Gyakorló feladatok

Feladatok, merev test dinamikája

4.5.1. Feladat

Határozza meg egy súlytalannak tekinthető $2\,\mathrm{m}$ hosszú rúd két végén lévő $2\,\mathrm{kg}$ és $3\,\mathrm{kg}$ tömegek súlypontját.

Megoldás

Feltéve, hogy a súlypont a $2\,\mathrm{kg}$ tömegtől x távolságra helyezkedik el, és figyelembe véve, hogy a súlypontra az elsőrendű, statikai nyomaték nulla, $S_S = m_1 x - m_2(l-x) = 2\cdot x - 3\cdot(2-x) = 0$, a súlypont a $2\,\mathrm{kg}$ tömegtől $x = 1{,}2000\,\mathrm{m}$ távolságra, a $3\,\mathrm{kg}$ tömegtől $2 - x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ távolságra helyezkedik el.

4.5.2. Feladat

Egy $8\,\mathrm{m}$ hosszú, súlytalannak tekinthető rúd két végén $5\,\mathrm{kg}$ és $3\,\mathrm{kg}$ nagyságú tömegek helyezkednek el. Határozza meg a merev test statikai nyomatékát a rúd középpontjára.

Megoldás

A statikai nyomaték a rúd jobb és bal oldalán lévő tömegek figyelembe vételével $S_k = m_1\, l/2 - m_2\, l/2 = (5-3)4 = 8\,\mathrm{kg\,m}$.

4.5.3. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a súlytalannak tekinthető $3\,\mathrm{m}$ hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő $18\,\mathrm{kg}$ és $24\,\mathrm{kg}$ tömegű gyerekek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Feltéve, hogy az alátámasztási pont a $18\,\mathrm{kg}$ tömegű gyerektől x távolságra helyezkedik el, a forgatónyomatékok egyenlőségéből, $m_1 x = m_2 (l - x)$, az alátámasztási pont helye $x = 1{,}7143\,\mathrm{m}$ a könnyebbik gyerektől és $l - x = 1{,}2857\,\mathrm{m}$ a nehezebb gyerektől.

4.5.4. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a súlytalannak tekinthető $3{,}2\,\mathrm{m}$ hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő $15\,\mathrm{kg}$ és $27\,\mathrm{kg}$ tömegek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Az előző feladat mintájára az alátámasztási pontot a könnyebb tömegtől $2{,}0571\,\mathrm{m}$ távolságra kell elhelyezni.

4.5.5. Feladat

Határozza meg, mekkora tömegű gyerek ül a $2{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú, egyensúlyban lévő $8\,\mathrm{kg}$ tömegű mérleghinta egyik végén, ha az alátámasztási ponttól $1{,}2\,\mathrm{m}$ távolságra lévő másik végén $21\,\mathrm{kg}$ tömegű gyerek helyezkedik el.

Megoldás

A mérleghinta súlyát a hinta közepére koncentrálva, az alátámasztási pontra az ismert súlyú gyerek forgatónyomatéka tart egyensúlyt az ismeretlen gyerek és a létra súlyának forgatónyomatékával, $m_1 x = m(l/2 - x) + m_2(l - x)$, ahonnan a másik gyerek tömege $m_2 = (21 \cdot 1{,}2 - 8 \cdot 0{,}2)/1{,}6 = 14{,}7500\,\mathrm{kg}$.

4.5.6. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a $18\,\mathrm{kg}$ tömegű, $3{,}6\,\mathrm{m}$ hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő $12\,\mathrm{kg}$ és $24\,\mathrm{kg}$ tömegű gyerekek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Az előző feladat mintájára, $12 \cdot x + 18 \cdot (x - 3{,}6/2) = 24(3{,}6 - x)$, a könnyebb gyerektől $x = 2{,}2000\,\mathrm{m}$ távolságban kell alátámasztani.

4.5.7. Feladat

Egy nyugalomban lévő $5\,\mathrm{kg}$ tömegű merev testet a súlypontjában $0{,}1\,\mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}12\,\mathrm{ms}$ idő alatt. Határozza meg, mekkora sebességgel mozog a merev test az impulzus hatására.

Megoldás

A merev test sebessége $v = \Delta I/m = 0{,}1/5 = 0{,}02\,\mathrm{m/s}$ lesz.

4.5.8. Feladat

Egy nyugalomban lévő $2\,\mathrm{kg}$ tömegű merev testet a súlypontjában $0{,}08\,\mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}16\,\mathrm{ms}$ idő alatt. Határozza meg, mekkora gyorsulással kezd el a merev test mozogni.

Megoldás

Az impulzus hatására $F = \Delta I/\Delta t = 0{,}08/0{,}00016 = 500\,\mathrm{N}$ erő éri, amely hatásra $a = F/m = 500/2 = 250\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással kezd el mozogni.

4.5.9. Feladat

Határozza meg, mekkora impulzus éri azt a $3{,}2\,\mathrm{kg}$ tömegű merev testet, amely $12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel kezd el mozogni.

Megoldás

$I = mv = 3{,}2 \cdot 12 = 38{,}4000\ \mathrm{Ns}$.

4.5.10. Feladat

Egy nyugalomban lévő, $10\ \mathrm{kg}$ tömegű merev testet a súlypontjában $0{,}06\ \mathrm{kg\ m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}12\ \mathrm{ms}$ idő alatt. Határozza meg, mekkora a merev testre ható forgatónyomaték, a súlypontjától $2{,}5\ \mathrm{m}$ távolságban lévő forgástengely körüli elforduláskor.

Megoldás

Az erő $F = \Delta I / \Delta t = 0{,}06 / 0{,}00012 = 500{,}0000\ \mathrm{N}$, a forgató nyomaték $M = xF = 2{,}5 \cdot 500 = 1250\ \mathrm{Nm}$.

