TRANSZPORT FOLYAMATOK MODELLEZÉSE

Dr. Iványi Miklósné

Professor Emeritus

5. Konferencia

Elektromágneses tér alapaxiómái, Maxwell egyenletek

Folytonossági egyenlet:

$$\oint_a \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\int_v \rho dv = 0$$

I. Gerjesztési törvény

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}\right)\cdot d\vec{a}$$

II. Faraday indukció törvény:

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{a}$$

III. Nincsenek mágneses töltések:

$$\oint_a \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

IV. Elektrosztatika Gauss tétele:

$$\int_v \rho\, dv = \oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a}$$

V. Anyag paraméterek:

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\,\vec{H}, \qquad \vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right)$$

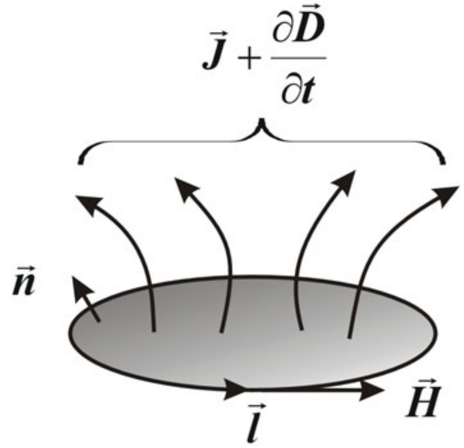
VI. Az elektromágneses tér energiája:

$$w = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \qquad W = \int_v w\, dv$$

Az elektromos és mágneses tér gerjesztettsége és intenzitása

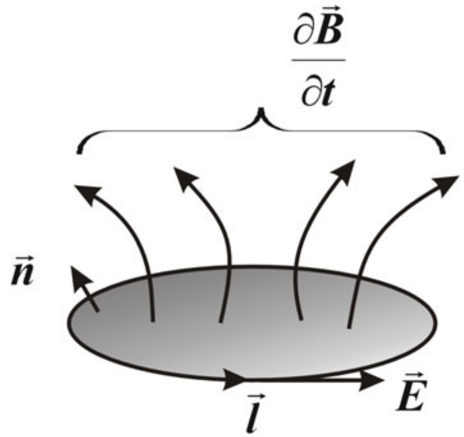
I. Gerjesztési törvény

$$\boxed{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{a}}$$



II. Faraday indukció törvény:

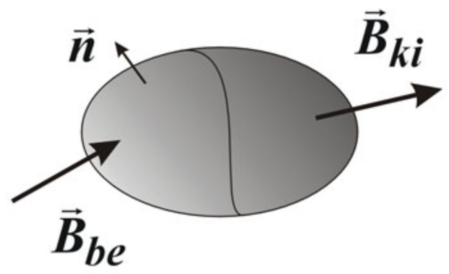
$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{a}}$$



Az elektromos és mágneses tér forrásossága

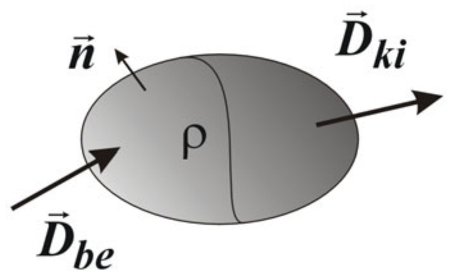
III. Nincsenek mágneses töltések:

$$\boxed{\oint_a \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$$



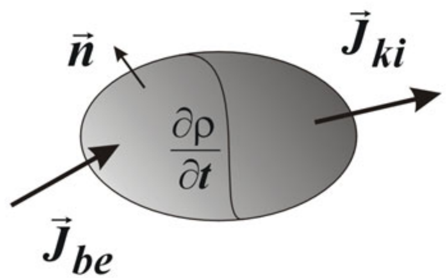
IV. Elektrosztatika Gauss tétele:

$$\boxed{\int_v \rho\, dv = \oint_a \vec{D}\cdot d\vec{a}}$$



Folytonossági egyenlet:

$$\boxed{\oint_a \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\int_v \rho dv = 0}$$



Az elektromágneses tér energiamérlege

$$\frac{dW}{dt} + P(t) + P_s(t) = 0,$$

dW/dt az elektromágneses tér energiájának időbeli megváltozása *,*
P(*t*) a térfogat a teljesítménye,
Ps(*t*) a térfogat felületén kisugárzott teljesítmény,

$$W = \int_v w dv = \int_v \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)dv,$$

$$P = \int_v p dv = \int_v \frac{1}{2}\vec{J}\cdot\vec{E} dv = \int_v \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{J}^2}{\sigma} - \vec{J}\cdot\vec{E}_i\right)dv,$$

a Poynting vektor

$$P_s = \oint_a \vec{S}\cdot d\vec{a} = \oint_a \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}, \qquad \vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t),$$

szinuszos változás esetén, komplex írásmód mellett a komplex Poynting vektor

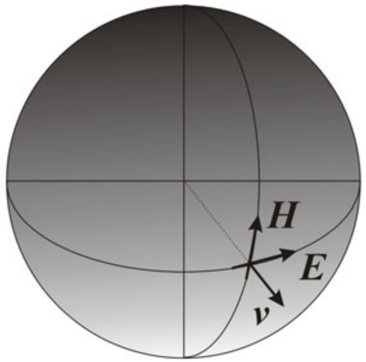
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \tilde{\vec{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-j\omega t}$$

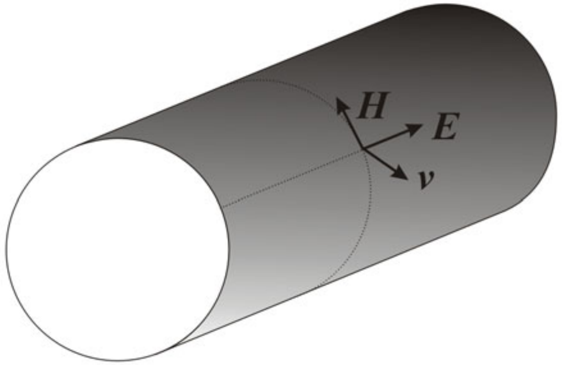
$$\vec{S}_k\left(\vec{r}, e^{j\omega t}\right) = \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\tilde{\vec{H}}(\vec{r}),$$

Elektromágneses hullámok

1. Szabadon terjedő hullámok, a hullámforrástól távol

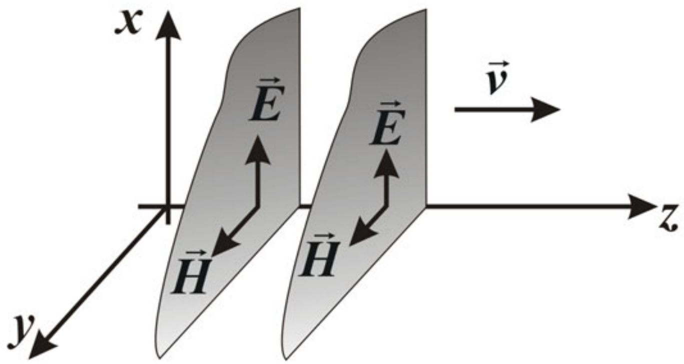
Formái: **gömbhullámok** **hengerhullámok**





síkhullámok

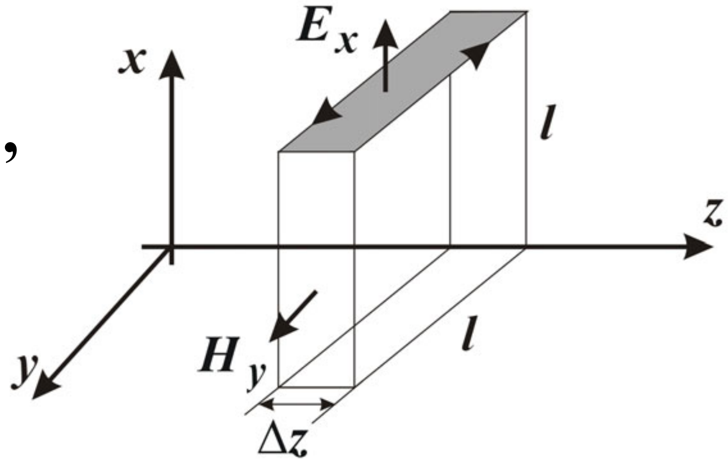
az $\vec{E}$ és a $\vec{H}$ térerősségek merőlegesek egymásra, és a terjedés irányára merőleges síkban fekszenek



$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\vec{e}_x,$$
$$\vec{H}(z,t) = H_y(z,t)\vec{e}_y,$$

1.1. A hullámegyenlet:

anyagparaméterek: $\vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E},$



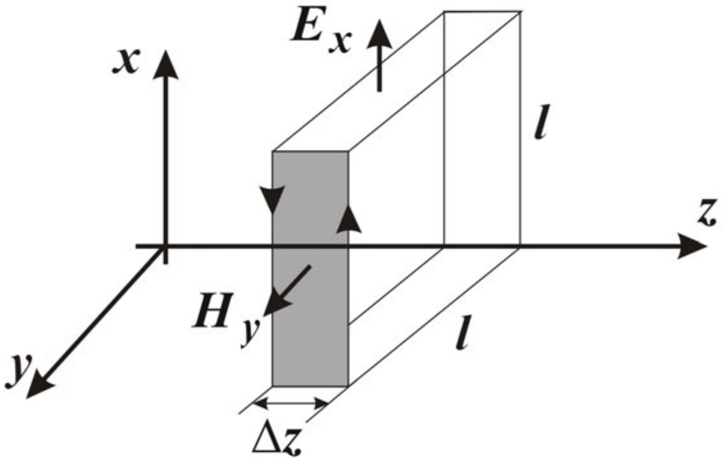
a gerjesztési törvény:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}$$

$$H_y(z,t)\cancel{l} - H_y(z+\Delta z,t)\cancel{l} = \left(\sigma E_x(z,t) + \varepsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right) \cancel{l}\, \Delta z,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{H_y(z+\Delta z,t) - H_y(z,t)}{\Delta z} = \boxed{\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = -\left(\sigma E_x(z,t) + \varepsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \right)},$$

anyagparaméterek: $\vec{B} = \mu \vec{H}$,



az indukció törvény:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$$-E_x(z,t)\cancel{l} + E_x(z+\Delta z,t)\cancel{l} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}\cancel{l}\,\Delta z,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{E_x(z+\Delta z,t) - E_x(z,t)}{\Delta z} = \boxed{\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}},$$

az EM tér egyenletei: csatolt differenciál egyenletrendszer

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = -\left(\sigma E_x(z,t) + \varepsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t},$$

mindkettőt *z*-szerint deriválva

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = -\left(\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z},$$

az elektromos és a mágneses tér hullámegyenlete:

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2},}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2},}$$

a szabadon terjedő hullám hullámegyenlete veszteséges közegben

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0,$$

a szabadon terjedő hullám hullámegyenlete szigetelő anyagban, σ=0,
<u>hullámegyenlet</u>

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0,$$

a szabadon terjedő hullám hullámegyenlete jó vezetőben, ε=0,
<u>diffúziós egyenlet</u>

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = 0,$$

1.2. A hullámegyenlet megoldása szinuszos időbeli változás esetén

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{E_x(z)e^{j\omega t}\right\}, \quad H_y(z,t) = \mathrm{Re}\left\{H_y(z)e^{j\omega t}\right\},$$

$E_x(z), H_y(z),$ **helyfüggő komplex amplitúdók,**

a komplex amplitúdókra a hullámegyenlet már csak helyfüggő differenciálegyenlet:

$$-\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)E_x(z) = 0, \rightarrow -\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 E_x(z) = 0,$$

$$-\frac{\partial^2 H_y(z)}{\partial z^2} + j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)H_y(z) = 0, \rightarrow -\frac{\partial^2 H_y(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 H_y(z) = 0,$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta, \quad [\gamma] = \frac{1}{\mathrm{m}}$$

γ – **a terjedési együttható,**
α – **a csillapítási tényező,**
β – **a fázistényező,**

A hullámegyenlet megoldása:

az elektromos térerősség helyszerinti változása:

$$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_x(z), \rightarrow \boxed{E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z},}$$

a mágneses térerősség hely szerinti változása:

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}, \rightarrow H_y(z) = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z},$$

$$H_y(z) = \frac{\gamma}{j\omega\mu}\left(E^+ e^{-\gamma z} - E^- e^{\gamma z}\right), \rightarrow \boxed{H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z},}$$

$$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}, \quad [Z_0] = \Omega,$$ a közeg hullámimpedanciája,

a térerősség függvények hely és idő szerinti eloszlása

$$\left.\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathrm{Re}\left\{E^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{E^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\}, \\ H_y(z,t) &= \mathrm{Re}\left\{\frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} - \mathrm{Re}\left\{\frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\}, \end{aligned}\right\} \text{haladó hullám,}$$

a térerősség függvények hely és idő szerinti eloszlása

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{E^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{E^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\},$$

$$H_y(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} - \mathrm{Re}\left\{\frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\},$$

a fázissebesség:

$$v = \frac{\omega}{\beta},$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_x(z,t) &= E^+ e^{-\alpha z} \cos\omega(t - z/v) + E^- e^{\alpha z} \cos\omega(t + z/v), \\ H_y(z,t) &= \frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos\omega(t - z/v) - \frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} \cos\omega(t + z/v), \end{aligned}}$$

retardált/késleltetett haladó hullám

az energia terjedés irányát a komplex Poynting vektor adja

$$\vec{S} = \tfrac{1}{2}\vec{E}(z) \times \vec{\tilde{H}}(z) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x(z) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_y(z) & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} E_x(z) \cdot \tilde{H}_y(z) \vec{e}_z,$$

1.3. A megoldás értelmezése:

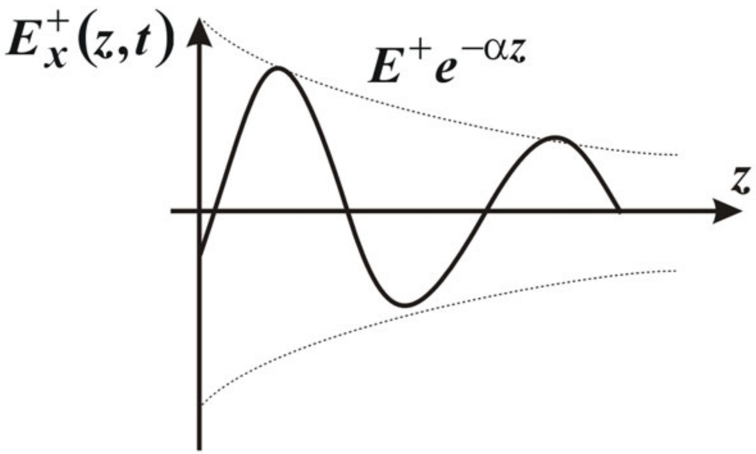
$$\boxed{E_x(z,t) = \underbrace{E^+ e^{-\alpha z}\cos\omega(t - z/v)}_{E_x^+(z,t)} + \underbrace{E^- e^{\alpha z}\cos\omega(t + z/v)}_{E_x^-(z,t)},}$$

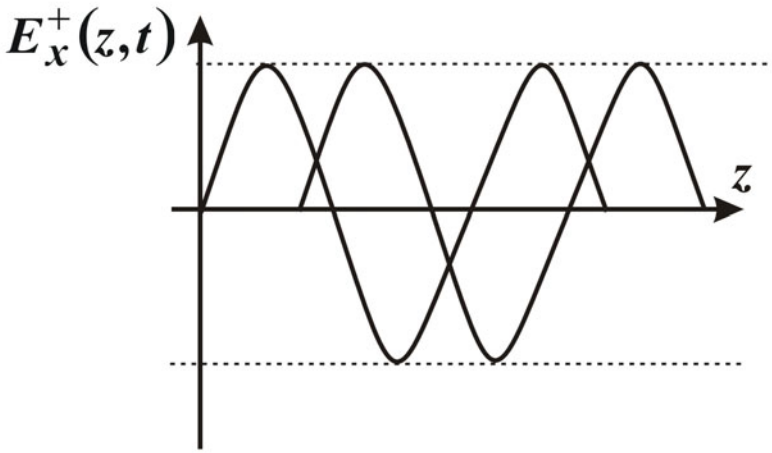
+z irányba haladó hullám **-z irányba haladó hullám**

a) α- csillapítási tényező: a hullám amplitúdója exponenciálisan csökken a z-tengely mentén

$$E^- = 0, \rightarrow E^+ e^{-\alpha z}\cos\omega(t - z/v),$$

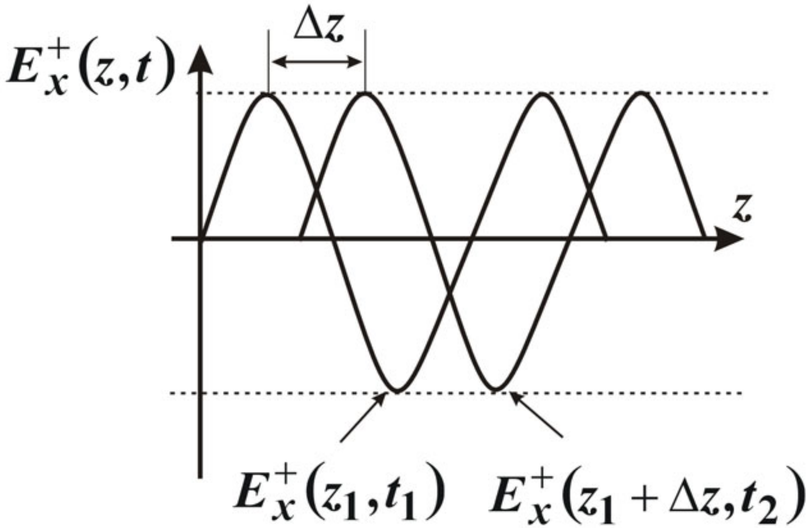
α=0, nincs csillapítás





nincs csillapítás $E_x^+(z,t) = E^+ \cos\omega(t - z/v)$,

b) a hullám haladó hullám, terjedési sebessége v

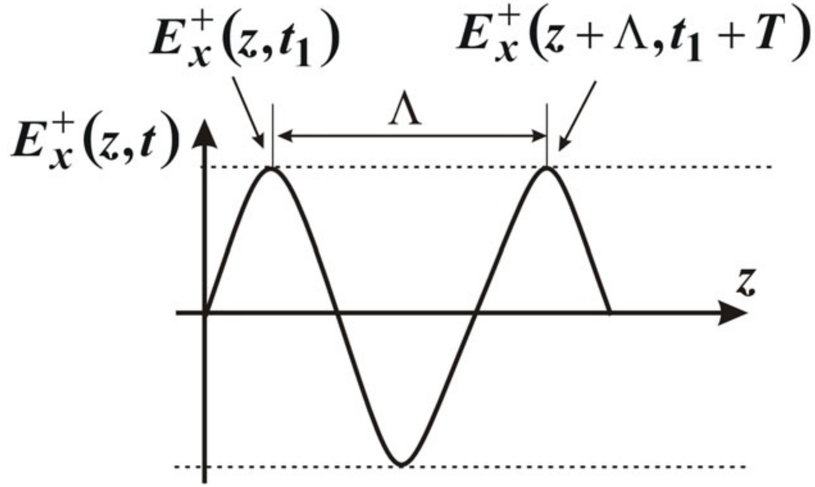


$$\cos\omega(t_1 - z/v) = \cos\omega(t_2 - (z+\Delta z)/v)$$

$$t_1 = (t_2 - \Delta z/v), \rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t = \Delta z/v,$$

