

5. Gyakorlat, Hullámtan

8.7.1. Feladat

Az $\varepsilon_r = 2,56$, $\mu_r = 1$ közegből 3 mA/cm nagyságú, 120 MHz frekvenciájú mágneses térerősség érkezik merőlegesen a levegő felületére.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullám terjedési sebességét,

Megoldás

Mivel $\varepsilon_{1r} = 2,56$; $\mu_{1r} = 1$; $\varepsilon_{2r} = 1$; $\mu_{2r} = 1$;

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{1r}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,56}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,6} = 1,8750 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v_2 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

b) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám fázistényezőjét,

Megoldás

$$\beta_1 = \frac{2\pi f}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6}{1,8750 \cdot 10^8} = 4,0212 \text{ rad/m}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi f}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 2,5133 \text{ rad/m},$$

c) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám hullámhosszúságát,

Megoldás

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{1,8750 \cdot 10^8}{120 \cdot 10^6} = 1,5625 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{120 \cdot 10^6} = 2,5 \text{ m},$$

d) Határozza meg az egyes közegekben a hullám-impedancia értékét,

Megoldás

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \frac{120\pi}{1,6} = 235,6194 \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = 120\pi = 376,9911 \Omega,$$

e) Határozza meg a két réteg határán a mágneses térerősségre vonatkozó reflexiós tényező értékét,

Megoldás

$$r_{12}^H = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -\frac{1,6 - 1}{1,6 + 1} = -0,2308,$$

f) Határozza meg a határfelületen a mágneses térerősség reflektált komponensét,

Megoldás

$$H_1^+ = 3 \text{ mA/cm} = 0,3 \text{ A/m}, \quad H_1^- = r_{12}^H H_1^+ = -0,2308 \cdot 0,3 = -0,6923 \text{ A/m},$$

g) Határozza meg a továbbhaladó mágneses térerősség hullám nagyságát,

Megoldás

$$H_2^+ = H_1^+ + H_1^- = H_1^+ (1 + r_{12}^H) = 3(1 - 0,2308) = 2,3077 \text{ A/m},$$

h) Határozza meg a két réteg határán a szigetelőanyagba az egységnyi felületen beáramló teljesítményt.

Megoldás

$$S_2 = \frac{1}{2} E_2^+ \tilde{H}_2^+ = \frac{1}{2} Z_2 |H_2^+|^2 = \frac{1}{2} 376,9911 |2,3077|^2 = 1,0038 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2,$$

8.7.2. Feladat

Levegőből érkező 150 MHz frekvenciájú mágneses térerősség merőlegesen lép át az $\epsilon_r = 5,76$, $\mu_r = 1$ közegbe 4 mA/cm nagyságú amplitúdóval.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullám terjedési sebességét,

Megoldás

Mivel $\epsilon_{1r} = 1$; $\mu_{1r} = 1$; $\epsilon_{2r} = 5,76$; $\mu_{2r} = 1$;

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{2r}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{5,75}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,4} = 1,2500 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v_1 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

b) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám fázistényezőjét,

Megoldás

$$\beta_1 = \frac{2\pi f}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = \pi = 3,14 \text{ rad/m}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi f}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{1,25 \cdot 10^8} = 7,5398 \text{ rad/m},$$

c) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám hullámhosszát,

Megoldás

$$A_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 2 \text{ m}, \quad A_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{1,25 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 0,8333 \text{ m},$$

d) Határozza meg az egyes közegekben a hullámimpedancia értékét,

Megoldás

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = 377 \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \frac{120\pi}{2,4} = 157,0796 \Omega,$$

e) Határozza meg a két réteg határán a mágneses térerősségre vonatkozó reflexiós tényező értékét,

Megoldás

$$r_{12}^H = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -\frac{1 - 2,4}{1 + 2,4} = 0,4118,$$

f) Határozza meg a határfelületen a mágneses térerősség reflektált komponensét,

Megoldás

$$H_1^- = r_{12}^H H_1^+ = 0,4118 \cdot 0,2833 = 0,1167 \text{ A/m},$$

g) Határozza meg a beeső mágneses térerősség hullám nagyságát,

Megoldás

$$H_2^+ = 4 \text{ mA/cm} = 0,4 \text{ A/m} = H_1^+ (1 + r_{12}^H), \quad H_1^+ = \frac{H_2^+}{1 + r_{12}^H} = 0,2833 \text{ A/m},$$

h) Határozza meg a két réteg határán az egységnyi felületen a levegőből átáramló teljesítményt.