4.5.11. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a mozgási energiája annak a nyugalomban lévő, $12\ \mathrm{kg}$ tömegű merev testnek, amelyet a súlypontjában $18{,}2\ \mathrm{kg\ m/s}$ nagyságú impulzus ér.

Megoldás

$W_m = mv^2/2 = m/2 \cdot (I/m)^2 = I^2/2m = 18{,}2^2/(2 \cdot 12) = 13{,}8017\ \mathrm{J}$.

4.5.12. Feladat

Egy $6\,\mathrm{kg}$ tömegű merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $3{,}2\,\mathrm{kg\,m^2}$. Határozza meg, mekkora szögsebességgel kezd el forogni a merev test, ha a forgástengelyre merőleges síkban, attól $3\,\mathrm{m}$ távolságban $12\,\mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus éri.

Megoldás

Minthogy a perdület $\Pi = r \cdot I = \Theta\omega$, ahonnan a forgás szögsebessége $\omega = r \cdot I/\Theta = 12 \cdot 3/3{,}2 = 11{,}2500\ \mathrm{rad/s}$.

4.5.13. Feladat

Határozza meg, mekkora impulzus éri azt az $5\,\mathrm{kg}$ tömegű merev testet, amely $6\,\mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog a súlyponttól $1{,}2\,\mathrm{m}$ távolságra lévő forgástengely körül.

Megoldás

A merev testet ért impulzus hatására a súlypontja $v_S = \omega r_S$ sebességgel kezd el forogni, azaz a merev testet $I = mv_S = m\omega r_S = 5 \cdot 6 \cdot 1{,}2 = 36\,\mathrm{kg\,m/s}$ impulzus éri.

4.5.14. Feladat

Határozza meg, két tömegpontból álló merev test súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, ha a tömegek $3\,\mathrm{kg}$ és $4\,\mathrm{kg}$ nagyságúak, és a köztük lévő távolság $9\,\mathrm{m}$.

Megoldás

Feltéve, hogy a súlypont a $3\,\text{kg}$ tömegtől x távolságra helyezkedik el, akkor a $4\,\text{kg}$ tömegtől $9-x$ távolságra lesz. A súlypontra az elsőrendű, statikai nyomaték nulla összefüggést felhasználva, $S_S = m_1 x - m_2(l-x) = 0$, a súlypont a $3\,\text{kg}$ tömegtől $x = 4 \cdot 9/(3+4) = 5{,}1429\,\text{m}$ távolságra van. A súlypont ismeretében a tömegpontok másodrendű, inercia nyomatéka $\Theta_S = m_1 x^2 + m_2(l-x)^2 = 3 \cdot 5{,}1429^2 + 4(9-5{,}1429)^2 = 138{,}8571\,\text{kg m}^2$.

4.5.15. Feladat

Egy súlytalannak tekinthető $2{,}7\,\text{m}$ hosszú rúd két végén azonos nagyságú, $5\,\text{kg}$ tömegű testek helyezkednek el. Határozza meg a merev testként kezelhető forgó rendszer tehetetlenségi nyomatékát, ha a rúd harmadában elhelyezett, a rúdra merőleges forgástengely körül megforgatják.

Megoldás

$$\Theta = m(l/3)^2 + m(2l/3)^2 = 5\left(0{,}9^2 + 1{,}8^2\right) = 20{,}2500\,\text{kg m}^2.$$

4.5.16. Feladat

Egy nyugalomban lévő $15\,\text{kg}$ tömegű merev testet a súlypontjában $0{,}02\,\text{kg m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}8\,\text{ms}$ idő alatt, amely hatására a merev test a súlypontjától $1{,}2\,\text{m}$ távolságban lévő forgástengely körül elfordul. Határozza meg, mekkora a merev testre ható forgatónyomaték.

Megoldás

A merev testet az impulzusból származó erő forgatja el, ekkor a forgatónyomaték $M = x \cdot F = 1{,}2 \cdot 0{,}02/0{,}0008 = 30\ \mathrm{N\,m}$.

4.5.17. Feladat

Egy nyugalomban lévő $5\ \mathrm{kg}$ tömegű merve testet a súlypontjában $0{,}05\ \mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}2\ \mathrm{ms}$ idő alatt. Határozza meg, mekkora a test perdülete, ha forgástengely a súlyponttól $3\ \mathrm{m}$ távolságra helyezkedik el.

Megoldás

A perdület a merev test impulzus nyomatéka, $\Pi = r \cdot \Delta I = 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}15\ \mathrm{kg\,m^2/s}$.

4.5.18. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a tehetetlenségi nyomatéka a pontszerűnek tekinthető, $1200\ \mathrm{kg}$ tömegű, $45\ \mathrm{km/óra}$ sebességű autónak a $125\ \mathrm{m}$ sugarú kanyarban.

Megoldás

$\Theta = mr^2 = 1200 \cdot 125^2 = 18{,}7500 \cdot 10^6\ \mathrm{kg\,m^2}$.

4.5.19. Feladat

Határozza meg, mekkora az impulzusa a $850\,\mathrm{kg}$ tömegű, $35\,\mathrm{km/óra}$ sebességű autónak a $120\,\mathrm{m}$ sugarú kanyarban.

Megoldás

$$I = mv = 850 \cdot 35 \cdot 10^3 \big/ 3600 = 8{,}2639\,\mathrm{kN\,s}\,.$$

4.5.20. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a perdülete az $1500\,\mathrm{kg}$ tömegű, $65\,\mathrm{km/óra}$ sebességű autónak a $60\,\mathrm{m}$ sugarú kanyarban.

Megoldás

$$\Pi = r\,I = r\,m\,v = 60 \cdot 1500 \cdot 65 \cdot 10^3 \big/ 3600 = 1625000\,\mathrm{kg\,m^2/s}\,.$$

4.5.21. Feladat

Egy súlytalannak tekinthető vízszintes rúd egyik vége függőleges tengely körül $3\,\mathrm{rad/s}$ szögsebességgel fordul körbe. A rúdon a forgástengelytől $25\,\mathrm{cm}$ távolságban $1{,}2\,\mathrm{kg}$, $55\,\mathrm{cm}$ távolságban $3\,\mathrm{kg}$ tömegek vannak rögzítve. Határozza meg a rúd impulzusnyomatékát.