$$\Delta z/\Delta t = v = \frac{\omega}{\beta},$$

c) a haladó hullám közegben mért hullámhossza Λ



$$\cos\omega(t_1 - z/v) = \cos\omega(t_1 + T - (z+\Lambda)/v)$$

$$0 = T - \Lambda/v, \rightarrow \Lambda = vT = \frac{\omega}{\beta}T,$$

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f},$$

1.4. Síkhullám szigetelőben, σ=0, nincs csillapítás,

a terjedési együttható: $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j\omega\mu j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta = j\dfrac{\omega}{v}$,

$$\alpha = 0,\; v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{N},$$

$N = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$,
Maxwell reláció,
a közeg törésmutatója

a hullám-impedancia: valós (rezisztív),

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}},$$

szigetelőben: $\mu_r = 1,\; \sqrt{\varepsilon_r} = n,$

$$v = c/n,\quad Z_0 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

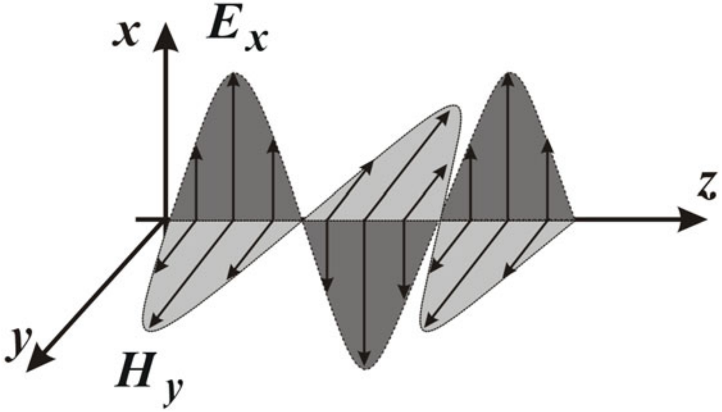
levegőrben: $\mu_r = 1,\; \varepsilon_r = 1, \rightarrow Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega = 376{,}9911\,\Omega \approx 377\,\Omega,$

a +z irányban terjedő térerősség hullámok azonos fázisban terjednek

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{E^+ e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right\} = E^+ \cos\omega(t - z/v),$$

$$H_y(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{E^+}{Z_0} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right\} = \frac{E^+}{Z_0} \cos\omega(t - z/v),$$

a +z irányban terjedő térerősség hullámok azonos fázisban terjednek, azaz lineárisan polarizáltak,



$$E_x(z,t) = E^+ \cos\omega(t - z/v),$$

$$H_y(z,t) = \frac{E^+}{Z_0}\cos\omega(t - z/v),$$

a hullámimpedancia: $Z_0 = E_x / H_y$,

az elektromos és mágneses térerősség hullámok egymásra erőlegesek a terjedés irányára merőleges síkban helyezkednek el, azaz <u>síkhullámok és tranzverzálisak</u>, az energia terjedést megadó komplex Poynting vektornak csak *z*-irányú komponense van,

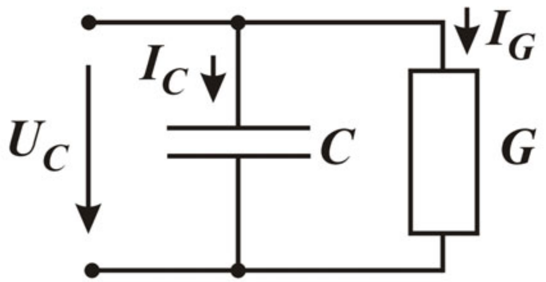
$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}(z)\times\tilde{\vec{H}}(z) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_y & 0 \end{vmatrix} = E_x(z)\cdot\tilde{H}_y(z)\vec{e}_z,$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}E^+\frac{\tilde{E}^+}{Z_0}\vec{e}_z = \frac{1}{2}\frac{\left|E^+\right|^2}{Z_0}\vec{e}_z,$$

1.5. Síkhullám veszteséges szigetelőben, $\sigma \neq 0$,

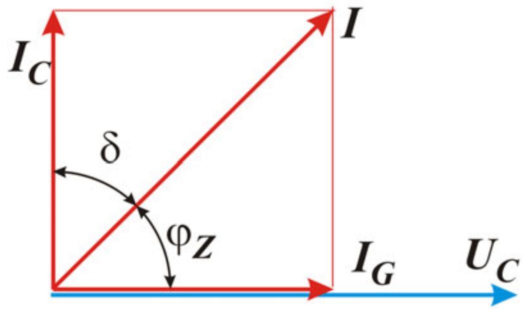
a terjedési együttható:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j\omega\mu\; j\omega\varepsilon(1+\sigma/j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1+\sigma/j\omega\varepsilon},$$



a veszteségi tényező:

$$tg(\delta) = \frac{I_G}{I_C} = \frac{U_C G}{U_C \omega C} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}, \quad \beta = \frac{\omega}{v}, \quad v = \frac{c}{n},$$



$$\gamma = j\beta\sqrt{1 - j\mathrm{tg}(\delta)} \approx j\beta\left(1 - j\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}(\delta)\right) = \alpha + j\beta,$$

$$\alpha \approx \frac{\beta}{2}\mathrm{tg}(\delta) = \frac{\omega}{2v}\mathrm{tg}(\delta) = \frac{\omega\, n}{2c}\mathrm{tg}(\delta), \quad \beta = \omega/v = \frac{\omega\, n}{c},$$

$$|x| << 1, \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \pm \cdots, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} \pm \cdots,$$

a hullámimpedancia:

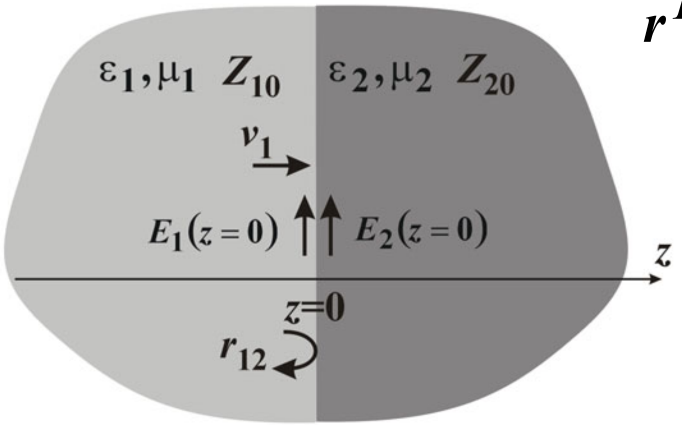
$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1+\sigma/j\omega\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1 - j\mathrm{tg}(\delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + j\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}(\delta)\right) = R + jX,$$

$$X << R,$$

1.6. Szigetelőben merőlegesen beeső síkhullámok reflexiója, $\sigma = 0$,

$$E_x(z) = E^+ e^{-j\beta z} + E^- e^{j\beta z}, \quad H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{j\beta z},$$

a reflexiós tényező:



$$r^E(z) = \frac{E^- e^{j\beta z}}{E^+ e^{-j\beta z}} = \frac{E^-}{E^+} e^{j2\beta z}, \quad r(0) = r_{12} = \frac{E^-}{E^+},$$

$$r^H(z) = \frac{H^- e^{j\beta z}}{H^+ e^{-j\beta z}} = \frac{-E^- / Z_0}{E^+ / Z_0} e^{j2\beta z} = -r^E(z),$$

$$E_x(z) = E^+\left(e^{-j\beta z} + r^E e^{j\beta z}\right), \quad H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - r^E e^{j\beta z}\right),$$

1. közegben

$$E_{1x}(z) = E_1^+\left(e^{-j\beta_1 z} + r_{12} e^{j\beta_1 z}\right),$$

$$H_{1y}(z) = \frac{E_1^+}{Z_{10}}\left(e^{-j\beta_1 z} - r_{12} e^{j\beta_1 z}\right),$$

2. közegben

$$E_{2x}(z) = E_2^+ e^{-j\beta_2 z},$$

$$H_{2y}(z) = \frac{E_2^+}{Z_{20}} e^{-j\beta_2 z},$$

az elektromos és mágneses térerősségek folytonosságára vonatkozó feltételekből:

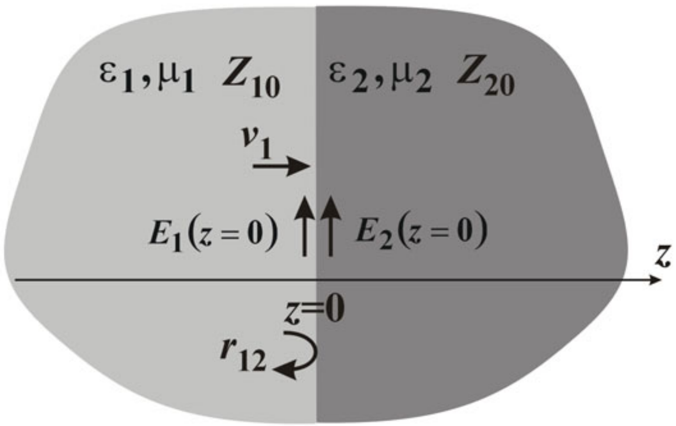
$$E_{1t}\big|_{z=-0} = E_{2t}\big|_{z=+0}, \quad H_{1t}\big|_{z=-0} = H_{2t}\big|_{z=+0},$$

a 2. közegben nincs reflexió, $r_2=0$, (végtelen távol van a közeg másik határa)

az 1-2 közeg határán $r_1 = r_{12}$,

$$E_{1x}(z=0) = E_1^+(1+r_{12}) = E_{2x}(z=0) = E_2^+,$$

$$H_{1y}(z=0) = \frac{E_1^+}{Z_{10}}(1-r_{12}) = H_{2y}(z=0) = \frac{E_2^+}{Z_{20}},$$



az első egyenletet elosztva a másodikkal:

$$Z_{10}\frac{(1+r_{12})}{(1-r_{12})} = Z_{20}, \rightarrow r_{12} = \frac{Z_{20}-Z_{10}}{Z_{20}+Z_{10}},$$

a közegekben a terjedési sebességek: $v_1 = 1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$, $v_2 = 1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$,

a közegekben a fázistényezők: $\beta_1 = \dfrac{\omega}{v_1}$, $\beta_2 = \dfrac{\omega}{v_2}$,

a közegekben a hullámimpedanciák: $Z_{10} = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$, $Z_{20} = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$,

<u>Példa 1.</u> Levegőből 2 mV/cm nagyságú, 60 MHz frekvenciájú elektromos térerősség érkezik merőlegesen az ε_r=4, μ_r=1 közeg felületére. Határozza meg

- a) **az egyes közegekben a hullámok terjedési sebességét és fázistényezőjét,**
- b) **az egyes közegekben terjedő hullámok hullámhosszúságát,**
- c) **az egyes közegekben a hullám-impedanciák értékét,**
- d) **az 1-2 közeg határán az elektromos térerősségre vonatkozó reflexiós tényezőt,**
- e) **az 1. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,**
- f) **az 1. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét,**
- g) **a 2. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,**
- h) **a 2. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét.**
- i) **Adja meg az egyes közegekben az elektromos térerősség hely-időfüggvényét,**
- j) **a mágneses térerősségek hely-időfüggvényét,**
- k) **az egységnyi határfelületen átáramló teljesítményt.**

<u>Megoldás</u>: koherens egységek: $[E] = \text{mV/cm}, \quad [H] = \text{mA/cm}, \quad [t] = \mu\text{s}, \quad [z] = \text{m},$

az 1. közeg levegő, a 2. közeg szigetelő $\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \quad \mu_1 = \mu_0, \quad \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, \quad \mu_2 = \mu_0,$

a) a terjedési sebességek és fázistényezők:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 3\cdot 10^8\,\text{m/s}, \quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{2r}}} = \frac{c}{2} = 1{,}5\cdot 10^8\,\text{m/s},$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{2\pi 60\cdot 10^6}{3\cdot 10^8} = 0{,}4\pi\ 1/\text{m}, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi 60\cdot 10^6}{1{,}5\cdot 10^8} = 0{,}8\pi\ 1/\text{m},$$

b) a közegekben terjedő hullámok hullámhosszúsága:

$$\Lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 5{,}0\,\mathrm{m}, \quad \Lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 2{,}5\,\mathrm{m},$$

c) a közegek hullámimpedanciája:

$$Z_{10} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \ \Omega, \quad Z_{20} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 60\pi \ \Omega$$

d) az 1-2 közeg határán az elektromos térerősségre vonatkozó reflexiós tényező:

$$r_{12} = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}} = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = -\frac{1}{3},$$

e) az 1. közeg határfelületén az elektromos térerősség értéke:

$$E_{1x}(z=0) = E_1 = E_1^+ (1 + r_{12}) = 2\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\mathrm{mV/cm},$$

f) az 1. közeg határfelületén a mágneses térerősség értéke:

$$H_{1y}(z=0) = H_1 = \frac{E_1^+}{Z_{10}}(1 - r_{12}) = \frac{2}{120\pi}\left(1 + \tfrac{1}{3}\right) = 0{,}0071\,\mathrm{mA/cm},$$

g) a 2. közeg határfelületén az elektromos térerősség értéke:

$$E_{2x}(z=0) = E_2^+ = E_{1x}(z=0) = \frac{4}{3}\,\mathrm{mV/cm},$$

h) a 2. közeg határfelületén a mágneses térerősség értéke:

$$H_{2y}(z=0) = H_{1y}(z=0) = 0{,}0071\,\mathrm{mA/cm} = \frac{E_2^+}{Z_{20}} = \frac{4}{3}\frac{1}{60\pi} = 0{,}0071\,\mathrm{mA/cm},$$

i) az egyes közegekben az elektromos térerősség hely-időfüggvénye:

$$E_1(z,t) = E_1^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) + E_1^- \cos(\omega t + \beta_1 z) =$$

$$= 2\cos(120\pi\, t - 0{,}4\pi\, z) - \frac{2}{3}\cos(120\pi\, t + 0{,}4\pi\, z)\,\text{mV/cm},$$

$$E_2(z,t) = E_2^+ \cos(\omega t - \beta_2 z) = \frac{4}{3}\cos(120\pi\, t - 0{,}8\pi\, z)\ \text{mV/cm},$$

j) az egyes közegekben az mágneses térerősség hely-időfüggvénye:

$$H_1(z,t) = \frac{E_1^+}{Z_{10}}\cos(\omega t - \beta_1 z) - \frac{E_1^-}{Z_{10}}\cos(\omega t + \beta_1 z) =$$

$$= \frac{2}{120\pi}\cos(120\pi\, t - 0{,}4\pi\, z) + \frac{2}{3\cdot 120\pi}\cos(120\pi\, t + 0{,}4\pi\, z) =$$

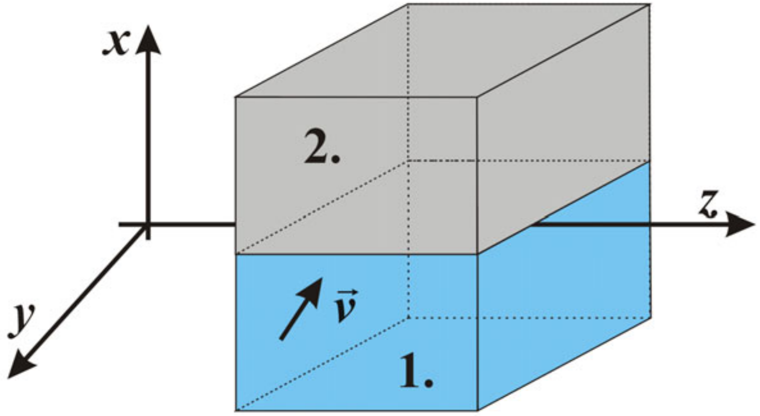
$$= 0{,}0027\cos(120\pi\, t - 0{,}4\pi\, z) + 0{,}0018\cos(120\pi\, t + 0{,}4\pi\, z)\,\text{mA/cm},$$

$$H_2(z,t) = \frac{E_2^+}{Z_{20}}\cos(\omega t - \beta_2 z) = \frac{4}{3\cdot 60\pi}\cos(120\pi\, t - 0{,}8\pi\, z) = 0{,}0071(120\pi\, t - 0{,}8\pi\, z)\,\text{mA/cm},$$

k) az egységnyi határfelületen átáramló teljesítmény:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\tilde{\vec{H}} = \frac{1}{2}\frac{\left|E_2^+\right|^2}{Z_{20}} = \frac{1}{2}\frac{(4/3)^2}{60\pi} = 0{,}0047\ \mu\text{W/m}^2$$

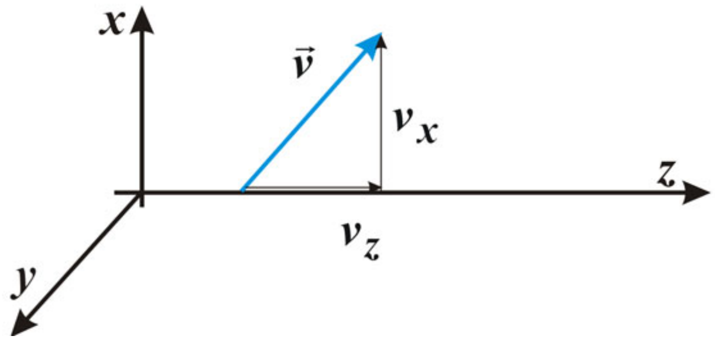
2. Szigetelőben ferdén beeső hullámok,



a haladó hullám terjedés sebességének
x-z komponense van, $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z,$

1. ha $x < 0$, 2. ha $x > 0$,

y-irányban nincs változás, $\dfrac{d}{dy} \equiv 0,$



a *z*-irányú terjedési együttható *β*,
a *z*-irányú fázissebesség v_z, $v_z = \omega/\beta,$
z-irányban haladó hullám alakul ki

