TRANSZPORT FOLYAMATOK MODELLEZÉSE

Dr. Iványi Miklósné

professor emeritus

4. Konferencia

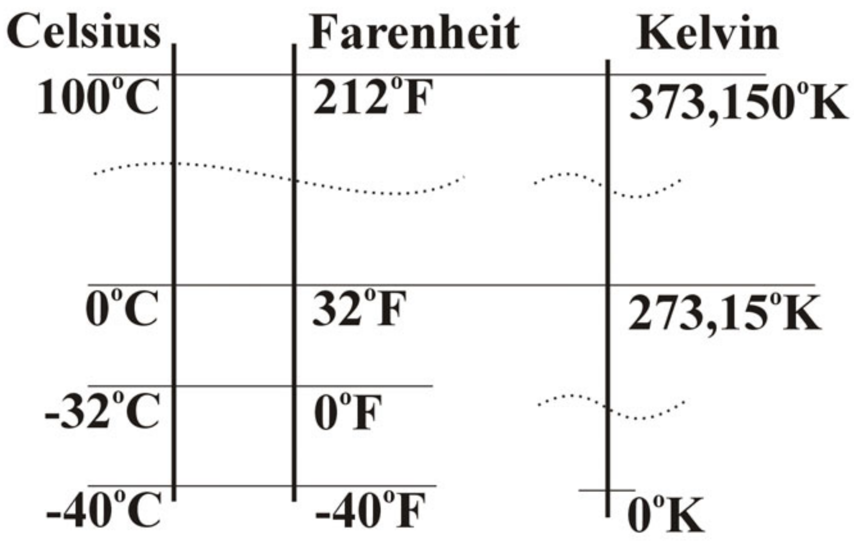
Hőtan, Termodinamika

I. Alapfogalmak

1. Hőmérséklet, meleg-hideg érzékelés,

mérése: hőmérővel, fajtái:
- **szilárd, (fémek)**
- **folyadék,**
- **gáz,**
- **elektromos ellenállás,**
- **hevített szálak, (infra, optikai)**

Hőmérsékleti skálák

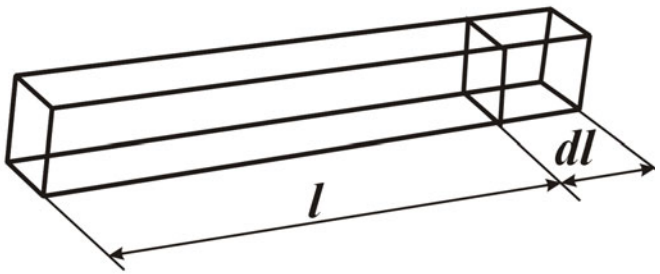


$$T_F = T_C \frac{180}{100} + 32 = \frac{9}{5} T_C + 32,$$

$$T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right),$$

2. Hőtágulás,

- lineáris hőtágulás: Taylor sorral közelítve



$$l(T_2) = l(T_1) + \Delta l = l(T_1)\left(1 + \frac{dl}{dT}\Delta T\right),$$

$$l(T_2) = l(T_1)(1 + \alpha\Delta T) =$$

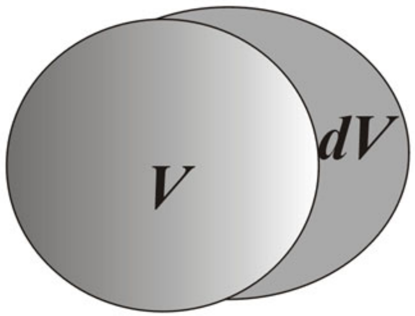
$$= l(T_1)(1 + \alpha(T_2 - T_1)),$$

α -lineáris hőtágulási együttható

- térfogati hőtágulás:

$$V(T_2) = V(T_1) + \Delta V = V(T_1)\left(1 + \frac{dV}{dT}\Delta T\right) =$$

$$= V(T_1)(1 + \beta\Delta T),$$



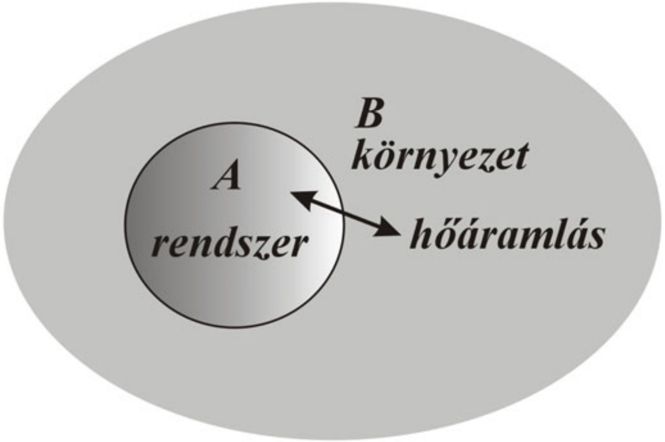
$$V(T_2) = l^3(T_2) = l^3(T_1)(1 + \alpha\Delta T)^3 =$$

$$= l^3(T_1)\left(1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3\right) =$$

$$\approx l^3(T_1)(1 + 3\alpha\Delta T), \rightarrow \boxed{\beta \approx 3\alpha,}$$

3. Termodinamikai rendszer, makroszkópikus objektum,

jellemzői: tömeg, térfogat, nyomás,
hőmérséklet, energia,
energia áramlás, tömegmozgás,



a) zárt termodinamikai rendszer:
zárt felülettel határolt véges mennyiségű anyagot/közeget vizsgál,

b) nyitott termodinamikai rendszer: zárt felülettel határolt térrészt vizsgál, az áramló közeg átléphet a felületen,

c) a termodinamikai rendszer környezete: energiacsere zajlik köztük,

d) a termodinamikai rendszer állapotjelzői:

- intenzív: T- hőmérséklet, p - nyomás,
- extenzív: m-tömeg, V- térfogat, E-energia,

e) a termodinamikai rendszer állapotváltozásai:
V=áll. izochor; p=áll, izobár; T=áll. izotermikus;
rendszer-környezete között nincs hőátadás=adiabatikus

<u>f) fajtérfogat,</u>

globális változók:

átlagos fajlagos térfogat: **V-térfogat, m-tömeg,**

$$\bar{V} = \frac{V}{m}, \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right],$$

átlagos fajlagos sűrűség:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V}, \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right],$$

lokális változók: fajlagos térfogat $v = \dfrac{dV}{dm}$, **fajlagos sűrűség** $\rho = \dfrac{dm}{dV}$,

<u>g) molltérfogat</u>: m-tömeg, V-térfogat, M-molekulasúly,

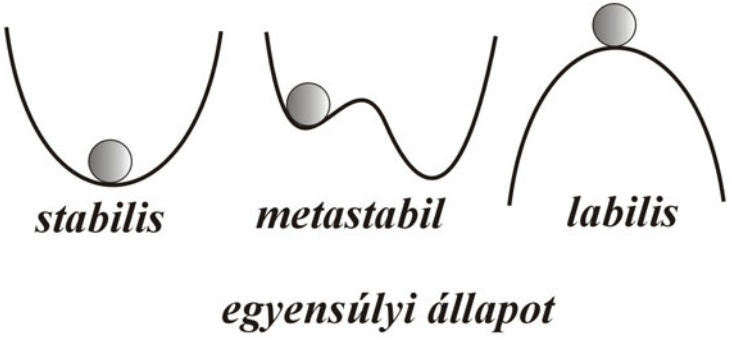
$$V_{moll} = \frac{V}{m/M}, \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmoll}}\right],$$

a térfogatban elhelyezkedő tömeg Kmoll értéke

$$\frac{m}{M} = N, \ [N] = \mathrm{Kmoll}$$

4. Termodinamikai rendszer egyensúlya,

a) Egyensúlyi helyzetek/állapotok áttekintése



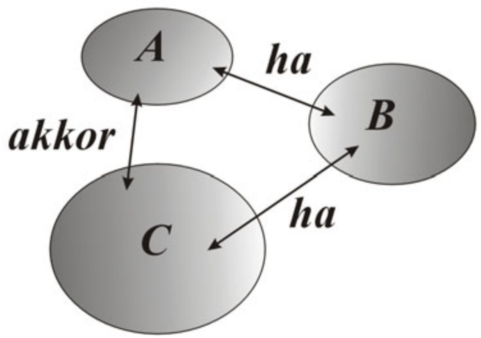
az egyensúlyi állapotok vonatkozhatnak:

mechanikai,
termikus,
kémiai

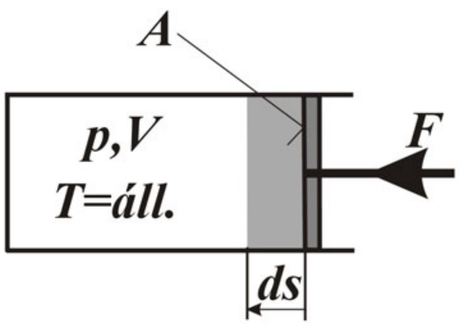
} egyensúlyra

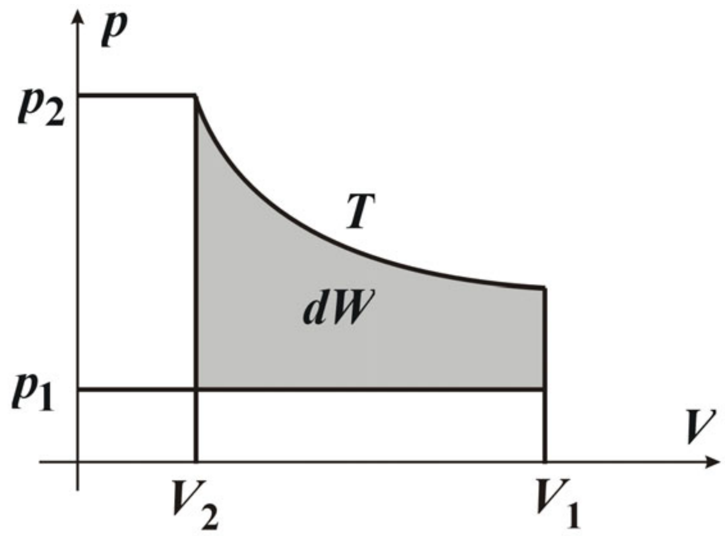
5. A termodinamikai 0. főtétele,

- magára hagyott rendszer termodinamikai egyensúly
    - minden pontban azonos lesz a T-hőmérséklet,
    - minden pontban azonos lesz a p-nyomás,
- ha A-rendszer egyensúlyban van a B-rendszerrel,
  és B-rendszer egyensúlyban van C-rendszerrel,
  akkor A-rendszer egyensúlyban van C-rendszerrel,



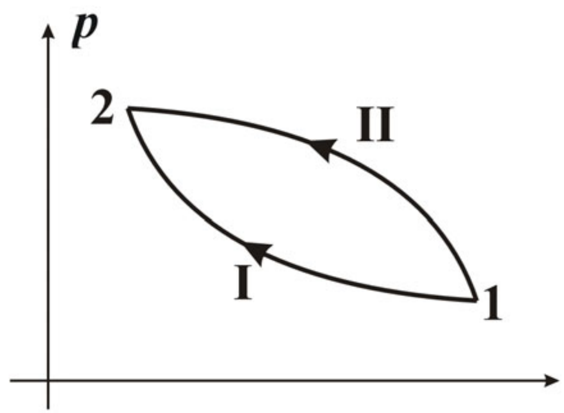
6. A munka: az erő által végzett munka, munkavégző képesség (fizikai munka)





$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = p\vec{A} \cdot d\vec{s} = p\, dV\,,$$

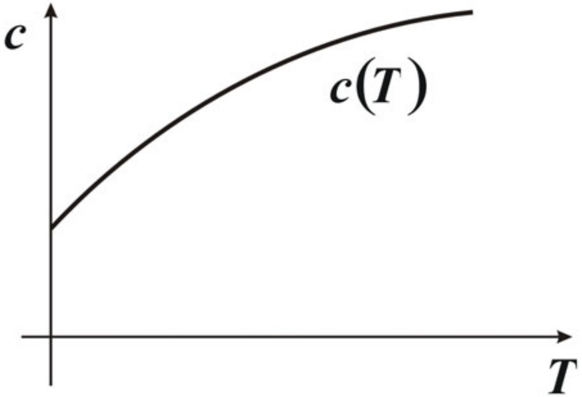
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV\,,$$



a munkavégzés nem határozható meg a kezdő és a végállapotok ismeretében, nem potenciálos a tér

<u>7. A hőenergia</u>: a felületen átáramló hőmennyiség, tömegáram nélkül is értelmezett $Q\,[\mathrm{cal}],\ [\mathrm{J}],$

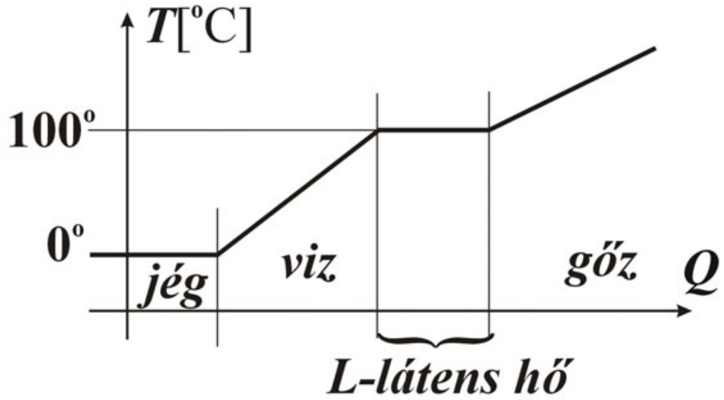
$$\left.\begin{array}{l}\textbf{m-tömeg}\\ \textbf{dT-hőmérséklet változás}\end{array}\right\}\ dQ = c\,m\,dT,$$



átlagos fajhő

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT},\quad \left[\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{kg\,C^o}}\right],$$

<u>Fázisátalakulások:</u>



<u>látens hő</u> – L [J/kg] $Q = m\,L,$
a halmazállapot átalakuláshoz szükséges hőmennyiség,

pl. jég-víz, $L_{fagy} = 3{,}336\cdot10^5$ **J/kg,**

víz-vízgőz, $L_{párolg} = 2{,}256\cdot10^6$ **J/kg,**

8. Belső energia: az atomok mozgásából származó kinetikus és potenciális energia egyensúly esetén is megmarad, állapotjelző,

$$U,[\mathrm{cal}]\ ,\ \ 1\mathrm{cal} = 4{,}184\ \mathrm{J},\ (\mathrm{SI}),\qquad U(V,T),\ \ U(p,V),\ \ U(p,T),$$

a belső energia a rendszer munkavégző képességét jellemzi,

$$\left.\begin{array}{l}\text{adiabatikus rendszerben}\\ \text{a } Q \text{ közölt hő növeli,}\\ \text{a } W \text{ munkavégzés csökkenti}\end{array}\right\}\ \text{az } U \text{ belső energiát,}$$

$$U_2 - U_1 = Q - W\,,\quad \Delta U + W = Q$$

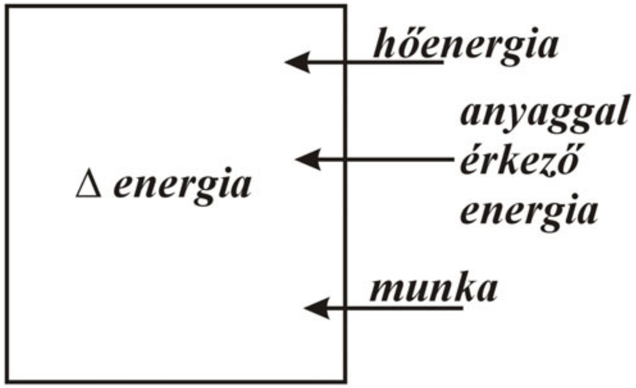
9. Reverzibilis – irreverzibilis folyamatok,

ha a rendszer két állapota között a befektetett energia visszanyerhető, az előző állapot visszaállítható - a rendszer reverzibilis,

ha a rendszer két állapota között befektetett energia nem nyerhető vissza, az előző állapot előállításához további energia befektetés szükséges, a rendszer – irreverzibilis,

II. A termodinamika I. főtétele.

10. A termodinamika I. Főtétele:
a rendszer belső energiájának megváltozása = a közölt hő és a rajta végzett munka,



$$\boxed{dU = dQ - dW},$$

a rendszer 1 és 2 állapota közötti energia egyensúly:

$$dU = U_2 - U_1 = Q_{12} - W_{12}, \qquad dQ = dU + dW,$$

elemi tömegre:

$$dq = dQ/m, \quad \text{fajlagos hőenergia}$$

$$du = dU/m, \quad \text{fajlagos belső energia}$$

$$pdv = dW/m \quad \text{fajlagos munkavégzés}$$

a termodinamika I. főtétele elemi tömegre

$$\boxed{dq = du + pdv},$$

11. Az I. Főtétel nyugvó rendszerben

a) a technikai munka : W_t, **a közeg által végzett munka, leadott energia**

zárt rendszerben $\begin{cases} \text{a rendszerbe betáplált energia:} & W_1 = U_1 + p_1 V_1, \\ \text{a rendszerből kivett energia:} & W_2 = U_2 + p_2 V_2, \end{cases}$

$$W = W_1 - W_2 = (U_1 + pV_1) - (U_2 + pV_2),$$

nem magára hagyott, nem zárt/nyitott rendszerben,
nem adiabatikus rendszerből kinyerhető dW_t **technikai munka,**

$$dQ + W_1 - W_2 = dW_t, \rightarrow dQ - dW_t = (U_2 + p_2V_2) - (U_1 + p_1V_1),$$

b) az entalpia, állapotjelző : $\boxed{Q - W_t = H = U + pV,}$

az elemi állapotváltozásra, elemi tömegre vonatkozó entalpia – fajlagos entalpia adiabatikus rendszerben:

$$\boxed{h = u + p\,v,}$$

u **- fajlagos belső energia,**
pv **- fajlagos munkavégzés,**
$q=c\,dT$ **– fajlagos hőenergia,**

a fajlagos entalpia megváltozása:

$$dh = du + d(pv) = \underbrace{du + pdv}_{} + \overbrace{vdp}^{\text{fajlagos technikai munka –1-szerese}},$$

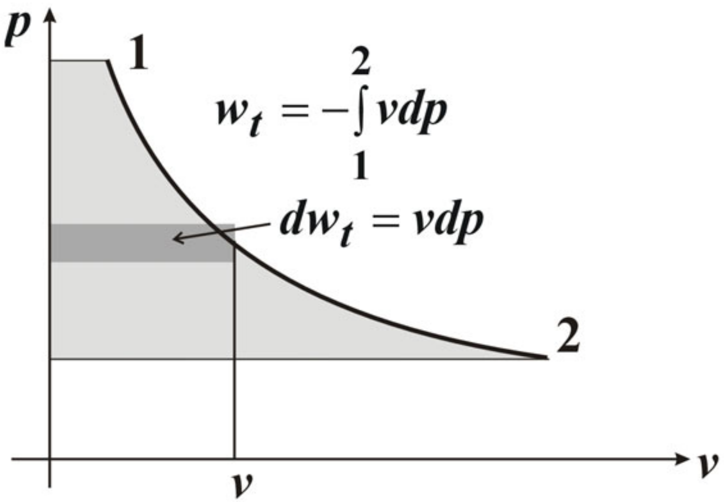
fajlagos hőenergia $dq = du + pdv,$

$$dh = dq + vdp,$$

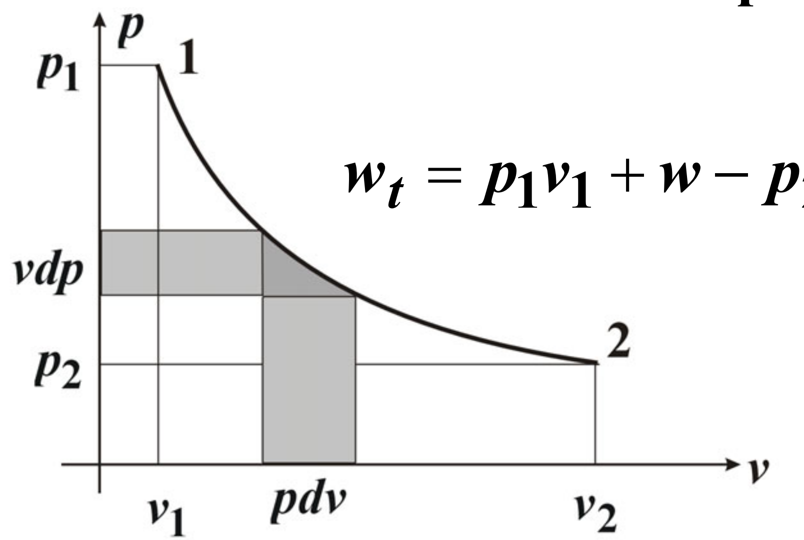
$$Q - W_t = H = U + pV,$$

$$\left.\begin{aligned} dq &= dh - vdp, \\ dw_t &= dq - dh, \end{aligned}\right\} \quad dw_t = -vdp,$$

fajlagos technikai munka



a munka és a technikai munka kapcsolata



$$w_t = p_1 v_1 + w - p_2 v_2,$$

$$w_t = w + p_1 v_1 - p_2 v_2,$$

a technikai munka a *w* munkából és a belépési és kilépési munka megváltozásából számítható