Megoldás

A rendszernek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_F = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 1{,}2 \cdot 0{,}25^2 + 3 \cdot 0{,}55^2 = 0{,}9825\ \mathrm{kg\,m^2}$. A forgó rendszer perdülete $\Pi = \Theta_F \omega = 0{,}9825 \cdot 3 = 2{,}9475\ \mathrm{kg\,m^2/s}$.

4.5.22. Feladat

Egy $3\ \mathrm{kg}$ tömegű merev test súlypontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $15\ \mathrm{kg\,m^2}$. Határozza meg a merev test forgási energiáját, ha a súlyponttól $45\ \mathrm{cm}$ távolságra lévő forgástengely körül $5\ \mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog.

Megoldás

Steiner tétel alapján a merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_F = \Theta_S + m\,r_{SF}^2 = 15 + 3 \cdot 0{,}45^2 = 15{,}6075\ \mathrm{kg\,m^2}$. A forgási energia pedig $W_f = \Theta_F \omega^2 / 2 = 15{,}6075 \cdot 5^2 / 2 = 195{,}0938\ \mathrm{J}$.

4.5.23. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a mozgási energiája annak a vízszintes helyzetű, súlytalannak tekinthető $2{,}4\ \mathrm{m}$ hosszú rúd két végén lévő $4\ \mathrm{kg}$ és $6\ \mathrm{kg}$ tömegekből álló merev testnek, ha a rúd közepén átmenő függőleges tengely körül $4{,}8\ \mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog.

Megoldás

A tömegpontokból álló merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = m_1 (l/2)^2 + m_2 (l/2)^2 = (6+4) \cdot 1{,}2^2 = 14{,}4000\ \mathrm{kg\,m^2}$, a mozgási energiája $W_m = \Theta\omega^2/2 = 14{,}4000 \cdot 4{,}8^2/2 = 165{,}8880\ \mathrm{J}$.

4.5.24. Feladat

Egy nyugalomban lévő $3\ \mathrm{kg}$ tömegű merve testet a súlypontjában $0{,}05\ \mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}1\ \mathrm{ms}$ alatt. Határozza meg, mekkora szögsebességgel kezd el a merev test a súlyponttól $2\ \mathrm{m}$ távolságban lévő forgástengely körül forogni, ha a súlypontra vonatkozó inercia nyomatéka $4{,}5\ \mathrm{kg\,m^2}$.

Megoldás

A forgástengelyre vonatkozó inercia nyomatéka a súlyponti adatokkal $\Theta_F = \Theta_S + mr^2 = 4{,}5 + 3 \cdot 2^2 = 16{,}5\ \mathrm{kg\,m^2}$. Mivel az impulzus és a forgó mozgás sugara merőleges egymásra, a forgó tömeg perdülete $\Pi = r \cdot \Delta I = \Theta_F \omega$, ahonnan a szögsebesség $\omega = r \cdot \Delta I / \Theta_F = 2 \cdot 0{,}05/16{,}5 = 0{,}0061\ \mathrm{rad/s}$.

4.5.25. Feladat

Egy $5\ \mathrm{kg}$ tömegű merev test forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $2{,}4\ \mathrm{kg\,m^2}$. Határozza meg a merev test forgástengelytől $60\ \mathrm{cm}$ távolságra lévő súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás

Steiner tétele alapján $\Theta_S = \Theta_F - mr^2 = 2{,}4 - 5 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}6000\ \mathrm{kg\,m}^2$.

4.5.26. Feladat

Egy nyugalomban lévő $2\ \mathrm{kg}$ tömegű merev testet a súlypontjában $0{,}06\ \mathrm{kg\,m/s}$ nagyságú impulzus ér $0{,}1\ \mathrm{ms}$ alatt. Határozza meg mekkora forgatónyomaték hat a merev testre, ha a forgástengely a súlyponttól $3\ \mathrm{m}$ távolságban helyezkedik el.

Megoldás

A merev testet ért impulzus hatására $F = \Delta I / \Delta t = 0{,}06/0{,}0001 = 600\ \mathrm{N}$ erő éri, amely a forgástengelytől mért távolság határára $M = rF = 3 \cdot 600 = 1800\ \mathrm{J}$ forgatónyomatékot eredményez.

4.5.27. Feladat

Egy $3{,}2\ \mathrm{kg}$ tömegű merev test forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka $6\ \mathrm{kg\,m}^2$. Határozza meg, mekkora lesz a merev testre ható forgatónyomaték, ha a forgástengelyre merőleges síkban, a forgástengelytől $45\ \mathrm{cm}$ távolságban $3\ \mathrm{N}$ erő hat.

Megoldás

$M = d\,F = 0{,}45 \cdot 3 = 1{,}3500\ \mathrm{Nm}$.

4.5.28. Feladat

Egy merev test forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka $4{,}6\,\mathrm{kg\,m^2}$. Határozza meg, mekkora gyorsulással kezd el a test forogni, ha a forgástengelyre merőleges síkban a tengelytől $38\,\mathrm{cm}$ távolságban $4\,\mathrm{N}$ erő hat.

Megoldás

$M = dF = \Theta_F \varepsilon$, ahonnan $\varepsilon = d \cdot F / \Theta_F = 0{,}38 \cdot 4 / 4{,}6 = 0{,}3304\,\mathrm{rad/s}$.

