
## <u>Halmazállapot változások</u>



# Hidrosztatika, álló folyadék

**8. Nyomás,** skaláris mennyiség, minden irányban egyenletes,




$$p = \lim_{dA \to 0} \frac{F}{A}, \quad \left[1\mathrm{N}/\mathrm{m}^2 = 1\mathrm{Pa}\right], \text{ pascal}$$

egy pontban a nyomás minden irányban azonos,

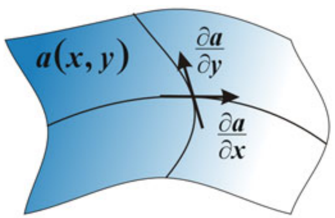
a nyomásból származó erő merőlegesen hat a falra,

a nyomás skalár mennyiség, térbeli eloszlása: $p(\vec{r}, t)$,

nyomás hely szerinti változását vektor írja le,

$$\frac{\partial p(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} = \nabla p = \mathrm{grad}\, p(\vec{r},t) = \frac{\partial p(\vec{r},t)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p(\vec{r},t)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p(\vec{r},t)}{\partial z}\vec{e}_z,$$

**Matematika:**
**a parciális derivált**




$a(x, y)$,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \lim_{dx \to 0} \frac{a(x+dx, y) - a(x, y)}{dx},$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \lim_{dy \to 0} \frac{a(x, y+dy) - a(x, y)}{dy}$$

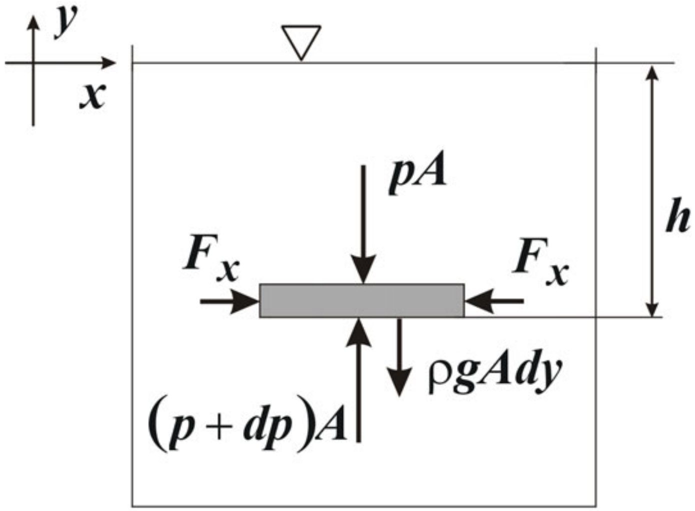
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \mathrm{grad} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z,$$

# 8.a. Hidrosztatika egyenlete, nyugvó folyadék

**Nyugvó folyadékban az erők eredője nulla,** $\sum F_x = 0,$




$$\sum F_y = 0, \quad (p+dp)A - pA - \rho gAdy = 0,$$

$$dp = \rho g dy,$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \int_{y=-h}^{0} \rho g dy = \rho g h,$$

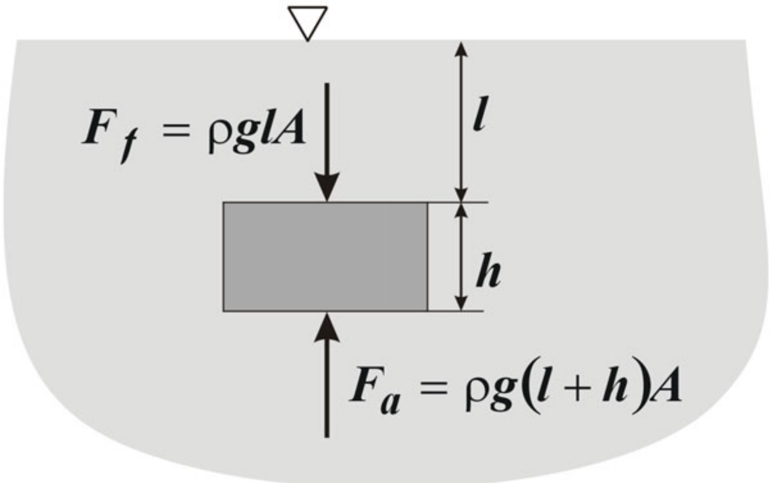
$$\boxed{p_2 = p_1 + \rho g h,}$$

**levegőre:**

$$p_0 = 1\text{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5 \ \text{N/m}^2 = 1{,}013 \cdot 10^5 \,\text{Pa} = 1013 \ \text{mbar} = 760 \ \text{Hgmm},$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h,$$

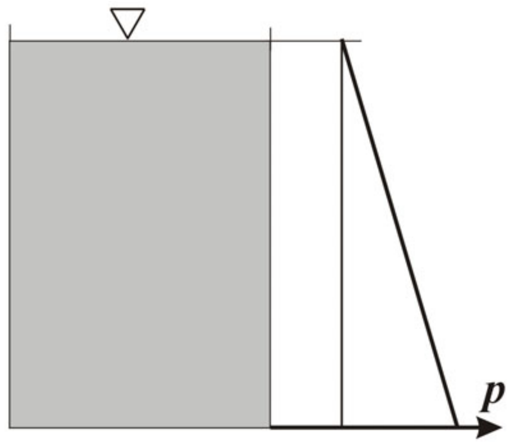
**A hidrosztatikai felhajtó erő,**
**folyadékba mártott testre ható erő** **Arkhimedesz törvénye**




**az alaplapra ható erő** $F_a = \rho g (l + h) A,$

**a fedőlapra ható erő** $F_f = \rho g l A,$

**az emelő erő** $F_a - F_f = \rho g h A,$




**Pascal törvénye: zárt edényben lévő folyadékra ható nyomás minden irányban, a folyadék minden részére és az edény falára ugyanolyan mértékben adódik át,**

# 8.b. A nyomás magasságfüggése,

a magasság növelésével a nyomás csökken: $\Delta p = -\rho g \Delta h$, $\quad \frac{dp}{dh} = -\rho g$,

$T = \text{conts}$, $m = \text{conts}$,

$$\left.\frac{p}{\rho} = RT, \rightarrow \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho}, \rightarrow \rho = p\frac{\rho_0}{p_0},\right\} \quad \frac{dp}{dh} = -p\frac{\rho_0}{p_0}g, \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}gdh,$$