Fourier féle szorzat-szeparációs megoldás

$$F(x,z) = C\,X(x)Z(z),$$

az *x*-irányú terjedési együttható *k*, *(cirkuláris hullámszám)*
ha *k* valós, az *x*-irányban is haladó hullám alakul ki, fázissebessége v_x, $v_x = \omega/k,$
ha *k* képzetes, az *x*-irányban az elektromágneses tér eltűnő,
ekkor az *x*-irányban állóhullám alakul ki,

komplex amplitúdók $\vec{E}(x,z) = \vec{E}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z}, \quad \vec{H}(x,z) = \vec{H}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$

a komplex amplitúdók

$$\vec{E}(x,z)=\vec{E}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$$

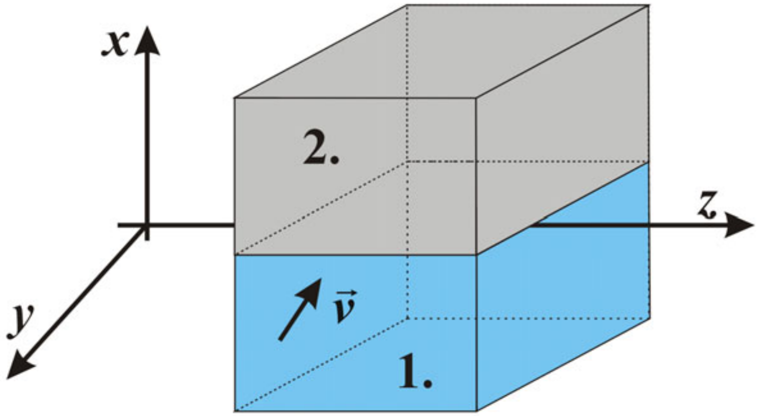
$$\vec{H}(x,z)=\vec{H}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$$

a térerősség vektorok

$$\vec{E}(x,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{E}(x,z)e^{j\omega t}\right\},$$

$$\vec{H}(x,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{H}(x,z)e^{j\omega t}\right\},$$

1. ha $x<0$, 2. ha $x>0$,



<u>ha k valós</u>

$$\begin{cases}\vec{E}(x,z,t)=\vec{E}_1\cos(\omega t\mp kx-\beta z),\\ \vec{H}(x,z,t)=\vec{H}_1\cos(\omega t\mp kx-\beta z),\end{cases}$$

<u>ha $k=-j\kappa$, képzetes</u>

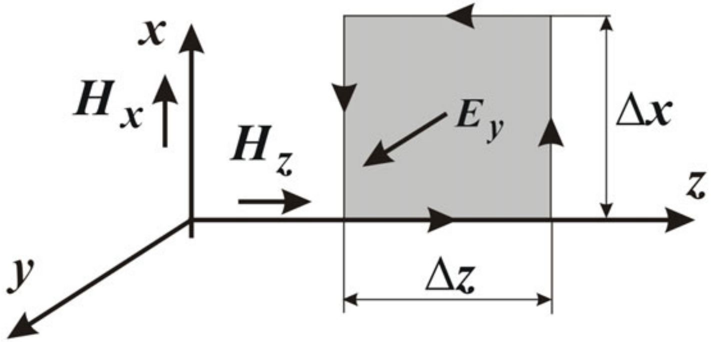
$$\begin{cases}\vec{E}(x,z,t)=\vec{E}_1 e^{\mp\kappa x}\cos(\omega t-\beta z),\\ \vec{H}(x,z,t)=\vec{H}_1 e^{\mp\kappa x}\cos(\omega t-\beta z),\end{cases}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_x+\vec{E}_y+\vec{E}_z,\quad \vec{H}=\vec{H}_x+\vec{H}_y+\vec{H}_z,$$

a térerősségek mindhárom komponense megjelenik a hullámterjedésben

2.1. TE és TM típusú/módusú hullámok,

a gerjesztési törvény a komplex formalizmus alkalmazásával, $\left|\vec{J}\right| << \left|\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|,$



$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a},$$

$$\oint_l \vec{H}(x,z)\cdot d\vec{l} = \int_a j\omega\varepsilon \vec{E}(x,z)\cdot d\vec{a},$$

$$-H_x(x,z)\Delta x + H_z(x,z)\Delta z + H_x(x,z+\Delta z)\Delta x - H_z(x+\Delta x,z)\Delta z =$$

$$= j\omega\varepsilon\; E_y(x,z)\Delta x\Delta z,$$

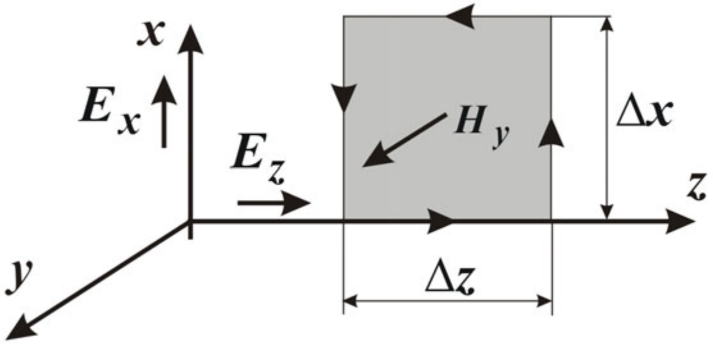
$$j\omega\varepsilon E_y = \frac{H_x(x,z+\Delta z) - H_x(x,z)}{\Delta z} - \frac{H_z(x+\Delta x,z) - H_z(x,z)}{\Delta x},$$

ciklikusan kiértékelve:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad j\omega\varepsilon E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon E_z = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x}, \\[2ex] j\omega\varepsilon E_x = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial H_y}{\partial z}, \end{cases}$$

az indukció törvény a komplex formalizmus alkalmazásával,



$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a},$$

$$\oint_l \vec{E}(x,z)\cdot d\vec{l} = -j\omega\mu \int_a \vec{H}(x,z)\cdot d\vec{a},$$

$$-E_x(x,z)\Delta x + E_z(x,z)\Delta z + E_x(x,z+\Delta z)\Delta x - E_z(x+\Delta x,z)\Delta z =$$

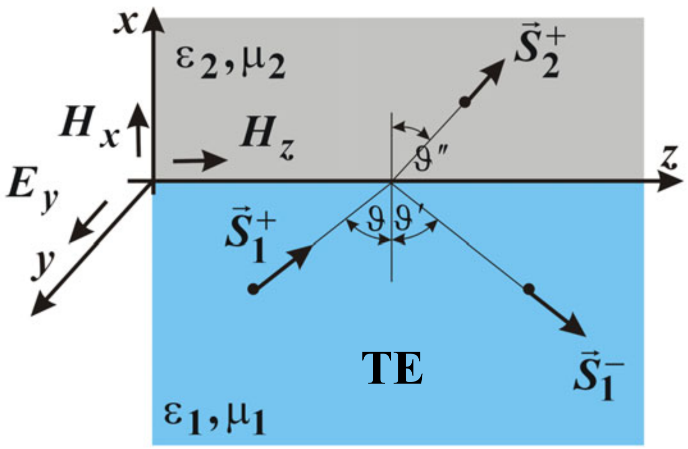
$$= -j\omega\mu\, H_y(x,z)\Delta x \Delta z,$$

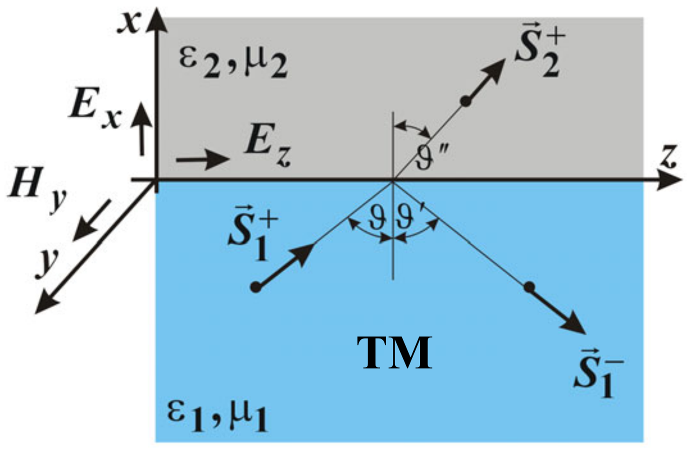
$$-j\omega\mu H_y = \frac{E_x(x,z+\Delta z) - E_x(x,z)}{\Delta z} - \frac{E_z(x+\Delta x,z) - E_z(x,z)}{\Delta x},$$

ciklikusan kiértékelve:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad -j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\begin{cases} -j\omega\mu H_x = \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial z}, \\[2ex] -j\omega\mu H_z = \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}, \end{cases}$$





TE típusú/módusú hullámterjedés
tranzverzális elektromos,
az *x,z* síkra merőleges az *Ey*

$$H_x, H_z \leftarrow E_y,$$

TM típusú/módusú hullámterjedés
tranzverzális mágneses,
az *x,z* síkra merőleges az *Hy*

$$E_x, E_z \leftarrow H_y,$$

a diszperziós egyenlet

$$-j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z},$$

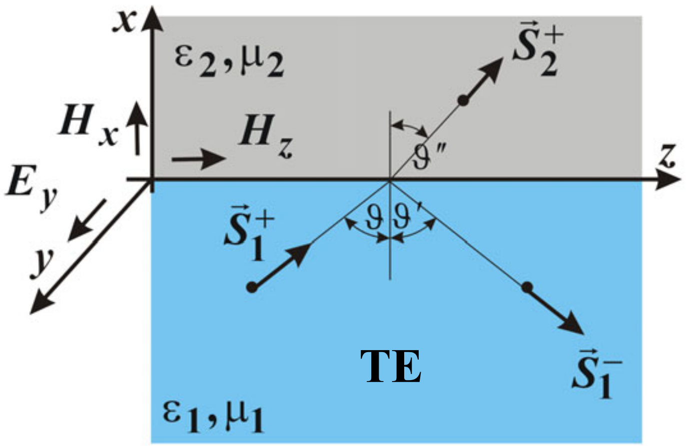
$$-j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

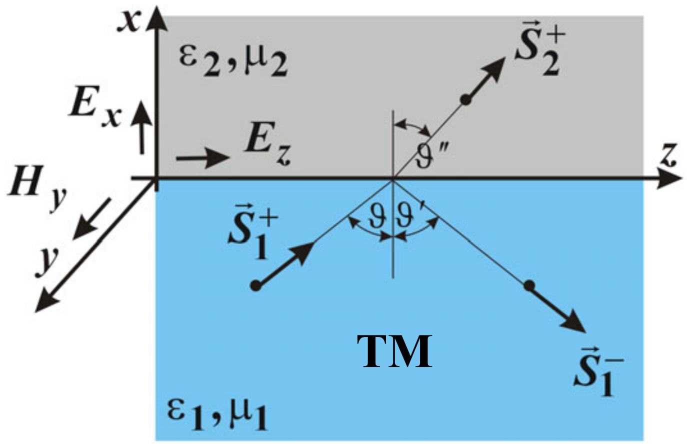
$$j\omega\varepsilon E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$-j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$j\omega\varepsilon E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$j\omega\varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x},$$





$$\vec{E}(x,z)=\vec{E}e^{\mp jkx}e^{-j\beta z},$$

<u>TE típusú/módusú hullámterjedés</u>

tranzverzális elektromos,

az *x,z* síkra merőleges az *Ey*

$$H_x, H_z \leftarrow E_y,$$

$$H_x=-\frac{\beta}{\omega\mu}E_y,$$

$$H_z=\frac{\pm k}{\omega\mu}E_y,$$

$$\vec{H}(x,z)=\vec{H}e^{\mp jkx}e^{-j\beta z},$$

<u>TM típusú/módusú hullámterjedés</u>

tranzverzális mágneses,

az *x,z* síkra merőleges a *Hy*

$$E_x, E_z \leftarrow H_y,$$

$$E_x=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}H_y,$$

$$E_z=\frac{\mp k}{\omega\varepsilon}H_y,$$

<u>a diszperziós egyenlet</u>

$$k^2+\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon,$$

$$k=0,\ \beta^2=\omega^2\mu\varepsilon=N^2k_0^2,$$

a szabadtéri fázistényező, cirkuláris hullámszám:

$$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda},$$

$N=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$, **a közeg törésmutatója,** **szigetelőben** $\mu_r=1,\rightarrow n=\sqrt{\varepsilon_r}$,

2.2. Teljesítményáramlás a komplex Poynting vektorral $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \tilde{\vec{H}},$

TE típusú/módusú hullámterjedés esetén $H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu}E_y,\ \ H_z = \pm\frac{k}{\omega\mu}E_y,$

$$\vec{S}^{TE} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \tilde{\vec{H}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ \tilde{H}_x & 0 & \tilde{H}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_x E_y \tilde{H}_z - \vec{e}_z E_y \tilde{H}_x\right] = \vec{S}_x + \vec{S}_z,$$

$$S_x^{TE} = \frac{\pm\tilde{k}}{2\omega\mu}\left|E_y\right|^2,\ \ S_y^{TE} = 0,\ \ S_z^{TE} = \frac{\beta}{2\omega\mu}\left|E_y\right|^2,$$

TM típusú/módusú hullámterjedés esetén $E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}H_y,\ \ E_z = \mp\frac{k}{\omega\varepsilon}H_y,$

$$\vec{S}^{TM} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \tilde{\vec{H}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & E_z \\ 0 & \tilde{H}_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[-\vec{e}_x E_z \tilde{H}_y + \vec{e}_z E_x \tilde{H}_y\right] = \vec{S}_x + \vec{S}_z,$$

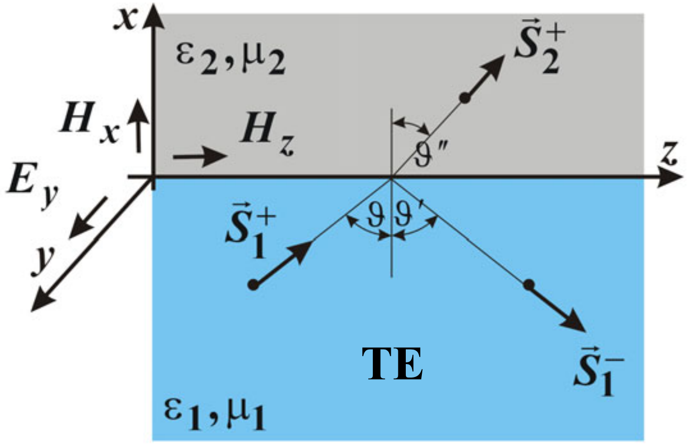
$$S_x^{TM} = \frac{\pm k}{2\omega\varepsilon}\left|H_y\right|^2,\ \ S_y^{TM} = 0,\ \ S_z^{TM} = \frac{\beta}{2\omega\varepsilon}\left|H_y\right|^2,$$

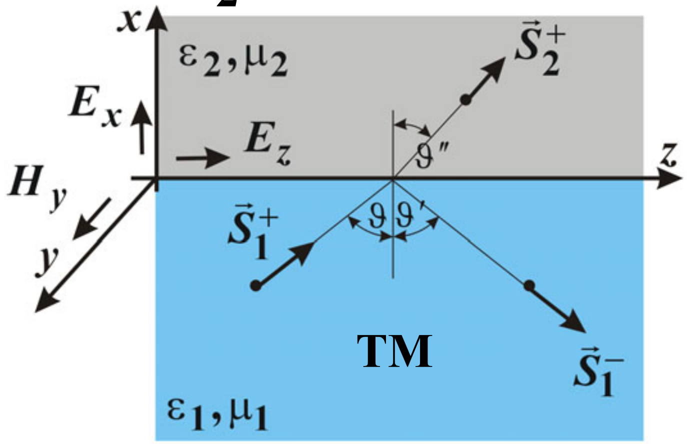
a *z*-tengely irányban hatásos teljesítmény áramlik,
az *y*-tengely irányában nincs teljesítmény áramlás,
az *x*-tengely irányában

ha *k*-valós, csillapítatlan a haladó hullám, hatásos teljesítmény áramlik,
ha $k = \mp j\kappa$, eltűnő az elektromágneses tér, meddő teljesítmény áramlik,

Teljesítményáramlás a komplex Poynting vektorral

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\tilde{\vec{H}},$$





TE típusú/módusú hullámterjedés esetén

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu}E_y,\quad H_z = \pm\frac{k}{\omega\mu}E_y,$$

$$\vec{S}^{TE} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\tilde{\vec{H}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ \tilde{H}_x & 0 & \tilde{H}_z \end{vmatrix},$$

$$S_x^{TE} = \frac{\pm\tilde{k}}{2\omega\mu}\left|E_y\right|^2,\quad S_y^{TE} = 0,$$

$$S_z^{TE} = \frac{\beta}{2\omega\mu}\left|E_y\right|^2,$$

TM típusú/módusú hullámterjedés esetén

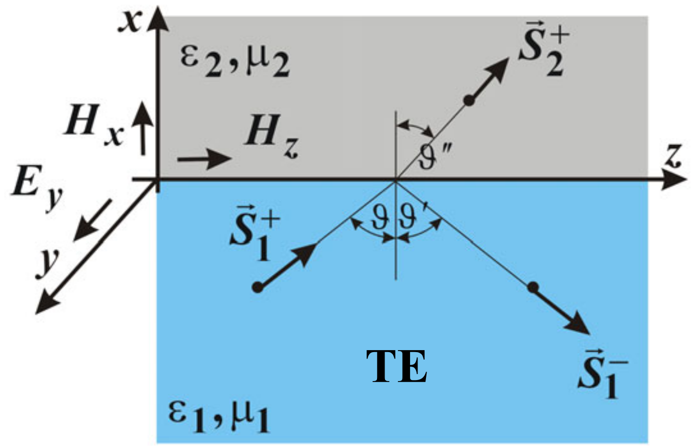
$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}H_y,\quad E_z = \mp\frac{k}{\omega\varepsilon}H_y,$$

$$\vec{S}^{TM} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\tilde{\vec{H}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & E_z \\ 0 & \tilde{H}_y & 0 \end{vmatrix},$$

$$S_x^{TM} = \frac{\pm k}{2\omega\varepsilon}\left|H_y\right|^2,\quad S_y^{TM} = 0,$$

$$S_z^{TM} = \frac{\beta}{2\omega\varepsilon}\left|H_y\right|^2,$$

2.3. Hullámterjedés az egyes rétegekben
a) TE módusú hullámterjedés



$$\vec{E}(x,z) = \vec{E} e^{\mp jkx} e^{-j\beta z}, \qquad k^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon,$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y, \quad H_z = \pm \frac{k}{\omega\mu} E_y,$$

a térerősségek 1. közeg

$$E_{1y}(x,z) = \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

$$H_{1x}(x,z) = -\frac{\beta_1}{\omega\mu_1}\left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

$$H_{1z}(x,z) = \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - E_{1y}^- e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