4.5.29. Feladat

Két, egy $320\,\mathrm{g}$ tömegű, és egy $480\,\mathrm{g}$ tömegű tömegpontok egy súlytalannak tekinthető $1{,}8\,\mathrm{m}$ sugarú tárcsa kerületén helyezkednek el. A tárcsa középpontja körül egyenletes sebességgel forog. Határozza meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás

$\Theta = m_1 r_0^2 + m_2 r_0^2 = 0{,}8 \cdot 1{,}8^2 = 2{,}5920\,\mathrm{kg\,m^2}$.

4.5.30. Feladat

Egy $3{,}2\,\mathrm{m}$ sugarú tárcsa kerületén, a tárcsa síkjában $5{,}2\,\mathrm{N}$ nagyságú erőpár hat. Határozza meg a tárcsára ható forgatónyomatékot.

Megoldás

$$M = 2r_0F = 2 \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}2 = 33{,}2800 \text{ Nm} .$$

Merev testek kényszermozgása

Merevtestek ütközése

5.7.1. Feladat

Egy $5\,\text{g}$ tömegű, $5\,\text{m/s}$ sebességű merev test utolér egy $10\,\text{g}$ tömegű, $3\,\text{m/s}$ sebességű merev testet, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Rugalmatlan ütközés esetén az impulzus megmaradási tételt alkalmazva, $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$ az ütközés utáni közös sebességet az $5\,\text{g}$ tömeg sebességével azonos irányúnak feltételezve a két tömeg együtt $u = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2) = (5 \cdot 5 + 10 \cdot 3)/15 = 3{,}6667\,\text{m/s}$ sebességgel haladnak tovább.

5.7.2. Feladat

Egy $5\,\text{g}$ tömegű, $3\,\text{m/s}$ sebességű merev test szembe mozog egy $10\,\text{g}$ tömegű, $5\,\text{m/s}$ sebességű merev testtel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Az ütközés utáni sebesség irányát az $5\,\mathrm{g}$ tömegű test sebességével azonos irányúnak feltételezve, az impulzus megmaradási tételt alkalmazva $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$, a két tömeg ütközés utáni közös sebessége $u = (5 \cdot 3 - 10 \cdot 5)/15 = -2{,}3333\,\mathrm{m/s}$ a felvett iránnyal ellentétes lesz.
a tömegek,

5.7.3. Feladat

Egy $2\,\mathrm{g}$ tömegű, $4\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyó utolér egy $3\,\mathrm{g}$ tömegű, $2\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyót, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Ütközés után a golyók a közös $u = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 2)/5 = 2{,}8000\,\mathrm{m/s}$ sebességgel folytatják útjukat.

5.7.4. Feladat

Egy $8\,\mathrm{g}$ tömegű, $5\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyóval szembe mozog egy $3\,\mathrm{g}$ tömegű, $4\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyó, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Feltéve, hogy ütközés után a $8\,\mathrm{g}$ tömegű golyó irányában haladnak tovább, az ütközés utáni közös sebességük $u = (8\cdot 5 - 3\cdot 4)/11 = 2{,}5455\ \mathrm{m/s}$ lesz.

5.7.5. Feladat

Egy $2\,\mathrm{g}$ tömegű golyó $4\,\mathrm{m/s}$ sebessége 30^{o}-os szöget zár be a vele szembe haladó $3\,\mathrm{g}$ tömegű, $2\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyó középpontját összekötő egyenessel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Feltéve, hogy a $3\,\mathrm{g}$ tömegű golyó jobbról balra halad, a $2\,\mathrm{g}$ tömegű golyó pedig a vízszintessel 30^{o}-os szöget zár be, a $2\,\mathrm{g}$ tömegű golyó sebességének komponensei $v_{1x} = v_1 \cos 30^{\mathrm{o}} = 4\cdot\cos 30^{\mathrm{o}} = 3{,}4641\ \mathrm{m/s}$, $v_{1y} = v_1 \sin 30^{\mathrm{o}} = 2{,}0000\ \mathrm{m/s}$, amíg a $3\,\mathrm{g}$ tömegű golyónak csak vízszintes komponense van, $v_{2x} = -v_2 = -2\ \mathrm{m/s}$, $v_{2y} = 0$. Az impulzus megmaradási tételt a vízszintes és függőleges komponensekre külön-külön felírva, $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x$, $m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2)u_y$, az ütközés utáni közös sebesség komponensek $u_x = (2\cdot 3{,}4641 - 3\cdot 2)/5 = 0{,}1856\ \mathrm{m/s}$, $u_y = (2\cdot 2)/5 = 0{,}8000\ \mathrm{m/s}$. Az ütközés utáni sebesség nagysága a sebességkomponensek eredője $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 0{,}8213\ \mathrm{m/s}$, a sebesség iránya pedig $\alpha = \mathrm{arctg}(u_y/u_x) = \mathrm{arctg}(0{,}8000/0{,}1856) = 76{,}9357^{\mathrm{o}}$ szöget zár be a vízszintessel.

5.7.6. Feladat

Egy $4\,\mathrm{g}$ tömegű golyó $6\,\mathrm{m/s}$ sebessége 30^{o}-os szöget zár be a vele egy-irányba haladó $5\,\mathrm{g}$ tömegű, $2\,\mathrm{m/s}$ sebességű golyó középpontját összekötő egyenessel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Descartes koordináta rendszert alkalmazva, a $4\,\mathrm{g}$ tömegű golyó sebességének x, y komponensei, $v_{1x} = 6 \cdot \cos 30^{\mathrm{o}} = 5{,}1962\,\mathrm{m/s}$, $v_{1y} = 6 \cdot \sin 30^{\mathrm{o}} = 3{,}0000\,\mathrm{m/s}$, az $5\,\mathrm{g}$ tömegű golyó sebesség komponensei, $v_{2x} = 2\,\mathrm{m/s}$, $v_{2y} = 0$. Az ütközés utáni sebesség komponensek $u_x = (4 \cdot 5{,}1962 + 5 \cdot 2)/9 = 3{,}4205\,\mathrm{m/s}$, $u_y = (4 \cdot 3)/9 = 1{,}3333\,\mathrm{m/s}$, a sebesség nagysága $u = 3{,}6712\,\mathrm{m/s}$, és iránya $\alpha = 21{,}2961^{\mathrm{o}}$.