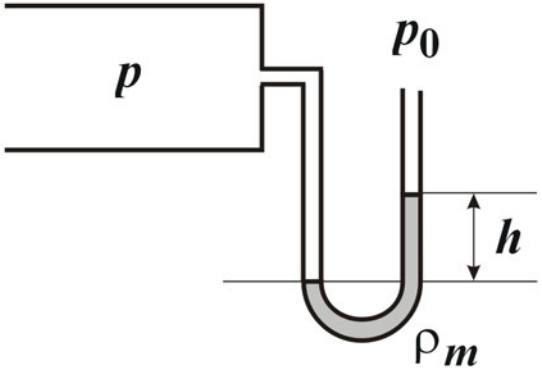
$$\left.\begin{array}{l} \ln p = -\frac{\rho_0}{p_0}gh, \rightarrow p(h) = Ce^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}, \\ \text{ha } h = 0,\ p = p_0, \rightarrow C = p_0, \end{array}\right\} p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}$$

a magasság ismeretében a nyomás: a nyomás ismeretében a magasság:

$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh},} \longrightarrow \boxed{h = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\ln\frac{p}{p_0},}$$

# 8.c. Nyomás mérése nyugvó folyadékban,

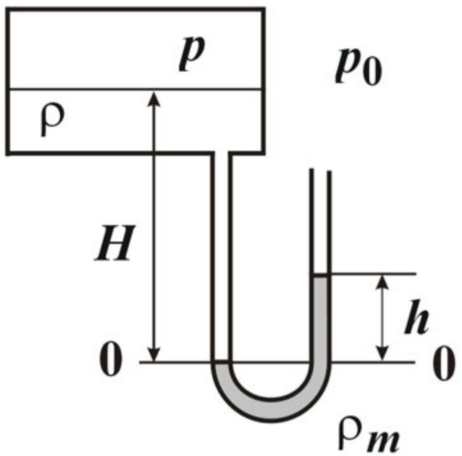
## (a) elhanyagolható fajsúlyú gáz nyomásának mérése manométerrel,




$p$-a tartályban a nyomás,
$p_0$-a külső légnyomás,
$\rho_m$-a mérőfolyadék sűrűsége,

$$p = p_0 + \rho_m g h,$$

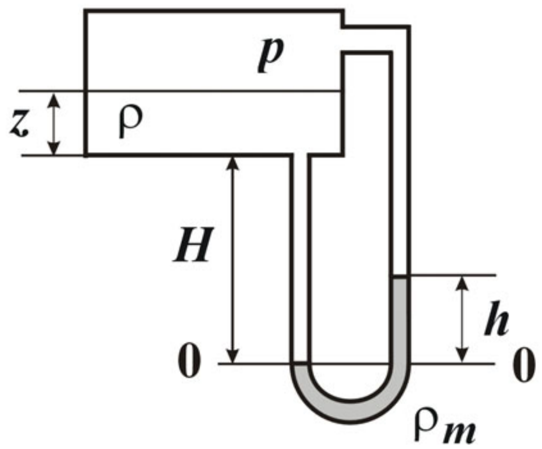
## (b) manométeres nyomásmérés folyadékot tartalmazó zárt tartályban,




$p$-a tartályban a nyomás,
$p_0$-a külső légnyomás,
$\rho_m$-a mérőfolyadék sűrűsége,
$\rho$-a tartályban lévő folyadék sűrűsége,

$$p + \rho g H = p_0 + \rho_m g h, \rightarrow p = p_0 + \rho_m g h - \rho g H,$$

## (c) folyadék manométer mint szintmérő,

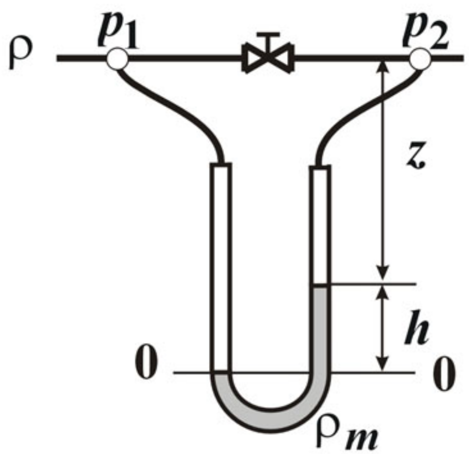



$p$-a tartályban a nyomás,
$\rho_m$-a mérőfolyadék sűrűsége,
$\rho$-a tartályban lévő folyadék sűrűsége,

$$p + \rho g(H + z) = p + \rho_m g h,$$

$$z = \frac{\rho_m g h - \rho g H}{\rho g} = \frac{\rho_m}{\rho} h - H,$$

## (d) csővezeték két pontja közötti nyomáskülönbség mérése,




$p_1$,$p_2$-a vezeték pontjaiban a nyomás,
$\rho_m$-a mérőfolyadék sűrűsége,
$\rho$-a vezetékben lévő folyadék sűrűsége,

$$p_1 + \rho g(h + z) = p_2 + \rho g z + \rho_m g h,$$

$$p_1 - p_2 = h g(\rho_m - \rho),$$

# Folyadékok áramlástana

**Egyfázisú áramlás**

**Többfázisú áramlás**

**ideális folyadék**

$\eta = 0$

**valóságos folyadék** $\eta \neq 0$

**súrlódó erő figyelembe vételével**

**felületi feszültség figyelembe vételével**

**rugalmassági erő figyelembe vételével**
**összenyomható folyadékok**

## Folyadékok áramlásának dinamikai jellemzői

- **tömeg megmaradás törvénye,**
- **impulzus megmaradás törvénye,**
- **energia megmaradás törvénye,**