E_1^+, **beeső hullám,**

E_1^-, **visszavert hullám,**

E_2^+, **megtört hullám,**

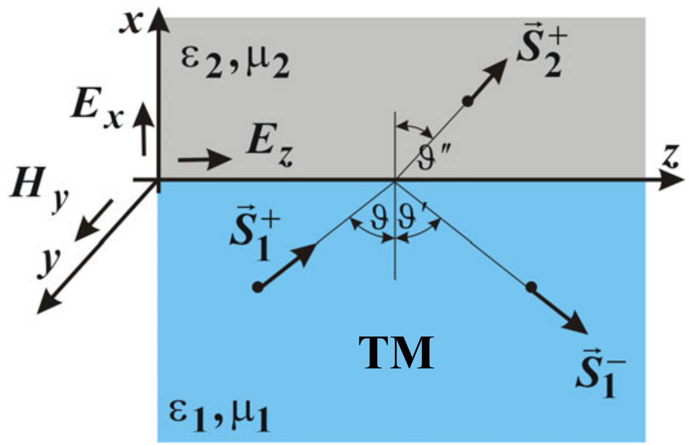
a térerősségek 2. közeg

$$E_{2y}(x,z) = E_{2y}^+ e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

$$H_{2x}(x,z) = -\frac{\beta_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

$$H_{2z}(x,z) = \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

b) TM módusú hullámterjedés



$$\vec{H}(x,z)=\vec{H}e^{\mp jkx}e^{-j\beta z},$$

$$E_x=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}H_y,\quad E_z=\mp\frac{k}{\omega\varepsilon}H_y,$$

$$k^2+\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon,$$

a térerősségek 1. közeg

$$H_{1y}(x,z)=\left(H_{1y}^{+}e^{-jk_1x}+H_{1y}^{-}e^{jk_1x}\right)e^{-j\beta_1z},$$

$$E_{1x}(x,z)=\frac{\beta_1}{\omega\varepsilon_1}\left(H_{1y}^{+}e^{-jk_1x}+H_{1y}^{-}e^{jk_1x}\right)e^{-j\beta_1z},$$

$$E_{1z}(x,z)=-\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\left(H_{1y}^{+}e^{-jk_1x}-H_{1y}^{-}e^{jk_1x}\right)e^{-j\beta_1z},$$

H_1^+, **beeső hullám,**

H_1^-, **visszavert hullám,**

H_2^+, **megtört hullám,**

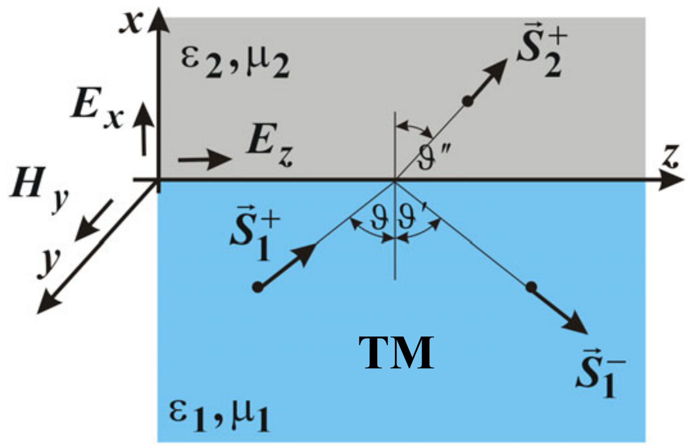
a térerősségek 2. közeg

$$H_{2y}(x,z)=H_{2y}^{+}e^{-jk_2x}e^{-j\beta_2z},$$

$$E_{2x}(x,z)=\frac{\beta_2}{\omega\varepsilon_2}H_{2y}^{+}e^{-jk_2x}e^{-j\beta_2z},$$

$$E_{2z}(x,z)=-\frac{k_2}{\omega\varepsilon_2}H_{2y}^{+}e^{-jk_2x}e^{-j\beta_2z},$$

b) TM módusú hullámterjedés



$$\vec{H}(x,z) = \vec{H} e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$$

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} H_y, \quad E_z = \mp \frac{k}{\omega\varepsilon} H_y,$$

$$k^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon,$$

a térerősségek 1. közeg

$$H_{1y}(x,z) = \left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} + H_{1y}^{-} e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

$$E_{1x}(x,z) = \frac{\beta_1}{\omega\varepsilon_1}\left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} + H_{1y}^{-} e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

$$E_{1z}(x,z) = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} - H_{1y}^{-} e^{jk_1 x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

H_1^+**, beeső hullám,**

H_1^-**, visszavert hullám,**

H_2^+**, megtört hullám,**

a térerősségek 2. közeg

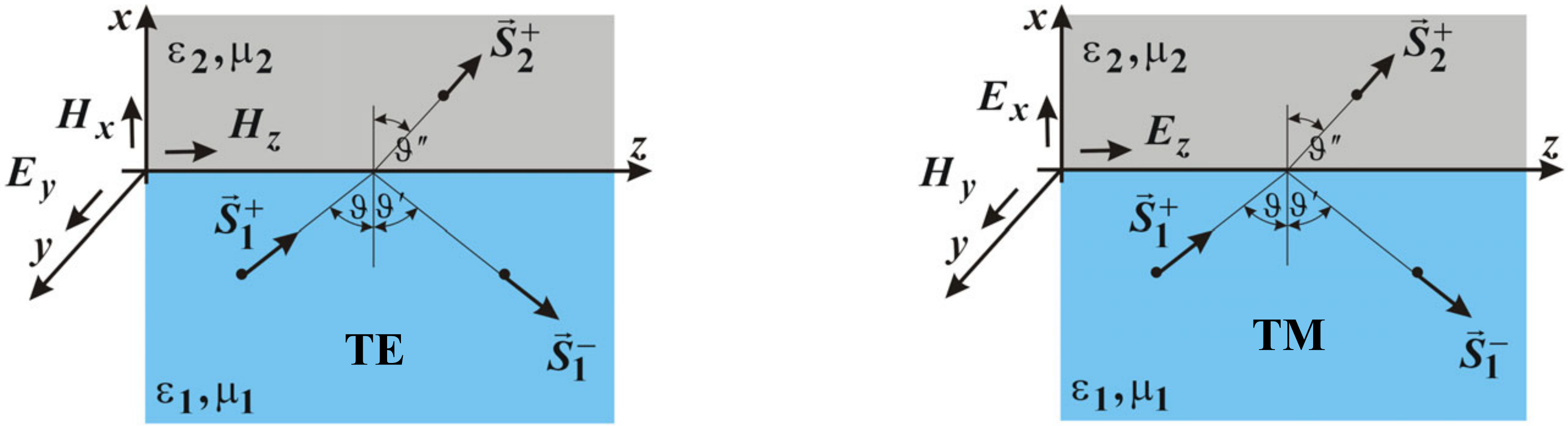
$$H_{2y}(x,z) = H_{2y}^{+} e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

$$E_{2x}(x,z) = \frac{\beta_2}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^{+} e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

$$E_{2z}(x,z) = -\frac{k_2}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^{+} e^{-jk_2 x} e^{-j\beta_2 z},$$

2.4. A hullámterjedés paramétereinek meghatározása,

$$\beta_1, k_1, \beta_2, k_2, \vartheta, \vartheta', \vartheta'',\ TE \to E_{1y}^-, E_{2y}^+,\quad TM \to H_{1y}^-, H_{2y}^+,$$



$$E_{1y}(x,z) = \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1x} + E_{1y}^- e^{-jk_1x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

$$E_{2y}(x,z) = E_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2 z},$$

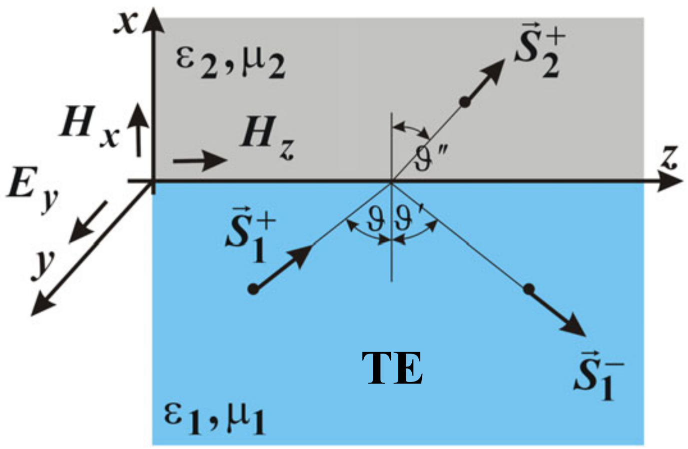
$$H_{1y}(x,z) = \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1x} + H_{1y}^- e^{-jk_1x}\right) e^{-j\beta_1 z},$$

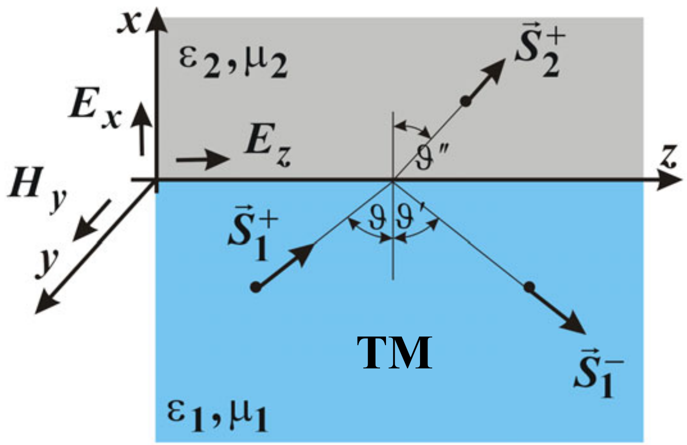
$$H_{2y}(x,z) = H_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2 z},$$

a) a közegek törésmutatói, $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1, \to n_1 = \sqrt{\varepsilon_{1r}},\ n_2 = \sqrt{\varepsilon_{2r}},$

b) x=0 helyen mindkét közegben a z-irányú sebesség azonos,

$$v_{1z} = \frac{\omega}{\beta_1} = v_{2z} = \frac{\omega}{\beta_2}, \to \beta_1 = \beta_2 = \beta,$$





c) ***x*-irányú terjedési együttható a beeső és a reflektált komponense azonos, a visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel,**

$$k_1\left(E_1^+\right)=k_1\left(E_1^-\right), \rightarrow \vartheta=\vartheta', \qquad \beta^2 \qquad k_1\left(H_1^+\right)=k_1\left(H_1^-\right), \rightarrow \vartheta=\vartheta',$$

d) a diszperziós egyenlet alapján a vizsgált esetben:

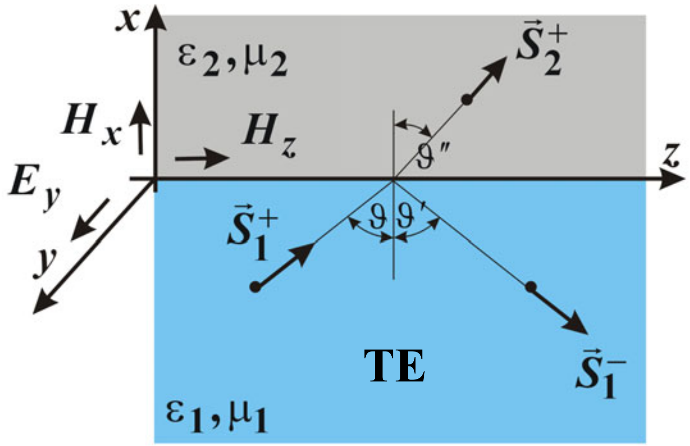
$$k_1=\sqrt{\omega^2\mu_1\varepsilon_1-\beta^2}=\sqrt{N_1^2k_0^2-\beta^2},$$

1. közeg, k_1 valós, csillapítatlan a hullámterjedés, $\beta<\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=N_1k_0,$

$$k_2=\sqrt{\omega^2\mu_2\varepsilon_2-\beta^2}=-j\sqrt{\beta^2-N_2^2k_0^2}=-j\kappa_2, \qquad N_2k_0<\beta<N_1k_0,$$

2. közeg, k_2 képzetes, eltűnő az *x*-irányú erőtér, $\beta>N_2k_0,\; k_2=-j\kappa_2,$

e) TE módusú hullámterjedés eltűnő térrel



$$E_y(x,z) = E_y e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y, \quad H_z = \pm\frac{k}{\omega\mu} E_y,$$

1. közeg, k_1 valós, csillapítatlan a hullámterjedés,
2. közeg, k_2 képzetes, eltűnő az x-irányú erőtér,

$$E_{1y}(x,z) = \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

$$H_{1x}(x,z) = -\frac{\beta}{\omega\mu_1}\left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

$$H_{1z}(x,z) = \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - E_{1y}^- e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

E_1^+, beeső hullám,

E_1^-, visszavert hullám,

E_2^+, megtört hullám,

$$E_{2y}(x,z) = E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

$$H_{2x}(x,z) = \frac{-\beta}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

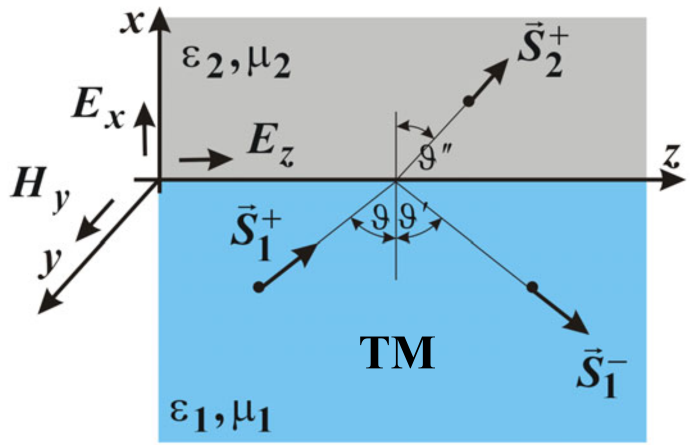
$$H_{2z}(x,z) = \frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

f) TM módusú hullámterjedés eltűnő térrel

$$H_y(x,z) = H_y e^{\mp jkx} e^{-j\beta z},$$

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} H_y, \quad E_z = \mp \frac{k}{\omega\varepsilon} H_y,$$

1. közeg, k_1 valós, csillapítatlan a hullámterjedés,
2. közeg, k_2 képzetes, eltűnő az x-irányú erőtér,



$$H_{1y}(x,z) = \left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} + H_{1y}^{-} e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

$$E_{1x}(x,z) = \frac{\beta}{\omega\mu_1}\left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} + H_{1y}^{-} e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

$$E_{1z}(x,z) = -\frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(H_{1y}^{+} e^{-jk_1 x} - H_{1y}^{-} e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z},$$

H_1^{+}, beeső hullám,

H_1^{-}, visszavert hullám,

H_2^{+}, megtört hullám,

$$H_{2y}(x,z) = H_{2y}^{+} e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

$$E_{2x}(x,z) = \frac{\beta}{\omega\mu_2} H_{2y}^{+} e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

$$E_{2z}(x,z) = \frac{j\kappa_2}{\omega\mu_2} H_{2y}^{+} e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z},$$

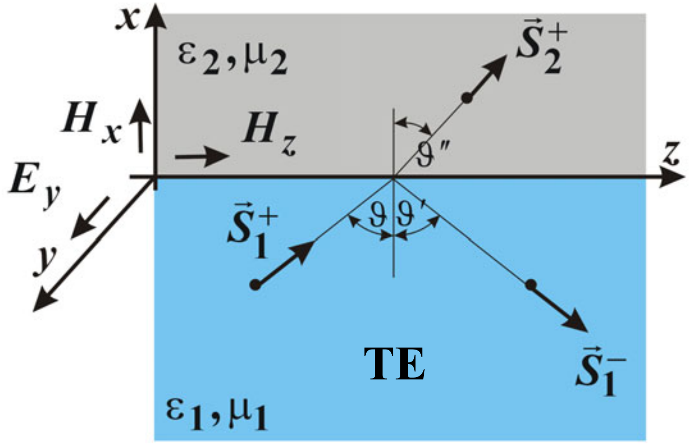
g) TE módus, a két réteg illesztése,
a tangenciális térerősség komponensek folytonosak az *x*=0 helyen:

$$E_{1y}(x,z)=\left(E_{1y}^{+}e^{-jk_1x}+E_{1y}^{-}e^{+jk_1x}\right)e^{-j\beta z},$$

$$E_{2y}(x,z)=E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

$$H_{1z}(x,z)=\frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(E_{1y}^{+}e^{-jk_1x}-E_{1y}^{-}e^{+jk_1x}\right)e^{-j\beta z},$$

$$H_{2z}(x,z)=\frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_2}E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$



$$E_{1y}(x=0,z)=E_{2y}(x=0,z),\rightarrow \quad E_{1y}^{+}+E_{1y}^{-}=E_{2y}^{+},$$

$$H_{1z}(x=0,z)=H_{2z}(x=0,z),\rightarrow \quad \frac{k_1}{\mu_1}E_{1y}^{+}-\frac{k_1}{\mu_1}E_{1y}^{-}=\frac{-j\kappa_2}{\mu_2}E_{2y}^{+},$$

a reflexiós tényező: $$r_{TE}=\frac{E_{1y}^{-}}{E_{1y}^{+}}=\frac{\dfrac{k_1}{\mu_1}-\dfrac{-j\kappa_2}{\mu_2}}{\dfrac{k_1}{\mu_1}+\dfrac{-j\kappa_2}{\mu_2}},$$

$$E_{1y}^{-}=r_{TE}E_{1y}^{+},$$

$$E_{2y}^{+}=\left(1+r_{TE}\right)E_{1y}^{+},$$

h) TM módus, a két réteg illesztése

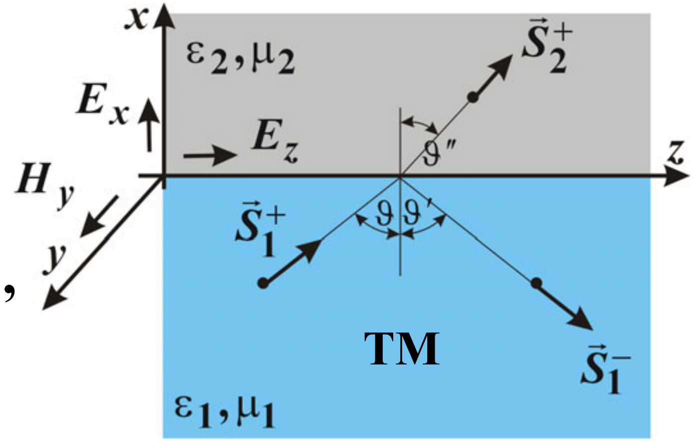
a tangenciális térerősség komponensek folytonosak az x=0 helyen:

$$H_{1y}(x,z)=\left(H_{1y}^{+}e^{-jk_1x}+H_{1y}^{-}e^{+jk_1x}\right)e^{-j\beta z},$$

$$H_{2y}(x,z)=H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2x}e^{-j\beta z},$$

$$E_{1z}(x,z)=-\frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(H_{1y}^{+}e^{-jk_1x}-H_{1y}^{-}e^{+jk_1x}\right)e^{-j\beta z},$$

$$E_{2z}(x,z)=\frac{j\kappa_2}{\omega\mu_2}H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2x}e^{-j\beta z},$$



$$H_{1y}(x=0,z)=H_{2y}(x=0,z),\rightarrow \boxed{H_{1y}^{+}+H_{1y}^{-}=H_{2y}^{+},}$$