5.7.7. Feladat

Egy $6\,\mathrm{g}$ tömegű golyó $8\,\mathrm{m/s}$ sebessége 30^{o}-os szöget zár be a végtelen nagy tömegű, állónak tekinthető falhoz való ütközés során az ütközési normálishoz képest. Határozza meg ütközés után a golyó sebességét.

Megoldás

A golyó sebességét az ütközési normális és az érintő sík irányú komponensekre bontva, $v_{1n} = 8 \cdot \cos 30^{\mathrm{o}} = 6{,}9282\,\mathrm{m/s}$, $v_{1\tau} = 8 \cdot \sin 30^{\mathrm{o}} = 4{,}0000\,\mathrm{m/s}$, a fal ütközés előtti sebessége nulla. Az impulzusok normális irányú komponenseit a fal végtelen nagy tömege elnyeli, azaz az ütközés utáni sebesség normális irányú komponense nulla lesz, $u_n = 0$, miközben a golyó az érintősík irányú sebessége nem változik, $u_{1\tau} = v_{1\tau} = 4{,}0000\ \mathrm{m/s}$. Tehát a végtelen nagy tömegű falhoz való ütközés után a golyó a falba ütközve a fal mentén az érintő irányú sebességével fog mozogni, amíg a súrlódási munka fel nem emészti a golyó mozgási energiáját.

5.7.8. Feladat

Határozza meg egy $5\ \mathrm{g}$ tömegű, $3\ \mathrm{m/s}$ sebességű golyó és egy $10\ \mathrm{g}$ tömegű, álló golyó centrikus rugalmatlan ütközése utáni mozgási sebességet.

Megoldás

Ütközés után a közös sebesség $u = (5 \cdot 3 + 10 \cdot 0)/15 = 1{,}0000\ \mathrm{m/s}$ lesz.

5.7.9. Feladat

Egy $5\ \mathrm{g}$ tömegű, $3\ \mathrm{m/s}$ sebességű és egy $4\ \mathrm{g}$ tömegű, $6\ \mathrm{m/s}$ sebességű golyók mozognak egymás felé, majd centrikusan, rugalmasan ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

A mozgó golyók impulzusainak egyenlőségéből $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, és az energiákra vonatkozó egyenletből $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2$, a tömegek szerint csoportosítva és a nevezetes szorzatot felismerve, némi rendezés után két lineáris egyenlet adódik, $5(3-u_1)=4(u_2+6)$, $(3+u_1)=(u_2-6)$, ahonnan az ütközés utáni sebességek $u_1=-5{,}0000\ \mathrm{m/s}$, $u_2=4{,}0000\ \mathrm{m/s}$, azaz az $5\ \mathrm{g}$ tömegű golyó visszafordul $5{,}0000\ \mathrm{m/s}$ sebességgel, míg a $4\ \mathrm{g}$ tömegű golyó $4{,}0000\ \mathrm{m/s}$ sebességgel folytatja útját.

5.7.10. Feladat

Egy $5\ \mathrm{g}$ tömegű, $6\ \mathrm{m/s}$ sebességű golyó utolér egy $8\ \mathrm{g}$ tömegű, $3\ \mathrm{m/s}$ sebességű golyót, majd centrikusan, rugalmasan ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

A golyók impulzusainak egyenlőségéből $m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2$, és az energiákra vonatkozó egyenletből $m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2=m_1u_1^2/2+m_2u_2^2/2$, a tömegek szerint csoportosítva és a nevezetes szorzatot felismerve, némi rendezés után két lineáris egyenlet adódik, $5(6-u_1)=8(u_2-3)$, $(6+u_1)=(u_2+3)$, ahonnan az ütközés utáni sebességek $u_1=2{,}3077\ \mathrm{m/s}$, $u_2=5{,}3077\ \mathrm{m/s}$.

Harmonikus rezgőmozgás

5.7.11. Feladat

Egy $25\ \mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóra erősített $150\ \mathrm{g}$ tömegű test $5\ \mathrm{cm}$ amplitúdójú csillapítás mentes harmonikus rezgőmozgást végez a vízszintes síkban. Határozza meg a rezgés frekvenciáját.

Megoldás

A csillapítás mentes rezgőmozgás saját körfrekvenciája $\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{k/m}$, ahonnan a frekvencia $f = \sqrt{k/m}\big/2\pi = 2{,}0547\ \mathrm{Hz}$.

5.7.12. Feladat

Egy függőleges helyzetű rugó végén $50\ \mathrm{g}$ tömegű test függ. Határozza meg a rugóállandót, ha a testet $70\ \mathrm{g}$ tömegűre cseréve a rugó megnyúlása $7\ \mathrm{cm}$-rel növekszik.

Megoldás

A rugót feszítő súlyerő és a rugó megnyúlása közti kapcsolatot alkalmazva $\Delta F_g = k\Delta x$, a rugóállandó $\mathrm{k} = \Delta F_g \big/ \Delta x = 0{,}02 \cdot 9{,}81 \big/ 0{,}07 = 2{,}8029\ \mathrm{N/m}$.

5.7.13. Feladat

Egy 35^{o}-os lejtővel párhuzamosan elhelyezett $50\ \mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugó végére $1\ \mathrm{kg}$ tömeget akasztva határozza meg a rugó megnyúlását, ha a felületek súrlódásmentesnek tekinthetők.

Megoldás

A tömeg súlyerejének lejtő irányú komponense $G_l = mg \sin 35^{\mathrm{o}}$ feszíti a rugót, $G_l = kx$, ahonnan a rugó megnyúlása $x = 1 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 35^{\mathrm{o}} \big/ 50 = 0{,}1125\ \mathrm{m}$.