# II. Mozgó folyadékok dinamikája

**9. Sebesség,** $\vec{v}(\vec{r},t)=\dot{\vec{r}}(t)$, **helyett közvetlenül** $\vec{v}(\vec{r},t)$,

**szemléltetése áramlási vonalakkal, áramvonalakkal**


**folyadékrész pályája:**

**áramvonal, stacionárius áramlás:**

**áramvonal, nem-stacionárius, turbulens áramlás:**

**nyomvonal:**

- **áramló folyadékok összenyomhatalanok 100 bar alatt,**
- **áramló gázok nem nyomódnak össze, ha sebességük kisebb, mint a hang terjedési sebessége,**

$$|\vec{v}|_{gáz} < |\vec{v}|_{hang},$$

$$\frac{v_{gáz}}{v_{hang}} = M_a,$$

**Mach számmal jellemzett áramlások:**

$Ma < 1$, **hangsebesség alatti, szubszonikus,**

$Ma > 1$, **hangsebesség feletti, szuperszonikus,**

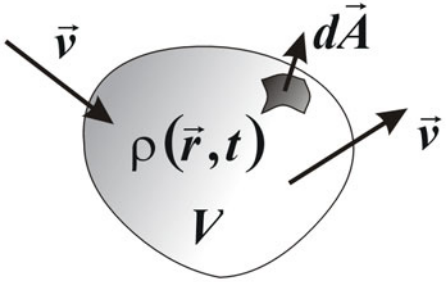
$Ma > 5$, **hiperszonikus,**

# 10. A folytonosság tétele, kontinuitási tétel, (a tömegmegmaradási törvény)

## 10.a. Összenyomhatatlan folyadékokra, stacionárius áramlásra:

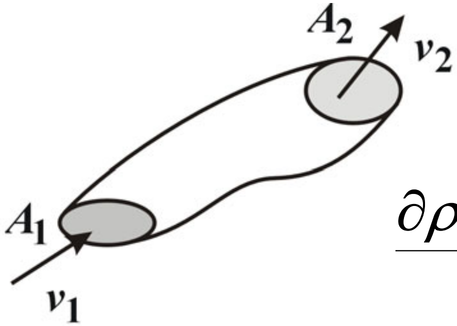
$$\rho = \text{áll.} \qquad \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0,$$

**A térfogat tömegének időbeli megváltozása nulla**




$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho \frac{d\vec{l}}{dt} d\vec{A} = \rho \vec{v} d\vec{A},$$

$$\frac{d}{dt} m = \int_V \frac{\rho dV}{dt} = -\int_{A_{be}} \rho \vec{v} d\vec{A} + \int_{A_{ki}} \rho \vec{v} d\vec{A} = \oint_A \rho \vec{v} d\vec{A} = 0,$$




**összenyomhatatlan közegre, stacionárius áramlás:**

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0, \qquad \boxed{\oint_A \rho \vec{v} d\vec{A} = 0,}$$

$$\rho_{be} \vec{v}_{be} \vec{A}_{be} = \rho_{ki} \vec{v}_{ki} \vec{A}_{ki},$$

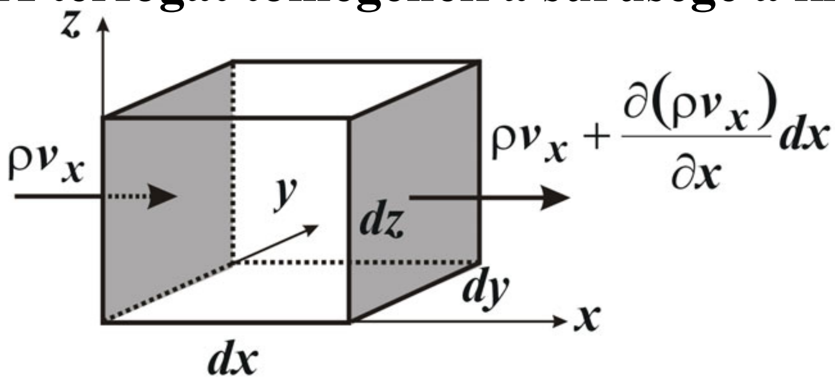
$$\rho_1 v_{1n} A_1 = \rho_2 v_{2n} A_2,$$

a $D_1$, $D_2$ átmérőjű csőben

$$\boxed{\rho_1 v_{1n} D_1^2 \cancel{\frac{\pi}{4}} = \rho_2 v_{2n} D_2^2 \cancel{\frac{\pi}{4}},}$$

# 10.b. Összenyomható folyadékokra, nem-stacionárius áramlás esetén:

**A térfogat tömegének a sűrűsége a ki-be áramlás miatt változik** $\partial\rho(\vec{r},t)/\partial t \neq 0,$




**az időegység alatt a térfogatba az $x$-irányból beáramló tömeg**

$$dm_{bx}/dt = \rho v_x dydz,$$

**az időegység alatt a térfogatból az $x$-irányba kiáramló tömeg**

$$dm_{kx}/dt = \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx\right] dydz,$$

**az időegység alatt a térfogat tömegének megváltozása**

$$dm_x/dt = \frac{dm_{kx} - dm_{bx}}{dt} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydz,$$

$$dm_y/dt = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydz,$$

$$dm_z/dt = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydz,$$

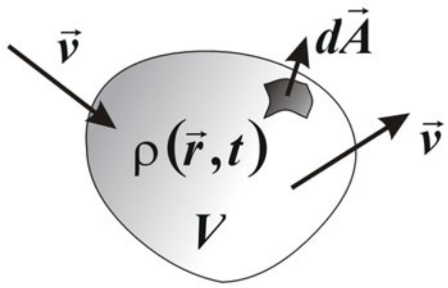
**a térfogat tömegének megváltozása a sűrűség megváltozását eredményezi**

$$dm/dt = \frac{dm_x + dm_y + dm_z}{dt} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz,$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

**a teljes térfogatra** $\boxed{\oint_A \rho\vec{v}d\vec{A} + \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = 0,}$ $\leftarrow$ $\boxed{\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,}$

## A folytonosság tétele




$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0,}$$ **differenciális alak,**

$$\boxed{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV+\oint_A \rho\vec{v}d\vec{A}=0,}$$ **integrális alak,**

**Matematika: egy vektortér forrásosságát a divergenciája adja meg**

$$div(\rho\vec{v})=\nabla\cdot(\rho\vec{v})=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z},$$

**A folytonossági tétel,** $$\boxed{div(\rho\vec{v})+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0,}$$

**egységnyi térfogat tömegének időegység alatti megváltozását az időegység alatt a térfogatból távozó és belépő tömegek összessége fedezi,**

**Az állandó sűrűségű közeg mindig forrásmentes:** $\boxed{div(\rho\vec{v})=0,}$

$$\int_V div(\rho\vec{v})dV=0,\rightarrow \int_V div(\rho\vec{v})dV=\oint_A \rho\vec{v}d\vec{A},\rightarrow \boxed{\oint_A \rho\vec{v}d\vec{A}=0,}$$

# Ideális, surlódásmentesen áramló folyadék mozgástörvénye

## 11. Impulzus megmaradás, Euler egyenlet

**az áramló folyadék *m* tömege az erőhatás következtében mozgásba kezd:**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v}\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{0} + m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