A termodinamika I főtételének különböző megfogalmazása:

$$dh = du + d(pv) = \underbrace{du + pdv}_{dq} + \underbrace{vdp}_{-dw_t}, \qquad dq = du + pdv = du + dw,$$

adiabatikus zárt rendszer munkája: dT**=0,** $\quad dw = -du,$

adiabatikus nyitott rendszer munkája: dT**=0,** $\quad dh = -dw_t,$

állandó térfogaton közölt hő: dv**=0,** $\quad dq = du,$

állandó nyomáson közölt hő: dp**=0,** $\quad dh = dq,$

c) A fajhő: $dq = c\,dT$, c - átlagos fajhő,

az állandó térfogaton vett fajhő,

$$c_v = \left.\frac{dq}{dT}\right|_v,$$

az állandó nyomáson vett fajhő,

$$c_p = \left.\frac{dq}{dT}\right|_p,$$

Milyen kapcsolat van a fajhők között?

$$dh = du + d(pv) = \underbrace{du + pdv}_{dq} + \underbrace{vdp}_{-dw_t},$$

a fajlagos hőenergia megváltozása:

állandó térfogaton $dq = du + pdv$

$$dq = cdT = du + pdv, \qquad c_v = \left.\frac{dq}{dT}\right|_v = \left.\frac{du}{dT}\right|_v,$$

állandó nyomáson $dq = dh - vdp$

$$dq = c\,dT = dh - v\,dp, \qquad c_p = \left.\frac{dq}{dT}\right|_p = \left.\frac{dh}{dT}\right|_p,$$

$$c_v = \frac{dq}{dT}\bigg|_v = \frac{du}{dT}\bigg|_v, \qquad dq = du + pdv = dh - v\,dp, \qquad c_p = \frac{dq}{dT}\bigg|_p = \frac{dh}{dT}\bigg|_p,$$

a fajlagos belső energia: $u = u(v,T)$, a fajlagos entalpia: $h = h(p,T)$,

$$du = \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_T dv + \frac{\partial u}{\partial T}\bigg|_v dT, \qquad dh = \frac{\partial h}{\partial p}\bigg|_T dp + \frac{\partial h}{\partial T}\bigg|_p dT,$$

$$c\,dT = \frac{du}{dv}\bigg|_T dv + \underbrace{\frac{du}{dT}\bigg|_v}\, dT + pdv = \frac{dh}{dp}\bigg|_T dp + \underbrace{\frac{dh}{dT}\bigg|_p}\, dT - v\,dp,$$

$$\boxed{c = \left(\frac{du}{dv}\bigg|_T + p\right)\frac{dv}{dT} + c_v = \left(\frac{dh}{dp}\bigg|_T - v\right)\frac{dp}{dT} + c_p,}$$

állandó térfogaton (izochor): *dv/dT*=0, $c = c_v = \left(\frac{dh}{dp}\bigg|_T - v\right)\frac{dp}{dT} + c_p,$

állandó nyomáson (izobár): *dp/dT*=0, $c = c_p = \left(\frac{du}{dv}\bigg|_T + p\right)\frac{dv}{dT} + c_v,$

állandó térfogaton (izochor): $dv/dT=0$, $$c = c_v = \left(\frac{dh}{dp}\bigg|_T - v \right) \frac{dp}{dT} + c_p,$$

állandó nyomáson (izobár): $dp/dT=0$, $$c = c_p = \left(\frac{du}{dv}\bigg|_T + p \right) \frac{dv}{dT} + c_v,$$

<u>Ideális gáz</u> termikus állapotegyenlete: $pv = RT, \quad RT = u(T),$

fajlagos belső energiája: $u(v,T)$

$$u = u(T) \rightarrow \frac{du}{dv} = 0, \quad \frac{dv}{dT} = \frac{R}{p}, \qquad c_p = (0 + p)\frac{R}{p} + c_v = c_v + R,$$

fajlagos entalpiája: $h(p,T)$

$$h = u + pv = u + RT, \rightarrow \frac{dh}{dp} = 0,$$

$$c_v = (0 - v)\frac{R}{v} + c_p = c_p - R,$$

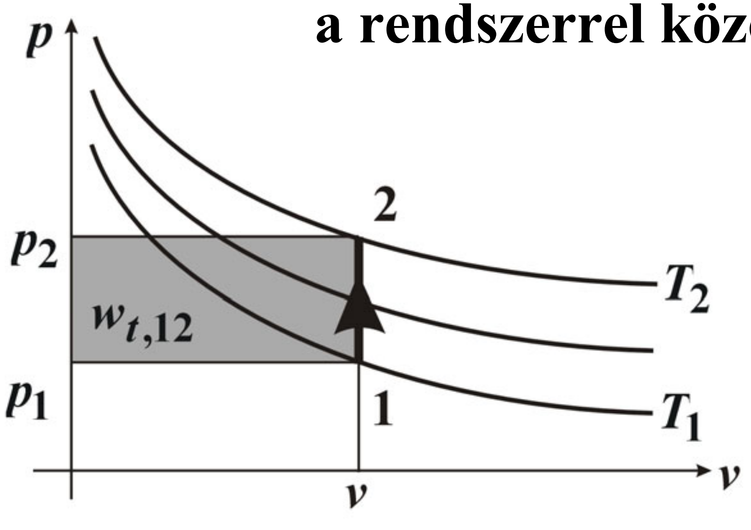
$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{v},$$

ideális gáz izochor és izobár fajhője közti kapcsolat:	$c_p - c_v = R,$

d) Ideális gázok állapotváltozásai:

d/1) állapotváltozás állandó térfogat mellet, izochor folyamat, $dV=0$

$$dq = cdT = \underline{du + pdv} = dh - vdp = dh + dw_t\,,$$



a rendszerrel közölt hő a rendszer belső energiáját növeli,
a hőelvonás a belső energiát csökkenti,
***w* munkavégzés nincs,**

$$dq = u_2 - u_1 = c_v\left(T_2 - T_1\right),$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1,$$

ha a közeggel hőt közlünk a nyomás nő,
ha hőt vonunk el a nyomás csökken,

$$dq = c_v T_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

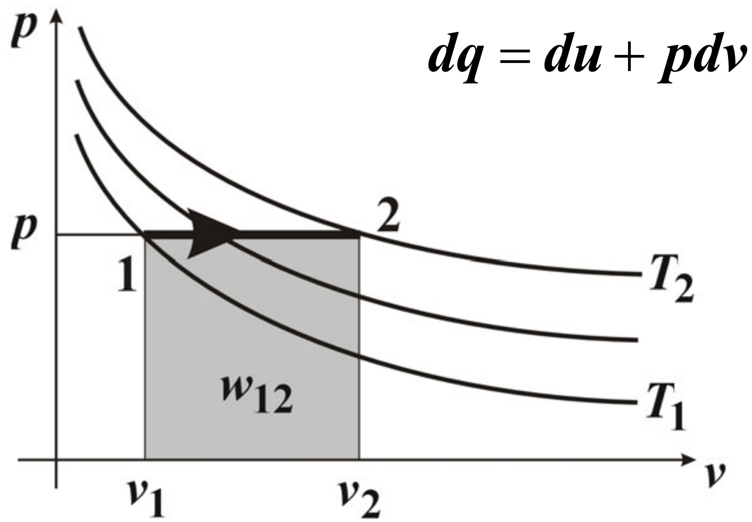
d/2) állapotváltozás állandó nyomás mellet, <u>izobár folyamat, *dp*=0,</u>

a betáplált hőmennyiség megnöveli a rendszer belső energiáját és (térfogat változási) munkavégzést eredményez,

$$dq = du + pdv = du + dw, \qquad \left.\frac{du}{dT}\right|_p = c_v, \qquad c_p - c_v = R,$$

ideális gázra: $pv = RT, \rightarrow pdv + vdp = RdT, \rightarrow \left. pdv \right|_{dp=0} = RdT,$

$$dq = du + pdv = c_v dT + RdT = (c_v + R)dT = c_p dT,$$



$$dq = c_p dT = (c_v + R)dT,$$

$$q = c_p(T_2 - T_1), \qquad pV_1 = RT_1, \quad pV_2 = RT_2,$$

$$q = c_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) =$$

$$= c_v(T_2 - T_1) + p(v_2 - v_1),$$

a közölt hő a rendszer felmelegítése mellett *w* munkavégzésre fordítódik,

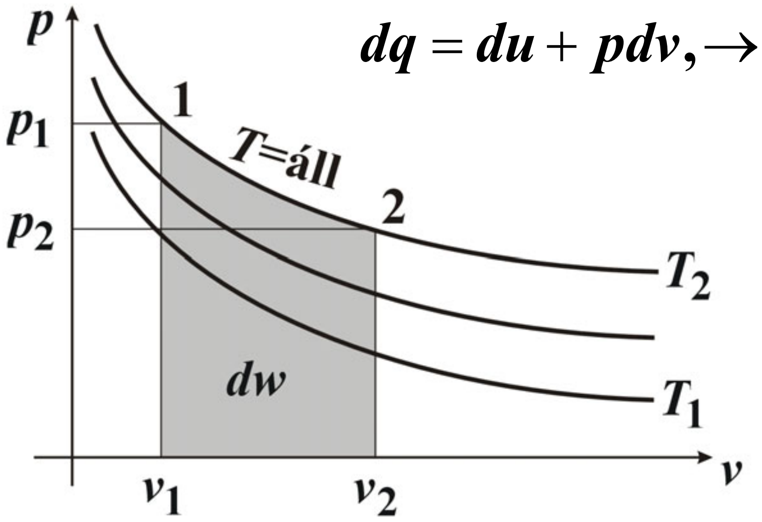
d/3) állapotváltozás állandó hőmérséklet mellet, <u>izoterm folyamat, $dT=0$</u>

az ideális gázok belső energiája a hőmérséklettől függ,
így izoterm folyamatoknál a rendszer belső energiája nem változik,
a bevezetett hőenergia munkavégzésre fordítódik,

ideális gázra: $pv = RT, \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT,$

$$dT = 0, \rightarrow du = 0,$$

$$dq = du + pdv, \rightarrow dq = pdv = dw,$$



$$w = \int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{RT}{v} dv = RT \ln \frac{v_2}{v_1} =$$

$$= RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 v_1 \ln \frac{p_1}{p_2},$$

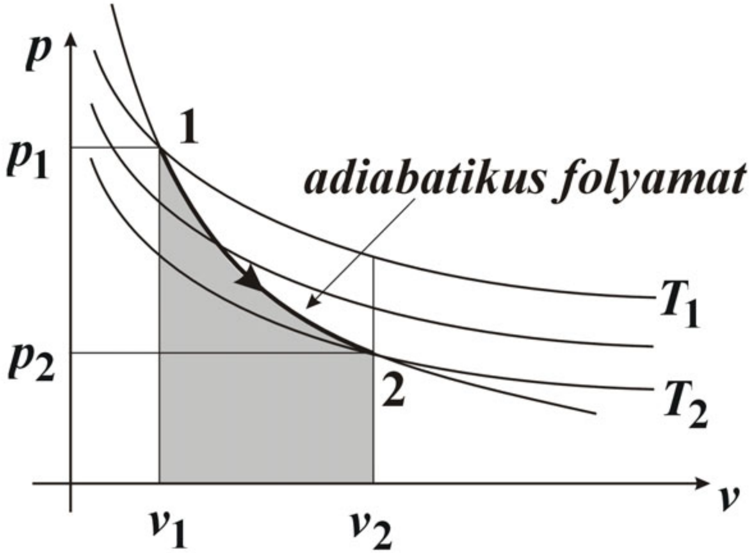
d/4) <u>adiabatikus állapotváltozás, nincs hőközlés, dQ=0,</u>

zárt rendszer, nincs hőátadás a környezet és a rendszer között, így a rendszer belső energiája munkavégzésre fordítódik,

$$dq = 0, \rightarrow 0 = du + pdv, \rightarrow du = -dw, \qquad du = c_v dT, \rightarrow 0 = c_v dT + pdv,$$

$$dw = -du = c_v\left(T_1 - T_2\right),$$

ideális gázra: $$pv = RT, \rightarrow pdv + vdp = RdT, \rightarrow dT = \frac{pdv + vdp}{R},$$



$$c_v\left(pdv + vdp\right) + Rpdv = 0,$$

$$c_v + R = c_p, \rightarrow c_p pdv + c_v vdp = 0,$$

$$\frac{c_p}{c_v}\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}, \quad \frac{c_p}{c_v} = \chi, \rightarrow \chi\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p},$$

$$\chi \ln\frac{v_2}{v_1} = -\ln\frac{p_2}{p_1} = \ln\frac{p_1}{p_2},$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\chi} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{RT_1}{v_1}\frac{v_2}{RT_2}, \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\chi-1}$$

$$\boxed{Tv^{\chi-1} = áll,}$$

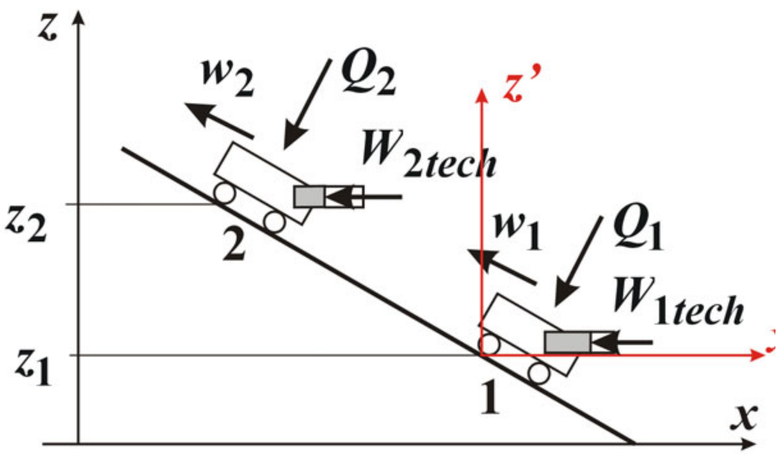
12. Az I. Főtétel mozgó, zárt (adiabatikus) rendszerben

zárt rendszer teljes energia megváltozása =
= a belső energia + a mozgási energia + a helyzeti energia,
az I. Főtétel: az energiatartalom megváltozása =
=a közölt hő - a rendszer álrtal végzett munka,

$$W_{total} = U_2 - U_1 + m\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1) = Q_{12} - W_{12},$$

x',z' mozgó koordináta rendszerben:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - \int_1^2 pdv + W_s,$$

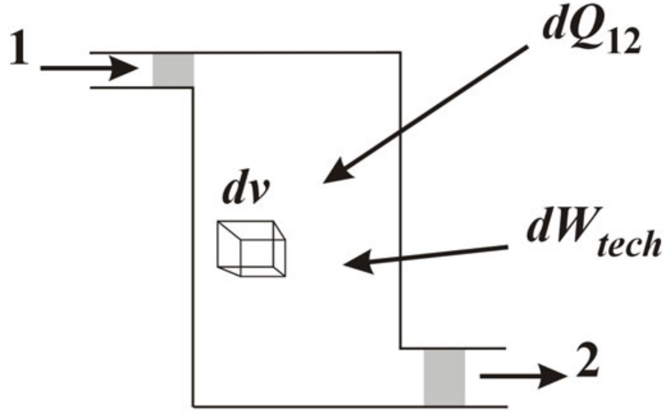


x,z álló koordináta rendszerben:

$$U_2 - U_1 + m\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1) =$$

$$= Q_{12} - \int_1^2 pdv + W_s,$$

13. Az I. Főtétel nyitott stacionárius rendszerben



1 állapot, belépéskor:

$$p_1, T_1, v_1, u_1, w_1, z_1,$$

2 állapot, kilépéskor:

$$p_2, T_2, v2, u_2, w_2, z_2,$$

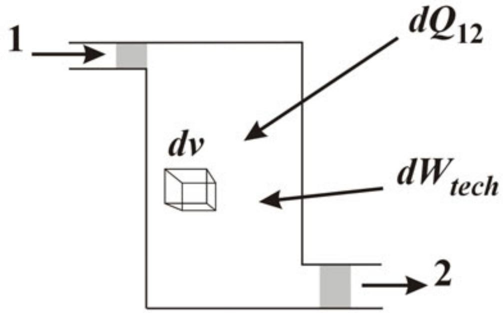
dt **idő alatt a beáramló, a kiáramló *dm* tömeggel érkező energia=**
= a rendszerrel közölt dQ_{12} hő és a rajta végzett dW_{12} munka egyensúlya:

$$\left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{w_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{w_2^2}{2} + g z_2\right) + \frac{dQ_{12}}{dm} - \frac{dW_{12}}{dm} = 0,$$

$$u + pv = h, \qquad \left(h_2 + \frac{w_2^2}{2} + g z_2\right) - \left(h_1 + \frac{w_1^2}{2} + g z_1\right) = q_{12} + w_{12},$$

a nyitott rendszer a ki és beáramló tömegek figyelembe vételével zárttá tehető,

14. Az I. Főtétel nyitott instacionárius rendszerben



a rendszerben lévő anyag energiájának időegység alatti megváltozása:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \left(u + \frac{w^2}{2} + gz\right)\rho dV = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt},$$

egységnyi idő alatt beáramló dm_1/dt tömegárammal érkező energia:

$$\left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1\right)\frac{dm_1}{dt},$$

egységnyi idő alatt kiáramló dm_2/dt tömegárammal távozó energia:

$$\left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2\right)\frac{dm_2}{dt},$$

a rendszerrel időegységenként közölt hő, és a rajta végzett munka:

az I. Főtétel, az energia egyensúlyi egyenlet:

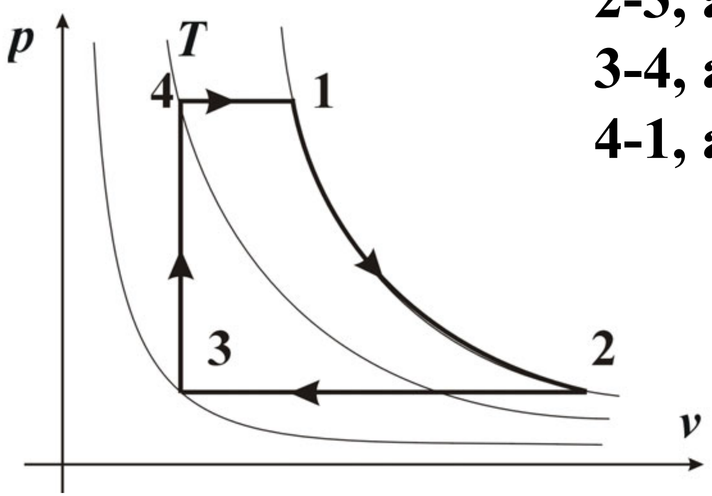
$$\left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1\right)\frac{dm_1}{dt} - \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2\right)\frac{dm_2}{dt} = \frac{dq}{dt} - \frac{dw}{dt},$$

15. Az I. Főtétel körfolyamatokra

<u>körfolyamat</u>: állapotváltozás sorozat, amelyen végighaladva a termodinamikai rendszer a kiindulási állapotba visszakerül, *p-V* diagram, stacionárius és kvázi-stacionárius esetben a *p-V* diagram zárt görbe,

pl. ideális gázra: $pv=RT$,

1-2, állandó hőmérsékleten megnő a térfogat,
2-3, állandó nyomáson csökkentjük a térfogatot,
3-4, állandó térfogaton növeljük a nyomást,
4-1, állandó nyomáson növeljük a térfogatot,



15a) Körfolyamat zárt rendszerekben

mindegyik szakaszra felírjuk az I. Főtételt

$$U_{i,i+1} = Q_{i,i+1} - W_{i,i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

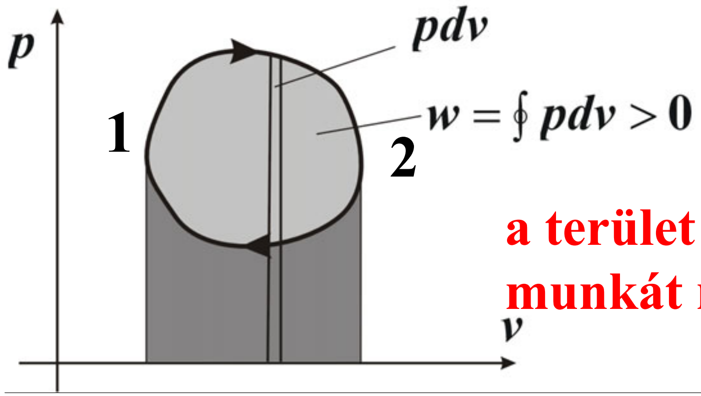
zárt termodinamikai rendszerben a belső energia összege nem változik,

$$\sum_i U_{i,i+1} = \sum_i Q_{i,i+1} - \sum_i W_{i,i+1} = 0, \rightarrow \boxed{\sum_i W_{i,i+1} = \sum_i Q_{i,i+1}}$$