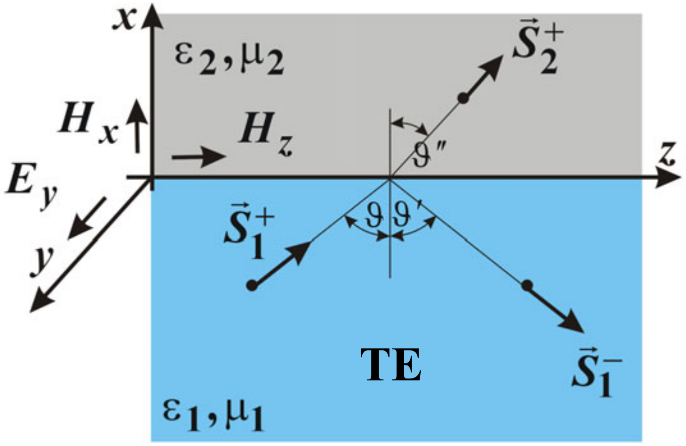
$$E_{1z}(x=0,z)=E_{2z}(x=0,z),\rightarrow \boxed{-\frac{k_1}{\varepsilon_1}H_{1y}^{+}+\frac{k_1}{\varepsilon_1}H_{1y}^{-}=\frac{j\kappa_2}{\varepsilon_2}H_{2y}^{+},}$$

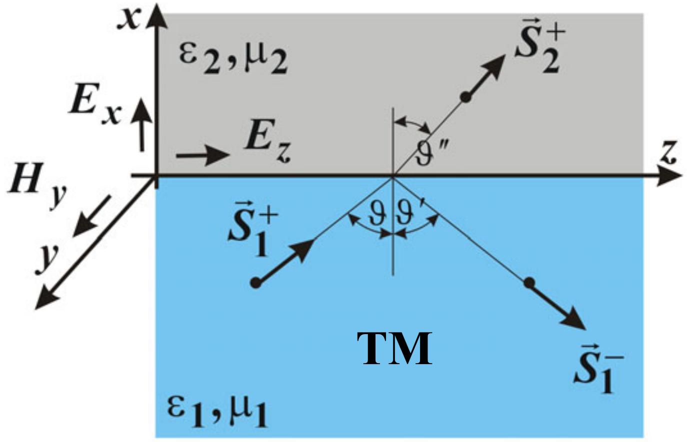
a reflexiós tényező:
$$r_{TM}=\frac{H_{1y}^{-}}{H_{1y}^{+}}=\frac{\dfrac{k_1}{\varepsilon_1}-\dfrac{-j\kappa_2}{\varepsilon_2}}{\dfrac{k_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{-j\kappa_2}{\varepsilon_2}},$$

$$H_{1y}^{-}=r_{TM}H_{1y}^{+},$$

$$H_{2y}^{+}=\left(1+r_{TM}\right)H_{1y}^{+},$$

i) A reflexiós tényező:





$$r_{TE} = \frac{E_{1y}^-}{E_{1y}^+} = \frac{\dfrac{k_1}{\mu_1} - \dfrac{-j\kappa_2}{\mu_2}}{\dfrac{k_1}{\mu_1} + \dfrac{-j\kappa_2}{\mu_2}},$$

$$k_1 = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \qquad \kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2},$$

$$r_{TM} = \frac{H_{1y}^-}{H_{1y}^+} = \frac{\dfrac{k_1}{\varepsilon_1} - \dfrac{-j\kappa_2}{\varepsilon_2}}{\dfrac{k_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{-j\kappa_2}{\varepsilon_2}},$$

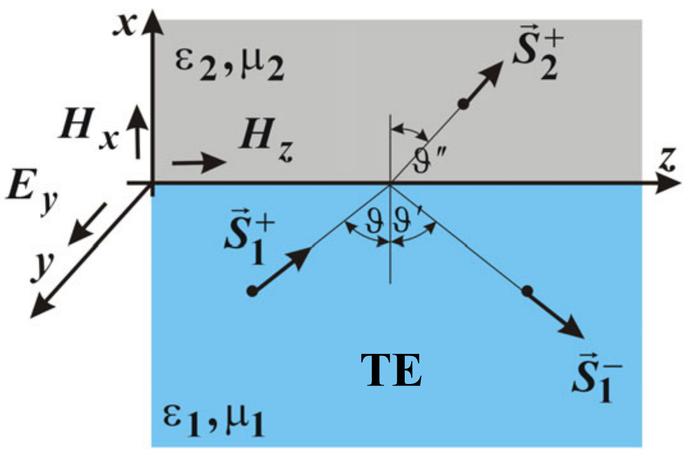
1. **közeg, csillapítatlan a hullámterjedés, k_1 valós,**
2. **közeg, eltűnő az x-irányú tér, κ_2 valós**

$$N_2 k_0 < \beta < N_1 k_0,$$

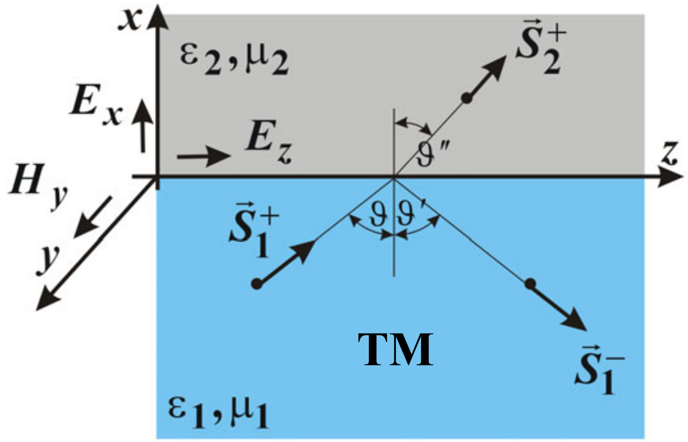
$$|r_{TE}| = 1, \quad |r_{TM}| = 1,$$

***<u>teljes visszaverődés áll elő</u>*, (a 2. közegben x-irányban nem áramlik hatásos teljesítmény, z-irányban, mindkét közegben áramlik hatásos teljesítmény)**

j) A közegekben áramló teljesítmény



$$N_2 k_0 < \beta < N_1 k_0,$$



$$S_{1x}^{TE} = \frac{\pm k_1}{2\omega\mu_1}\left|E_{1y}\right|^2, \rightarrow P, \qquad S_{1x}^{TM} = \frac{\pm k_1}{2\omega\varepsilon_1}\left|H_{1y}\right|^2, \rightarrow P,$$

$$S_{1y}^{TE} = 0, \qquad S_{1y}^{TM} = 0,$$

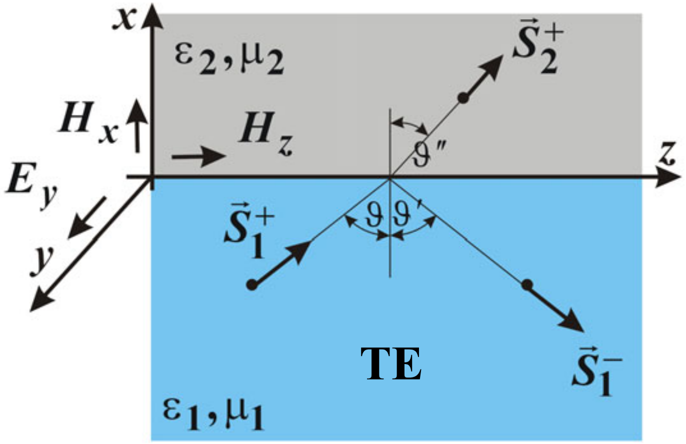
$$S_{1z}^{TE} = \frac{\beta}{2\omega\mu_1}\left|E_{1y}\right|^2, \rightarrow P, \qquad S_{1z}^{TM} = \frac{\beta}{2\omega\varepsilon_1}\left|H_{1y}\right|^2, \rightarrow P,$$

$$S_{2x}^{TE} = \frac{\pm j\kappa_2}{2\omega\mu_2}\left|E_{2y}\right|^2, \rightarrow Q, \qquad S_{2x}^{TM} = \frac{\pm j\kappa_2}{2\omega\varepsilon_2}\left|H_{2y}\right|^2, \rightarrow Q,$$

$$S_{2y}^{TE} = 0, \qquad S_{2y}^{TM} = 0,$$

$$S_{2z}^{TE} = \frac{\beta}{2\omega\mu_2}\left|E_{2y}\right|^2, \rightarrow P, \qquad S_{2z}^{TM} = \frac{\beta}{2\omega\varepsilon_2}\left|H_{2y}\right|^2, \rightarrow P,$$

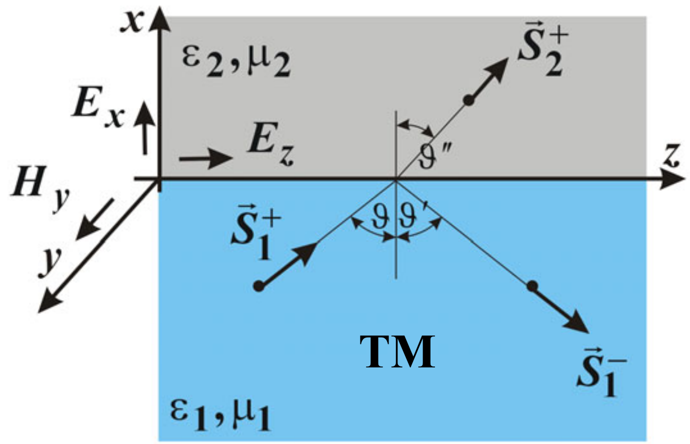
k) Teljesítmény áramlás iránya



$$N_2 k_0 < \beta < N_1 k_0,$$

$$k_1 = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2},$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2},$$



$$\sin\vartheta = \frac{S_{1z}^+}{\sqrt{\left(S_{1x}^+\right)^2 + \left(S_{1z}^+\right)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{k_1^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{N_1 k_0}, \rightarrow \beta = N_1 k_0 \sin\vartheta,$$

$$\beta = N_2 k_0 \sin\vartheta''$$

$$N_2 k_0 \sin\vartheta'' = \beta = N_1 k_0 \sin\vartheta, \rightarrow \boxed{\frac{\sin\vartheta''}{\sin\vartheta} = \frac{N_1}{N_2} \underbrace{=}_{\mu_0} \frac{n_1}{n_2},}$$

Snellius-Descartes törvény

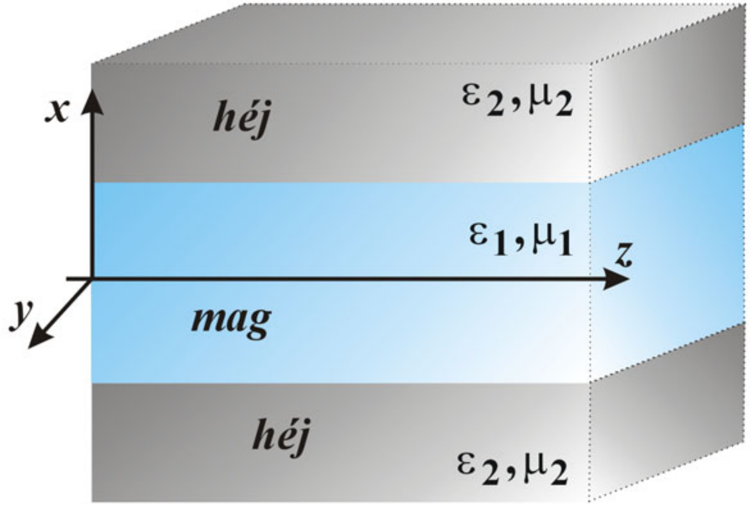
$$n_2 < n_1,$$

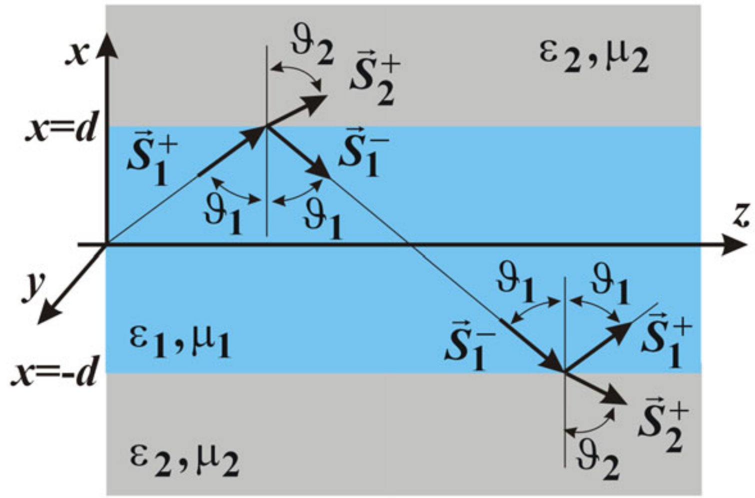
$$k_1 = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2} = N_1 k_0 \cos\vartheta, \rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\vartheta = \beta / k_1,}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2} = \sqrt{N_1^2 k_0^2 \sin^2\vartheta - N_2^2 k_0^2} = N_1 k_0 \sqrt{\sin^2\vartheta - \left(N_2 / N_1\right)^2},$$

3. Vezetett Hullámok, Szigetelő réteg hullámvezető,

z-irányban csillapítatlan haladó hullám terjed, β- a terjedési együttható,
x-irányban a magban csillapítatlan állóhullám, k_1 - valós,
a héjban eltűnő jellegű a hullám, $k_2=-j\kappa_2$, képzetes,





a magban: $\mu_1=\mu_0,\quad \varepsilon_1=\varepsilon_0\varepsilon_{1r}=\varepsilon_0 n_1^2,\quad n_1=\sqrt{\varepsilon_{1r}},\quad N_1=\sqrt{\varepsilon_{1r}\mu_{1r}},$

$\mu_{1r}=1,$

$$k_1=\sqrt{N_1^2k_0^2-\beta^2}=\sqrt{n_1^2k_0^2-\beta^2},$$

a héjban:

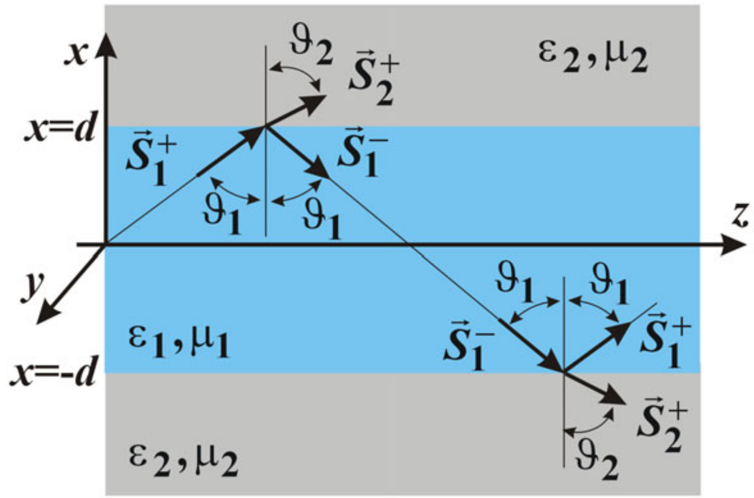
$\mu_2=\mu_0,\quad \varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_{2r}=\varepsilon_0 n_2^2,\quad n_2=\sqrt{\varepsilon_{2r}},\quad N_2=\sqrt{\varepsilon_{2r}\mu_{2r}},$

$\mu_{2r}=1,$

$$\kappa_2=\sqrt{\beta^2-N_2^2k_0^2}=\sqrt{\beta^2-n_2^2k_0^2},$$

3.1 Téregyenletek,

a) TE típusú hullámterjedés



a magban: $k_1 = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2},$

a héjban: $\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2},$

az elektromos térerősség

$$E_{1y}(x,z) = \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z}, \quad |x| < d, \qquad -j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$E_{2y}(x,z) = E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d, \qquad -j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

a megoldás illesztése a mag határfelületén:

$$\left.\begin{aligned} E_{1y}(x=+d,z) &= \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 d} + E_{1y}^- e^{+jk_1 d}\right) e^{-j\beta z}, \\ E_{1y}(x=-d,z) &= \left(E_{1y}^+ e^{+jk_1 d} + E_{1y}^- e^{-jk_1 d}\right) e^{-j\beta z}, \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{1y}^+ = E_{1y}^-,$$

$$E_{1y}(x,z) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1 x) \cdot e^{-j\beta z},$$

a magban:

$$E_{1y}(x,z)=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

$$H_{1x}(x,z)=-\frac{\beta}{\omega\mu_0}2E_{1y}^{+}\cos(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

$$H_{1z}(x,z)=-j\frac{k_1}{\omega\mu_0}2E_{1y}^{+}\sin(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

a héjban:

$$E_{2y}(x,z)=E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

$$H_{2x}(x,z)=\frac{-\beta}{\omega\mu_0}E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

$$H_{2z}(x,z)=\frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_0}E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

a mag és a héj határán a folytonossági feltétel:

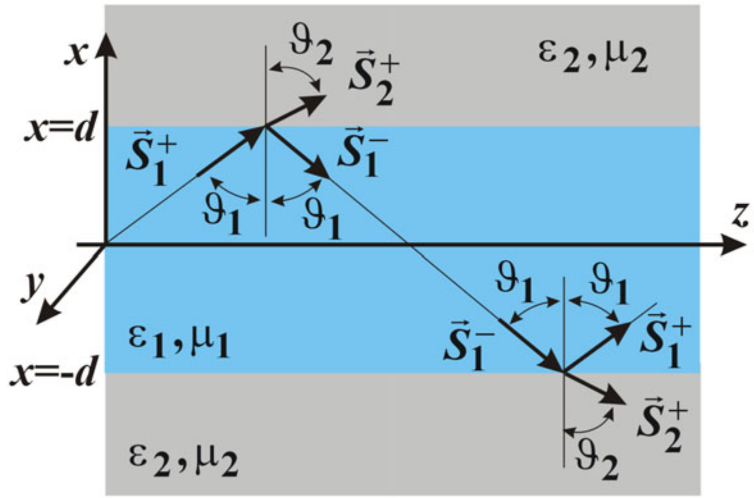
$$E_{1y}(x=\pm d,z)=E_{2y}(x=\pm d,z),\rightarrow \boxed{2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)=E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},}$$

$$H_{1z}(x=\pm d,z)=H_{2z}(x=\pm d,z),\rightarrow \boxed{-\frac{k_1}{\mu_0}2E_{1y}^{+}\sin(k_1 d)=\frac{-\kappa_2}{\mu_0}E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},}$$

az első egyenletből:
a magba beeső hullám amplitúdója meghatározza
a héjban a megtört hullám amplitúdóját:

$$E_{2y}^{+}=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d},$$

b) TM típusú hullámterjedés



a magban: $$k_1 = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2},$$

a héjban: $$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2},$$

a mágneses térerősség

$$H_{1y}(x,z) = \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + H_{1y}^- e^{+jk_1 x}\right) e^{-j\beta z}, \quad |x| < d,$$

$$H_{2y}(x,z) = H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d,$$

$$j\omega\varepsilon E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$j\omega\varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x},$$

a megoldás illesztése a mag határfelületén:

$$\left.\begin{aligned} H_{1y}(x=+d,z) &= \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1 d} + H_{1y}^- e^{+jk_1 d}\right) e^{-j\beta z}, \\ H_{1y}(x=-d,z) &= \left(H_{1y}^+ e^{+jk_1 d} + H_{1y}^- e^{-jk_1 d}\right) e^{-j\beta z}, \end{aligned}\right\} \rightarrow H_{1y}^+ = H_{1y}^-,$$

$$H_{1y}(x,z) = 2H_{1y}^+ \cos(k_1 x) \cdot e^{-j\beta z},$$

a magban:

$$H_{1y}(x,z) = 2H_{1y}^{+}\cos(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

$$E_{1x}(x,z) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}2H_{1y}^{+}\cos(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

$$E_{1z}(x,z) = -j\frac{k_1}{\omega\mu_0}2H_{1y}^{+}\sin(k_1 x)\cdot e^{-j\beta z},$$

a héjban:

$$H_{2y}(x,z) = H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

$$E_{2x}(x,z) = \frac{-\beta}{\omega\mu_0}H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta z},$$

$$E_{2z}(x,z) = \frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_0}H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 x}e^{-j\beta_2 z},$$

a mag és a héj határán a folytonossági feltétel:

$$H_{1y}(x=\pm d,z) = H_{2y}(x=\pm d,z), \rightarrow \boxed{2H_{1y}^{+}\cos(k_1 d) = H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},}$$

$$E_{1z}(x=\pm d,z) = E_{2z}(x=\pm d,z), \rightarrow \boxed{-\frac{k_1}{\mu_0}2H_{1y}^{+}\sin(k_1 d) = \frac{-\kappa_2}{\mu_0}H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},}$$

az első egyenletből:
a magba beeső hullám amplitúdója meghatározza
a héjban a megtört hullám amplitúdóját:

$$H_{2y}^{+} = 2H_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d},$$

c) a hullámterjedés paraméterei, a diszperziós egyenlet (k_0 és β közti kapcsolat) a folytonossági feltételből a két egyenletet elosztva egymással:

TE módusra

$$2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d) = E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},$$

$$-\frac{k_1}{\mu_0}2E_{1y}^{+}\sin(k_1 d) = \frac{-\kappa_2}{\mu_0}E_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},$$

TM módusra

$$2H_{1y}^{+}\cos(k_1 d) = H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},$$

$$-\frac{k_1}{\mu_0}2H_{1y}^{+}\sin(k_1 d) = \frac{-\kappa_2}{\mu_0}H_{2y}^{+}e^{-\kappa_2 d},$$

$$\frac{\sin(k_1 d)}{\cos(k_1 d)} = \mathrm{tg}(k_1 d) = \frac{\kappa_2}{k_1}, \rightarrow k_1 d - m\pi = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\kappa_2}{k_1}\right), \quad m = 0,1,2,\cdots,$$

$$k_1 d\ \mathrm{tg}(k_1 d - m\pi) = \kappa_2 d, \quad m = 0,1,2,\cdots,$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \\ \kappa_2 &= \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}, \end{aligned}\right\} \rightarrow k_1^2 + \kappa_2^2 = n_1^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_2^2\right) = k_0^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (k_0 d)^2\left(n_1^2 - n_2^2\right) = (k_0 d)^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

d) a beesési szög, amely mellett a vizsgált módus létrejön

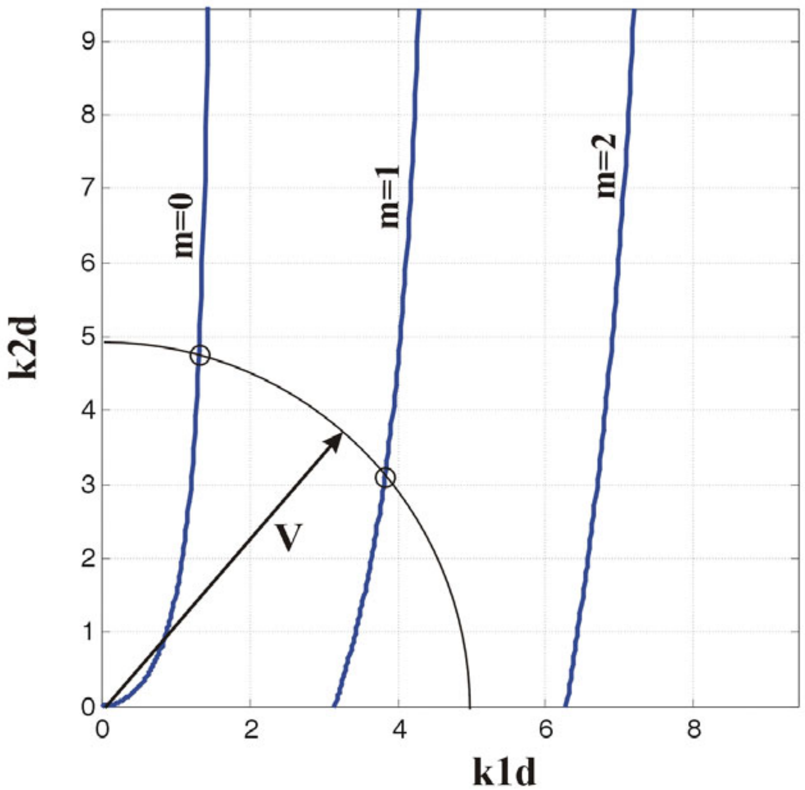
$$\left.\begin{aligned} \beta &= N_1 k_0 \sin\vartheta, \\ k_1 &= N_1 k_0 \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \rightarrow \mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\beta}{k_1}, \quad \vartheta = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\beta}{k_1}\right),$$

a diszperziós egyenlet megoldása

$$k_1 d \;\mathrm{tg}(k_1 d - m\pi) = \kappa_2 d, \quad m = 0,1,2,\cdots,$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \\ \kappa_2 &= \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}, \end{aligned}\right\} \rightarrow (k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (k_0 d)^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (k_0 d)^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right),$$

$$V = d k_0 \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}},$$



határ/vágási frekvenciák:

$$V_c = m\pi, \quad m = 0,1,\cdots,$$

$$V_c^m < V < \infty,$$

1. példa $f = 50\,\text{GHz} = 50 \cdot 10^9\ \text{Hz}, \quad \text{d} = 6/\pi\ \text{mm} = 1{,}9099\ \text{mm} = 1{,}9099 \cdot 10^{-3}\ \text{m},$

$$\varepsilon_{1r} = 4; \quad \varepsilon_{2r} = 3{,}6; \quad k_0 d = \frac{2\pi 50 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \frac{6}{\pi} 10^{-3} = 2,$$

$\underline{m = 0}$, $\quad k_1 d \cdot \text{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d,$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (k_0 d)^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right) = 4(4 - 3{,}6) = 1{,}6$$

$$V = k_0 d \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = 2\sqrt{4 - 3{,}6} = 1{,}2649,$$

$$0 < V < \pi, \rightarrow m = 0 \ \text{módus terjed},$$

$$k_1 d = 0{,}8422; \rightarrow k_1 = 440{,}9767\ \text{rad/m},$$

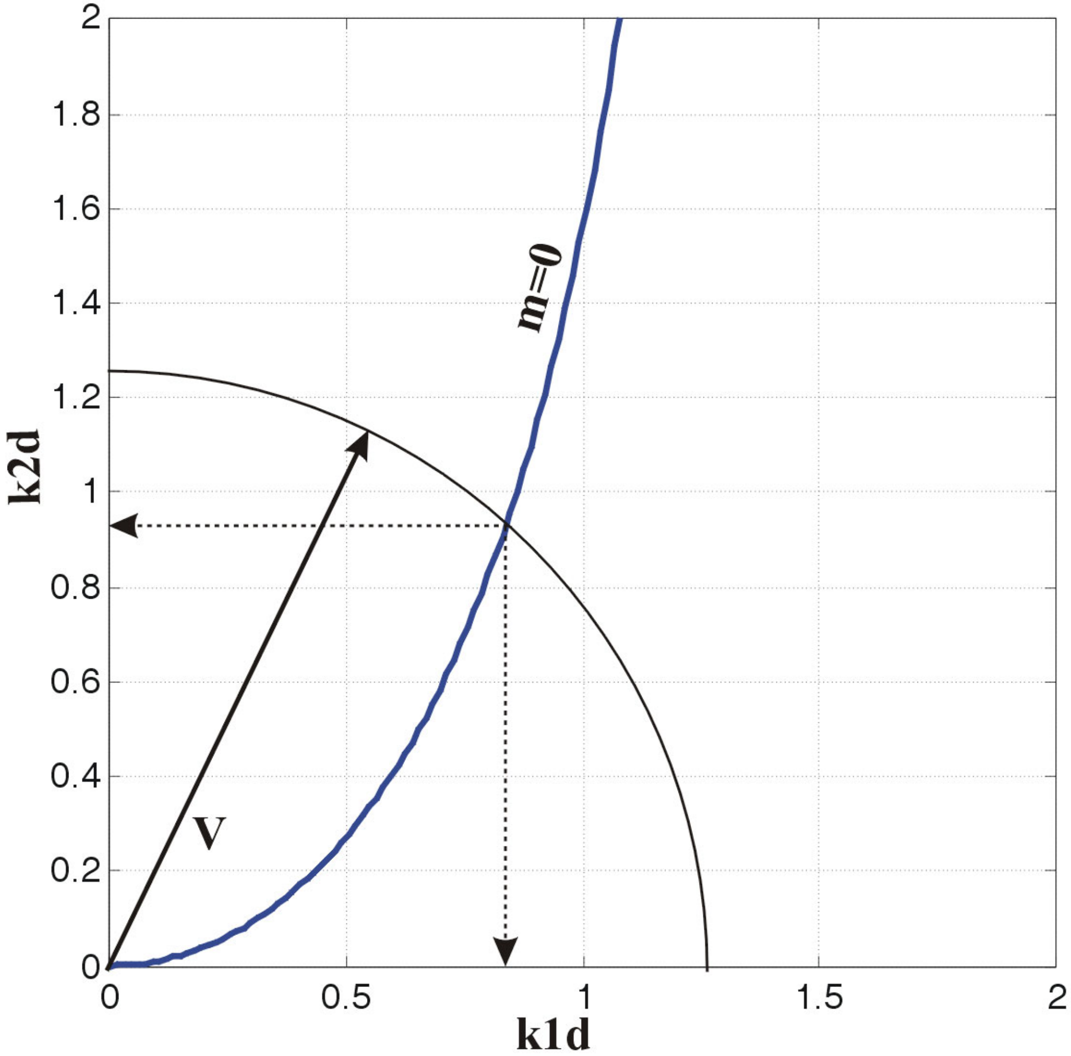
$$\kappa_2 d = 0{,}9438; \rightarrow \kappa_2 = 494{,}1544\ \text{rad/m},$$

$$\beta d = \sqrt{n_1^2 (k_0 d)^2 - (k_1 d)^2} = \sqrt{16 - (0{,}8422)^2}, \rightarrow \beta = 3{,}9103/d = 2{,}0474 \cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\beta d = \sqrt{n_2^2 (k_0 d)^2 + (\kappa_2 d)^2} = \sqrt{0{,}9 \cdot 16 + (0{,}9438)^2}, \rightarrow \beta = 3{,}9103/d = 2{,}0474 \cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\vartheta = \text{arc tg}(\beta d / k_1 d) = \text{arc tg}(3{,}9103/0{,}8422) = 77{,}8453\ ^{\text{o}},$$

$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d, \quad (k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (1{,}2649)^2$$



2. példa $f = 200\,\text{GHz} = 200\cdot 10^9\ \text{Hz},\quad \text{d} = 6/\pi\ \text{mm} = 1{,}9099\ \text{mm} = 1{,}9099\cdot 10^{-3}\ \text{m},$

$$\varepsilon_{1r} = 4;\quad \varepsilon_{2r} = 3.6;\quad k_0 d = \frac{2\pi 200\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\frac{6}{\pi}10^{-3} = 8,$$

$$V = k_0 d\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = 8\sqrt{4 - 3{,}6} = 5{,}0596,$$

$\pi < \text{V} < 2\pi, \rightarrow m = 0{,}1$ **módusok terjednek,**

$$\underline{m = 0}, \rightarrow k_1 d\cdot \text{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d,\qquad k_1^0 d = 1{,}3091; \rightarrow k_1^0 = 685{,}4368\ \text{rad/m},$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = (5{,}0596)^2,\qquad \kappa_2^0 d = 4{,}8874; \rightarrow \kappa_2^0 = 2559{,}0\ \text{rad/m},$$

$$\beta^0 d = \sqrt{n_1^2 (k_0 d)^2 - \left(k_1^0 d\right)^2} = \sqrt{4\cdot 5{,}0595^2 - (1{,}3091)^2},$$

$$\rightarrow \beta^0 = 15{,}9464/d = 8{,}3495\cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\beta^0 d = \sqrt{n_2^2 (k_0 d)^2 + \left(\kappa_2^0 d\right)^2} = \sqrt{3{,}6\cdot 5{,}0595^2 + (4{,}8874)^2},$$

$$\rightarrow \beta^0 = 15{,}9464/d = 8{,}3495\cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\vartheta^0 = \text{arc tg}\left(\beta^0 d / k_1^0 d\right) = \text{arc tg}(15{,}9464/1{,}3091) = 85{,}3069^\circ,$$

$$f = 200\,\text{GHz} = 200 \cdot 10^9\ \text{Hz},\quad \text{d} = 6/\pi\ \text{mm} = 1{,}9099\ \text{mm} = 1{,}9099 \cdot 10^{-3}\ \text{m},$$

$$\varepsilon_{1r} = 4;\quad \varepsilon_{2r} = 3.6;\quad k_0 d = \frac{2\pi 200 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \frac{6}{\pi} 10^{-3} = 8\ \text{rad/m},$$

$$V = k_0 d \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = 8\sqrt{4 - 3{,}6} = 5{,}0596,$$

$$\pi < \text{V} < 2\pi, \rightarrow m = 0{,}1\ \text{módusok terjednek},$$

$$\underline{m = 1,} \rightarrow k_1 d \cdot \text{tg}(k_1 d - \pi) = \kappa_2 d, \qquad k_1^1 d = 3{,}8482; \rightarrow k_1^1 = 2014{,}9\ \text{rad/m},$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = 5{,}0595^2, \qquad \kappa_2^1 d = 3{,}2850; \rightarrow \kappa_2^1 = 1720{,}0\ \text{rad/m},$$

$$\beta^1 d = \sqrt{n_1^2 (k_0 d)^2 - \left(k_1^1 d\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 5{,}0595^2 - (3{,}8482)^2},$$

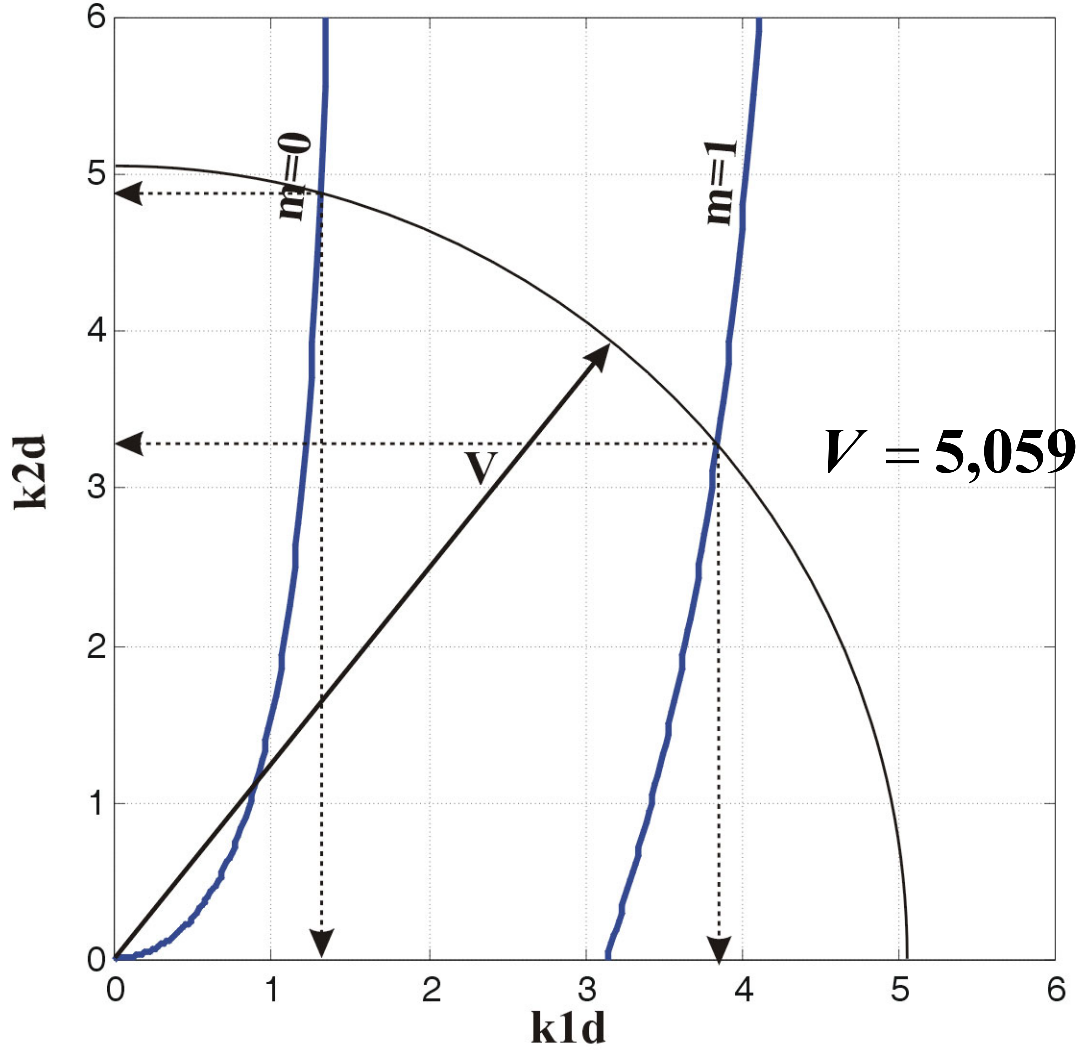
$$\beta^1 = 15{,}5303/d = 8131{,}7 \cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\beta^1 d = \sqrt{n_2^2 (k_0 d)^2 + \left(\kappa_2^1 d\right)^2} = \sqrt{3{,}6 \cdot 5{,}0595^2 + (3{,}2850)^2},$$

$$\beta^1 = 15{,}5303/d = 8131{,}7 \cdot 10^3\ \text{rad/m},$$

$$\vartheta^1 = \text{arc tg}\left(\beta^1 d / k_1^1 d\right) = \text{arc tg}(15{,}5303/3{,}8482) = 76{,}0832^\circ,$$