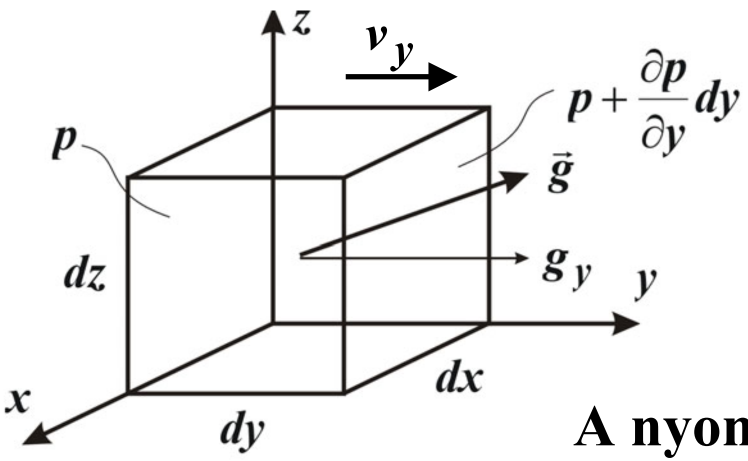
**A $\vec{v}(\vec{r}(t),t)$ sebesség megváltozása:**

$$\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(\vec{r},t+\Delta t) - \vec{v}(\vec{r},t)}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{a}_l + \vec{a}_k,$$

**lokális gyorsulás:** $\vec{a}_l = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, **konvektív gyorsulás:** $\vec{a}_k = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t}$,

$$\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{v_x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v_y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{v_z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}},}$$




**a folyadékrészre ható erő komponensei:**

- **a nyomás változás,**
- **az nehézségi erőtér hatása, a súlyerő,**

**A nyomásból származó *y*-irányú erő komponens:**

$$dF_{p,y} = p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz = -\frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

**Az nehézségi erőtérből származó erő komponense:** $dF_{g,y} = \rho\, g_y dx\,dy\,dz,$

**A *y*-irányú mozgásmennyiség megváltozása:** $F_y = F_{yg} + F_{py},$

$$\frac{dI_y}{dt} = F_y = m\frac{dv_y}{dt} = \rho\,dx\,dy\,dz\frac{dv_y}{dt} = \rho\,g_y\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

# A mozgástörvény súrlódás mentes áramlásra:

**elemi térfogatra**

$$\frac{dI_y}{dt} = \rho \frac{dv_y}{dt} dx\,dy\,dz = \left( \rho\, g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx\,dy\,dz,$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho\, g_y - \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}, \rightarrow \boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}},}$$

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right) = \rho\vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}},}$$

**Euler egyenlet, differenciális alak**

**a teljes térfogatra**

**A tömegre ható súlyerő:**

$$\vec{F}_g = \int_V \rho\, \vec{g} dV,$$

**A nyomásból származó erő:**

$$\vec{F}_p = -\oint_A p d\vec{A} = -\int_V \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} dV,$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p,$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho\vec{v} dV = \int_V \rho\, \vec{g} dV - \oint_A p d\vec{A},}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho\vec{v} dV = \int_V \rho\, \vec{g} dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} dV,}$$

**Euler egyenlet integrális alak**

# 12. Az energia megmaradás törvénye,

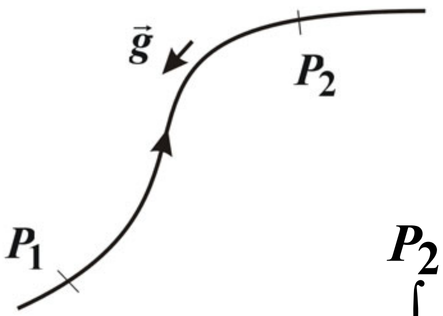
ideális folyadék, veszteségmentes áramlás,

## 12.a. Bernoulli egyenlet

Euler egyenlet

zárt áramvonalra kiértékelve:

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right)=\rho\vec{g}-\frac{\partial p}{\partial\vec{r}},}$$




$$\int_{P_1}^{P_2}\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}d\vec{r}+\int_{P_1}^{P_2}\rho\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}d\vec{r}=-\int_{P_1}^{P_2}\rho\vec{g}d\vec{r}-\int_{P_1}^{P_2}\frac{\partial p}{\partial\vec{r}}d\vec{r},$$

$$\int_{P_1}^{P_2}\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}d\vec{r}+\rho\frac{\vec{v}_2^2-\vec{v}_1^2}{2}=-g\rho(h_2-h_1)-(p_2-p_1),$$

zárt áramvonal mentén

összenyomhatatlan: $\rho=$ áll.

stacionárius az áramlás: $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0,$

$$\rho\frac{\vec{v}_2^2-\vec{v}_1^2}{2}+\rho g(h_2-h_1)+(p_2-p_1)=0,$$

Bernoulli egyenlet

egységnyi térfogatra

$$\boxed{\rho\frac{\vec{v}_2^2}{2}+\rho gh_2+p_2=\rho\frac{\vec{v}_1^2}{2}+\rho gh_1+p_1,}$$

**Bernoulli egyenlet**
**egységnyi térfogatra**

$$\boxed{\rho\frac{\vec{v}_2^{\,2}}{2}+\rho g h_2+p_2=\rho\frac{\vec{v}_1^{\,2}}{2}+\rho g h_1+p_1,}$$

**általánosítva: egy zárt áramvonal mentén** $\boxed{\rho\frac{v^2}{2}+\rho g z+p=\text{áll},}\ .V$

***m=ρV* tömeg áramlása esetén:**

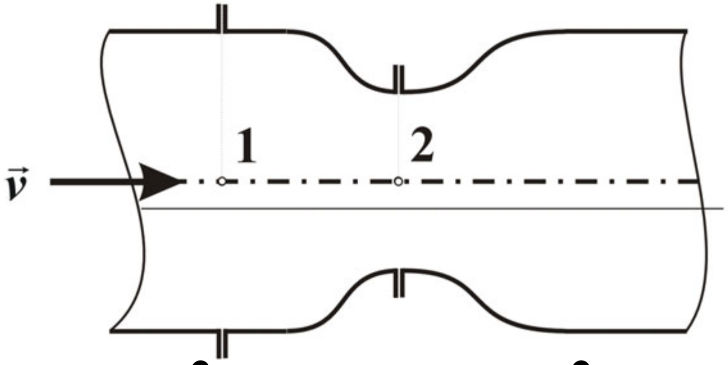
$$m\frac{v^2}{2}+mgh+Vp=\text{áll}=E_m+E_h+E_p,$$