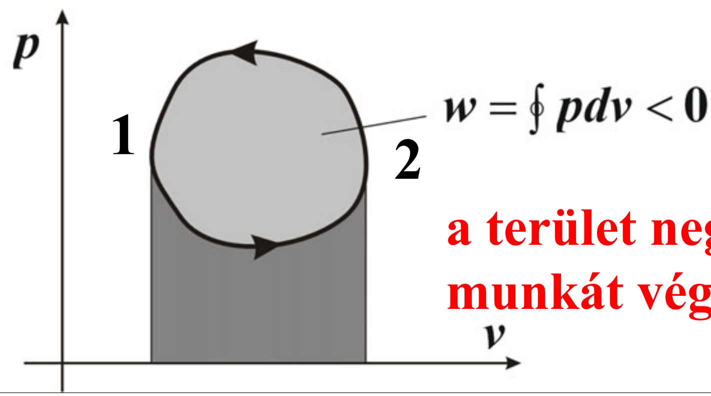
$$dQ = \cancel{dU} + dW_{rev} + dW_s,$$

a munkavégzést a betáplált hő fedezi

$$\oint dQ = \cancel{\oint dU} + \oint \left(dW_{rev} + dW_s\right), \rightarrow \left|Q\right|_{be} - \left|Q\right|_{ki} = \oint p dV = W,$$



a terület pozitív, munkát nyerünk



a terület negatív, munkát végzünk

15b) Körfolyamat nyitott rendszerekben

nyitott rendszerek egyes szakaszaira az I. Főtétel:

$$\left(h_{i,i+1} + \frac{w_{i,i+1}^2}{2} + gz_{i,i+1}\right) = q_{i,i+1} - w_{t,i,i+1},$$

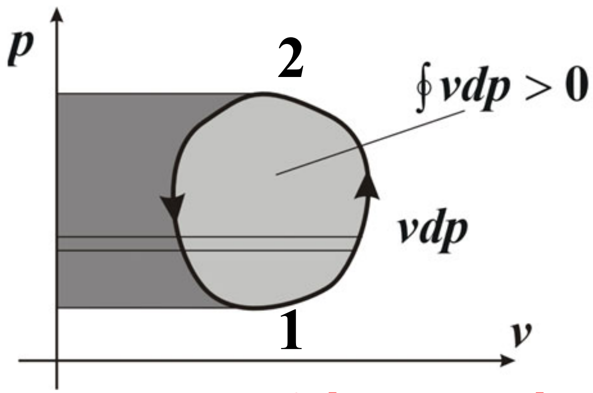
a körfolyamatra összegezve az entalpia,
a mozgási, helyzeti energiák összege nulla,
a technikai munkavégzést a hőenergia fedezi:

$$0 = \sum_i q_{i,i+1} - \sum_i w_{t,i,i+1},$$

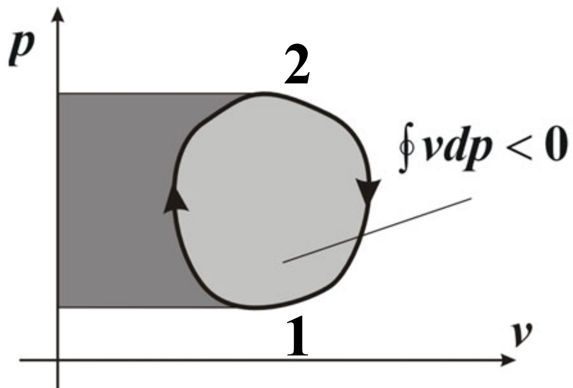
$$\oint d\left(h + w^2/2 + gz\right) = 0 = \oint dq - \oint dw_t,$$

$$0 = |q|_{be} - |q|_{ki} + \oint vdp,$$

$$\oint vdp = |Q|_{ki} - |Q|_{be},$$



a terület pozitív, munkát végzünk



a terület negatív, munkát nyerünk

15c) Termodinamikai körfolyamatok termikus hatásfoka

a termikus hatásfok=
a körfolyamatból nyert munka és a bevezetett hő aránya,

$$\eta = \frac{|w|}{|q|_{be}} = \frac{|q|_{be} - |q|_{ki}}{|q|_{be}},$$

16. A termodinamika II. főtétele,

ellentmondás van az I főtételben, ui. hidegebb helyről
a hőenergia nem áramlik a melegebb helyre, ezt küszöböli ki a II. Főtétel,

16a) Az entrópia, S: állapotjelző,

a rendszerek között átvitt elemi hőmérséklet változáshoz szükséges hőmennyiség, $S(p,T)$, $S(V,T)$, $S(p,V)$,

az egységnyi hőmérséklet változáshoz szükséges hőmennyiség

$dQ = T\,dS$, dS – **az entrópia elemi megváltozása,**

$$dQ = dU + pdV = dS\,T, \quad \rightarrow dS = \frac{dU + pdV}{T},$$

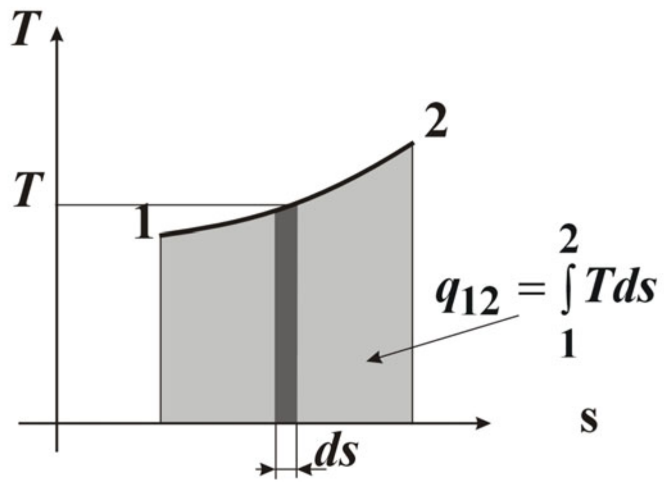
1. valóságos, irreverzibilis folyamatoknál az entrópia mindig nő, $dS>0$,
2. reverzibilis folyamatoknál az entrópia állandó, $\oint dS = 0$
3. dS<0, adiabatikus rendszerben nem fordul elő.

A fajlagos entrópia, egységnyi tömegre vonatkoztatva,

$$ds = \frac{dS}{m} = \frac{dQ}{mT} = \frac{dU + dW}{mT}, \qquad ds = \frac{dq}{T} = \frac{du + pdv}{T},$$

$$dq = dh - vdp, \qquad ds = \frac{dq}{T} = \frac{dh - vdp}{T},$$

16b) A hőmennyiség ábrázolása, *T-s* diagram,



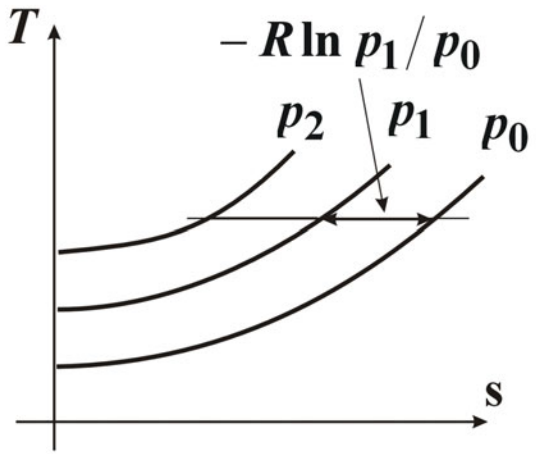
a közölt, ill. elvont hő arányos a görbe alatti területtel,

$$q_{12} = \int_1^2 dq = \int_1^2 Tds,$$

állandó nyomáson: $$dq = dh - vdp, \rightarrow ds = \frac{dh - vdp}{T}, \rightarrow dh = c_p dT,$$

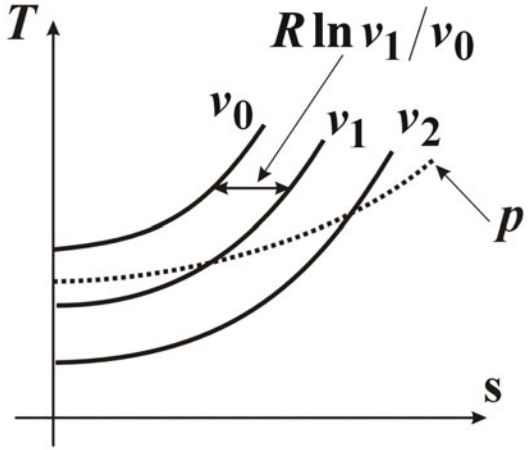
$$pv = RT, \quad ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p},$$

$$s - s_0 = c_p \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\frac{p}{p_0},$$



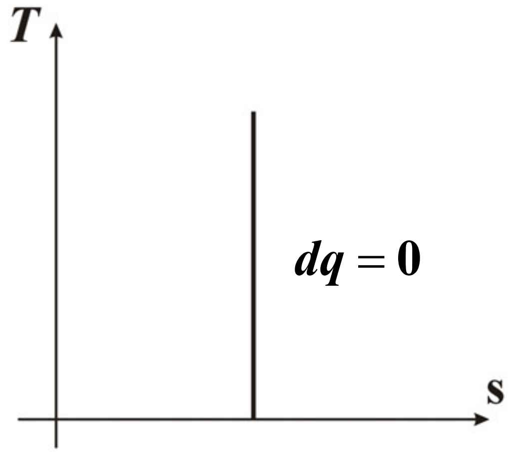
<u>állandó térfogaton</u>:

$$dq = du + pdv, \rightarrow ds = \frac{du + pdv}{T}, \rightarrow du = c_v dT,$$



$$pv = RT, \quad ds = c_v \frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v},$$

$$s - s_0 = c_v \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{v}{v_0},$$



<u>adiabatikus állapotváltozásnál</u>:

$$dq = 0, \rightarrow ds = 0, \rightarrow s = áll,$$

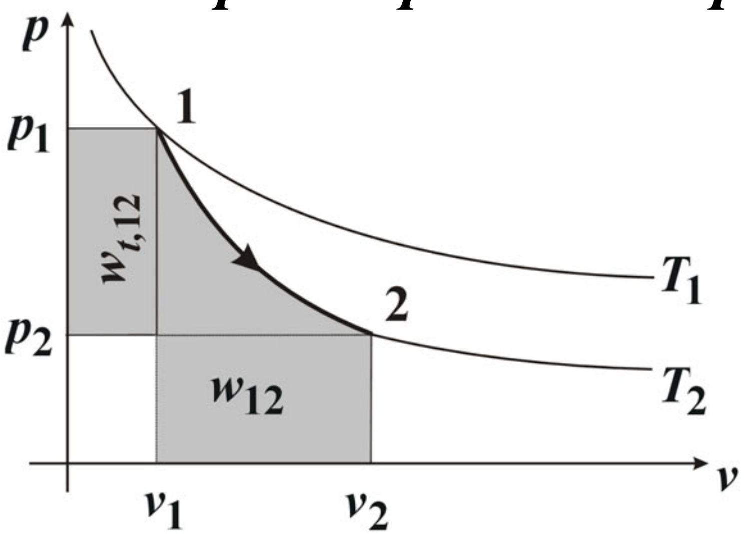
s=áll, függőleges egyenes,

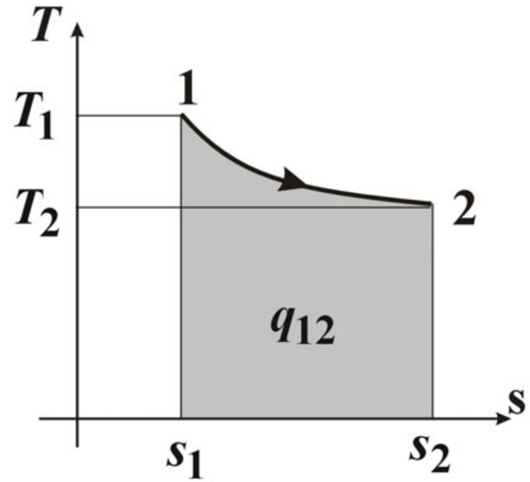
17. Állapotváltozások a p-v és a T-s diagramokon,

Reverzibilis állapotváltozások:

- *p-v* diagram, az állapotváltozás munkája,
- *T-s* diagram, az állapotváltozásban résztvevő hőmennyiség,

$$q = u + pdv = h - vdp = Tds$$



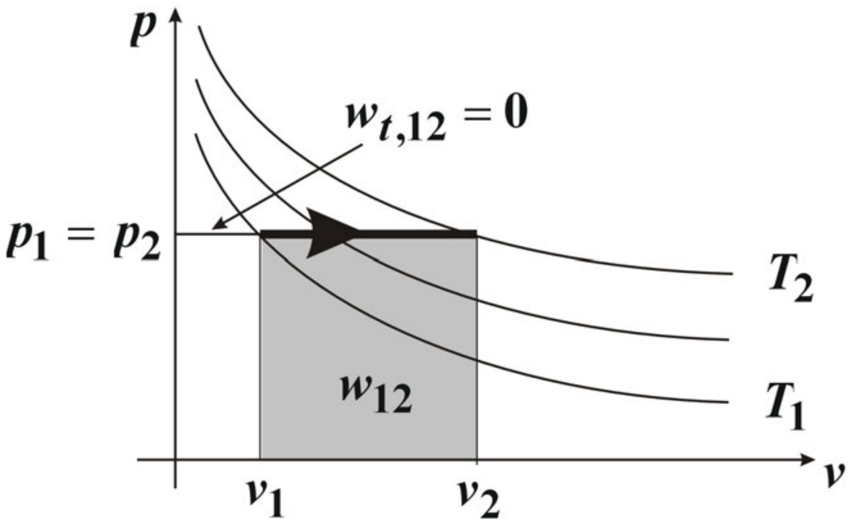


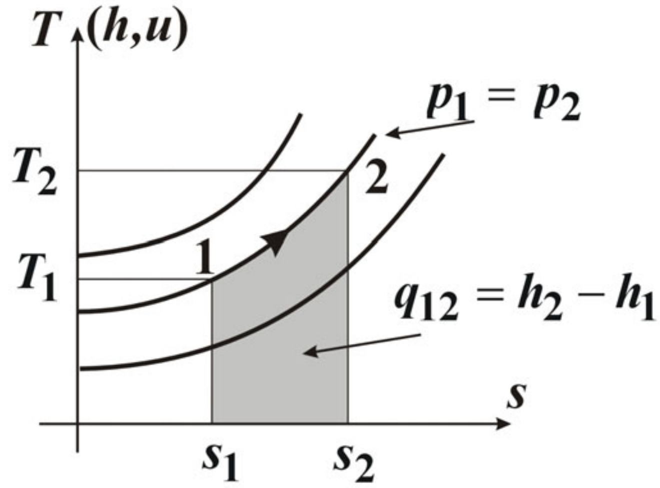
w_{12} - fizikai munka (térfogat változás)

$w_{t,12}$ - technikai munka (a rendszerből nyert munka)

q_{12} - az állapotváltozás során közölt hő

17a) Izobár állapotváltozás, dp=0, $q = u + pdv = h - vdp = Tds$





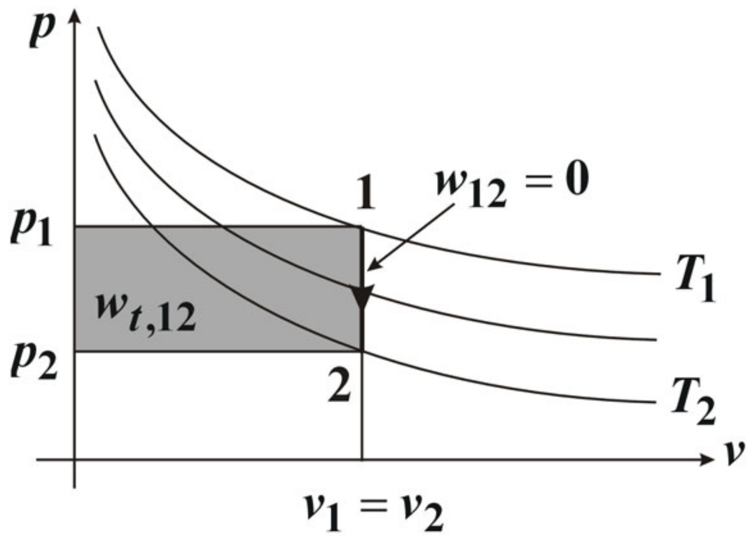
$v_2 > v_1$, - a térfogat nő,
fizikai munkát
a közegből nyerünk,

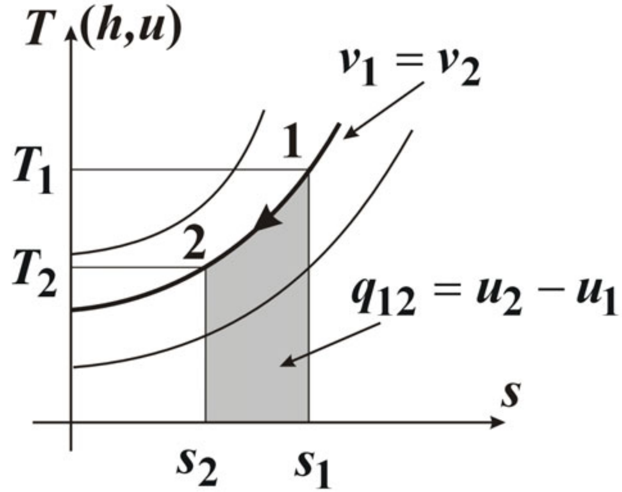
$v_2 < v_1$, - a térfogat csökken,
fizikai munkát
a közegen végzünk,

$s_2 > s_1$, - az állapotváltozás során
az entrópia nő,
a közeggel hőt közlünk,

$s_2 < s_1$, - az entrópia csökken,
a közegből hőt elvonunk,

17b) Izobchor állapotváltozás, dv=0, $q = u + pdv = h - vdp = Tds$





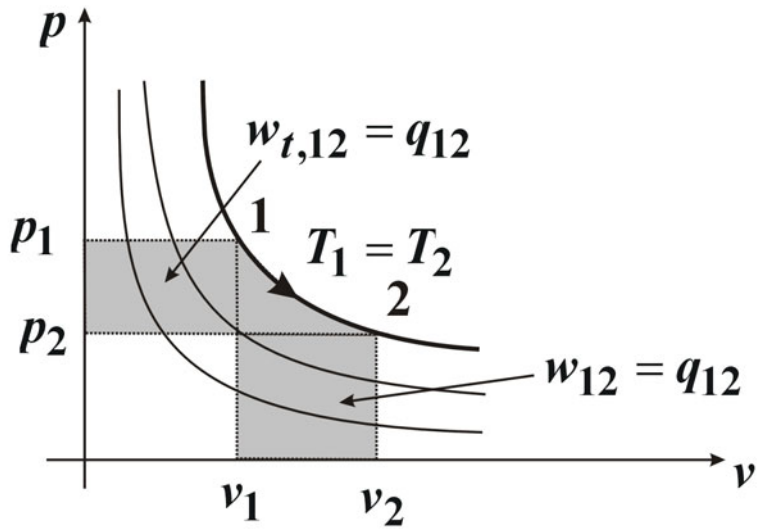
$p_2 < p_1$,- a nyomás csökken,
technikai munkát
a rendszerből nyerünk,

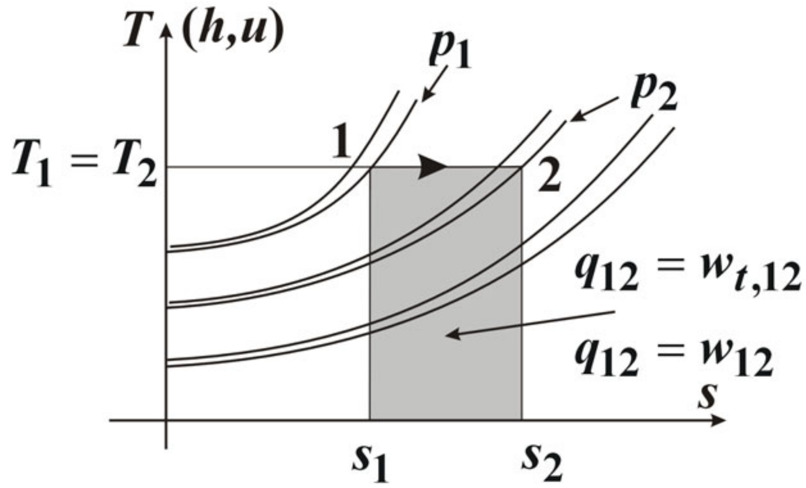
$s_2 < s_1$, - az állapotváltozás során
az entrópia csökken,
a közegből hőt elvonunk,

$p_2 > p_1$, - a nyomás nő,
technikai munkát
a rendszeren végzünk,

$s_2 > s_1$, - az állapotváltozás során
az entrópia nő,
a közeggel hőt közlünk,

17c) Izoterm állapotváltozás, dT=0, $q = u + pdv = h - vdp = Tds$



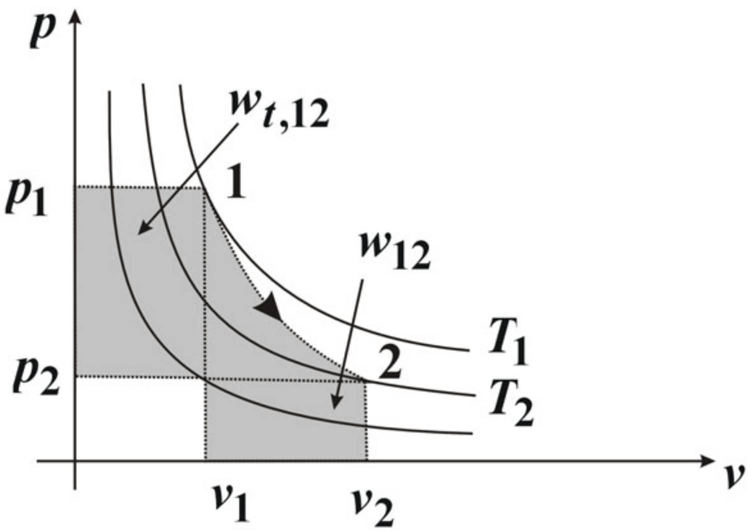


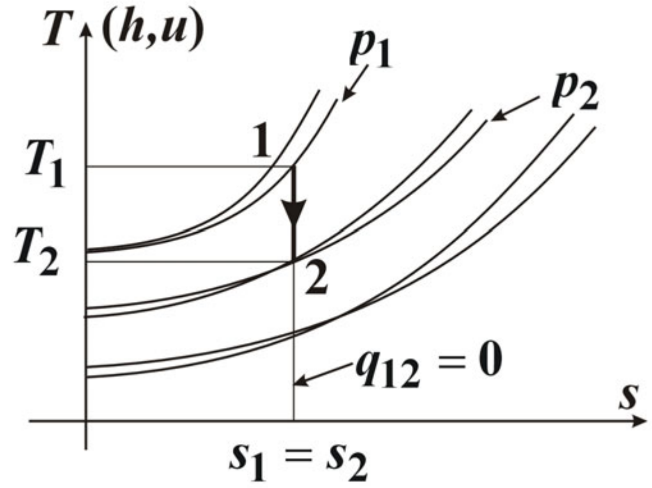
$p_2 < p_1$,- a nyomás csökken,
technikai munkát
a rendszerből nyerünk,