$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}\left(k_1 d - m\pi\right) = \kappa_2 d, \quad \left(k_1 d\right)^2 + \left(\kappa_2 d\right)^2 = \left(k_0 d\right)^2 \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = 5{,}0596$$



$$V = 5{,}0596$$

<u>3. példa</u> f, $\mathrm{d} = 6/\pi \text{ mm} = 1{,}9099 \text{ mm} = 1{,}9099 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \varepsilon_{1r} = 4; \quad \varepsilon_{2r} = 3{,}6;$

$$V = k_0 d\sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = k_0 d\sqrt{\varepsilon_{1r}}\sqrt{1 - \varepsilon_{2r}/\varepsilon_{1r}} = 10,$$

$0 < \mathrm{V} < 4\pi, \rightarrow m = 0,1,2,3$ **módusok terjednek,**

$$m = 0, \rightarrow k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d, \qquad k_1^0 d = 3{,}8482; \quad \kappa_2^0 d = 3{,}2850;$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = 100, \qquad \beta^0 d = 18{,}1208; \quad \underline{\vartheta^0 = 84{,}8811^{\circ};}$$

$$m = 1, \rightarrow k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - \pi) = \kappa_2 d, \qquad k_1^1 d = 4{,}2711; \quad \kappa_2^1 d = 9{,}0420;$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = 100, \qquad \beta^1 d = 15{,}4194; \quad \underline{\vartheta^1 = 74{,}5175^{\circ}};$$

$$m = 2, \rightarrow k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - 2\pi) = \kappa_2 d, \qquad k_1^2 d = 7{,}0689; \quad \kappa_2^2 d = 7{,}0732;$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = 100, \qquad \beta^2 d = 14{,}3538; \quad \underline{\vartheta^2 = 63{,}7809^{\circ};}$$

$$m = 3, \rightarrow k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - 3\pi) = \kappa_2 d, \qquad k_1^3 d = 9{,}6789; \quad \kappa_2^3 d = 2{,}5138;$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2 = 100, \qquad \beta^3 d = 12{,}7405; \quad \underline{\vartheta^3 = 52{,}7762^{\circ};}$$

3.2. A tér eloszlása a magban

a határfrekvencia: $$V_c = m\pi, \quad m = 0,1,\cdots, \quad V_c^m < V < \infty,$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - m\pi) = \kappa_2 d, \\ (k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (k_0 d)^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = V^2, \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} m\pi < k_1 d < m\pi + \pi/2, \\ 0 < \kappa_2 d < \infty, \end{cases}$$

TE módus esetén $$E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 x),$$

$$E_{2y}(x) = E_{2y}^{+} e^{-\kappa_2 x}, \quad E_{2y}^{+} = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d},$$

$$E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 (d - x)},$$

$m = 0,$

$0 < k_1 d < \pi/2,$

$0 < V(f) < \infty,$

$$E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos\left(k_1 d \frac{x}{d}\right), \quad |x| \le d,$$

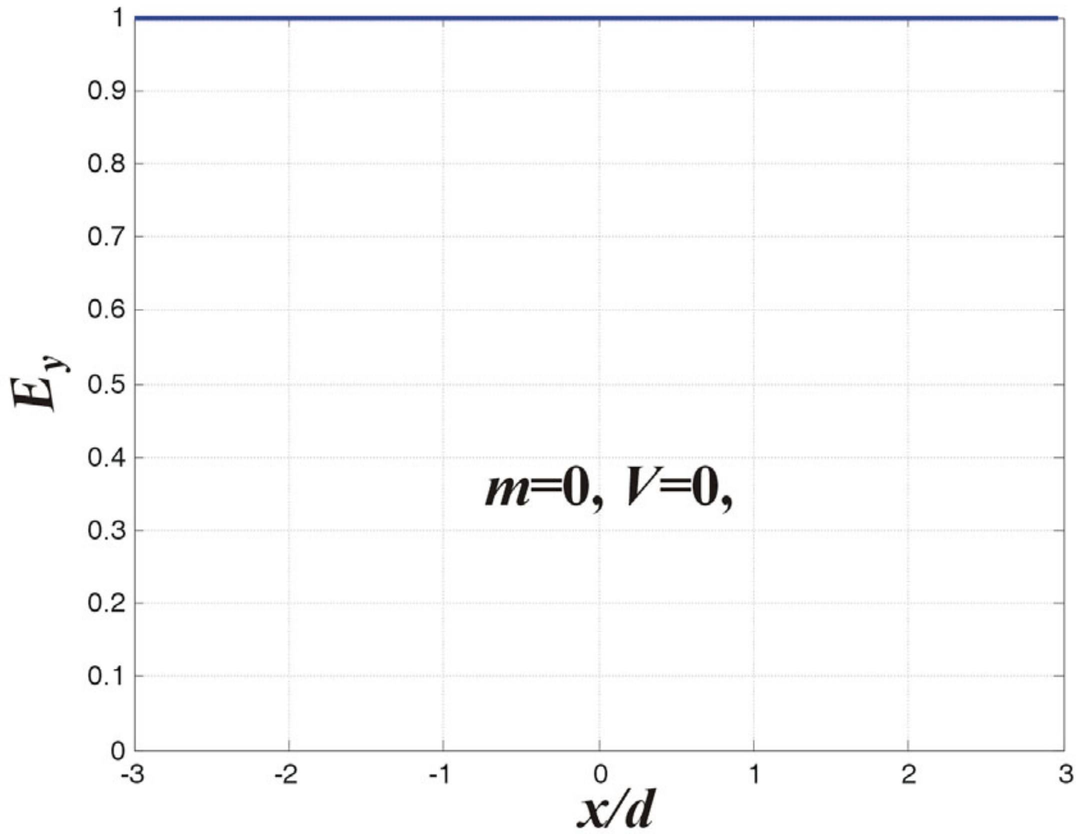
$$E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d(1 - |x|/d)}, \quad |x| > d,$$

$m=0,\ \ V_c=0,$

$0<V(f)<\infty,$

$$E_{1y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\ |x|\le d,$$

$$E_{2y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d(1-|x|/d)},\ |x|>d,$$



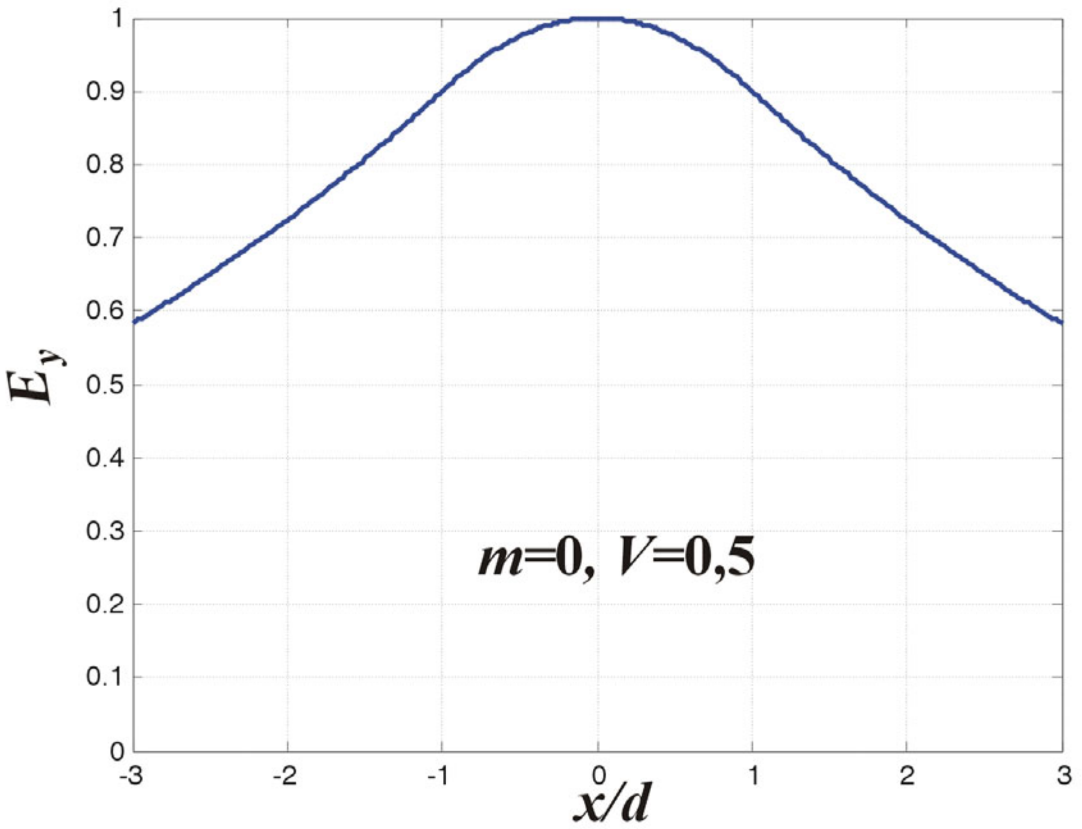
$m=0,\rightarrow 0<k_1 d<\frac{\pi}{2},$

$k_1 d\cdot \mathrm{tg}(k_1 d)=\kappa_2 d,$

$(k_1 d)^2+(\kappa_2 d)^2=V^2,$

$$m=0,\quad V_c=0,$$
$$0<V(f)<\infty,$$

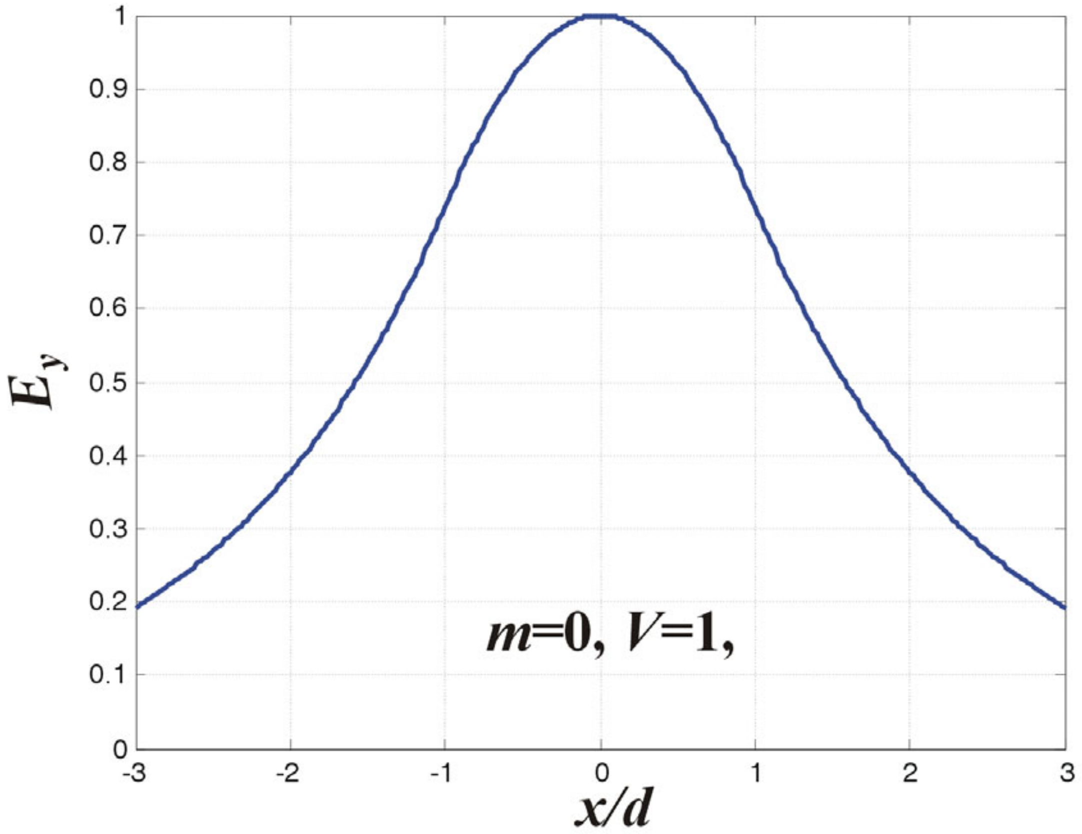
$$E_{1y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\quad |x|\le d,$$
$$E_{2y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d(1-|x|/d)},\quad |x|>d,$$



$$m=0,\rightarrow 0<k_1 d<\frac{\pi}{2},$$
$$k_1 d\cdot \mathrm{tg}(k_1 d)=\kappa_2 d,$$
$$(k_1 d)^2+(\kappa_2 d)^2=V^2,$$

$$m = 0,\quad V_c = 0,$$
$$0 < V(f) < \infty,$$

$$E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos\left(k_1 d \frac{x}{d}\right),\quad |x| \le d,$$
$$E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d (1-|x|/d)},\quad |x| > d,$$



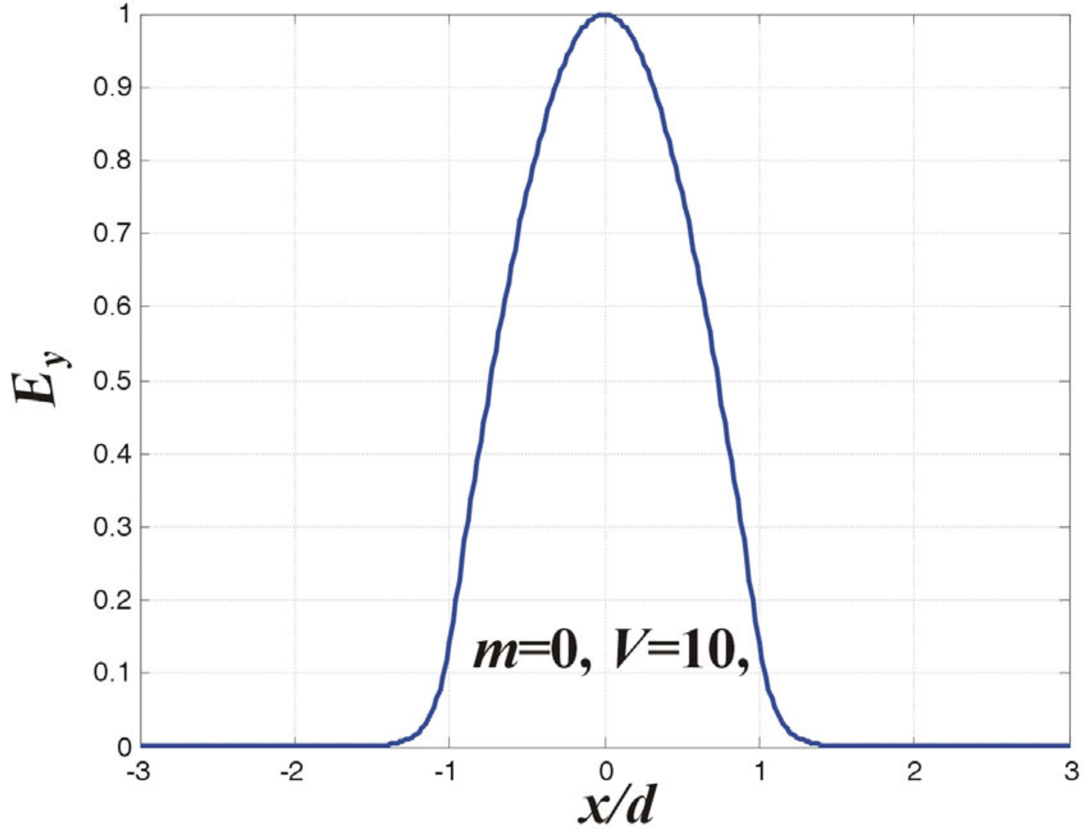
$$m = 0, \rightarrow 0 < k_1 d < \frac{\pi}{2},$$
$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d,$$
$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2,$$

$$m=0,\quad V_c=0,$$

$$0<V(f)<\infty,$$

$$E_{1y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\quad |x|\le d,$$

$$E_{2y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d(1-|x|/d)},\quad |x|>d,$$