Megoldás

$$S_2 = \frac{1}{2} E_2^+ \tilde{H}_2^+ = \frac{1}{2} Z_2 |H_2^+|^2 = \frac{1}{2} 157,0796 |0,4|^2 = 12,5664 \text{ W/m}^2$$

8.7.3. *Feladat*

Egy $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ szigetelőanyagban 32 MHz frekvenciájú síkhullám terjed. Határozza meg a jel hullámhosszát.

Megoldás

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 32 \cdot 10^6} = 4,6875 \text{ m},$$

8.7.4. *Feladat*

Szigetelő közegből ($\varepsilon_r = 8$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$) a határoló síkfelületre merőlegesen érkező síkhullám levegőben terjed tovább, ahol az elektromos térerősség amplitúdója 8 mV/m. Határozza meg az elválasztó síkon a levegőben a H mágneses térerősség amplitúdóját.

Megoldás

$$H_2^+ = \frac{E_2^+}{Z_{20}} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{120\pi} = 2,1221 \cdot 10^{-5} \text{ A/m} = 21,221 \mu\text{A/m},$$

8.7.5. Feladat

Egy $Z_{01}=250 \Omega$ hullám-ellenállású ideális szigetelőben $f=120$ MHz frekvenciájú síkhullám terjed a szigetelő határfelületére merőlegesen. A sík határfelület túloldalán levegő van. Határozza meg a reflexió tényezőt a határfelületen.

Megoldás

$$r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{120\pi - 250}{120\pi + 250} = 0,2025,$$

8.7.6. Feladat

Levegőből 12 mV/m nagyságú elektromos térerősség érkezik merőlegesen egy szigetelő határfelületére, ahol a reflexió tényező $r^E = 1/3$. Adja meg a szigetelőben a határfelületen a továbbhaladó elektromos térerősség értékét.

Megoldás

$$E_2^+ = E_1^+(1 + r) = 12 \cdot 4/3 = 16 \text{ mV/m},$$

8.7.7. Feladat

Levegőből szigetelő határfelületére merőlegesen síkhullám érkezik. Adja meg a beérkező elektromos térerősség amplitúdóját, ha a beérkező mágneses térerősség amplitúdója $6 \mu\text{A/m}$.

Megoldás

$$E_1^+ = Z_{10} H_1^+ = 120\pi \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 0,0023 \text{ V/m} = 2,3 \text{ mV/m},$$

8.7.8. *Feladat*

Határozza meg az $\epsilon_r = 6$, $\mu_r = 1$ szigetelőanyagban terjedő $f=30$ MHz frekvenciájú síkhullám hullámhosszát.

Megoldás

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{6} \cdot 30 \cdot 10^6} = 4,0825 \text{ m},$$

8.7.9. *Feladat*

Egy szabad térben terjedő síkhullám frekvenciája 380 MHz. Határozza meg a jel fázistényezőjét.

Megoldás

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot 380 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 7,9587 \text{ rad/s},$$

8.7.10. *Feladat*

Egy $Z_{10} = 120 \Omega$ hullámimpedanciájú szigetelőből 3 mV/m amplitúdójú síkhullám érkezik a $Z_{20} = 180 \Omega$ hullámimpedanciájú szigetelő határfelületére. Határozza meg a határfelületen a 2. közegbe belépő elektromos térerősség amplitúdóját.