$v_2 > v_1$, - a térfogat nő,
fizikai munkát
a közegből nyerünk,

a rendszerben hőmérséklet
változás nem történik,
a technikai munka megegyezik
a fizikai munkával,

17d) Adiabatikus állapotváltozás, dQ=0, $q = u + pdv = h - vdp = Tds$





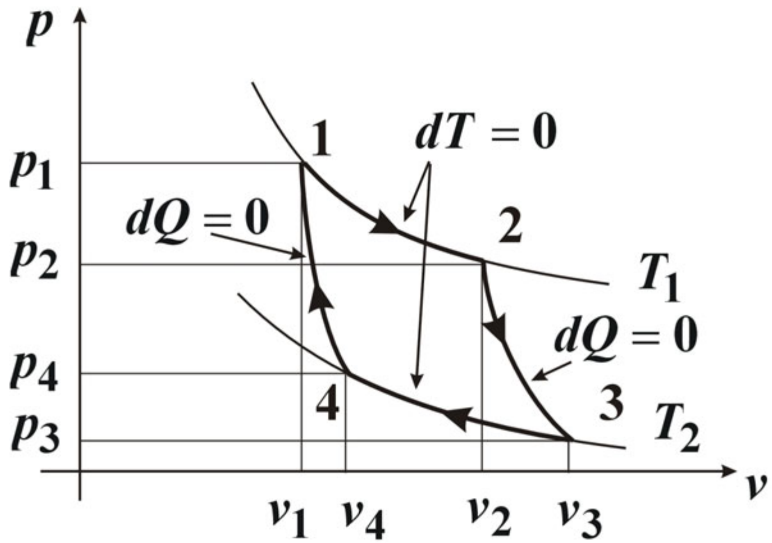
$p_2 < p_1$,- a nyomás csökken,
technikai munkát
a rendszerből nyerünk,

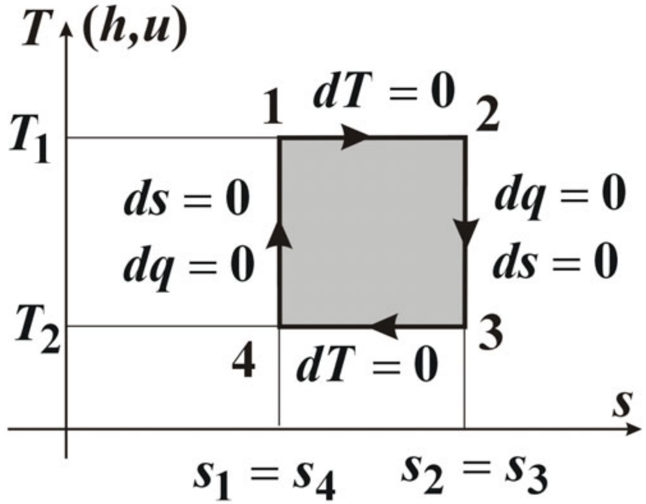
$v_2 > v_1$, - a térfogat nő,
fizikai munkát
a közegből nyerünk,

a rendszer hőenergiája
nem változik,
hőátvitel nem történt,
a rendszer entrópiája
állandó marad,

17e) Carnot körfolyamat

termodinamikai körfolyamatok rendszerint két-két azonos jellegű állapot állapotváltozásból épülnek fel, ilyen pl. a Carnot körfolyamat két adiabatikus és két izoterm szakaszból áll,





1-2 szakasz, izotermikus, dT=0, a rendszerbe munkabefektetés történik,
2-3 szakasz, adiabatikus, dq=0, a rendszer entrópiája nem változik,
3-4 szakasz, izotermikus, dT=0, a rendszerből munkát nyerünk
4-1 szakasz, adiabatikus, dq=0, a rendszer entrópiája nem változik,

Hőátvitel

A hőátvitel formái:

- <u>hővezetés</u>, szilárd, cseppfolyós és légnemű közegben,
az anyag makroszkopikusan nyugalomban van,
a részecskék ütközése, diffúziója révén áramlik a hő,
<u>a hőáram-sűrűség</u>: az egységnyi idő alatt az egységnyi felületen átáramló hőenergia, (elektromágneses térben a Poynting vektor),

$$\dot{\vec{q}} = \frac{dQ/dt}{dA}, \quad [\dot{q}] = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2},$$

$$\dot{\vec{q}} = -\lambda \frac{dT}{d\vec{r}} = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\vec{e}_x + \frac{dT}{dy}\vec{e}_y + \frac{dT}{dz}\vec{e}_z\right),$$

$\lambda -$ **hővezetési tényező,** $\quad [\lambda] = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^{\mathrm{o}}} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^{\mathrm{o}}},$

- **hőátadás, konvekció,** az áramló közeg és a fal között a hőterjedést a tömeg/térfogatelemek egymáshoz képesti elmozdulása, a magukkal vitt energia szállítás okozza,

az egységnyi falfelület, egységnyi idő alatt leadott hőenergiája (Newton-féle lehűlési törvény)

$$\dot{\vec{q}} = \frac{dQ/dt}{dA}, \ [\dot{q}] = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2},$$

$$\dot{\vec{q}} = \alpha\left(T_w - T_\infty\right),$$

$\alpha -$ hőátadási tényező,

$$[\alpha] = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}},$$

- **hősugárzás,** a test felülete a tér minden irányában a hőmérsékletétől és anyagától függően energiát sugároz,

az anyag egységnyi felülete, egységnyi idő alatt kisugárzott hőenergiája: (Stefan-Boltzmann törvény)

$$\dot{\vec{q}} = \varepsilon\sigma_0 T^4,$$

ε – az anyag feketeségi foka,

$$\sigma_0 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4},$$

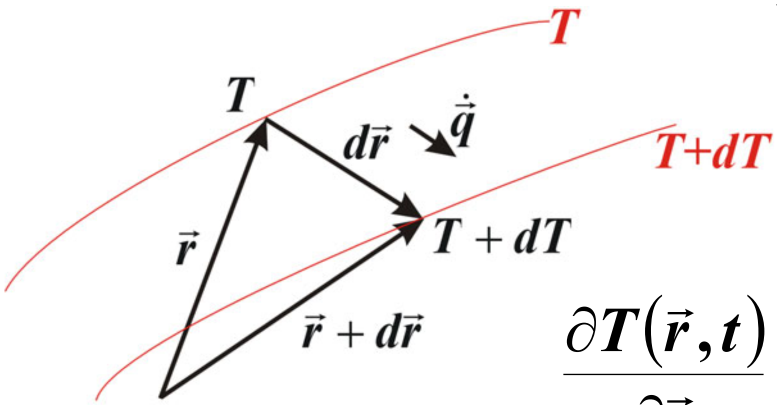
az abszolút fekete test sugárzása

1. Hővezetés,

1.1. A hővezetés egyenlete,

a hőmérséklet a geometriai tér pontjaiban, időben változik, $T = T(\vec{r}, t) = T(x, y, z, t)$,

a hőmérséklet változás a tér pontjai között:



$$\lim_{d\vec{r} \to 0} \frac{T(\vec{r} + d\vec{r}) - T(\vec{r})}{d\vec{r}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{r}},$$

$$\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right) = grad\, T,$$

<u>a hőáram-sűrűség</u>:

$$\dot{\vec{q}} = -\lambda \frac{dT}{d\vec{r}} = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \vec{e}_x + \frac{dT}{dy} \vec{e}_y + \frac{dT}{dz} \vec{e}_z \right),$$

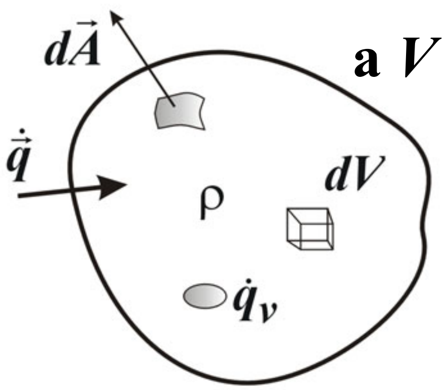
<u>a hőáram</u>:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \int_A \dot{\vec{q}}\, d\vec{A},$$

$\lambda -$ hővezetési tényező,

$$[\lambda] = 1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}^{\mathrm{o}}} = 1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}^{\mathrm{o}}},$$

a hővezető közeg V térfogatának energiaegyensúlya:



a V térfogatban lévő ρ sűrűségű anyag tömege: $m = \int\limits_V \rho dV$,

a hőmérséklet dt idő alatti megváltozása: $dT = \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$,

A dt idő alatt a térfogat tömegének hőmérséklet változáshoz szükséges hőmennyiség

$$dQ = m\, c\, dT = \int\limits_V \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt\, dV = dt \int\limits_V \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} dV,$$

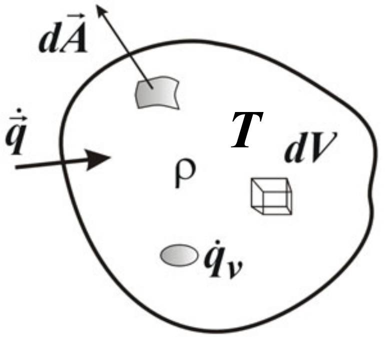
a hőmérséklet változás fedezete a dt idő alatt térfogatban lévő hőforrás termelte hő:

$$dQ_1 = dt \int\limits_V \dot{q}_v dV, \quad [\dot{q}_v] = 1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3} = 1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot m}^3},$$

és a felületen átáramló hőmennyiség: $dQ_2 = -dt \int\limits_A \dot{\vec{q}}\, d\vec{A} = dt \int\limits_A \lambda \dfrac{\partial T}{\partial \vec{r}} d\vec{A}$,

az energiaegyensúlyi egyenlet: $dQ = dQ_1 + dQ_2$,

a hővezető közeg V térfogatának energiaegyensúlya:



$$dQ = dQ_1 + dQ_2\,,$$

$$dt\int_V \rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = dt\int_V \dot{q}_v dV - dt\underbrace{\oint_A \dot{\vec{q}}\,d\vec{A}}\,,$$

$$\dot{\vec{q}} = \dot{q}_x\vec{e}_x + \dot{q}_y\vec{e}_y + \dot{q}_y\vec{e}_y\,, \qquad \oint_A \dot{\vec{q}}\,d\vec{A} = \int_V \frac{\partial\dot{\vec{q}}}{d\vec{r}}\,dV = \int_V\left(\frac{\partial\dot{q}_x}{dx} + \frac{\partial\dot{q}_y}{dy} + \frac{\partial\dot{q}_z}{dz}\right)dV\,,$$

$$\dot{\vec{q}} = -\lambda\,\frac{dT}{d\vec{r}} = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\vec{e}_x + \frac{dT}{dy}\vec{e}_y + \frac{dT}{dz}\vec{e}_z\right),$$

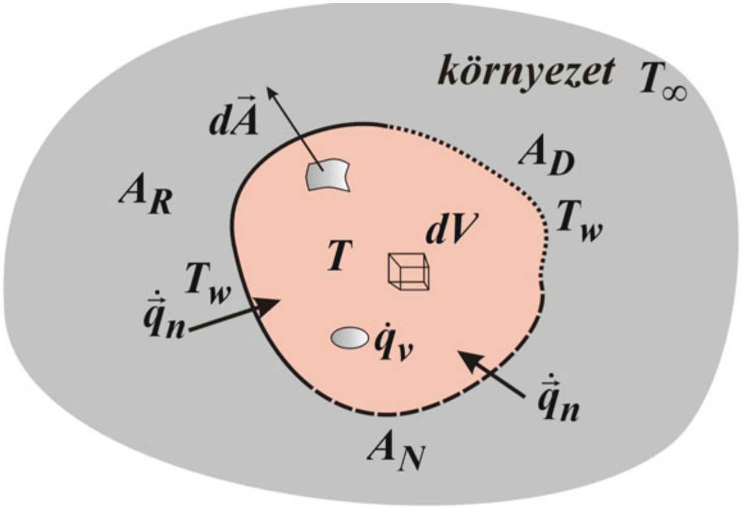
Laplace operátor

$$\oint_A \dot{\vec{q}}\,d\vec{A} = -\lambda\int_V\left(\frac{\partial}{dx}\frac{\partial T}{dx} + \frac{\partial}{dy}\frac{\partial T}{dy} + \frac{\partial}{dz}\frac{\partial T}{dz}\right)dV = -\lambda\int_V\overbrace{\left(\frac{\partial^2 T}{dx^2} + \frac{\partial^2 T}{dy^2} + \frac{\partial^2 T}{dz^2}\right)}^{\Delta T}dV\,,$$

a hővezetés differenciálegyenlete

$$\boxed{dt\int_V\left(\rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T - \dot{q}_v\right)dV = 0,} \longrightarrow \boxed{\rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T - \dot{q}_v = 0,}$$

1.2. Határfeltételek:



diffúziós egyenlet, Parabolikus parc.diff. egy.

integrális alak $\boxed{dt\int_V \left(\rho\, c \dfrac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T - \dot{q}_v\right) dV = 0,}$

differenciális alak $\boxed{\rho\, c \dfrac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T - \dot{q}_v = 0,}$

a) <u>kezdeti értékek</u>:

a kezdeti hőmérséklet időbeli eloszlása

$$T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r}),$$

<u>b) peremfeltételek</u>: a környezettel való kapcsolat,

- <u>elsőfajú, Dirichlet típusú</u> peremfeltétel, a fal T_w hőmérséklete előírt,

- <u>másodfajú, Neumann típusú</u> peremfeltétel,

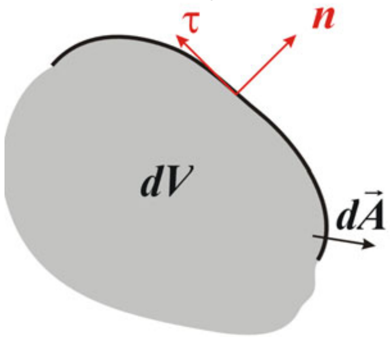
a falon belépő/kilépő $\dot{\vec{q}}_n$ hőáram-sűrűség előírt,

-<u>harmadfajú, Robin típusú</u> peremfeltétel,

a falon belépő és távozó hőmennyiség egyensúlyt tart,

T_w és $\dot{\vec{q}}_n$ előírt,

2D:



$$\dot{\vec{q}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \vec{e}_\tau + \frac{\partial T}{\partial n} \vec{e}_n \right),$$

<u>elsőfajú, Dirichlet típusú</u> peremfeltétel,

a fal mentén nincs hőmérséklet változás ,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \tau} \vec{e}_\tau = \dot{\vec{q}}_\tau = 0, \qquad -\lambda \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \rightarrow \boxed{T\big|_w = T_w} = T_D,$$

<u>másodfajú, Neumann típusú</u> peremfeltétel,

a falon átlépő hőáram-sűrűség normális komponense előírt,

$$\dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \rightarrow \boxed{-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w = \dot{q}_w = \dot{q}_N,}$$

<u>harmadfajú, Robin típusú</u> peremfeltétel,

a fal hőmérséklete és a falon átlépő hőáram-sűrűség előírt,

a belépő hőáram-sűrűség: $\dot{\vec{q}}_w = \dot{\vec{q}}_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n},$

a távozó hőmennyiség: $\dot{\vec{q}}_w = \dot{\vec{q}}_n = \alpha \left(T_w - T\infty \right),$

$$\boxed{-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w = \alpha \left(T_w - T_\infty \right),}$$

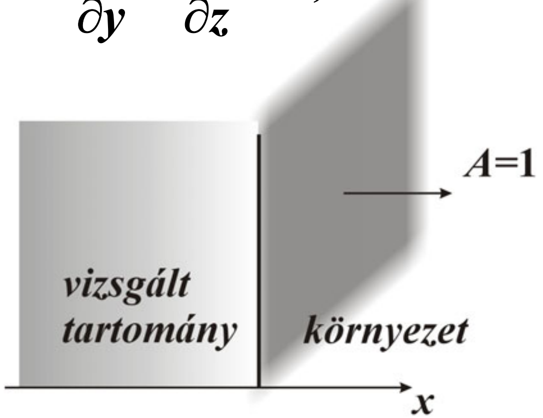
2. 1D hővezetési feladatok megoldása

csak egy-irányban van hőterjedés,

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0,\quad dV=1dx$$

$$\rho\, c\,\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}-\lambda\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}=\dot q_v=g(x,t),$$

diffúziós egyenlet/parabolikus parciális diff. egy.



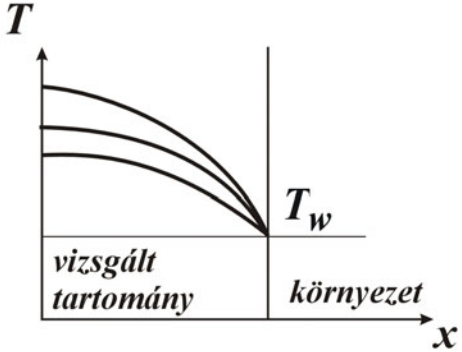
2.1. Határfeltételek:

a) kezdeti értékek: $T(x,t=0)=T_0(x),$

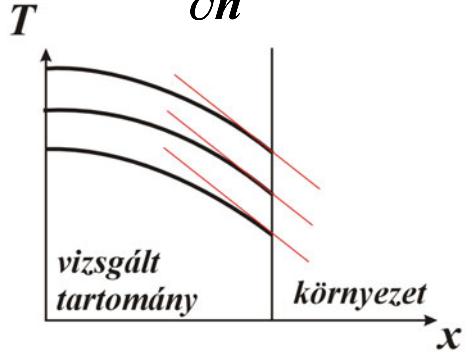
b) perem feltételek értelmezése,

$$T\big|_w=T_w,\qquad -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w=\dot q_w,\qquad -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w=\alpha(T_w-T_\infty),$$

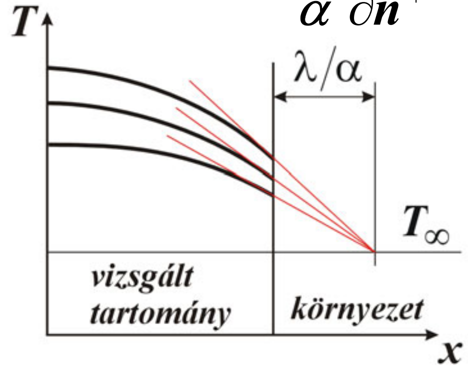
$$T_w=-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w+T_\infty,$$



első fajú, Dirichlet típusú



másod fajú, Neumann típusú



harmad fajú, Robin típusú

2.2. Időben állandósult, stacionárius állapot vizsgálata, Analitikus megoldási eljárások

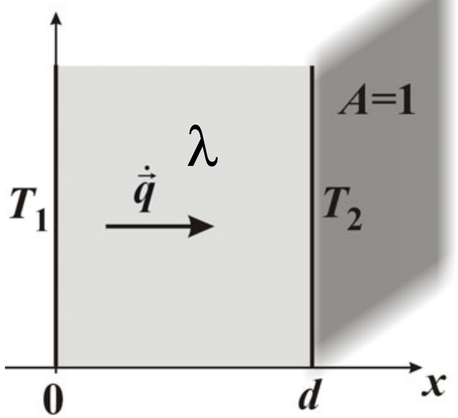
$$\partial/\partial t = 0, \qquad -\lambda\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \dot{q}_v(x) = g(x),$$ **Laplace-Poisson egyenlet**

a) Direkt megoldás

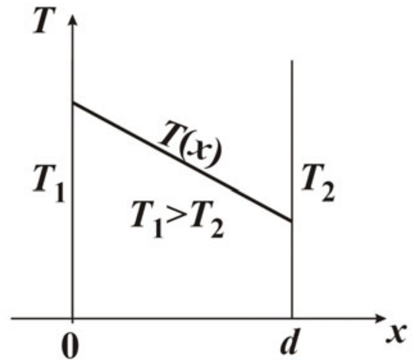
a/1) Síkfal hővezetése, $g(x)=0$,

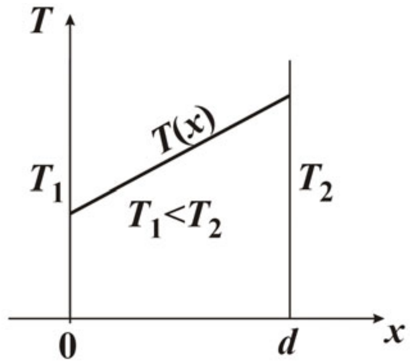
$$-\lambda\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial T(x)}{\partial x} = C_1, \rightarrow T(x) = C_1 x + C_2,$$

$$T(x=0) = T_1 = C_2, \qquad T(x=d) = T_2 = C_1 d + C_2 = C_1 d + T_1, \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{d},$$