**mozgási energia** **helyzeti energia** **nyomási energia**

$$E_m=m\frac{v^2}{2},\qquad E_h=mgh,\qquad E_p=pV,$$

# <u>12.b.Venturi cső:</u> áramló anyag sebességének, nyomásának mérésére,

**konfuzor=keresztmetszet szűkítő**




**1. helyen:** $A_1$**-keresztmetszet,**
$v_1$**-sebesség,**
$p_1$**-nyomás,**

**2. helyen:** $A_2$**-keresztmetszet,**
$v_2$**-sebesség,**
$p_2$**-nyomás,**

**E:** $$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho},$$

**m:** $$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2, \rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1},$$

$$\rho = \text{áll}, \quad h_1 = h_2,$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \rho \frac{v_2^2}{2}\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right),$$

$$m = \rho v_2 A_2,$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho A_2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right),$$

**az átáramló folyadék mennyiség:**

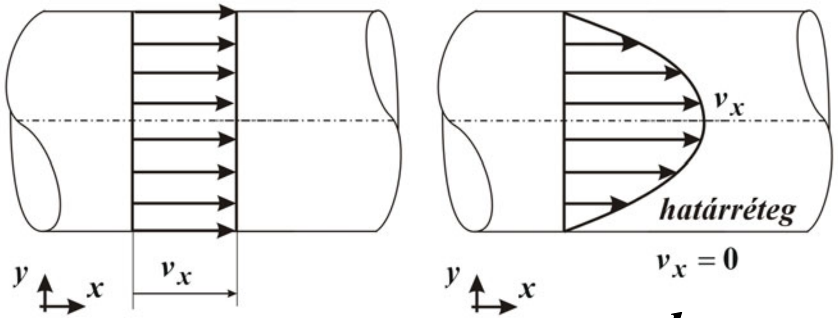
$$m = \sqrt{\frac{2\rho A_2^2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}(p_1 - p_2)} = const \cdot \sqrt{\Delta p},$$

# Valóságos folyadékok mozgástörvénye, veszteségei

## 13. Viszkozitás,

**ideális folyadék, ill. gázrészecskék között nincs kölcsönhatás, a közeg sebessége állandó,**

**valóságos folyadék és gáz (áramló közeg) sebessége szilárd fal mellet mindig zérus, az egymás melletti folyadékrétegek között a súrlódás következtében csúszás jön létre, a sebességváltozást létrehozó jellemző a viszkozitás.**





**a sebességváltozás mértéke:** $\dfrac{dv_x}{dy}$,

**a súrlódási erő:** $F = A\eta\dfrac{dv_x}{dy}$,

$\eta -$ **a dinamikai viszkozitás,**

$$\eta = \frac{F}{A\dfrac{dv_x}{dy}},$$

**elemi közegre ható nyíróerő:**

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta\frac{dv_x}{dy}, \quad [\tau] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\mathrm{Pa},$$

$\tau -$ **a csúsztató/nyíró feszültség,**

$$\eta = \frac{\tau}{\dfrac{dv_x}{dy}}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = \mathrm{Pa}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}} = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}\right],$$

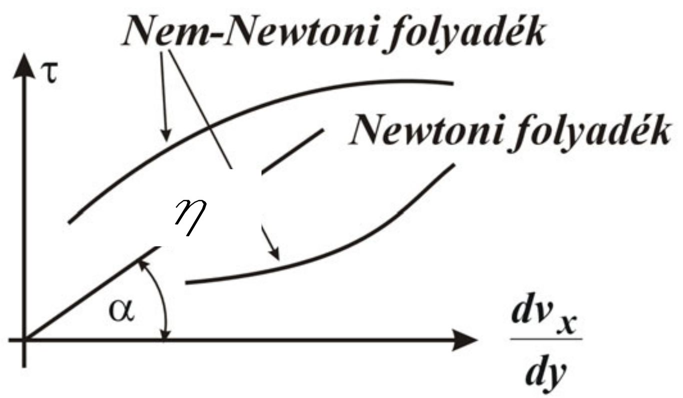
## Folyadékok osztályozása

| | |
|---|---|
| Newtoni folyadék | $\eta =$ állandó |
| nem-Newtoni folyadék | $\eta \neq$ állandó |

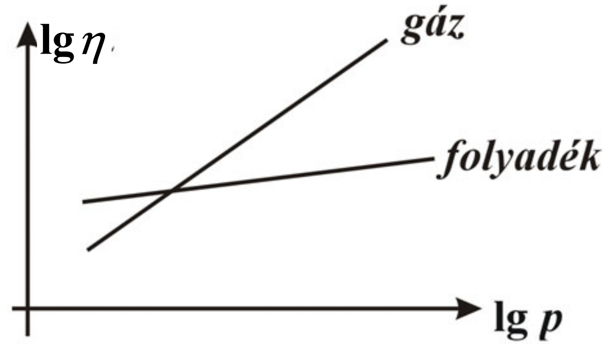
## Newtoni folyadékok viszkozitása,

**a) a csúsztató feszültség arányos a deformáció sebességével, arányossági tényező a dinamikai viszkozitás,**

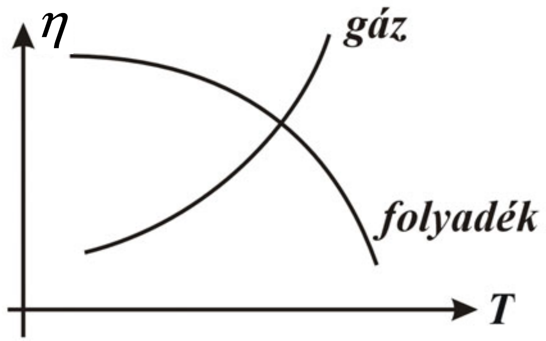
$$\frac{\tau}{dv_x / dy} = \eta = \textbf{állandó}$$