Megoldás

$$r = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}} = \frac{180 - 120}{180 + 120} = 0,2, \text{ ahonnan } E_2^+ = E_1^+ (1 + r) = 3 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ mV/m},$$

8.7.11. *Feladat*

Levegőből 2 mV/cm nagyságú, 60 MHz frekvenciájú elektromos térerősség érkezik merőlegesen az $\epsilon_r=4$, $\mu_r=1$ közeg felületére.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullámok terjedési sebességét és fázistényezőjét,

Megoldás

A levegőben $v_1 = c = 3 \cdot 10^8$ m/s, a szigetelőben $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 1,5 \cdot 10^8$ m/s,

b) Határozza meg az egyes közegekben terjedő hullámok hullámhosszát,

Megoldás

Levegőben a szabadtéri hullámhossz $\lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 5$ m, a szigetelőben $\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 2,5$ m,

c) Határozza meg az egyes közegekben a hullámimpedanciák értékét,

Megoldás

A levegőben $Z_{01} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \approx 377 \Omega$, a szigetelőben $Z_{02} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cdot 1/\sqrt{\epsilon_r} = 120\pi/2 = 60\pi \Omega$,

d) Határozza meg az 1-2 közeg határán az elektromos térerősségre vonatkozó reflexiós tényezőt,

Megoldás

$$r_{12}^E = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}} = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = -\frac{1}{3},$$

e) Határozza meg az 1. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,

Megoldás

A beérkező hullám reflektálódik, $E_1 = E_1^+ + r_{12}^E E_1^+ = (1 + r_{12}^E) E_1^+ = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ mV/cm}$,

f) Határozza meg az 1. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét,

Megoldás

$$H_1 = \frac{E_1^+}{Z_{10}} - \frac{E_1^-}{Z_{10}} = \frac{E_1^+}{Z_{10}} (1 - r_{12}^E) = \frac{0,2}{120\pi} \cdot \frac{4}{3} = 7,0736 \cdot 10^{-3} \text{ mA/cm},$$

g) Határozza meg a 2. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,

Megoldás

A folytonossági feltételből $E_2 = E_2^+ = E_1 = E_1^+ + E_1^- = 4/3 \text{ mV/cm}$,

h) Határozza meg a 2. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét,

Megoldás

A folytonossági feltételből $H_2 = H_2^+ = H_1 = H_1^+ + H_1^- = 0,0070 \text{ mA/cm}$,

i) Adja meg az egyes közegekben az elektromos térerősség hely-időfüggvényét,

Megoldás

Ideális mindkét szigetelőanyag, így a terjedési együttható imaginárius, azaz a fázistényező a levegőben

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi 60 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 1,25661/\text{m}, \text{ a szigetelőben } \beta_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi 60 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^8} = 2,5133 \text{ 1/m}. \text{ Az elektromos térerősség hely-}$$

időfüggvénye levegőben $E_1(z, t) = E_1^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) + E_1^- \cos(\omega t + \beta_1 z)$, behelyettesítve

$$E_1(z, t) = 2 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 1,2566 z) - 0,66 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t + 1,2566 z) \text{ mV/cm}, \text{ a szigetelőben csak továbbhaladó hullám lép fel,}$$

$$E_2(z, t) = E_2^+ \cos(\omega t - \beta_2 z), \text{ azaz } E_2(z, t) = 4/3 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 2,5133 z) \text{ mV/cm}.$$

j) Határozza meg a közegekben a mágneses térerősségek hely-időfüggvényét,

Megoldás

$$\text{A levegőben } H_1(z, t) = \frac{E_1^+}{Z_{10}} \cos(\omega t - \beta_1 z) - \frac{E_1^-}{Z_{10}} \cos(\omega t + \beta_1 z), \text{ behelyettesítés után}$$

$$H_1(z, t) = 0,0053 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 1,2566 z) + \\ + 0,0018 \frac{E_1^-}{Z_{10}} \cos(3,7699 \cdot 10^8 t + 1,2566 z) \text{ mA/cm},$$

$$\text{a szigetelőben } H_2(z, t) = \frac{E_2^+}{Z_{20}} \cos(\omega t - \beta_2 z),$$

$$H_2(z, t) = 0,0071 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 2,5133 z) \text{ mA/cm},$$

k) Határozza meg az egységnyi határfelületen átáramló teljesítményt,

Megoldás

A Poynting vektor értéke $S_1 = \frac{1}{2} E_1 \tilde{H}_1 = \frac{1}{2} E_2 \tilde{H}_2 = S_2 = \frac{1}{2} E_2 \frac{E_2}{Z_{20}} = \frac{1}{2} \frac{E_2^2}{Z_{20}}$,

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{E_2^2}{Z_{20}} = \frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{1}{60\pi} = 0,0047 \mu\text{W}/\text{cm}^2 .$$