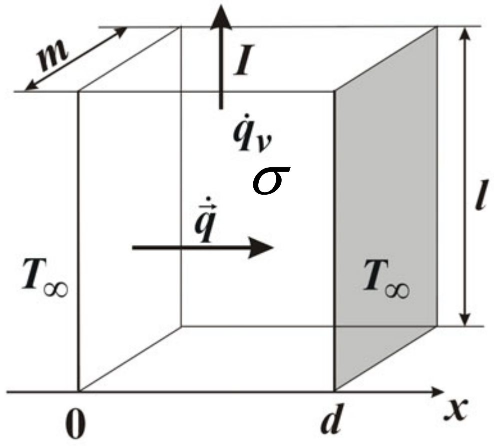


$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d}x + T_1,$$





a/2) Időben állandósult hővezetés hőforrással,



az áram Jolue vesztesége,

$$P = RI^2 = \frac{l}{\sigma\, md} I^2 = \dot{Q}_v = \dot{q}_v \underbrace{mld}_{V}, \rightarrow \dot{q}_v = \overbrace{\frac{I^2}{\sigma} \frac{1}{(md)^2}}^{\text{hőforrássűrűség}} = \dot{q}_{v0},$$

$$-\lambda \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \dot{q}_{v0}, \qquad -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} = \dot{q}_{v0} x + C_1,$$

$$-\lambda T(x) = \dot{q}_{v0} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

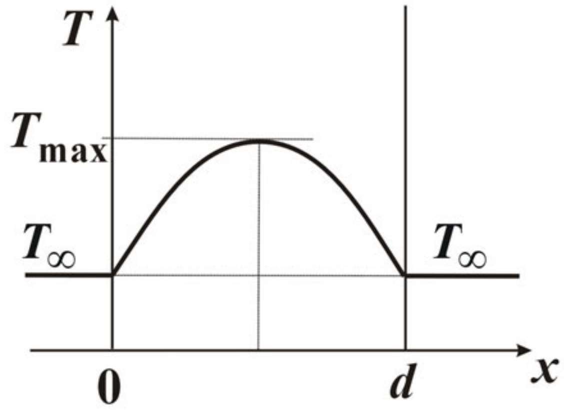
$$-\lambda T(x=0) = -\lambda T_\infty = C_2,$$

$$-\lambda T(x=d) = -\lambda T_\infty = \dot{q}_{v0} \frac{d^2}{2} + C_1 d + C_2 = \dot{q}_{v0} \frac{d^2}{2} + C_1 d - \lambda T_\infty, \rightarrow C_1 = -\dot{q}_{v0} \frac{d}{2},$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_{v0}}{\lambda} \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{q}_{v0} d}{2\lambda} x + T_\infty,$$

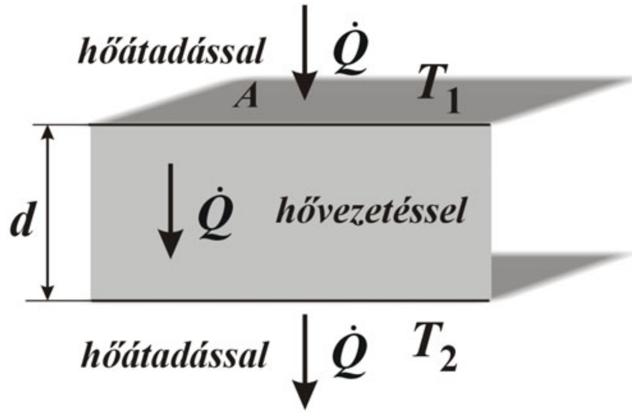
$$T(x) = \frac{\dot{q}_{v0}}{2\lambda} (d-x) x + T_\infty,$$

$$T_{\max} = T\left(x = \frac{d}{2}\right) = \frac{\dot{q}_{v0}}{2\lambda} \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$



b) Hővezetési ellenállás, hőátviteli tényező,

b/1) A hőellenállás,



hőáram hővezetésnél:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} A,$$

$$\frac{\Delta U}{R} = \Delta I$$

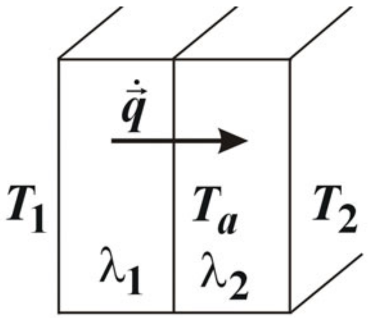
$$\dot{Q} = -\lambda \frac{A}{dx} dT = \lambda \frac{A}{dx}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{T_1 - T_2}{dR_{hő}},$$

$$dR_v = \frac{dx}{\lambda A}, \qquad \boxed{R_v = \frac{d}{\lambda\, A},}$$

hőáram hőátadásnál:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} = \alpha\, dT\; A = \frac{dT}{R_a}, \rightarrow \boxed{R_a = \frac{1}{\alpha\, A},}$$

Példa

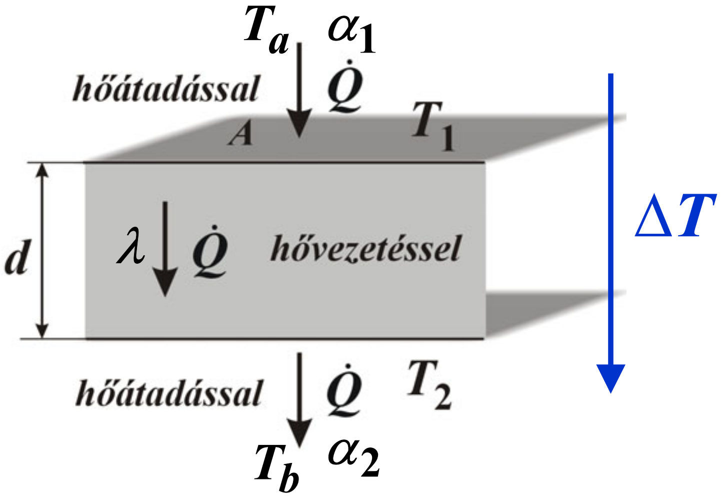


$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_a}{R_1} = \frac{T_a - T_2}{R_2},$$

$$R_1 = \frac{d_1}{\lambda_1 A}, \quad R_2 = \frac{d_2}{\lambda_2 A},$$

$$T_1 - T_2 = \left(T_1 - T_a\right) + \left(T_a - T_2\right) = \dot{Q}\left(R_1 + R_2\right),$$

b/2) Hőátviteli tényező,



$$\Delta T = T_a - T_b = \dot{Q}\left(R_{a1} + R_v + R_{a2}\right) = \\ = \dot{Q}\left(\frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{d}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}\right),$$

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R_{a1} + R_v + R_{a2}} = \frac{T_a - T_b}{\dfrac{1}{\alpha_1 A} + \dfrac{d}{\lambda A} + \dfrac{1}{\alpha_2 A}} = kA\left(T_a - T_b\right),$$

$$k = \frac{1}{A}\frac{1}{R_{a1} + R_v + R_{a2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}},$$

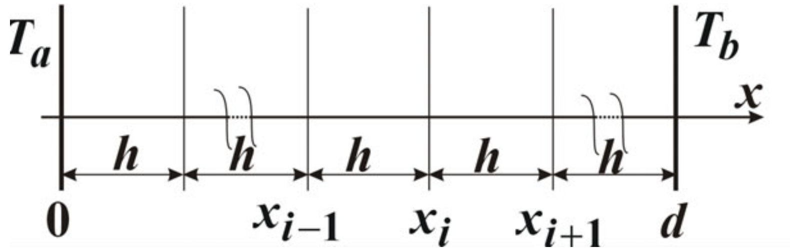
– hőátviteli / **- hőátbocsátási** } **tényező,**

2.3. Időben állandósult, stacionárius állapot vizsgálata, $\partial/\partial t = 0$,

Numerikus megoldási eljárások

Laplace-Poisson egyenlet

$$-\lambda \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = g(x) = \dot{q}_v(x),$$



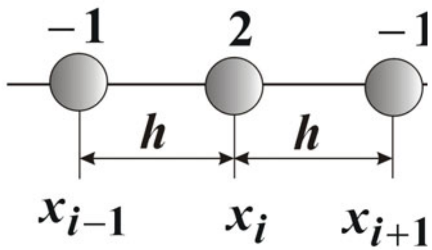
a) Véges differenciák módszere,
osszuk fel a tartományt egyenletesen

$$h = \frac{d}{n}, \quad x_i = ih, \; i = 0,1,\cdots,n,$$

Taylor sorral közelítve
az i-1, i+1 pontbeli T hőmérsékletet

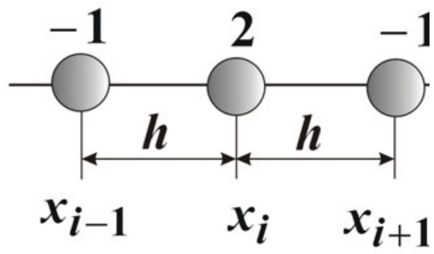
$$T_{i-1} = T_i - h\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i, \qquad T_{i+1} = T_i + h\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i,$$

$$\lambda T_{i+1} + \lambda T_{i-1} = 2\lambda T_i + h^2 \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i = \lambda 2T_i - h^2 \dot{q}_{v,i},$$



iterációs séma: $$\boxed{\lambda \frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \dot{q}_{v,i},}$$

$$\boxed{\lambda \frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \dot{q}_{v,i},} \qquad i = 0,1,2,\cdots,n,$$



A peremfeltételek figyelembe vétele

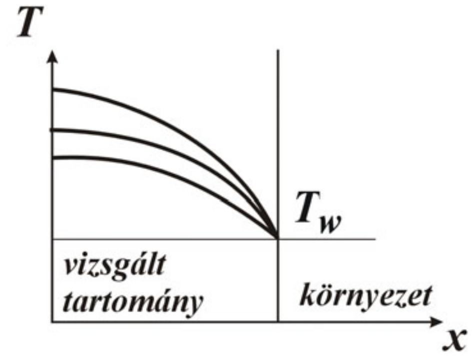
<u>elsőfajú, Dirichlet peremfeltétel</u>:

$$T_{i=0} = T_a, \qquad -\lambda T_a + 2\lambda T_1 - \lambda T_2 = h^2 \dot{q}_{v,1},$$

$$T_i, \qquad -\lambda T_{i-1} + 2\lambda T_i - \lambda T_{i+1} = h^2 \dot{q}_{v,i},$$

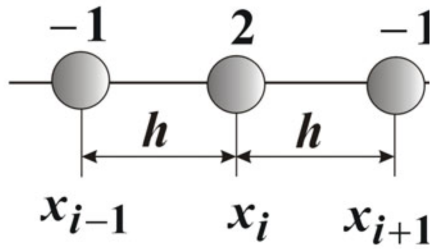
$$T_{i=n} = T_b, \quad -\lambda T_{n-2} + 2\lambda T_{n-1} - \lambda T_b = h^2 \dot{q}_{v,n-1},$$

$$T\big|_w = T_w,$$

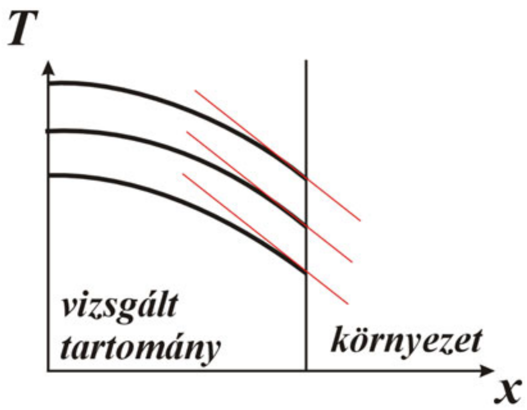


$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \cdot \lambda \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \hdashline T_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} \dot{q}_{v,1} \\ \dot{q}_{v,2} \\ \dot{q}_{v,3} \\ \hdashline \dot{q}_{v,n-1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline T_b \end{bmatrix},$$

$$\boxed{\lambda \frac{-T_{i-1}+2T_i-T_{i+1}}{h^2}=\dot{q}_{v,i},}\qquad i=0,1,2,\cdots,n,$$



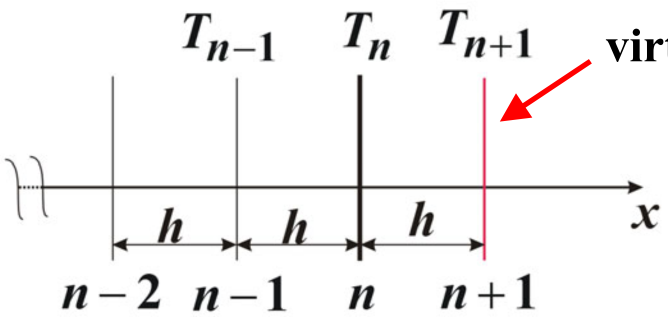
<u>másodfajú, Neumann peremfeltétel</u>:



$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w=\dot{q}_w, \rightarrow -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_n=\dot{q}_n,$$

$$-\lambda \frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2h}=\dot{q}_n,$$

$$T_{n+1}=T_{n-1}-2h\dot{q}_n/\lambda,$$

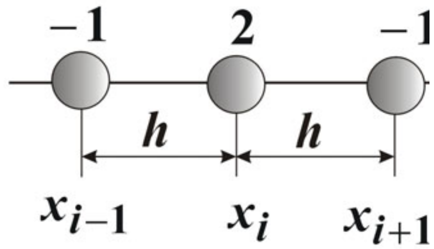


virtuális elem

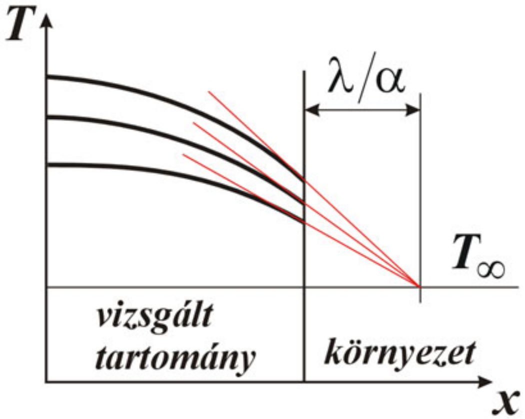
az n-edik rácspontra:

$$\lambda \frac{-T_{n-1}+2T_n-T_{n+1}}{h^2}=\dot{q}_{v,n},$$

$$\boxed{\lambda \frac{-T_{i-1}+2T_i-T_{i+1}}{h^2} = \dot{q}_{v,i},} \qquad i = 0,1,2,\cdots,n,$$



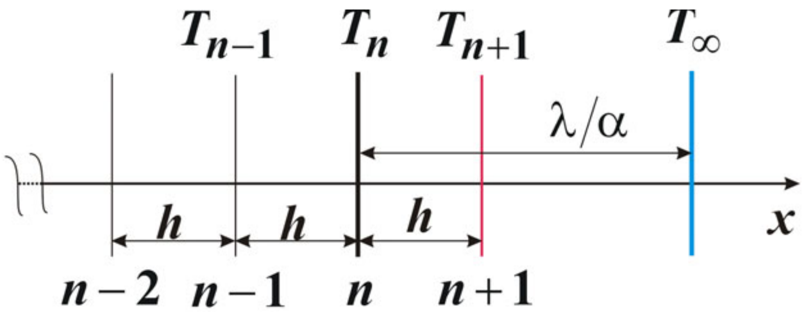
harmadfajú, Robin peremfeltétel:



$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_w = \alpha\left(T_w - T\infty\right),$$

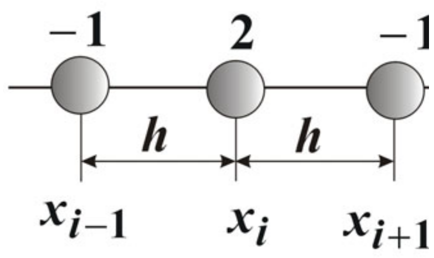
$$-\lambda \frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2h} = \alpha\left(T_n - T_\infty\right),$$

$$T_{n+1} = T_{n-1} - \frac{2h\alpha}{\lambda}\left(T_n - T\infty\right),$$

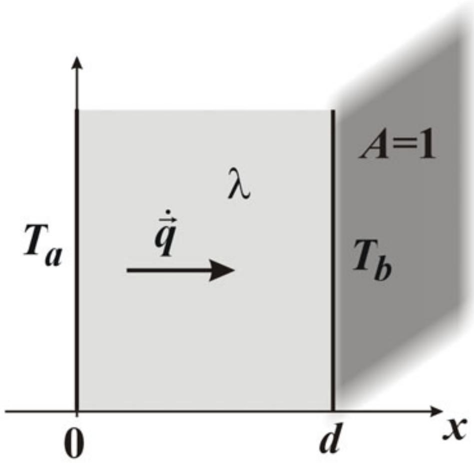


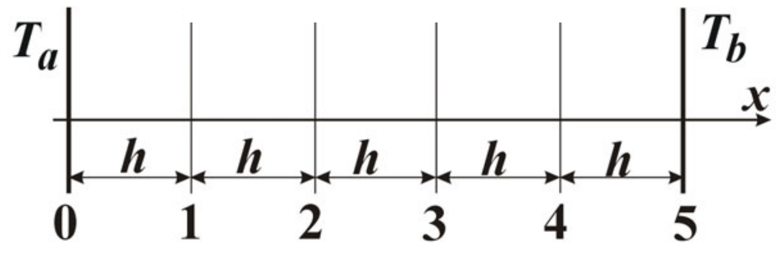
$$\lambda \frac{-T_{n-1}+2T_n-T_{n+1}}{h^2} = \dot{q}_{v,n},$$

Illusztrációs példa, Síkfal hővezetése,



$$-\lambda \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0,$$





$$T_a = 40^o\,\mathrm{C}, \quad T_b = 100^o\,\mathrm{C},$$

analitikus megoldásból

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}, \rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 64 \\ 76 \\ 88 \end{bmatrix},$$

$$T(x) = \frac{T_b - T_a}{d} x + T_a,$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60/5 + 40 \\ 2 * 60/5 + 40 \\ 3 * 60/5 + 40 \\ 4 * 60/5 + 40 \end{bmatrix},$$

3. Megoldás az időtartományban, $\partial/\partial t \neq 0,$
3.1. Analitikus közelítések

$$\rho\, c\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \dot{q}_v(x,t),$$

Diffúziós egyenlet

$$\dot{q}_v(x,t) = 0, \rightarrow -\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0,$$

Fourier szorzat-szeparációs eljárás $T(x,t) = f(x)g(t),$

$$-g(t)\lambda \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \rho c f(x) \frac{\partial g(t)}{\partial t} = 0, \Big/ f(x)g(t),$$

$$\underbrace{-\frac{1}{f(x)}\lambda \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}_{-m^2} + \underbrace{\frac{\rho c}{g(t)} \frac{\partial g(t)}{\partial t}}_{m^2} = 0,$$

$$-\frac{1}{f(x)}\lambda \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -m^2, \rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{m^2}{\lambda} f(x),$$

$$\frac{\rho c}{g(t)} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = m^2, \rightarrow \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{m^2}{\rho c} g(t),$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{m^2}{\lambda}f(x),\quad \frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{m^2}{\rho c}g(t),$$

a) m^2 pozitív, valós,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{m^2}{\lambda}f(x),\rightarrow f(x)=Fe^{\varphi\, x},\rightarrow \varphi^2 Fe^{\varphi\, x}=\frac{m^2}{\lambda}Fe^{\varphi\, x},$$

$$\varphi^2=\frac{m^2}{\lambda},\rightarrow \varphi_{12}=\mp\frac{m}{\sqrt{\lambda}},\rightarrow F(x)=F_1 e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}+F_2 e^{+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x},$$

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{m^2}{\rho c}g(t),\rightarrow g(t)=Ge^{\gamma\, t},\rightarrow \gamma Ge^{\gamma\, t}=\frac{m^2}{\rho c}Ge^{\gamma\, t},$$

$$\gamma=\frac{m^2}{\rho c},\rightarrow g(t)=Ge^{\frac{m^2}{\rho c}t},\qquad T(x,t)=Ge^{\frac{m^2}{\rho c}t}\left(F_1 e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}+F_2 e^{+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}\right),$$

$$T(x,t)=f(x)g(t)=e^{\frac{m^2}{\rho c}t}\left(C_1e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}+C_2e^{+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}\right),$$

C_1, C_2, m, a peremfeltételekhez való illesztéssel

+*x* irányba **-*x* irányba**

történő hőenergia terjedés

$$T(x,t)=f(x)g(t)=e^{\frac{m^2}{\rho c}t}\left(C_1e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}+C_2e^{+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}\right),$$

$$\text{tfh}:\mathrm{C}_2=0,\rightarrow T(x,t)=C_1e^{\frac{m^2}{\rho c}t}e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}=C_1\underbrace{e^{\frac{m^2}{\rho c}\left(t-\frac{\rho c}{m\sqrt{\lambda}}x\right)}}$$