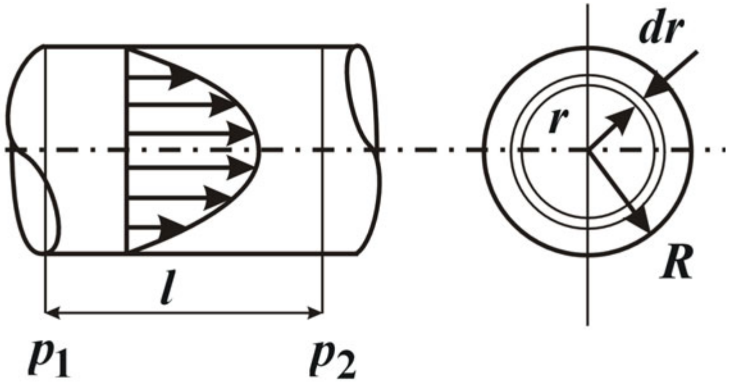

**b) A nyomás változás hatása a viszkozitásra**




**c) A hőmérséklet hatása a viszkozitásra**



# 13.a. Newton-féle ideálisan viszkózus folyadékok áramlása, η=áll.




***R*-sugarú cső,**
***l*-hosszú a cső,**
**$\eta$-viszkozitású folyadék áramlik,**
**$p_2<p_1$- nyomás,**

**az *r*-sugarú henger két végpontján a nyomásból származó erők gyorsítanak:**

$$F_{p1} = p_1 r^2 \pi, \quad F_{p2} = p_2 r^2 \pi,$$

**az *r*-sugarú henger palástján a csúszósurlódásból származó erő lassít:**

$$F_s = -\eta \underbrace{2r\pi l}_{A} \frac{dv(r)}{dr},$$

**a gyorsító és a fékező erők egyensúlya:** $F_{p2} - F_{p1} - F_s = 0,$

$$\Delta p r^2 \pi = -\eta 2r\pi l \frac{dv(r)}{dr}, \quad \rightarrow \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta p r}{\eta 2l}, \rightarrow v(r) = -\frac{\Delta p}{\eta 2l}\frac{r^2}{2} + C,$$

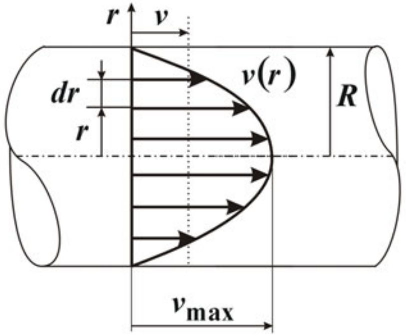
**peremfeltétel:**

$$v(R) = 0 = -\frac{\Delta p}{\eta 2l}\frac{R^2}{2} + C, \rightarrow C = \frac{\Delta p}{\eta 2l}\frac{R^2}{2},$$

**a sebesség eloszlás parabolikus:**

$$v(r) = \frac{\Delta p}{\eta 4l}\left(R^2 - r^2\right),$$

**ideális viszkózus folyadékokban a sebesség eloszlás parabolikus:**




$$v(r) = \frac{\Delta p}{\eta 4l}\left(R^2 - r^2\right),$$ **maximális a sebesség,** $$v_{\max} = \frac{\Delta p}{\eta 4l} R^2,$$

**<u>térfogatáram:</u> az egységnyi idő alatt szállított folyadék térfogata**

$$q_v = \frac{dV}{dt} = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{r=0}^{R} v(r) 2r\pi dr = \int_{r=0}^{R} v_{\max}\left(1 - (r/R)^2\right) 2r\pi dr \approx v_{\max} R^2 \pi \frac{1}{2},$$

**az átlagsebesség:**

$$v_k = \frac{q_v}{A} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\Delta p}{\eta 8l} R^2,$$

**a súrlódás következtében fellépő nyomásesés:**

$$\Delta p = \frac{\eta 8l}{R^2} v_k,$$

**a veszteség magasság:** $$h' = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\eta 8l}{R^2}\frac{v_k}{\rho g} = \frac{\eta 32l}{d^2}\frac{v_k}{\rho g} = \frac{64}{d v_k}\frac{\eta}{\rho}\frac{l}{d}\frac{v_k^2}{2g},$$

Re

$$\frac{d v_k}{\eta/\rho} = Re$$ **dimenzió nélküli szám, Reynolds-szám**

$$\frac{64}{Re} = \lambda,$$ **csősúrlódási tényező,**

**a veszteség magasság:**

$$h' = \lambda \frac{l}{d}\frac{v_k^2}{2g},$$

## 13.b. Csővezetékek veszteségei:

$$\frac{dv_k}{\eta / \rho} = Re$$ dimenzió nélküli szám, Reynolds-szám

$$\frac{64}{Re} = \lambda,$$ csősúrlódási tényező,

a veszteség magasság:

$$h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_k^2}{2g},$$

a csőidomok: konfuzór, diffúzor, könyök, elágazás, keresztmetszet szűkülés veszteségi tényezője:

$$\xi = \lambda \frac{l}{d},$$

a teljes csővezeték veszteségi tényezője a csődarabok és az idomdarabok veszteségi magasságainak összege:

$$h' = \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \xi_j \frac{v_j^2}{2g},$$

$q_m$ tömegáram létrehozásához a cső eleje és vége között $\Delta p$ nyomáskülönbségre van szükség:

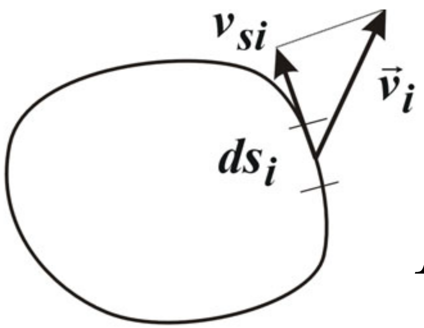
$$h' = \frac{\Delta p}{\rho g}, \quad q_m = vA, \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{q_m^2 / A^2}{2g}, \rightarrow \Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} q_m^2,$$

a $\boxed{\dfrac{dv_k}{\eta/\rho} = Re}$ **Reynolds szám értelmezése:**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a gyorsító/impulzus erő:} & F_I \approx \rho A v^2 \approx \rho l^2 v^2, \\ \text{a csúszósurlódási erő:} & F_s \approx \eta A \dfrac{dv}{dr} \approx \eta l v, \end{array}\right\} \quad Re = \frac{F_I}{F_s} \approx \frac{\rho l^2 v^2}{\eta l v} \approx \frac{l v \rho}{\eta},$$

**A Reynolds-számmal jellemezhető a folyadék áramlás lamináris és turbulens tulajdonsága,**

**<u>lamináris</u> az áramlás, ha a sebességnek nincs az áramlásra merőleges komponense,**
**<u>turbulens</u>/örvényes az áramlás, ha az áramlás irányára merőleges sebesség komponens is fellép ,**