5.7.14. Feladat

Egy $1{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű testet egy rugó közbeiktatásával, egyenletes sebességgel vontatnak. A testre ráhelyezett további $0{,}5\,\mathrm{kg}$ tömeg esetén a rugó $12\,\mathrm{cm}$-rel hosszabbra nyúlik. Határozza meg a rugóállandó értékét, ha a súrlódási együttható $0{,}2$.

Megoldás

A súlyerő növekedésből származó súrlódási erő hozza létre a rugó megnyúlás növekedést, $F_S = \mu \cdot \Delta m \cdot g = k\Delta x$, ahonnan a rugóállandó $k = (\mu \cdot \Delta m \cdot g)/\Delta x$, azaz $k = (0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81)/0{,}12 = 8{,}1750\ \mathrm{N/m}$.

5.7.15. Feladat

Egy liftben a $30\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugó végére erősített tömeg $1{,}8\,\mathrm{kg}$. Határozza meg a rugó megnyúlását, ha az egy lift $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással kezd el felfelé mozogni.

Megoldás

A tömegre ható gyorsító erő hozza létre a rugó megnyúlását, $\Delta x = (m \cdot a)/k = 1{,}8 \cdot 1{,}5/30 = 0{,}0900\ \mathrm{m} = 9\ \mathrm{cm}$.

5.7.16. Feladat

Határozza meg annak a rugónak a rugóállandóját, amely végén lévő $2{,}6\,\mathrm{kg}$ tömegű test $4\,\mathrm{rad/s}$ körfrekvenciájú csillapítatlan szabadrezgést végez.

Megoldás

A csillapítatlan szabadrezgés saját körfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ahonnan a rugóállandó $k = m\omega_0^2 = 2{,}6 \cdot 4^2 = 41{,}6000\ \mathrm{N/m}$.

5.7.17. Feladat

Egy $3\ \mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $200\ \mathrm{g}$ tömeget csatlakoztatva, azt a vízszintes síkban $3{,}8\ \mathrm{N}$, időben állandó erő húz. Határozza meg, mekkora kitérés körül fog kialakulni a harmonikus rezgőmozgás.

Megoldás

A rugómozgás mozgásegyenlete $m\ddot{x} + kx = F$, ahonnan a gerjesztett válasz $X_g = F/k = 3{,}8/3 = 1{,}2667\ \mathrm{m}$.

5.7.18. Feladat

Egy $2{,}8\ \mathrm{Ns/m}$ csillapítási tényezőjű, $5\ \mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz a vízszintes síkban $480\ \mathrm{g}$ tömeget csatlakoztatva, azt $5\ \mathrm{N}$ nagyságú, időben állandó erő húz. Határozza meg a rugó saját körfrekvenciáját.

Megoldás

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$. A szabad válasz sajátértékeiből $0{,}48\lambda^2 + 2{,}8\lambda + 5 = 0$, $\lambda = -2{,}9167 \pm j1{,}3819 = -\rho \pm j\omega_1$, ahonnan a rezgő rendszer saját körfrekvenciája $\omega_1 = 1{,}3819\ \mathrm{rad/s}$.

5.7.19. Feladat

Egy $3\,\mathrm{Ns/m}$ csillapítású, függőlegesen elhelyezett $24\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $260\,\mathrm{g}$ tömeget csatlakoztatva, azt $6{,}8\,\mathrm{N}$ nagyságú, időben állandó erő húz. Határozza meg a rugó megnyúlását.

Megoldás

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F + mg$, állandósult állapotban a gerjesztett válasz $X_g = (F + mg)/k = (6{,}8 + 0{,}26 \cdot 9{,}81)/24 = 0{,}3896\,\mathrm{m}$.

5.7.20. Feladat

Egy $1{,}5\,\mathrm{Ns/m}$ csillapítású, $6\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz a vízszintes síkban csatlakoztatott $500\,\mathrm{g}$ tömeget $F(t) = 5\cos\omega t\ \mathrm{N}$, $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$, nagyságú harmonikus erő terhel. Határozza meg a rugó kitérését állandósult állapotban.

Megoldás

Az $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ mozgásegyenlet gerjesztett válaszának komplex amplitúdója a $-m\omega^2\hat{\hat{X}}_g + j\omega c\hat{\hat{X}}_g + k\hat{\hat{X}}_g = \hat{\hat{F}}$ egyenlet megoldása, $\hat{\hat{X}}_g = 5/\left(-0{,}5 \cdot 2^2 + 6 + j2 \cdot 1{,}5\right)$ $\hat{\hat{X}}_g = 0{,}8000 - j\,0{,}6000 = 1e^{-j36{,}8699^o}$, ahonnan állandósult állapotban a kitérés valós időfüggvénye $x_g(t) = 1\cos\left(2t - 36{,}8699^o\right)\mathrm{m}$.

5.7.21. Feladat

Határozza meg, mekkora húzóerő szükséges a $60\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz csatlakoztatott $500\,\mathrm{g}$ tömegű testnek a 30° hajlásszögű lejtőn állandó sebességgel való húzásához, ha a lejtőn való mozgásnál $12\,\mathrm{N}$ súrlódási erő lép fel és a rugó megnyúlása $5{,}6\,\mathrm{cm}$.

Megoldás

A F_h húzóerő ellensúlyozza a rugó megnyújtásához szükséges $F_r = kx$ rugóerőt, fedezi az F_s súrlódási erőt és, mivel a tömeg felfelé mozog, a súlyerő $G_l = mg\sin 30^{\circ}$ lejtő irányú komponensét, azaz $F_h = kx + F_s + mg\sin 30^{\circ}$, ahonnan $F_h = 60 \cdot 0{,}056 + 12 + 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 30^{\circ} = 17{,}8125\,\mathrm{N}$.

5.7.22. Feladat

Egy 30° hajlásszögű lejtő tetején rögzített $3\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $440\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik. Határozza meg a rugó megnyúlását, ha a test és a lejtő között fellépő súrlódási erő $1{,}4\,\mathrm{N}$.