<u>retardált</u>, késleltetett hőterjedés
a hő terjedéséhez időre van szükség

a terjedés sebessége: $t-x/v,\rightarrow v=\sqrt{\lambda}\,m/\rho c,$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{m^2}{\lambda}f(x),\quad \frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{m^2}{\rho c}g(t),$$

b) m^2 negatív, valós,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{-m^2}{\lambda}f(x),\rightarrow f(x)=Fe^{\varphi x},\rightarrow \varphi^2 Fe^{\varphi x}=-\frac{m^2}{\lambda}Fe^{\varphi x},$$

$$\varphi^2=-\frac{m^2}{\lambda},\rightarrow \varphi_{12}=\mp j\frac{m}{\sqrt{\lambda}},\rightarrow F(x)=F_1 e^{-j\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x}+F_2 e^{+j\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x},$$

$$F(x)=F_1\left(\cos\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x-j\sin\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x\right)+F_2\left(\cos\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x+j\sin\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x\right)=$$

$$=(F_1+F_2)\cos\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x+j(F_2-F_1)\sin\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x=C\cos\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x+\delta\right),$$

$$\overline{F}_1=\overline{F}_2^*$$

az amplitúdók komplex konjugált párok

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}=-\frac{m^2}{\rho c}g(t),\rightarrow g(t)=Ge^{\gamma t},\rightarrow \gamma Ge^{\gamma t}=-\frac{m^2}{\rho c}Ge^{\gamma t},$$

$$\gamma=-\frac{m^2}{\rho c},\rightarrow g(t)=Ge^{-\frac{m^2}{\rho c}t},$$

időben exponenciálisan csökkenő, térben periodikusan változó a hőmérséklet eloszlás,

$$T(x,t)=f(x)g(t)=e^{-\frac{m^2}{\rho c}t}C_1\cos\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}x+\delta\right),$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{m^2}{\lambda}f(x),\quad \frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{m^2}{\rho c}g(t),$$

c) <u>m^2 képzetes,</u> $\quad m^2 = j\kappa,$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=j\frac{\kappa}{\lambda}f(x),\rightarrow f(x)=Fe^{\varphi x},\rightarrow \varphi^2 Fe^{\varphi x}=j\frac{\kappa}{\lambda}Fe^{\varphi x},$$

$$\varphi^2=j\frac{\kappa}{\lambda},\rightarrow \varphi_{12}=\mp\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}},\rightarrow F(x)=F_1 e^{-\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}x}+F_2 e^{+\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}x},$$

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}=j\frac{\kappa}{\rho c}g(t),\rightarrow g(t)=Ge^{\gamma t},\rightarrow \gamma Ge^{\gamma t}=j\frac{\kappa}{\rho c}Ge^{\gamma t},$$

$$\gamma=-j\frac{\kappa}{\rho c},\rightarrow g(t)=Ge^{j\frac{\kappa}{\rho c}t},$$

csillapított hőhullám terjedés

$$T(x,t)=e^{j\frac{\kappa}{\rho c}t}Ce^{\mp\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}x}=Ce^{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}x}e^{j\left(\frac{\kappa}{\rho c}t\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}x\right)},$$

$$T(x,t)=\underbrace{C_1 e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{2\lambda}}x}\cos\frac{\kappa}{\rho c}\left(t-\frac{\rho c}{\sqrt{2\kappa\lambda}}x\right)}_{+x\text{ irányban történő}}+\underbrace{C_2 e^{+\sqrt{\frac{\kappa}{2\lambda}}x}\cos\frac{\kappa}{\rho c}\left(t+\frac{\rho c}{\sqrt{2\kappa\lambda}}x\right)}_{-x\text{ irányban történő}},$$

késleltetett csillapított hőhullám terjedés

3.2. Numerikus közelítő eljárás, véges differenciák módszere az időtartományban

Diffúziós egyenlet:

$$-\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \rho\, c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \dot{q}_v(x,t),$$

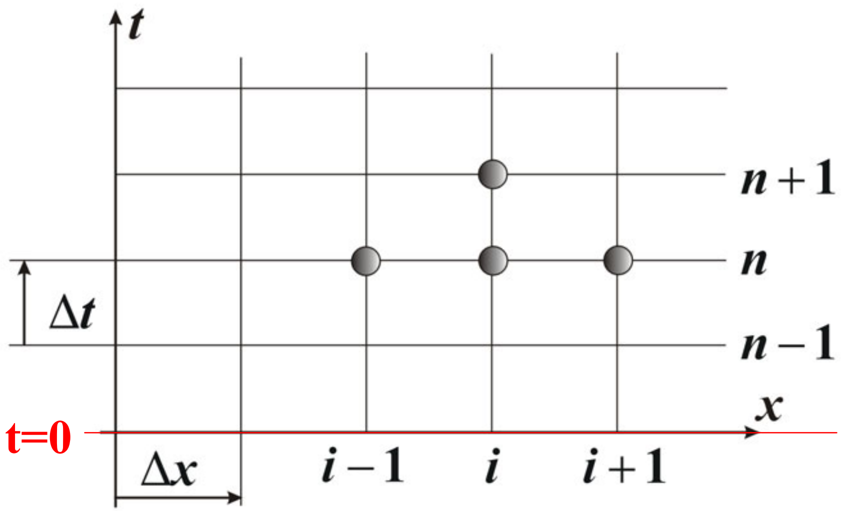
$$-\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\rho\, c}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\dot{q}_v(x,t)}{\lambda},$$

$$-\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + k \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = g(x,t),$$

Kezdeti és peremfeltételek:

$$T(x,t=0) = T_0(x),$$

$$T(x_1,t) = T_1, \quad T(x_2,t) = T_2,$$



diszkretizálás térben és időben

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0,1,\cdots,N_x,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0,1,\cdots,N_t,$$

$$T(x_i,t_n) = T_i^n,$$

a) **Előrelépő Euler, explicit differencia séma,**

$$-\frac{\partial^2 T(x_i,t_n)}{\partial x^2}+k\,\frac{\partial T(x_i,t_n)}{\partial t}=g(x_i,t_n),$$

$$-\frac{\partial^2 T(x_i,t_n)}{\partial x^2}=\frac{-T_{i+1}^n+2T_i^n-T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},\qquad \frac{\partial T(x_i,t_n)}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t},$$

$$\frac{-T_{i+1}^n+2T_i^n-T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+k\,\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=g_i^n,$$

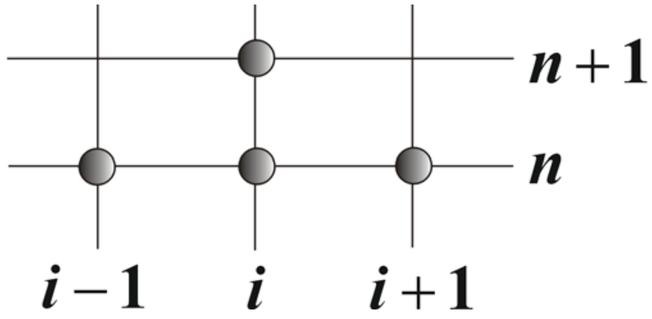
$$\frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2}\left(-T_{i+1}^n+2T_i^n-T_{i-1}^n\right)+\left(T_i^{n+1}-T_i^n\right)=\frac{\Delta t}{k}g_i^n,$$

$$r=\frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2},\quad g_i^n\frac{\Delta t}{k}=\tilde{g}_i^n,\qquad r\left(-T_{i+1}^n+2T_i^n-T_{i-1}^n\right)+\left(T_i^{n+1}-T_i^n\right)=\tilde{g}_i^n,$$

$$r\left(-T_{i+1}^{n}+2T_{i}^{n}-T_{i-1}^{n}\right)+\left(T_{i}^{n+1}-T_{i}^{n}\right)=\tilde{g}_{i}^{n},$$

$$T_{i}^{n+1}=rT_{i+1}^{n}+\left(1-2r\right)T_{i}^{n}+rT_{i-1}^{n}+\tilde{g}_{i}^{n},$$

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1}=\mathbf{B}\mathbf{T}^{n}+\tilde{\mathbf{G}}^{n},} \longrightarrow$$



$$\mathbf{T}^{n}=\left[\begin{array}{c} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \\ \hdashline T_{N_x}^n \end{array}\right],\quad \tilde{\mathbf{G}}^{n}=\left[\begin{array}{c} \tilde{g}_0^n \\ \tilde{g}_1^n \\ \tilde{g}_2^n \\ \hdashline \tilde{g}_{N_x}^n \end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1-2r & r & 0 & \\ r & 1-2r & r & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & \\ \hdashline & \cdots & & \end{array}\right],\quad \mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hdashline & \cdots & & \end{array}\right],$$

b) Hátralépő Euler, implicit differencia séma,

$$-\frac{\partial^2 T(x_i,t_{n+1})}{\partial x^2}+k\,\frac{\partial T(x_i,t_{n+1})}{\partial t}=g(x_i,t_{n+1}),$$

$$-\frac{\partial^2 T(x_i,t_{n+1})}{\partial x^2}=\frac{-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2},\quad \frac{\partial T(x_i,t_{n+1})}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t},$$

$$\frac{-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+k\,\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=g_i^{n+1},$$

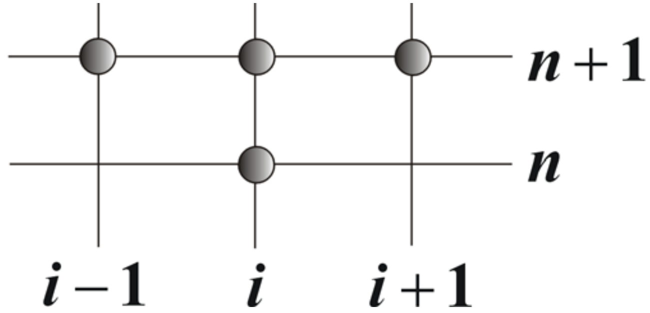
$$\frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2}\left(-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}\right)+\left(T_i^{n+1}-T_i^n\right)=\frac{\Delta t}{k}\,g_i^{n+1},$$

$$r\left(-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}\right)+\left(T_i^{n+1}-T_i^n\right)=\tilde{g}_i^{n+1},$$

$$r\left(-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}\right)+\left(T_i^{n+1}-T_i^{n}\right)=\tilde{g}_i^{n+1},$$

$$-rT_{i+1}^{n+1}+(1+2r)T_i^{n+1}-rT_i^{n+1}=T_i^{n}+\tilde{g}_i^{n},$$

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1}=\mathbf{B}\mathbf{T}^{n}+\tilde{\mathbf{G}}^{n+1},}$$



$$\mathbf{T}^{n}=\begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \\ \hdashline T_{N_x}^n \end{bmatrix},\quad \tilde{\mathbf{G}}^{n}=\begin{bmatrix} \tilde{g}_0^n \\ \tilde{g}_1^n \\ \tilde{g}_2^n \\ \hdashline \tilde{g}_{N_x}^n \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1+2r & r & 0 & \\ r & 1+2r & r & \vdots \\ 0 & r & 1+2r & \\ \hdashline & \cdots & & \end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hdashline & \cdots & & \end{array}\right],$$

c) Súlyozott deriváltak differencia séma,

$$-\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}+k\,\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=g(x,t),\qquad -\frac{\partial^2 T(x_i,t_n)}{\partial x^2}=\frac{-T_{i+1}^n+2T_i^n-T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g\right),\qquad -\frac{\partial^2 T(x_i,t_{n+1})}{\partial x^2}=\frac{-T_{i+1}^{n+1}+2T_i^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2},$$

$$\Theta\frac{\partial T(x_i,t_{n+1})}{\partial t}+(1-\Theta)\frac{\partial T(x_i,t_n)}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=$$

$$=\Theta\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g\right)^{n+1}+(1-\Theta)\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g\right)^{n},$$

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\frac{\Theta}{k}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+g_i^{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1-\Theta}{k}\left(\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}+g_i^{n}\right),$$

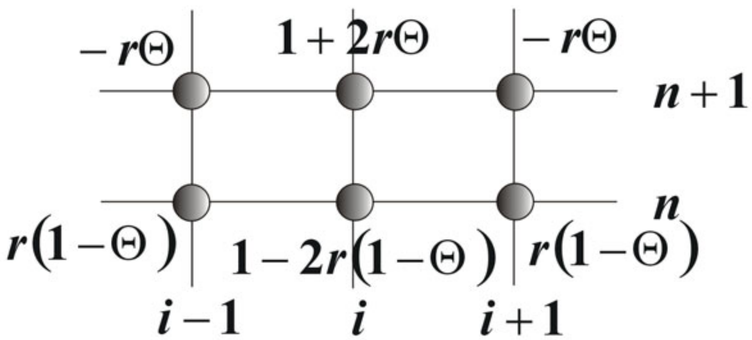
$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\frac{\Theta}{k}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+g_i^{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1-\Theta}{k}\left(\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}+g_i^{n}\right),$$

$$r=\frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2},$$

$$-r\Theta T_{i+1}^{n+1}+(1+2r\Theta)T_i^{n+1}-r\Theta T_{i-1}^{n+1}=\frac{\Delta t}{k}\left(\Theta g_i^{n+1}+(1-\Theta)g_i^n\right)+$$

$$+r(1-\Theta)T_{i+1}^n+\left(1-2r(1-\Theta)\right)T_i^n+r(1-\Theta)T_{i-1}^n,$$



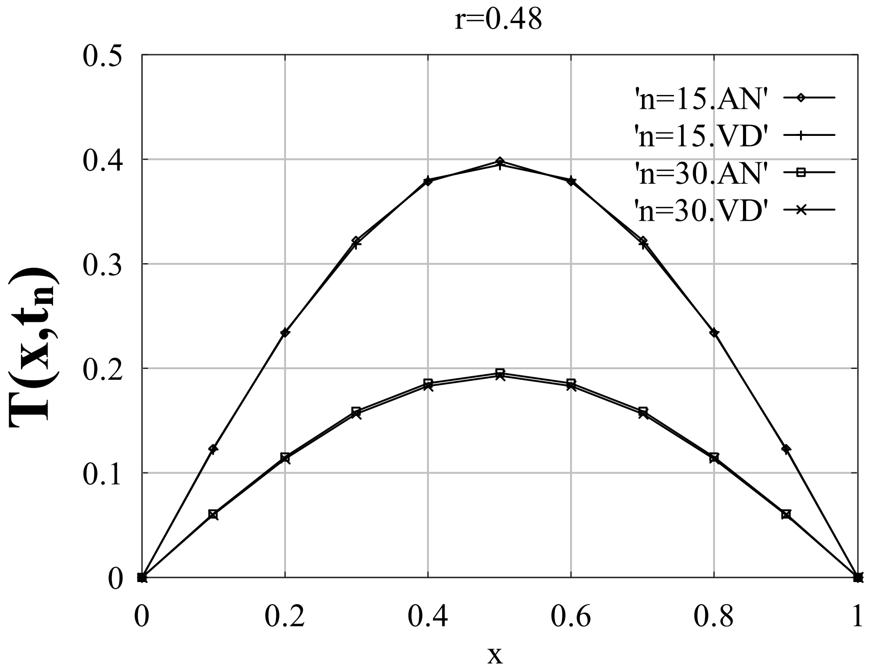
$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1}=\mathbf{B}\mathbf{T}^{n}+\widetilde{\mathbf{G}}^{n,n+1},$$

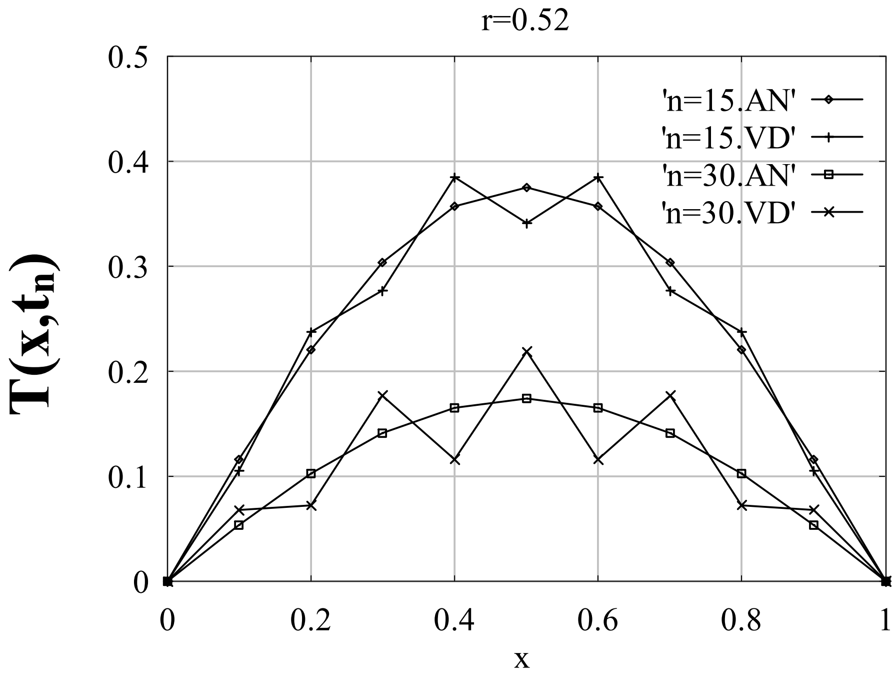
Stabilitás vizsgálat:

$\Theta = 0,$ **előrelépő Euler séma,** $\Theta = 1,$ **hátralépő Euler séma,** } **feltételesen stabilis iteráció,**

$\Theta = 1/2,$ **Crank-Nicolson séma,** **feltétel nélkül stabilis iteráció,**

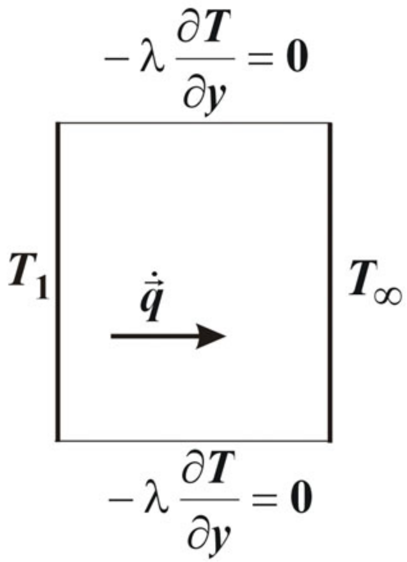
$$r = \frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2}$$ **- függően az iteráció stabilitása,**