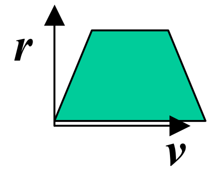


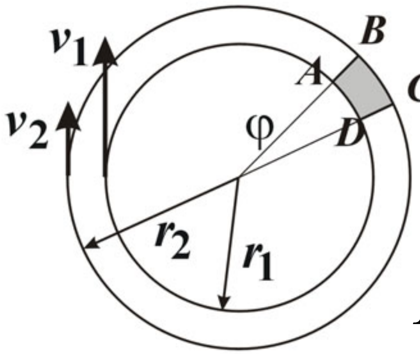

**turbulens áramlásnál a részecske forgómozgást végez, jellemzése a cirkulációval:**

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^{n} v_{si} ds_i, \rightarrow \Gamma = \oint_s v_s ds,$$

**örvénymentes a tér, ha a $\Gamma$ cirkuláció nulla,**

**1. példa,** **körpályán $v = c/r$ sebességgel mozgó részecskék cirkulációja**



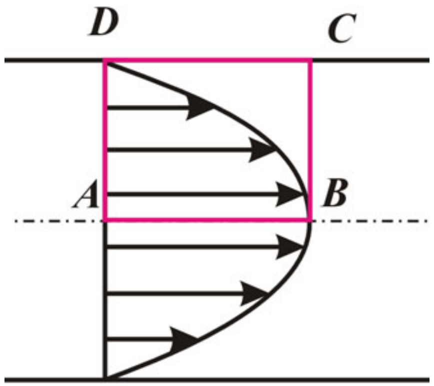

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA},$$

$$\Gamma_{BC} = v_2 s_{BC} = \frac{c}{r_2}\varphi\, r_2 = c\varphi, \qquad \Gamma_{AB} = \Gamma_{CD} = 0,\ \vec{v} \perp d\vec{s},$$

$$\Gamma_{DA} = -v_1 s_{DA} = -\frac{c}{r_1}\varphi\, r_1 = -c\varphi, \qquad \Gamma = 0 + c\varphi + 0 - c\varphi = 0,$$

**a cirkuláció nulla, nem turbulens, hanem lamináris az áramlás,**

**2. példa,** $v(r) = \frac{\Delta p}{\eta 4l}\left(R^2 - r^2\right)$, **parabolikus sebesség profil cirkulációja**




$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}, \quad \Gamma_{BC} = \Gamma_{DA} = 0,\ \vec{v} \perp d\vec{s},$$

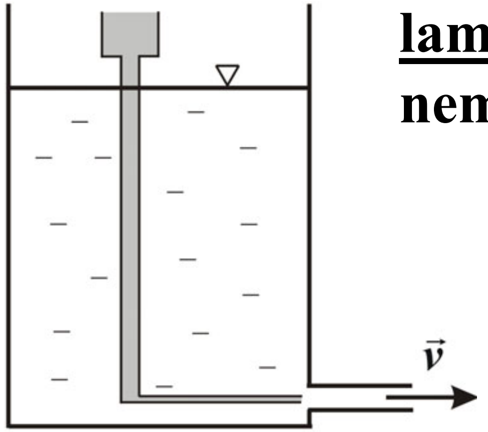
$$\Gamma_{AB} = v_{max} s_{AB}, \quad \Gamma_{CD} = v(r = R) s_{CD} = 0,$$

$$\Gamma = v_{max} s_{AB} + 0 + 0 + 0 = v_{max} s_{AB} \neq 0,$$

**a cirkuláció nem nulla, turbulens az áramlás,**

# 13.c. Súrlódó folyadékok lamináris és turbulens áramlása

**Reynolds-féle kísérlet** a kiömlési sebességtől függően az áramlás lehet




**lamináris**, réteges, a színező folyadék nem keveredik az áramló közeggel,

**turbulens**, örvényes, a színező folyadék összekeveredik az áramló közeggel, a sebességnek az áramlás irányára merőleges komponense is van,

**Az áramlás függ az un. Reynolds számtól**

$$Re = \frac{vd\rho}{\eta},$$ zavartalan áramlási feltételek mellett $Re \approx 2300$,

# 14. Ideálisan viszkózus közegek áramlásának mozgástörvénye

nem viszkózus folyadékok mozgástörvénye az Euler egyenlet,

a folyadékrészre ható erő komponensei:
• a nyomás változás,
• az nehézségi erőtér hatása, a súlyerő,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_p, \xrightarrow{\text{egységnyi térfogatra}} \boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right) = \rho\vec{g} - \frac{\partial p}{\partial\vec{r}},}$$

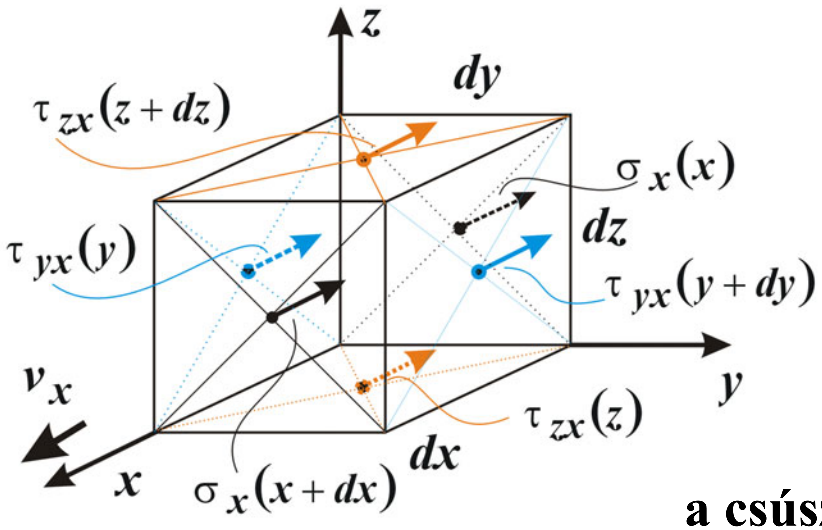
viszkózus folyadékokra ható erők kiegészülnek a súrlódási erővel,

a folyadékrészre ható erő komponensei:
• a nyomás változás,
• az nehézségi erőtér hatása, a súlyerő,
• csúsztató és húzófeszültségek súrlódási ereje,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_s, \longrightarrow \quad \vec{F}_s = ?$$