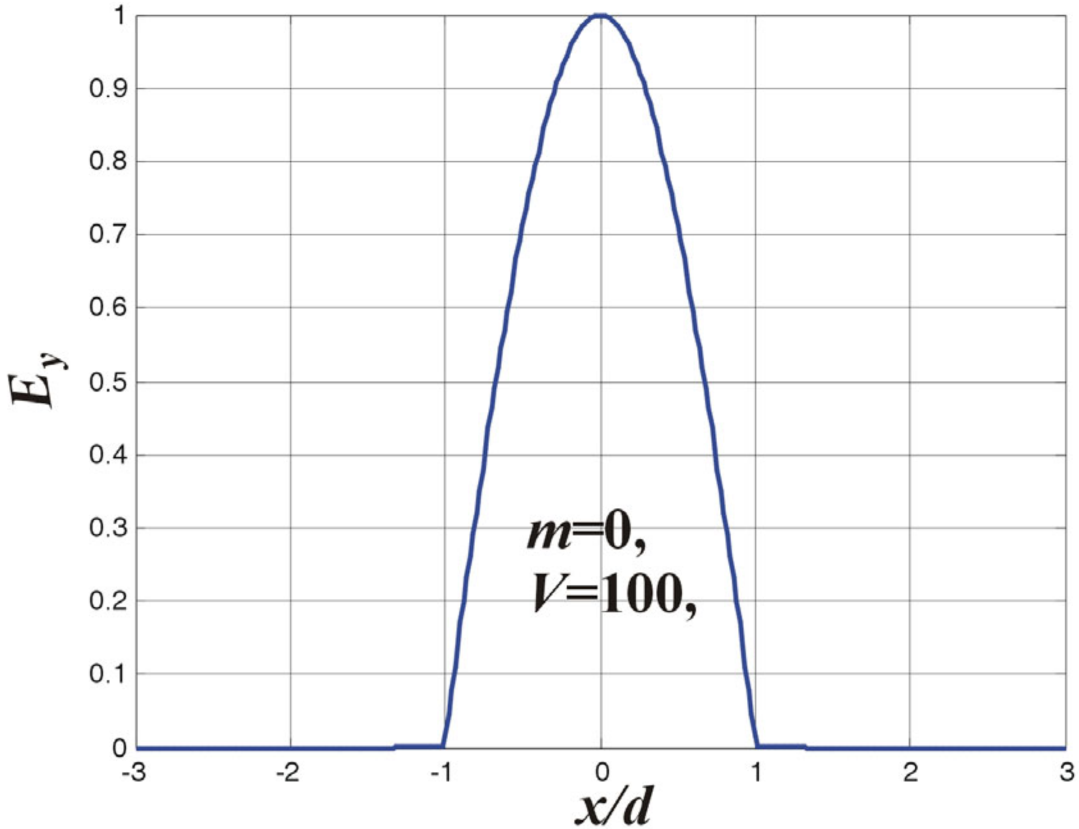
$$m=0,\rightarrow 0<k_1 d<\frac{\pi}{2},$$

$$k_1 d\cdot \mathrm{tg}(k_1 d)=\kappa_2 d,$$

$$(k_1 d)^2+(\kappa_2 d)^2=V^2,$$

$$m = 0,\;\; V_c = 0, \qquad E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\;\; |x| \le d,$$

$$0 < V(f) < \infty, \qquad E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d(1-|x|/d)},\;\; |x| > d,$$



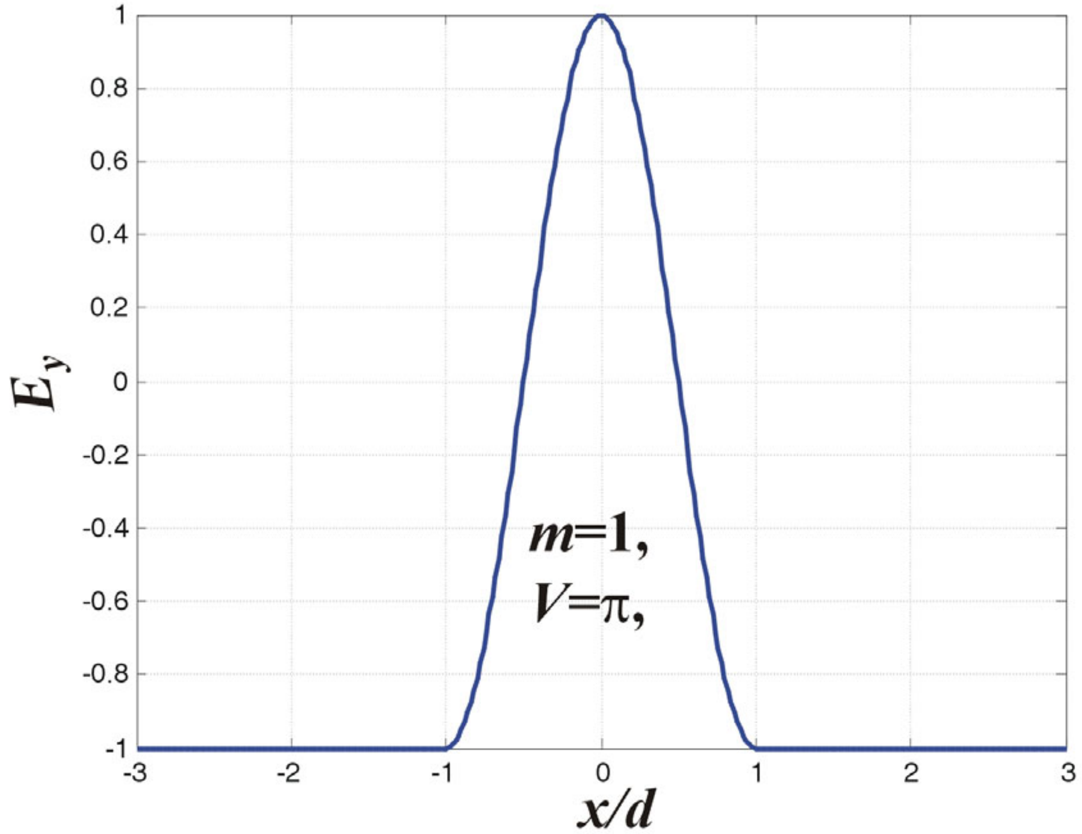
$$m = 0, \to 0 < k_1 d < \frac{\pi}{2},$$

$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d,$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2,$$

$$m = 1,\;\; V_c = \pi,$$
$$V_c < V(f) < \infty,$$

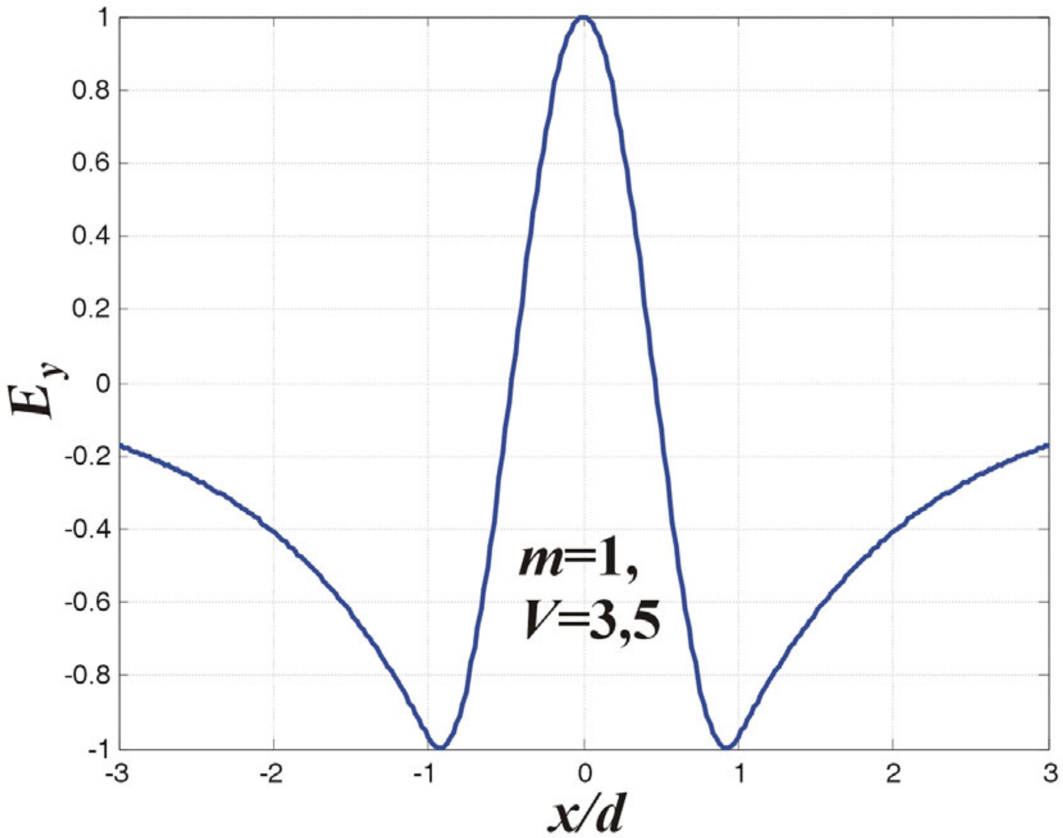
$$E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\;\; |x| \le d,$$
$$E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d\left(1-|x|/d\right)},\;\; |x| > d,$$



$$m = 1, \rightarrow \pi < k_1 d < 3\frac{\pi}{2},$$
$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - \pi) = \kappa_2 d,$$
$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2,$$

$$m = 1,\ \ V_c = \pi,$$
$$V_c < V(f) < \infty,$$

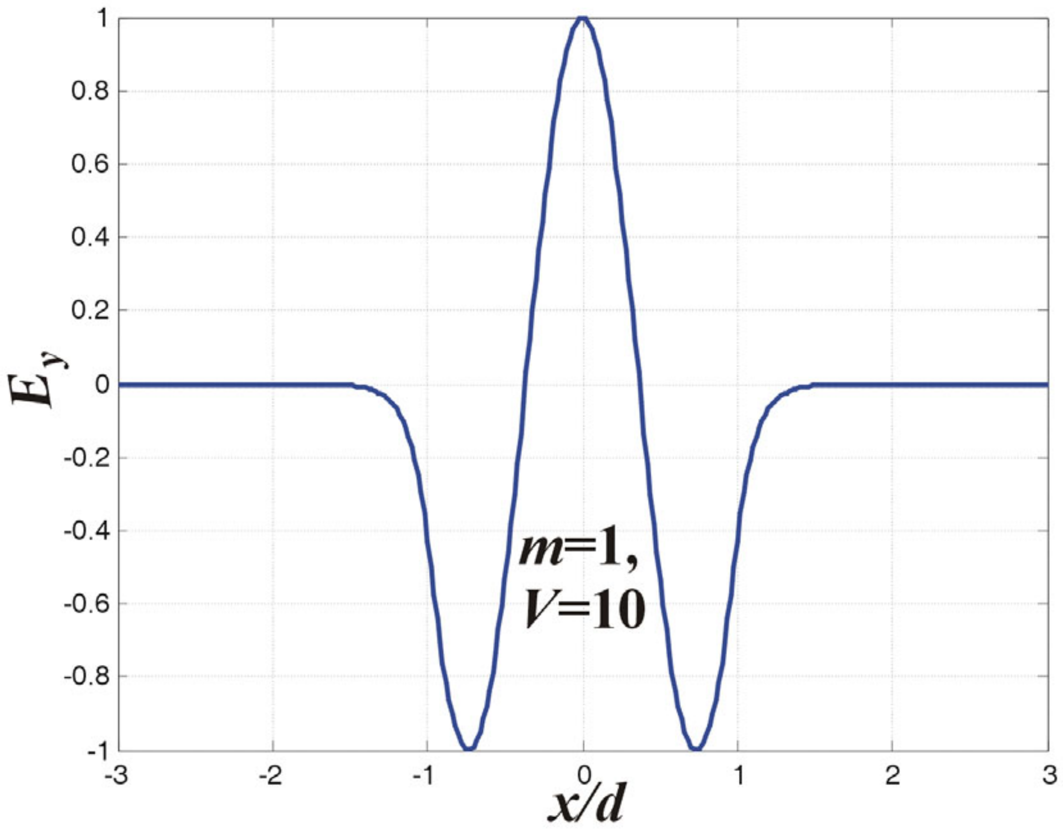
$$E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos\left(k_1 d \frac{x}{d}\right),\ |x| \le d,$$
$$E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+} \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d (1-|x|/d)},\ |x| > d,$$



$$m = 1, \rightarrow \pi < k_1 d < 3\frac{\pi}{2},$$
$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - \pi) = \kappa_2 d,$$
$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2,$$

$$m=1,\;\; V_c=\pi,$$
$$V_c<V(f)<\infty,$$

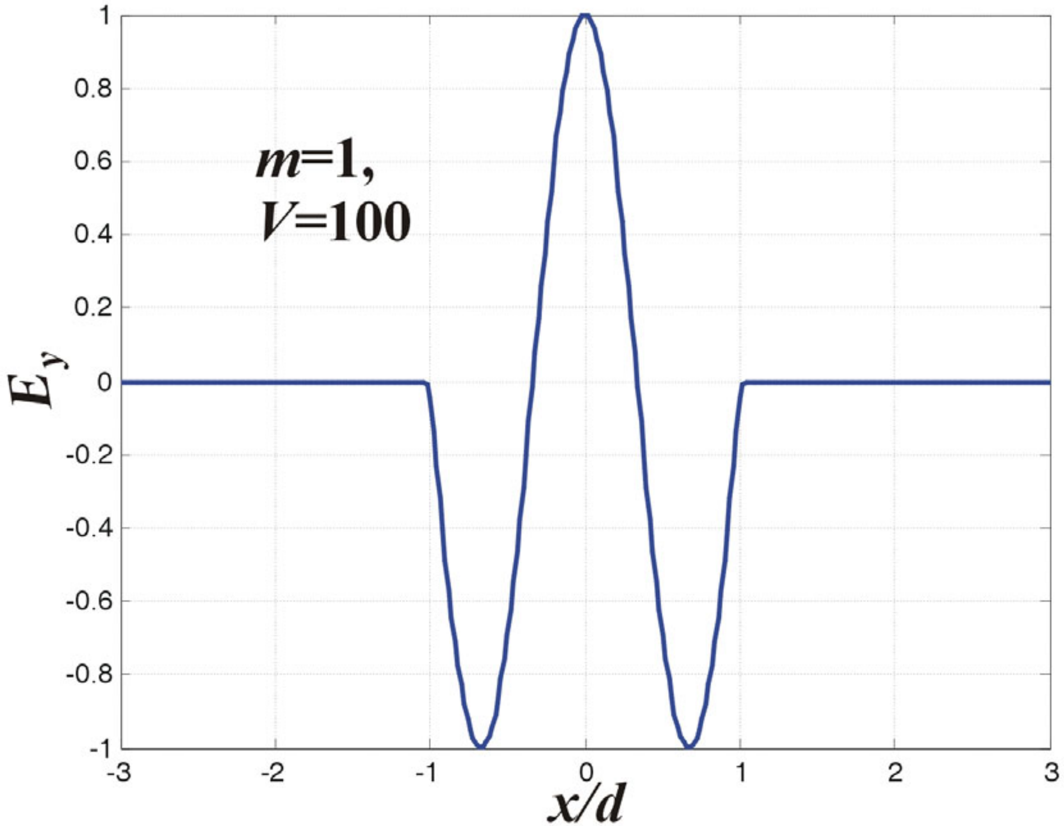
$$E_{1y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\;\; |x|\le d,$$
$$E_{2y}(x)=2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d\left(1-|x|/d\right)},\;\; |x|>d,$$



$$m=1,\rightarrow \pi<k_1 d<3\frac{\pi}{2},$$
$$k_1 d\cdot \mathrm{tg}(k_1 d-\pi)=\kappa_2 d,$$
$$(k_1 d)^2+(\kappa_2 d)^2=V^2,$$

$$m = 1,\;\; V_c = \pi, \qquad E_{1y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos\left(k_1 d\,\frac{x}{d}\right),\;\; |x| \le d,$$

$$V_c < V(f) < \infty, \qquad E_{2y}(x) = 2E_{1y}^{+}\cos(k_1 d)e^{\kappa_2 d\left(1-|x|/d\right)},\;\; |x| > d,$$



$$m = 1, \rightarrow \pi < k_1 d < 3\frac{\pi}{2},$$

$$k_1 d \cdot \mathrm{tg}(k_1 d - \pi) = \kappa_2 d,$$

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = V^2,$$

Ellenőrző kérdések I.

- **Ismertesse a síkhullámok fogalmát,**
- **Írja fel az elektromos és a mágneses térerősségre vonatkozó hullámegyenletet,**
- **Adja meg a szabadon terjedő elektromágneses síkhullám megoldását szinuszos időbeli változás esetén,**
- **Értelmezze a szabadon terjedő síkhullám hullámimpedanciáját, terjedési együtthatóját, csillapítási és fázistényezőjét, a hullám terjedési sebességét és a közegben mért hullámhosszát,**
- **Ismertesse az veszteségmentes és a veszteséges szigetelőben terjedő síkhullám tulajdonságait,**
- **Ismertesse a cirkulárisan polarizált síkhullám egyenleteit és energiaterjedését.**

Ellenőrző kérdések II.

- Ismertesse a TE és a TM módusú hullámterjedés viszonyait,
- Ismertesse a diszperziós egyenletet,
- Ismertesse a vezetett hullámokra vonatkozó peremfeltételeket,
- Ismertesse a TE módusú vezetett hullámok komponenseit és az energiaterjedés viszonyait,
- Ismertesse a TM módusú vezetett hullámok komponenseit és az energiaterjedés viszonyait,
- Ismertesse a TE és TM csillapítatlan módusú vezetet hullámok terjedési viszonyait,
- Ismertesse a határhullámhossz és a határfrekvencia fogalmát,
- Rajzoljon erővonalképet TE_m, ill. TM_m módusú hullámterjedésre.

Ellenőrző kérdések III.

- Ismertesse a TE típusú hullámterjedés komponenseinek viselkedését a réteghatáron,
- Ismertesse a TM típusú hullámterjedés komponenseinek viselkedését a réteghatáron,
- Ismertesse az egyes rétegekben a diszperziós egyenlet alakját és értelmezze azt,
- Ismertesse a reflexiós tényezőre vonatkozó összefüggést TE és a TM módusú hullámterjedés esetén,
- Ismertesse az egyes rétegekben áramló teljesítményt,
- Ismertesse a rétegekben a teljesítmény áramlás irányát,
- Ismertesse a Snellius-Descartes törvényt,

- Foglalja össze a szigetelőréteg hullámvezetőben a hullámterjedés tulajdonságait és adja meg a magban és a héjban terjedő TE és TM hullámforma komponenseit,
- Ismertesse a diszperziós egyenletre vonatkozó összefüggéseket és a hullámterjedés paramétereinek meghatározását,
- Foglalja össze hogyan hat a frekvencia növelése a magban kialakuló tér eloszlására.

Irodalom

Tankönyv:

Transzport folyamatok modellezése, előadás vázlat,

www.e-oktat.pmmf.pte.hu

Iványi A. Műszaki fizika informatikusoknak, Pollack Press, 2010.

Alvin Hudson, Rex Nelson, Útban a modern fizikához, LSI Oktatóközpont, 1994, ISBN 963 577 197 5,

Javasolt irodalom:

- **Fodor György, Elektromágneses terek, Műegyetemi kiadó, 1993, 55019,**
- **Veszely Gyula, Hírközlési üvegszálak elmélete, Műszaki Könyvkiadó, MK-6049-4.**

Felhasznált irodalom:

- **Simonyi K., Zombory L. Elméleti Villamosságtan, Tankönyvkiadó, 2000.**

Gyakorló feladatok,

1) A merőlegesen beeső elektromos, ill. mágneses síkhullámok reflexiója és továbbhaladása, (lásd mintapélda),

2) A vágási frekvencia ismeretében a terjedő hullám-módusok meghatározása,
a diszperziós egyenlet megoldásának elve,
a magban kialakuló hullámforma meghatározása,