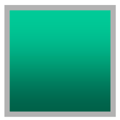


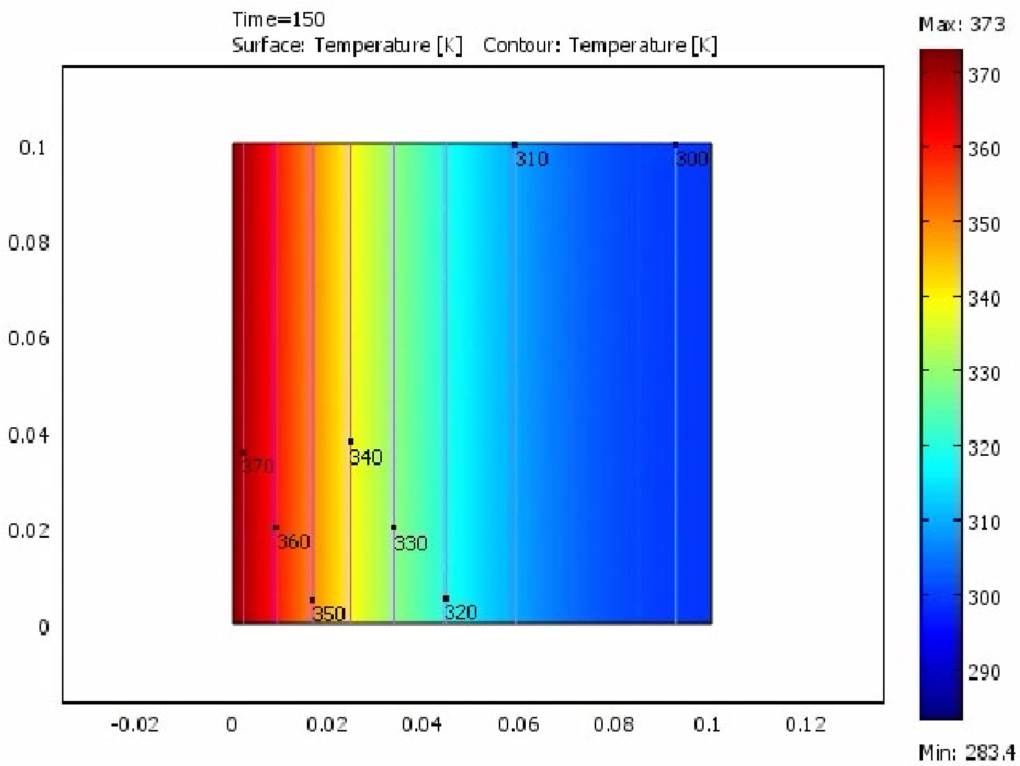


4. Illusztrációs példák,

4.1. Fűtött fal

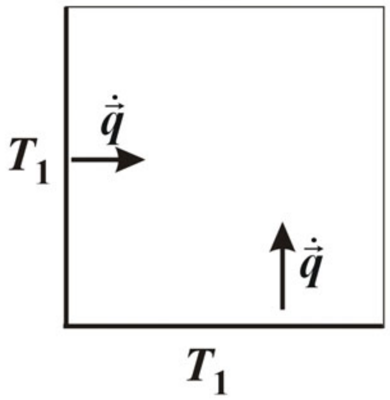




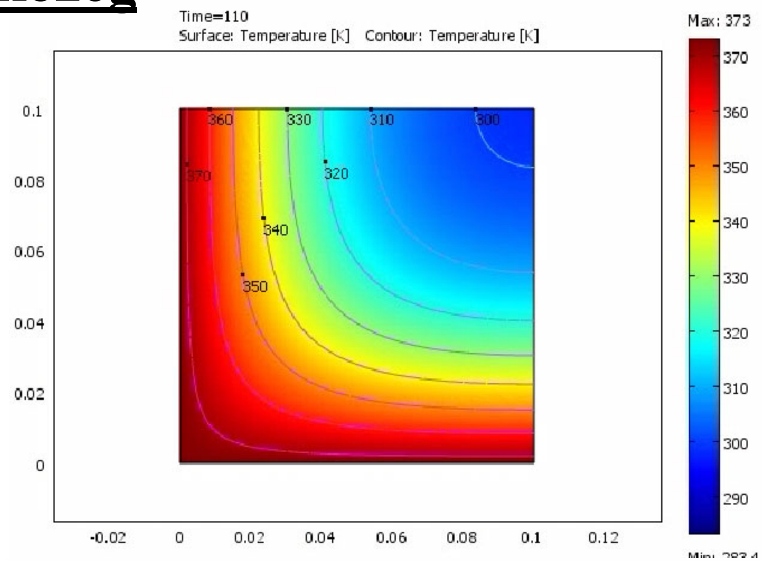


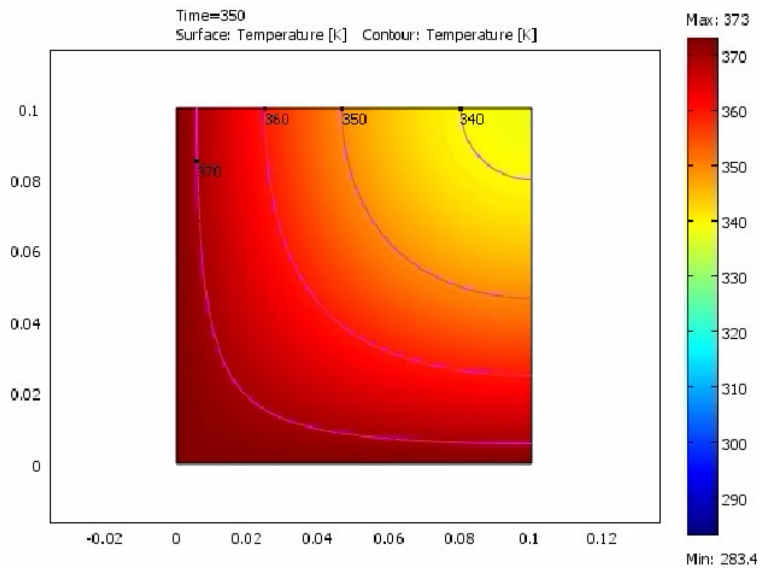
4.2. Két egymás melletti oldalról fűtött közeg

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

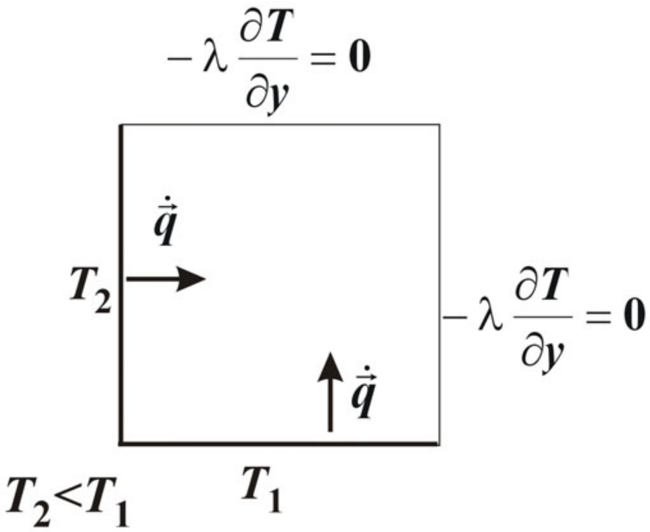


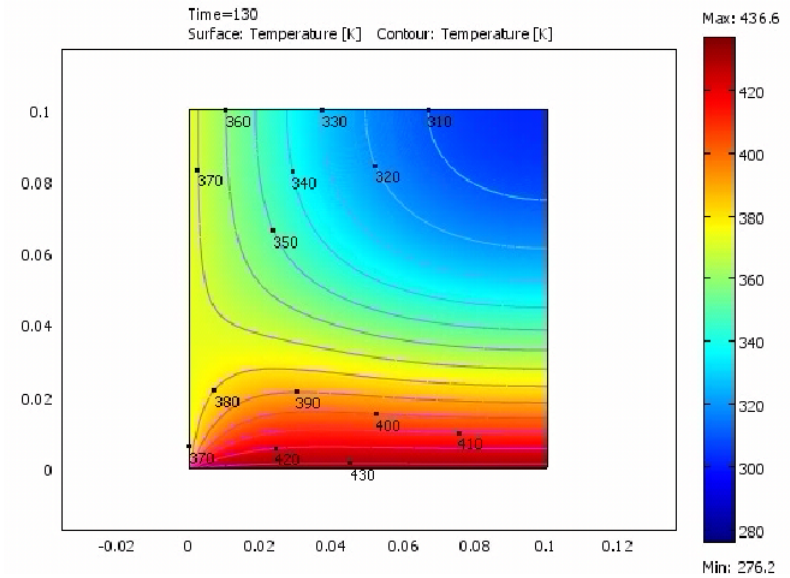
$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

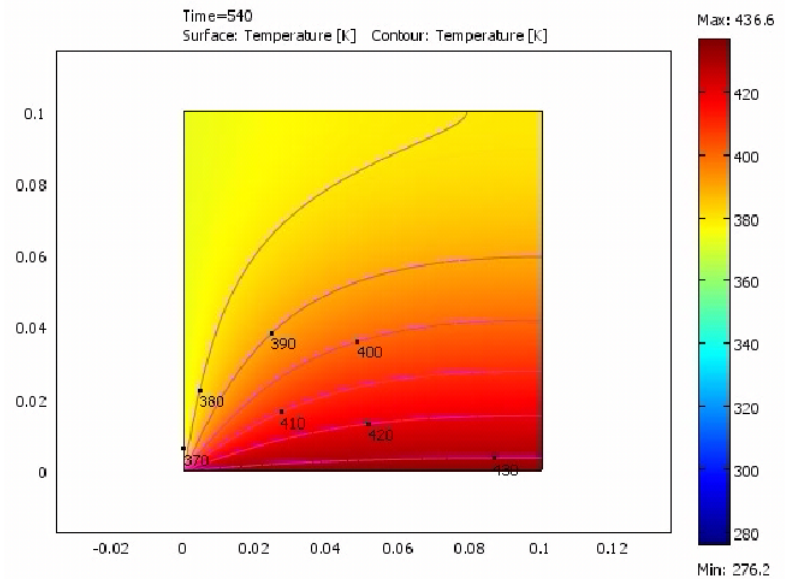




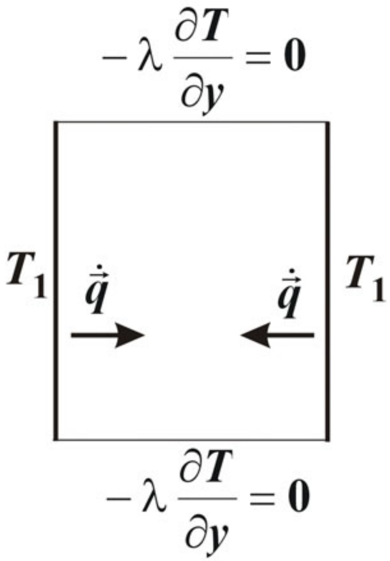
4.3. Két egymás melletti oldalról, különböző hőmérsékletekkel fűtött közeg

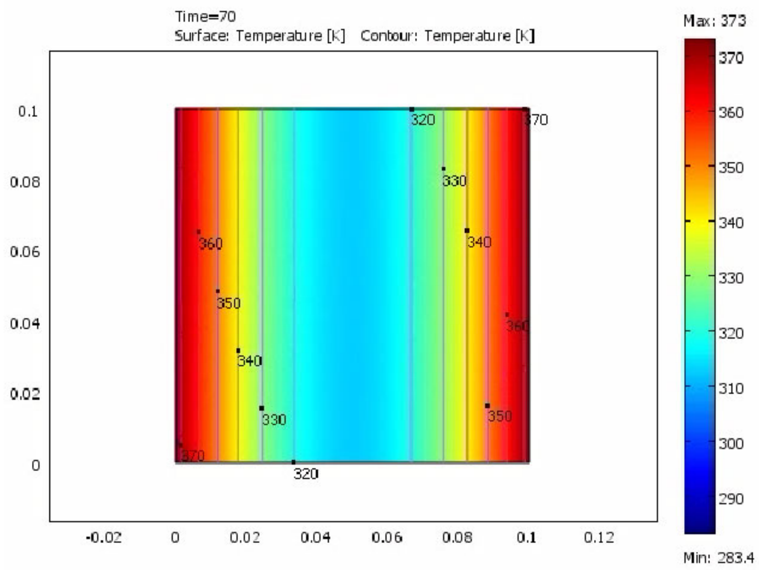


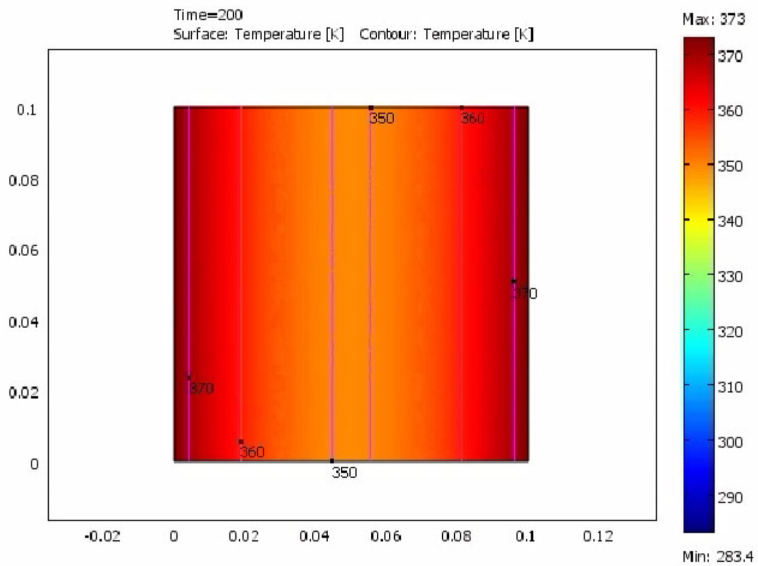




4.4. Két szemközti oldalról fűtött fal

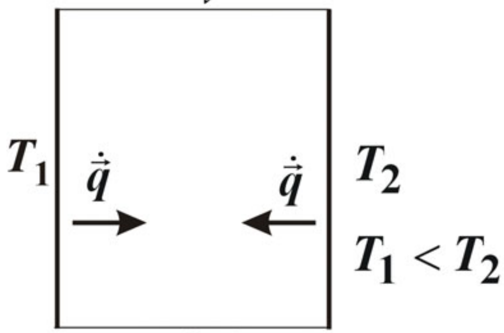




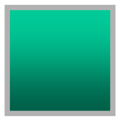


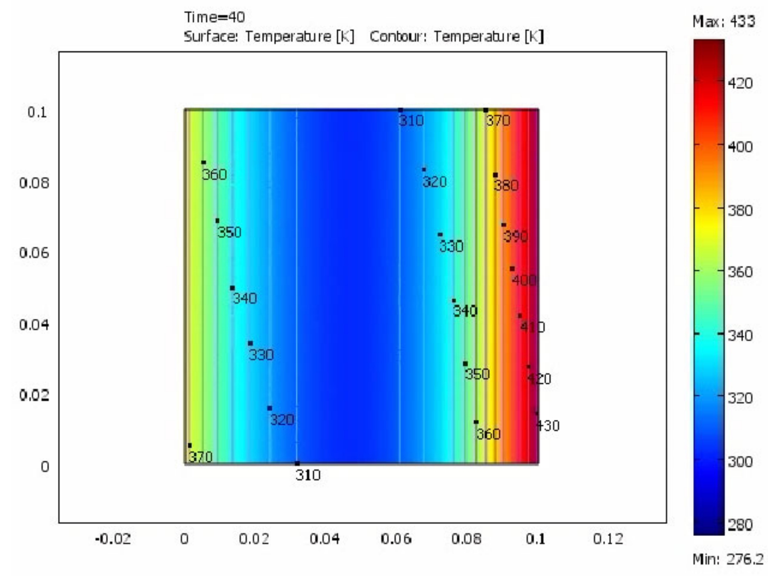
4.5. Két szemközti oldalról fűtött fal

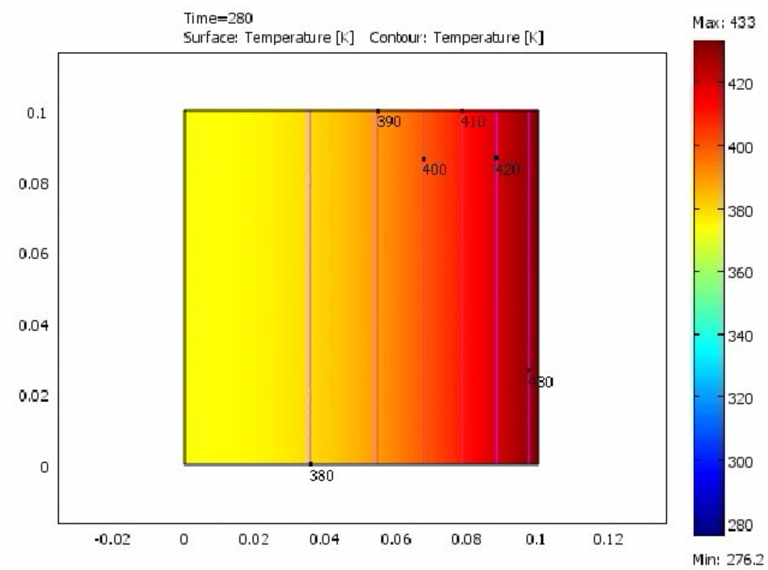
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



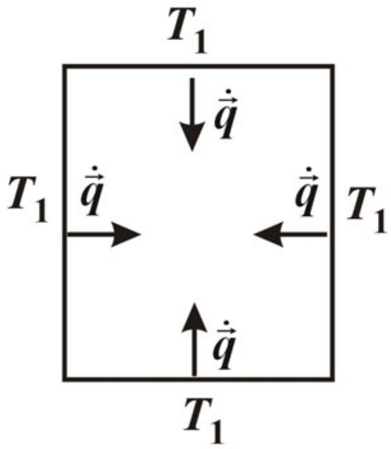
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

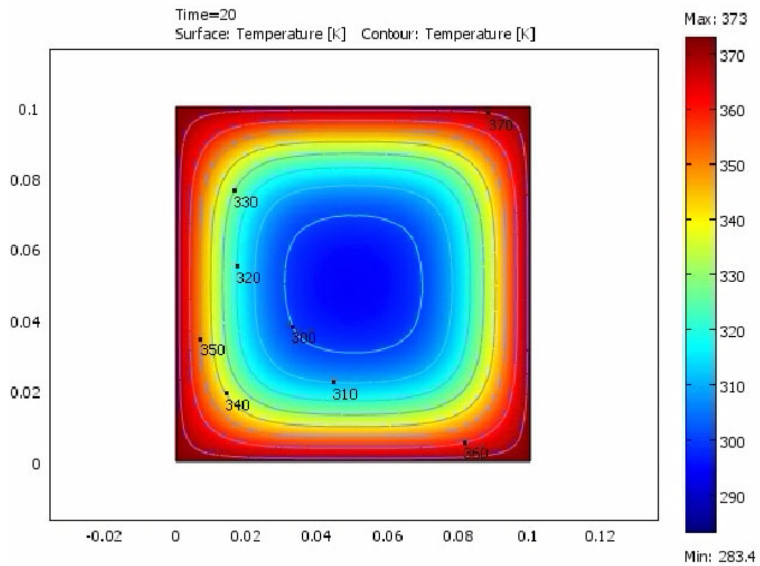


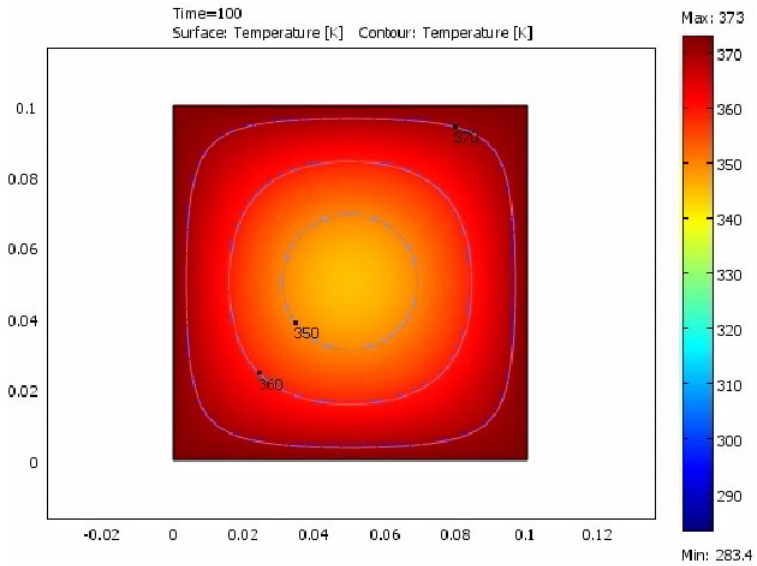




4.6. Minden oldalról fűtött lemez

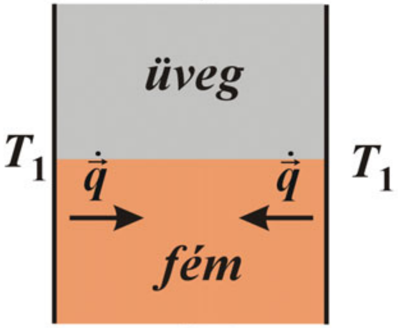




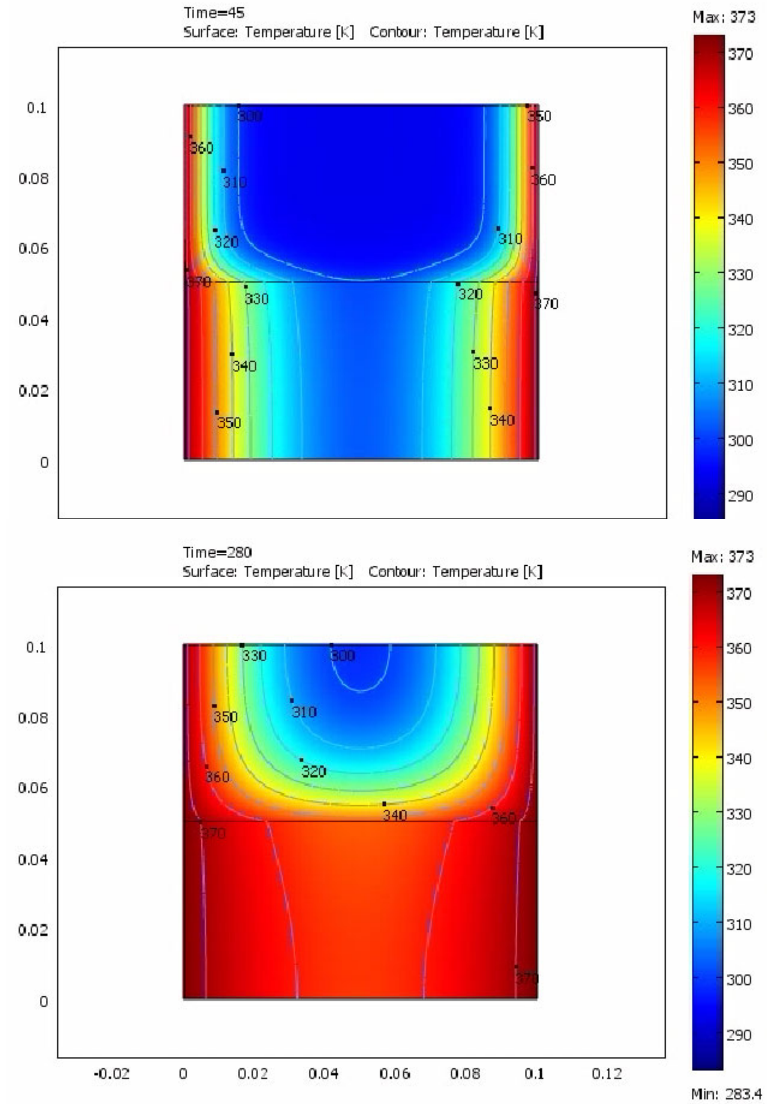


4.7. Két szemközti oldalról fűtött hosszirányban rétegezett üveg és fémfal

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



5. Hőátadás, konvekció,

a hőmérséklet a geometriai tér pontjaiban időben változik, $T = T(\vec{r}, t) = T(x, y, z, t)$,

a hőáram-sűrűség: $\dot{q} = \frac{dQ/dt}{dA}$, $[\dot{q}] = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2}$,

a falon átlépő hőáram-sűrűség:

$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty)$, $\alpha -$ hőátadási tényező, $[\alpha] = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}}$,

egyenértékű hővezetési tényezőt alkalmazva:

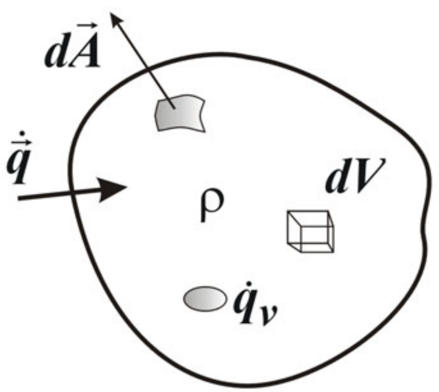
$$\dot{q}_n = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} = \alpha(T_w - T_\infty), \rightarrow \lambda_e = -\frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{n}\right)\Big|_w},$$

az egységnyi felületen az egyenértékű hővezetéssel átáramló hőmennyiség:

$$dQ_2 = -dt\int_A \dot{\vec{q}}\, d\vec{A} = -dt\int_V \frac{\partial \dot{\vec{q}}}{\partial \vec{r}}\, dV, \rightarrow \frac{dQ_2}{dV} = \lambda_e \Delta T\, dt,$$

5.1. Hőterjedés áramló közegekben,

a nem összenvomható közeg hőátadási mozgásegyenlete, hőforrás nélkül:



a V térfogatban lévő ρ sűrűségű anyag tömege: $m = \int_V \rho dV$,

a $T = T(\vec{r}, t)$ **hőmérséklet dt idő alatti teljes megváltozása:**

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \vec{v} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} dt =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} dt + v_x \frac{\partial T}{\partial x} dt + v_y \frac{\partial T}{\partial y} dt + v_z \frac{\partial T}{\partial z} dt,$$

dt idő alatt az egységnyi térfogat tömegének hőmérséklet változáshoz szükséges hőmennyiség:

$$\frac{dQ}{dV} = \rho\, c\, dT = \rho\, c \frac{dT}{dt} dt = \rho\, c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) dt,$$

az egységnyi térfogatban lévő hőforrás termelte hő:

$$dQ_1 = dt \int_V \dot{q}_v dV, \rightarrow \frac{dQ_1}{dV} = \dot{q}_v dt,$$

$$\frac{dQ}{dV} = \rho\, c\, dT = \rho\, c \frac{dT}{dt} dt = \rho\, c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) dt,$$

$$\frac{dQ_1}{dV} = \dot{q}_v dt, \qquad \frac{dQ_2}{dV} = \lambda_e \Delta T\, dt, \qquad dQ = dQ_1 + dQ_2$$

egységnyi térfogat időegységre vonatkozó hőenergia energiaegyensúlyi egyenlete:

$$\boxed{\rho\, c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) - \lambda_e \Delta T - \dot{q}_v = 0,}$$

az áramló közeg anyag-megmaradási egyenlete:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial \vec{r}} = 0,}$$

az áramló közeg impulzus-megmaradása, a Navier-Stoke egyenlet:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v},}$$

a három egyenlet szimultán megoldása során figyelembe kell még venni
- az áramló közeg határrétegére vonatkozó összefüggéseket,
- a halmazállapot változásból származó összefüggéseket,
- az áramló közeg kényszeríttet, ill. szabad áramlására feltételeket,

6. Hősugárzás,

- **hősugárzás,** a test felülete a tér minden irányában a hőmérsékletétől és anyagától függően energiát sugároz,

az anyag egységnyi felülete, egységnyi idő alatt kisugárzott hőenergiája: (Stefan-Boltzmann törvény)

$\dot{q} = \varepsilon \sigma_0 T^4$, ε – az anyag feketeségi foka,

$\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$, az abszolút fekete test sugárzása,

a sugárzással létrehozott hőáram-sűrűség: $\dot{\vec{q}} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial \vec{r}} = \varepsilon \sigma_0 T^4 \cdot \vec{e}_\vartheta$,

$\vec{e}_\vartheta$ – a sugárzás irányát, nyílásszögét jelöli,

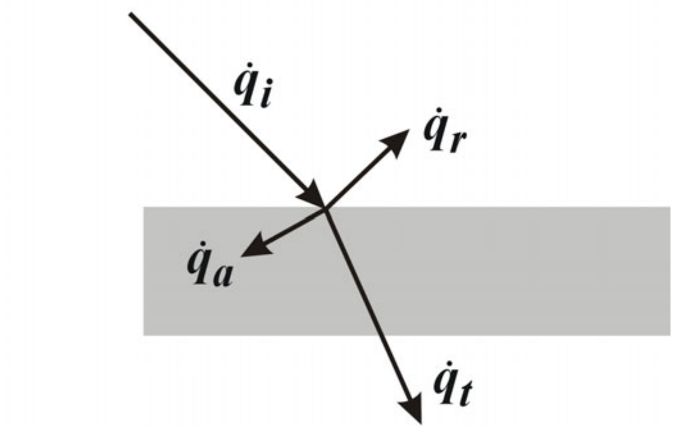
6.1. A hősugárzás alapfogalmai

λ hullámhosszú T hőmérsékletű sugárzása, az egységnyi felületre egységnyi idő alatt érkezett energia nagysága, teljesítménye (elektromágneses térben a Poynting vektor) ,

- $\dot{q}_i$ a felületre érkező/incident sugárzás intenzitása
- $\dot{q}_r$ a testről reflektált/visszavert sugárzás,
- $\dot{q}_a$ az elnyelt/abszorbeált sugárzás,
- $\dot{q}_t$ az átengedett/traszmittált sugárzás,

a λ hullámhosszú sugárzásra:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_r + \dot{q}_a + \dot{q}_t, \quad \begin{cases} \dot{q}_r = r\dot{q}_i, \\ \dot{q}_a = a\dot{q}_i, \\ \dot{q}_t = t\dot{q}_i, \end{cases}$$



$$\boxed{1 = r + a + t,}$$

λ hullámhosszú sugárzásra
- *r* a test reflexiós tényezője,
- *a* test abszorbciós tényezője,
- *t* a test transzmissziós tényezője,

Speciális esetek:

- <u>abszolút fekete test</u>, minden sugárzást elnyel, a=1, r=0, t=0,

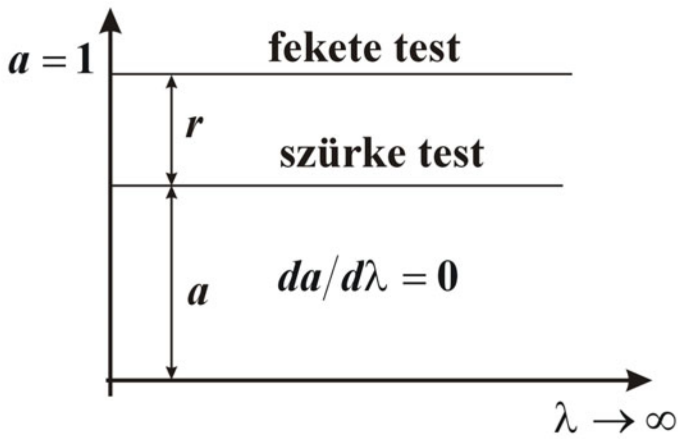
- <u>fehér test</u>, minden sugárzást visszaver, r=1, a=0, t=0,

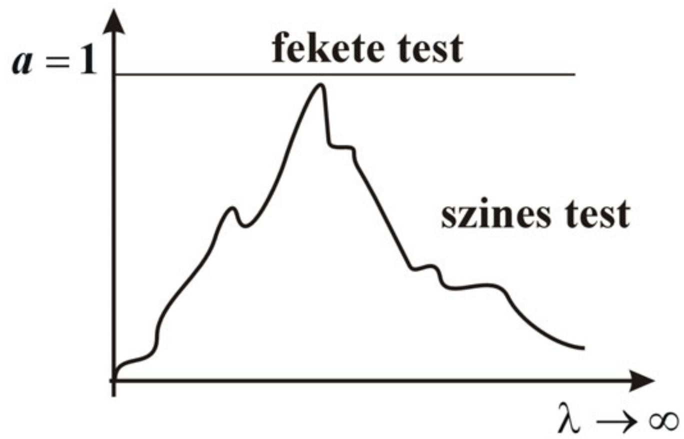
- <u>átlátszó test</u>, minden sugárzást áteresztt, t=1, a=0, r=0,

- <u>szürke test</u>, ha az abszobciós együtthatója a=áll<1,

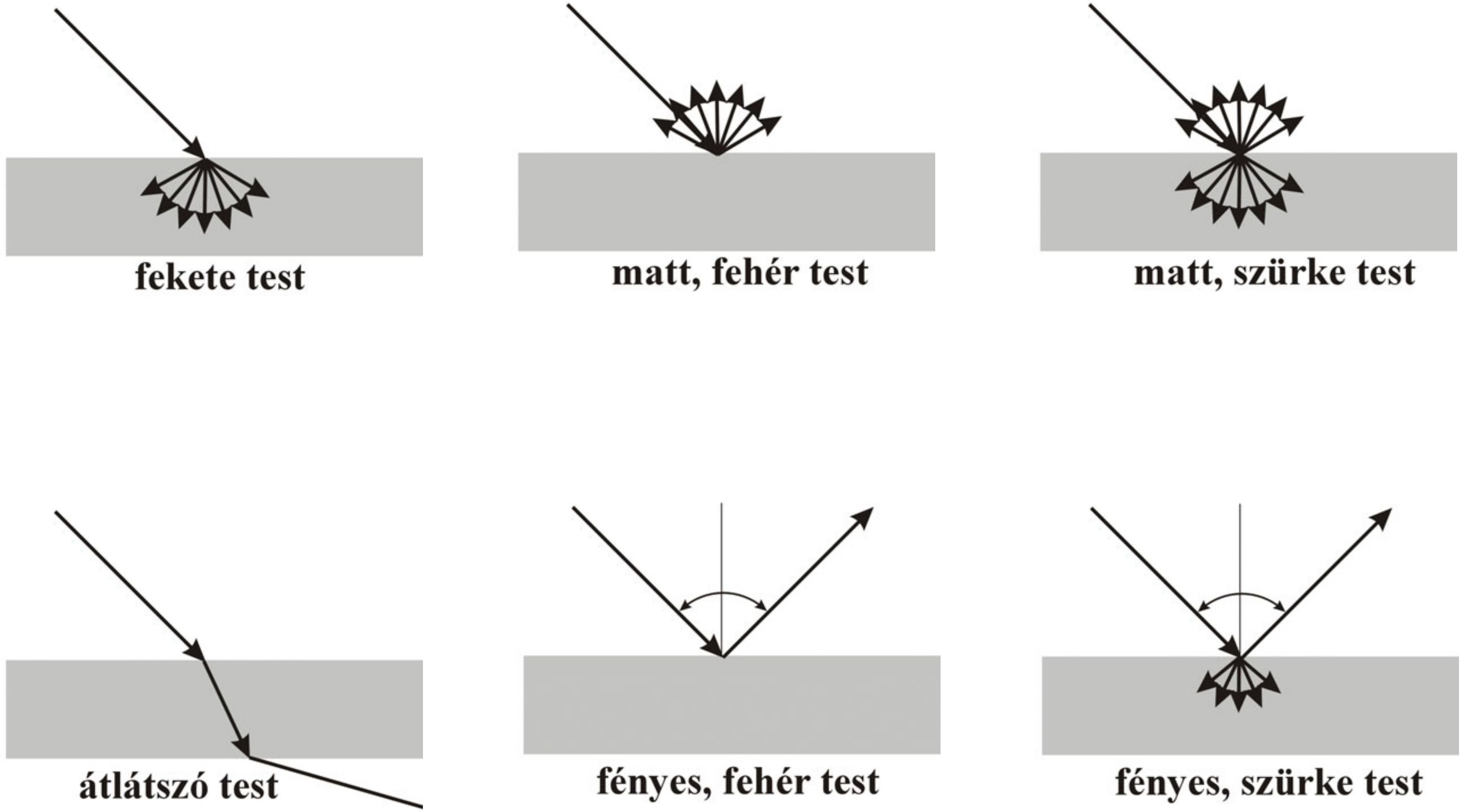
azaz egyenletesen kevesebbet nyel el, mit a fekete test,

nem átlátszó (t=0) testekre: a+r=1,



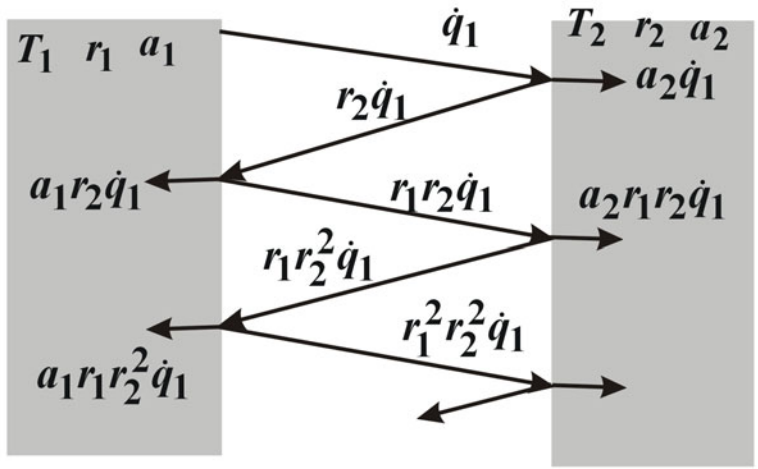


A felület minősége szerint lehet <u>fényes</u> és <u>matt</u>,



6.2. A hősugárzás Kirchhoff törvénye

λ hullámhosszú sugárzásra, átlátszatlan testekre, $t = 0$,
a test r reflexiós tényezője és a abszorbciós tényezője
közötti kapcsolatot adja meg $\dot{q}_i = \dot{q}_r + \dot{q}_a$, $1 = r_i + a_i$, $i = 1,2$,



1. felületen kilépő hőáram sűrűség: $\dot{q}_1$,

2. felületen elnyelődik: $a_2\dot{q}_1$,

2. felületen reflektált: $\dot{q}_1(1-a_2)$,

1. felületen elnyelődik: $\dot{q}_1(1-a_2)a_1$,

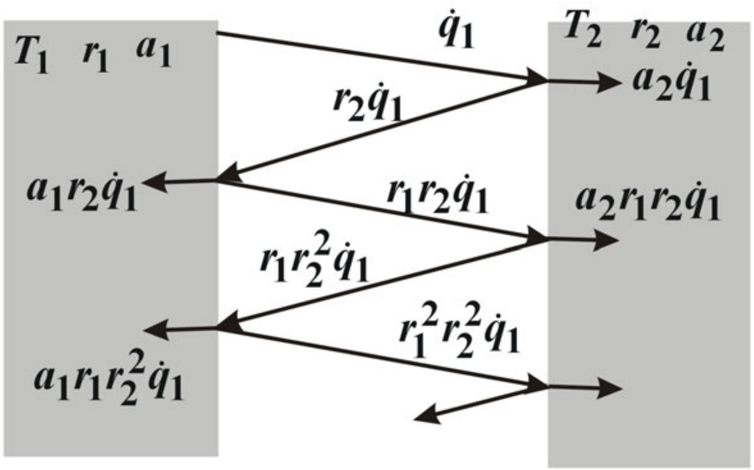
1. felületen reflektálódik: $\dot{q}_1(1-a_2)(1-a_1)$,

2. felületen elnyelődik: $\dot{q}_1(1-a_2)(1-a_1)a_2$,

2. felületen reflektálódik: $\dot{q}_1(1-a_2)^2(1-a_1)$,

1. felületen kisugárzott hőáram sűrűség:

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_1(1-a_2)a_1 - \dot{q}_1(1-a_2)^2(1-a_1)a_1 - \cdots = \dot{q}_1\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty}(1-a_2)^i(1-a_1)^{i-1}a_1\right],$$



Az 1. felületekről a 2. felületre kisugárzott hőáram sűrűség:

$$\dot{q}_{1\to 2} = \dot{q}_1\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty}(1-a_2)^i(1-a_1)^{i-1}a_1\right],$$

$$\dot{q}_{1\to 2} = \dot{q}_1\left[1 - a_1\frac{1-a_2}{1-(1-a_1)(1-a_2)}\right],$$

$$\dot{q}_{1\to 2} = \frac{\dot{q}_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2},$$

A 2. felületekről az 1. felületre kisugárzott hőáram sűrűség:

$$\dot{q}_{2\to 1} = \frac{\dot{q}_2 a_1}{a_2 + a_1 - a_1 a_2},$$

a két felület közötti hőáram sűrűség:

$$\dot{q}_{12} = \dot{q}_{1\to 2} - \dot{q}_{2\to 1} = \frac{\dot{q}_1 a_2 - \dot{q}_2 a_1}{a_1 + a_2 - a_1 a_2},$$

$$\dot{q}_1 = \varepsilon_1\sigma_0 T_1^4, \qquad \dot{q}_2 = \varepsilon_2\sigma_0 T_2^4,$$

$$\dot{q}_{12} = \sigma_0\frac{\varepsilon_1 T_1^4 a_2 - \varepsilon_2 T_2^4 a_1}{a_1 + a_2 - a_1 a_2},$$

ha $\left.\begin{matrix} T_1 = T_2 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{matrix}\right\} \to \dot{q}_{12} = 0,$

Ellenőrző kérdések I

- Ismertesse a hőmérsékleti skálákat és a hőmérők típusait és a hőtágulás összefüggéseit,
- Ismertesse a termodinamikai rendszerek osztályozását és a termodinamika 0. Főtételét,
- Ismertesse a termodinamikai rendszer belső energiája, a munka, a hőenergia, az entalpia és a látens hő fogalmát,
- Ismertesse a termodinamika I. Főtételét zárt, nyugvó és mozgó rendszerben,
- Ismertesse az ideális gázok izobár és izochor fajhőit és kapcsolatukat,
- Ismertesse az izobár, izochor, izoterm és adiabatikus állapotváltozások p-v karakterisztikáit,
- Ismertesse a termodinamika I. Főtételét nyitott, stacionárius és instacionárius rendszerre,
- Ismertesse a termodinamika I. Főtételét zárt és nyitott rendszerekben zajló körfolyamatokra,
- Ismertsesse a termodinamika II. Főtételét, az entrópia fogalmát, a hőmennyiség T-sdiagramját izobár, izoterm, isochor, adiabatikus és Carnot körfolyamatra,

Ellenőrző kérdések II

- Ismertesse a hőátvitel formáit,
- Ismertesse a hővezetés differenciálegyenletét,
- Ismertesse és értelmezze a hővezetés peremfeltételeit,
- Ismertesse az 1D stacionárius hővezetés analitikus megoldásának módszerét,
- Ismertesse az 1D stacionárius hővezetés megoldását a véges differenciák módszerével (FD),
- Ismertesse az 1D FD alkalmazásánál a peremfeltételek kielégítésének módját,
- Ismertesse az 1D hővezetés differenciálegyenletének analitikus megoldási módszerét,
- Ismertesse az 1D hővezetés differenciálegyenletének numerikus megoldását, a véges differenciák módszer időtartománybeli alkalmazásával (FDTD),
- Ismertesse a Crank-Nicolson formulát és értelmezését,
- Ismertesse a hőátadásra vonatkozó egyenletet, a kialakuló hőmérséklet meghatározását,
- Ismertesse a hősugárzásra vonatkozó alapfogalmakat,
- Ismertesse a hősugárzás Kirchhoff törvényét,

Irodalom

Tankönyv:

Műszaki Fizika (Fizika II) előadás vázlat, www.e-oktat.pmmf.pte.hu

Iványi A. Műszaki Fizika Informatikusoknak, PTE, PMMK, 2010. (megjelenés alatt)

Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Javasolt irodalom:

- **Környei Tamás, Termodinamika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2005, (45076)**

Felhasznált irodalom:

- **Bihari Péter, Műszaki termodinamika, Ideiglenes jegyzet, BME, 2001,**
- **Szabó Imre, Áramlástan és műszaki hőtan, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992,**
- **Szőke Béla, Hő és áramlástan , PTE, PMMK, Előadás vázlat, 2004,**
- **Iványi, A. Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában, Akadémiai Kiadó, 2003.**

Gyakorló feladatok,

Megoldandó feladatok az műszaki hőtan témaköréből.

Tankönyv, (TK): Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Ajánlott feladatok:
A tankönyv feladatai és a gyakorlatokon elhangzott feladatok.

A gyakorlatokon elhangzott feladatok
házi példatár: 2.19, 2.20, 2.21, 2.34, 2.36, 2.43 (SI egységben), 3.50, 3.61, 3.62, 6.152, 6.154, 6.156, 6.157, 7.237, 7.239 p-v diagram, 7.241, 7.242 feladatok.

Gyakorló feladatok,

**A hőátadás elméleti kérdéseinek megértése és a
számítási módszerek elméletének ismerete, rekonstruálása,
analitikus és véges differenciák módszerek alkalmazása
stacionárius, időben változó hővezetési és hőátadási
problémák megoldására,
a hőátadás és hősugárzás elméleti kérdéseinek megértése és a
számítási módszerek elméletének ismerete, rekonstruálása,**

**Hő-ellenállás számítása.
Hőszigetelés és rétegezett hővezetési feladatok megoldása.**