## elemi $dV=dx\,dy\,dz$ térfogatra ható húzó- és csúsztatófeszültségek

## $x$-irányú komponense, kis változások-Taylor sorral közelítve




**Laplace operátor:**

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}=\Delta v_x,$$

**a húzófeszültség:** $$\sigma_x(x+dx)=\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx,$$

**a csúsztatófeszültség:** $$\tau_{yx}(y+dy)=\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy,$$

$$\tau_{zx}(z+dz)=\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz,$$

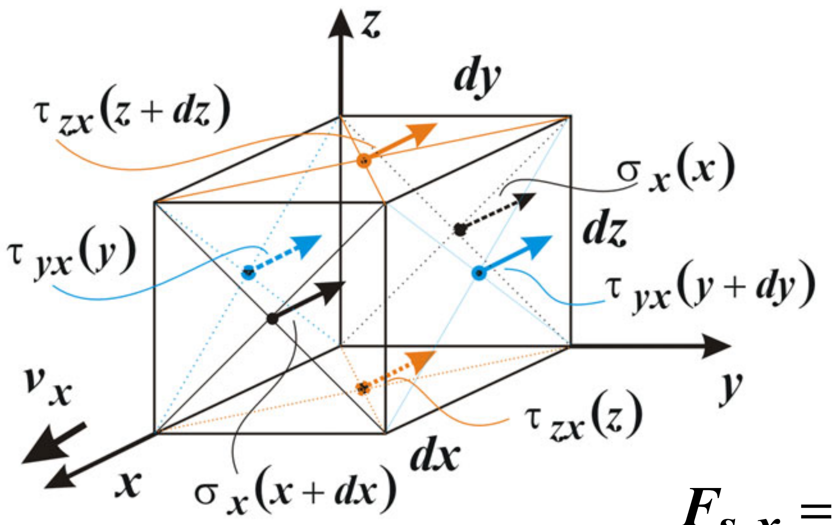
$$F_{s,x}=[\sigma_x(x+dx)-\sigma_x(x)]\;dy\,dz+$$

$$+[\tau_{yx}(y+dy)-\tau_{yx}(y)]\;dx\,dz+[\tau_{zx}(z+dz)-\tau_{zx}(z)]dx\,dy,$$

$$F_{s,x}=\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\,dy\,dz+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\,dx\,dz+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\,dx\,dy,$$

$$F_{s,x}=\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dV,$$

a súrlódási erő $x$-irányú komponense




$$F_{s,x} = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV,$$

Newtoni folyadékokra: $\eta =$ áll,

$$\sigma_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$F_{s,x} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV = \eta \Delta v_x \, dV,$$

az $y$- és $z$-irányú komponensek:

$$F_{s,y} = \eta \Delta v_y \, dV, \quad F_{s,z} = \eta \Delta v_z \, dV,$$

a teljes súrlódási erő: $\vec{F}_s = \eta \Delta \vec{v} \, dV,$

elemi térfogatra: $\dfrac{\vec{F}_s}{dV} = \eta \Delta \vec{v},$

a kiegészített Euler egyenlet=
= Navier-Stokes egyenlet

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right) = \rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \eta \Delta \vec{v},}$$

Newton típusú folyadékok viszkózus áramlására,

## 12.2. Határréteg, a határréteg kialakulása:

**Rugalmas folyadékoszlop lengései, csővezeték lezárása:**

**T-csőidom csatlakozása, lezárt csővezeték:**

# Ellenőrző kérdések

- Ismertesse áramló folyadékoknál a tömeg-megmaradási tételt, a folytonossági egyenletet, hogyan fogalmazható meg a kontinuitási tétel csövekben való áramlásra,
- Hogyan értelmezhető a gyorsulás lokális és konvektív komponense,
- Ismertesse súrlódásmentesen áramló folyadékokra az impulzus-megmaradási tételt, az Euler egyenlet differenciális és integrális alakját,
- Ismertesse áramló folyadékok esetén az energia-megmaradási tétel alakját, foglalja össze a Bernoulli egyenlet komponenseit,
- Ismertesse az impulzus-megmaradási tételt súrlódásos áramlás esetére, ismertesse a Navier-Stokes egyenletet, magyarázza meg az egyenletben szereplő komponensek jelentését,
- Milyen jelenséget kell a valóságos folyadékok áramlása során figyelembe venni, ismertesse a lamináris és turbulens áramlásra vonatkozó ismereteket, adja meg a Reynolds-szám fogalmát és jellemzőit.

# Irodalom

## Tankönyv:

**Transzport folyamatok modellezése, előadás vázlat,**
**www.e-oktat.pmmf.pte.hu**

**Iványi A. Műszaki fizika informatikusoknak, 2010.**
**Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,**

## Javasolt irodalom:

**Szlivka Ferenc, Áramlástan, Műegyetemi kiadó, 2000,**

## Felhasznált irodalom:

**Lajos Tamás, Az áramlástan alapjai, Műegyetemi Kiadó, 2004, ISBN 963 420 798 7, azonosító: 45073,**
**Szőke Béla, Hő és áramlástan , Előadás vázlat, 2004,**
**Szabó Imre, Áramlástan, Műszaki hőtan, Tankönyvkiadó, 1992,**
**Szlivka Ferenc, Áramlástan, Műegyetemi kiadó, 2000,**

# Gyakorló feladatok,

**Megoldandó feladatok az áramlástan témaköréből.**

**Tankönyv, (TK): Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához,**

**LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,**

**VII. fejezet, 17-1, 17-2, 17-3, 17-4, 17B-9, 17A-19, 17A-21, 17B-23, 17C-35 feladatok,**

**Ajánlott feladatok:**

**Lajos Tamás, Az áramlástan alapjai, Műegyetemi Kiadó, 4.1.2. Nyomás változása tartályban, 4.2.1. Kémény statikus huzata, 4.2.2. Függőleges gázvezeték, 4.4.1. Kiömlés tartályból, (zárt és nyitott tartályból) 6.3.1. Sebesség mérése dinamikus nyomás alapján, a Pitot cső elve, 7.4.3. A szélkerék, 7.4.4. A hófogó rács,**

**Szlivka F, Bencze F, Kristóf G, Áramlástan példatár, Műegyetemi kiadó, 2006. 1.1, 1.2, 1.3,1.4,1.5, 1.6,1.7, 2.2, 2.8, 2.9, 2.10, 2.14,4.1 feladatok.**