Megoldás

A tömeg súlyerejének lejtő irányú komponense ellensúlyozza a rugóerőt és fedezi a súrlódási erőt, $kx + F_s = G_l = mg\sin 30^{\circ}$, ahonnan a rugó megnyúlása $x = \left(0{,}44 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 30^{\circ} - 1{,}4\right)/3 = 0{,}2527\,\mathrm{m}$.

5.7.23. Feladat

Egy $30\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz vízszintes asztalon $360\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik. Határozza meg, mekkora erő húzza a rugót, ha $12\,\mathrm{N}$ súrlódási erő mellett a rugó megnyúlása $8\,\mathrm{cm}$.

Megoldás

A húzóerő ellensúlyozza a rugóerőt és fedezi a súrlódási erőt, $kx + F_s = F_h$, ahonnan $F_h = 30 \cdot 0{,}08 + 12 = 14{,}4000\,\mathrm{N}$.

5.7.24. Feladat

Egy $3{,}2\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $200\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik vízszintes síkban. A rugót $5\,\mathrm{cm}$-rel megnyújtva, az elengedés után $4\,\mathrm{cm/s}$ sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a kialakuló csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciáját, valamint a rezgés amplitúdóját és kezdőfázisát.

Megoldás

A rugó mozgásegyenlete $0{,}2\ddot{x}(t) + 3{,}2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0{,}2\lambda^2 + 3{,}2 = 0$, a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \sqrt{-3{,}2/0{,}2} = \pm j4$, azaz a rendszer saját körfrekvenciája $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s}$. Ezzel a rezgő rendszer elmozdulása $x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$. A d_1, d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0{,}05 = d_1 + d_2$, és $v(0) = 0{,}04 = j4d_1 - j4d_2$, $d_1 = (0{,}04 + j4 \cdot 0{,}05)/(j2 \cdot 4)$,

$d_1 = 0{,}0250 - j\,0{,}0050 = 0{,}0255e^{-j11{,}3099^{o}}$, $d_2 = (0{,}04 - j4\cdot 0{,}05)/(-j2\cdot 4)$, $d_2 = 0{,}0250 + j\,0{,}0050 = 0{,}0255e^{+j11{,}3099^{o}}$. Látható, hogy a két állandó egymás komplex konjugáltja. Ezzel a rezgő rendszer kitérése $x(t) = 0{,}0255e^{-j11{,}3099^{o}}e^{j4t} + 0{,}0255e^{+j11{,}3099^{o}}e^{-j4t}$. A közös állandót kiemelve és az exponenciális alakot rendezve egy eltolt cos függvényt eredményez, $x(t) = 2\cdot 0{,}0255\left(e^{j(4t-11{,}3099^{o})} + e^{-j(4t-11{,}3099^{o})}\right)/2 = 0{,}0510\cos(4t - 11{,}3099^{o})$. Tehát a harmonikus rezgő rendszer saját körfrekvenciája $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s}$, a harmonikus rezgőmozgás a nyugalmi állapot körül történik, $0{,}0510\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{cm}$ amplitúdóval és $11{,}3099^{o}$ kezdőfázissal.

5.7.25. Feladat

Egy $2{,}8\,\mathrm{Ns/m}$ csillapítási tényezőjű, $3{,}2\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $200\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót $5\,\mathrm{cm}$-rel megnyújtva, az $4\,\mathrm{cm/s}$ sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat egy csillapított harmonikus szabadrezgést ír le, ahol a mozgásegyenlet $0{,}2\ddot{x}(t) + 2{,}8\dot{x}(t) + 3{,}2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0{,}2\lambda^2 + 2{,}8\lambda + 3{,}2 = 0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \left(-2{,}8 \pm \sqrt{2{,}8^2 - 4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}\right)/(2\cdot 0{,}2)$, $\lambda_1 = -1{,}2554\,[1/\mathrm{s}]$ és $\lambda_2 = -12.7446\,[1/\mathrm{s}]$. Mivel a sajátértékek valósak, a rendszer csillapodó mozgást végez. A rendszer elmozdulása a szabad válasz $x(t) = d_1e^{\lambda_1 t} + d_2e^{\lambda_2 t}$. A d_1, d_2

állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0)=0{,}05=d_1+d_2$, és $v(0)=0{,}04=\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1=(0{,}05\lambda_2-0{,}04)/(\lambda_2-\lambda_1)=0{,}0589\,[\mathrm{m}]$, $d_2=(0{,}05\lambda_1-0{,}04)/(\lambda_1-\lambda_2)=-0{,}0089\,[\mathrm{m}]$. Ezzel a mozgó rendszer kitérése $x(t)=5{,}89e^{-1{,}2554t}-0{,}89e^{-12{,}7446t}\,[\mathrm{cm}]$, azaz a rendszer a $t=0$ pillanatbeli maximális kitérés után lassan csillapodva, visszatér nyugalmi állapotába.

5.7.26. Feladat

Az előző feladathoz képest, legyen a csillapítási tényező kisebb. Egy $1{,}6\,\mathrm{Ns/m}$ csillapítási tényezőjű, $3{,}2\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $200\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót $5\,\mathrm{cm}$-rel megnyújtva, az $4\,\mathrm{cm/s}$ sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat megoldása az előzőhöz hasonlóan történik, most egy csillapított harmonikus szabadrezgést ír le a mozgásegyenlet $0{,}2\ddot{x}(t)+1{,}6\dot{x}(t)+3{,}2x(t)=0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t)=x_f(t)=de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0{,}2\lambda^2+1{,}6\lambda+3{,}2=0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2}=\left(-1{,}6\pm\sqrt{1{,}6^2-4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}\right)\Big/(2\cdot 0{,}2)$, most azonban a két sajátérték azonos lesz, $\lambda_{1,2}=\lambda=-4\,[1/\mathrm{s}]$. Mivel a sajátértékek azonosak a rendszer szabad válasza exponenciálisan csillapodó polinom alakú lesz, $x(t)=(d_1+d_2 t)e^{\lambda t}$. A d_1, d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0)=0{,}05=d_1$, és $v(0)=0{,}04=-4d_1+d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1=0{,}0500\,[\mathrm{m}]$,

$d_2 = 0{,}04 + 4\cdot 0{,}05 = 0{,}2400\,[\mathrm{m}]$. Ezzel a mozgó rendszer kitérése továbbra is egy csillapodó mozgás, éppen a harmonikus rezgőmozgás kialakulásának határesetén $x(t) = (5{,}00 + 24t)e^{-4t}\,[\mathrm{cm}]$, azaz a rendszer kitérése a $t = 0$ pillanatbeli kitérés után még egy ideig nő, és csak azután kezd el csillapodni.

5.7.27. Feladat

Tovább csökkentve a csillapítási tényezőt, a rugó kitérése harmonikus rezgőmozgássá alakul. Egy $0{,}8\,\mathrm{Ns/m}$ csillapítási tényezőjű, $3{,}2\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz $200\,\mathrm{g}$ tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót $5\,\mathrm{cm}$-rel megnyújtva, az $4\,\mathrm{cm/s}$ sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat mozgásegyenlete $0{,}2\ddot{x}(t) + 0{,}8\dot{x}(t) + 3{,}2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0{,}2\lambda^2 + 0{,}8\lambda + 3{,}2 = 0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \left(-0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2 - 4\cdot 0{,}2\cdot 3{,}2}\right)\Big/(2\cdot 0{,}2)$, most a két sajátérték komplex konjugált párt alkot, $\lambda_1 = -2{,}0000 + j3{,}4641\,[1/\mathrm{s}]$, $\lambda_2 = -2{,}0000 - j3{,}4641\,[1/\mathrm{s}]$. A szabad válasz $x(t) = d_1e^{\lambda_1 t} + d_2e^{\lambda_2 t}$, ahol a d_1, d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0{,}05 = d_1 + d_2$, és $v(0) = 0{,}04 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1 = (0{,}05\lambda_2 - 0{,}04)/(\lambda_2 - \lambda_1) = 0{,}0250 - j\,0{,}0202 = 0{,}0321e^{-j38{,}9483^\circ}\,[\mathrm{m}]$, és a másik $d_2 = (0{,}05\lambda_1 - 0{,}04)/(\lambda_1 - \lambda_2) = 0{,}0250 + j\,0{,}0202 = 0{,}0321e^{+j38{,}9483^\circ}\,[\mathrm{m}]$ a d_1 komplex konjugáltja. Ezzel a mozgásegyenlet megoldása némi rendezés után $x(t)=3{,}21e^{-2t}2\left(e^{j(3{,}4641t-38{,}9483^{\circ})}+e^{-j(3{,}4641t-38{,}9483^{\circ})}\right)/2\ [\mathrm{cm}]$ egy csillapodó amplitúdójú harmonikus rezgőmozgás, $x(t)=6{,}42e^{-2t}\cos(3{,}4641t-38{,}9483^{\circ})[\mathrm{cm}]$.

5.7.28. Feladat

Egy $3{,}2\ \mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóhoz a vízszintes síkban csatlakozó $200\ \mathrm{g}$ tömeget nyugalmi helyzetéből $4{,}8\ \mathrm{N}$, időben állandó erő kitérít. Határozza meg a kialakuló csillapítatlan rezgőmozgás kitérését.

Megoldás

Az inhomogén mozgásegyenlet $0{,}2\ddot{x}(t)+3{,}2x(t)=4{,}8$. A szabad válasz $x_f(t)=de^{\lambda t}$ sajátértékei a $0{,}2\lambda^2+3{,}2=0$ karakterisztikus polinomból $\lambda_{1,2}=\pm j4\,[1/\mathrm{s}]$. A gerjesztett válasz egy állandó lesz a gerjesztésnek megfelelően, $x_g(t)=X_g$, amelyet a mozgásegyenletbe helyettesítve, ahonnan $X_g=1{,}5\,[\mathrm{m}]$. Ezzel a teljes megoldás $x(t)=x_f(t)+X_g=d_1e^{j4t}+d_2e^{-j4t}+1{,}5$. Az ismeretlen állandók a nyugalomból induló mozgás kezdeti feltételből határozhatók meg, $x(0)=0=d_1+d_2+1{,}5$, $v(0)=0=j4d_1-j4d_2$, ahonnan $d_1=d_2=-0{,}75$, azaz a megoldás egy harmonikus rezgőmozgás lesz, $x(t)=-0{,}75\cdot 2\left(e^{j4t}+e^{-j4t}\right)/2+1{,}5$, amely az állandó erő hatására történő megnyúlás értéke körül leng $x(t)=1{,}5(1-\cos 4t)[\mathrm{m}]$.

5.7.29. Feladat

Határozza meg, mekkora sebességgel halad a $2\ \mathrm{kg}$ tömegű, $4{,}6\ \mathrm{m}$ hosszú kötélen az a tranzverzális hullám, amelyet $1{,}8\ \mathrm{N}$ erővel mozgatunk.

Megoldás

A tranzverzális hullám haladási sebessége $v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{F/(m/l)}$ $v = \sqrt{1{,}8/(2/4{,}6)} = 2{,}0347$ m/s .

5.7.30. Feladat

Határozza meg, mekkora erővel kell mozgatni a $2{,}4\,\mathrm{kg}$ tömegű, $6\,\mathrm{m}$ hosszú kötelet, hogy a rajta kialakuló tranzverzális hullám $5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel fusson végig rajta.

Megoldás

A tranzverzális hullám haladási sebessége $v = \sqrt{F/(m/l)}$, ahonnan a kötelet mozgató erő nagysága $F = v^2 m/l = 10\ \mathrm{N}$.