



IVÁNYI AMÁLIA MŰSZAKI FIZIKA INFORMATIKUSOKNAK

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. műszaki szakkönyv a mérnök informatikus BSc képzéshez készült, ahol, a fenti témakörök a 'Transzport folyamatok modellezése' c. tárgy keretében kerülnek feldolgozásra. A kötet célja megalapozni a mérnök informatikus képzésben részt vevő hallgatók mérnöki ismereteinek fizikai alapjait, ezzel is elősegítve a szaktárgyakban előforduló fizikai jelenségek és technológiai folyamatok matematikailag megfogalmazott, a számítógép nyelvére lefordítható ismereteinek átadását.

A műszaki szakkönyv a fizikai jelenségek, technológiai folyamatok köréből csak néhány, a szakképzés során a szaktárgyakban előforduló kérdések tárgyalásával foglalkozik. Így a tömegpontok és merev testek kinematikáját és kinetikai törvényeit tárgyalja. A kényszermozgások köréből az ütközések és harmonikus rezgőmozgások kerülnek feldolgozásra. Az áramló közegek dinamikai jellemzését a hőtani és hőátviteli ismeretek mérnöki megfogalmazása és megoldási eljárásai követik. A kötet az elektromágneses hullámok és az optikai hullámvezetők alapjainak összefoglalásával zárul. Az egyes fejezeteket kidolgozott feladatok illusztrálják.

A műszaki életben előforduló, a szakkönyvben tárgyalt fejezeteknek a matematika szigorú szabályai szerinti megfogalmazása azt a készséget kívánja az olvasóban, a hallgatóban kialakítani, hogy az itt nem tárgyalt, de a mérnök informatikus szakmai pályafutása során előforduló jelenségek vizsgálatához kellő bátorságot és szakmai ismeretet adjon.

IVÁNYI AMÁLIA

MŰSZAKI FIZIKA INFORMATIKUSOKNAK



POLLACK PRESS, PÉCS

**MŰSZAKI FIZIKA
INFORMATIKUSOKNAK**

Lektorálta

Kapitányné, dr. Hantos Gizella, gépészmérnök
nyugalmazott főiskolai docens

dr. Szőke Béla, gépészmérnök
nyugalmazott főiskolai docens

MŰSZAKI FIZIKA INFORMATIKUSOKNAK

Dr. IVÁNYI AMÁLIA

Műszaki Informatika Tanszék
Pollack Mihály Műszaki Kar, Pécsi Tudományegyetem

POLLACK PRESS, PÉCS

A műszaki szakkönyv a Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar
Mérnök Informatikus BSc képzéshez készült
2010

ISBN 978-963-7298-38-7

Első magyar nyelvű kiadás, 2010

© Iványi Amália, 2010

Minden jog fenntartva

Készült a POLLACK PRESS gondozásában
Kiadja a Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar
Nyomta és kötötte Rotari Nyomda Kft. Komló

In Memoriam

*Professor Emeritus
Dr. Fodor György, DSc.*

TARTALOM

Előszó.....	1
1. Bevezetés	3
2. Tömegpont kinematikája.....	8
2.1. Vonatkoztatási rendszerek.....	8
2.1.1. Ortogonális vonatkoztatási/koordináta rendszerek	8
2.1.2. Vektor műveletek.....	11
2.2. Tömegpont mozgástörvénye.....	16
2.2.1. A helyzetvektor és a pályagörbe kapcsolata	16
2.2.2. A pályagörbe görbületi sugara, a pálya síkja és a binormális	17
2.2.3. A tömegpont sebessége és a pályasebesség	19
2.2.4. A tömegpont gyorsulása és komponensei	22
2.2.5. A foronómiai görbék és a hodográf	24
2.3. Tömegpont speciális mozgása	27
2.3.1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás	27
2.3.2. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.....	27
2.3.3. Hajítás	29
2.3.4. Mozgás görbe vonalú síkpályán, körmozgás	34
2.3.5. Mozgás térgörbén.....	38
2.4. Feladatok, tömegpont kinematikája.....	39
3. Tömegpont kinetika.....	49
3.1. Newton axiómái.....	49
3.1.1. Newton I. törvénye, a tehetetlenségi törvény	49
3.1.2. Newton II. törvénye	49
3.1.3. Newton III. törvénye, a hatás-ellenhatás törvénye	50
3.1.4. Kiegészítések	50
3.2. Az erőtörvények alkalmazása.....	51
3.2.1. Tömegpont körmozgásának kinetika.....	51
3.2.2. Bolygómozgás dinamikája.....	53
3.2.3. Testek súlya, a súlyerő.....	53
3.2.4. A súrlódási erő	54
3.2.5. A rugóerő	56
3.3. Az impulzus és az impulzus-megmaradás tétele	57
3.3.1. Az impulzustétel	57
3.3.2. Az impulzus-megmaradás tétele	58
3.4. Tömegpont dinamikája, energiaviszonyok	59
3.4.1. A munka.....	59
3.4.2. A mozgatóerő munkája	60
3.4.3. A kinetikus vagy mozgási energia	61

3.4.4. A gyorsítóerő munkája	62
3.4.5. A helyzeti vagy potenciális energia	62
3.4.6. Emelés lejtőn	63
3.4.7. A rugóerő munkája, a rugó potenciális energiája	64
3.4.8. A belső energia, a súrlódási hő	65
3.5. A forgató nyomaték	65
3.5.1. Erőátviteli eszközök	66
3.6. A teljesítmény	69
3.7. A konzervatív erőter	69
3.8. A mechanikai energia-megmaradás tétele.....	70
3.8.1. A helyzeti és a mozgási energia kapcsolata.....	71
3.8.2. A kinetikai energia és a gyorsító erő munkája.....	71
3.8.3. A kinetikai energia és a súrlódási erő munkája	73
3.9. Feladatok, a tömegpont kinetikája	74
4. Merev testek dinamikája.....	83
4.1. Merev test haladó mozgása	83
4.2. Merev test forgó mozgása	84
4.2.1. Merev test egyenletes forgó mozgása.....	84
4.2.2. Merev test egyenletesen gyorsuló forgó mozgása	85
4.2.3. Merev test súlypontja vagy tömegközéppontja	85
4.2.4. Merev test impulzusa és statikai nyomatéka	86
4.2.5. Merev test forgó mozgása, a perület és az inercia nyomaték	88
4.2.6. Párhuzamos tengelyek tétele, a Steiner tétel.....	91
4.2.7. A perdülettétel, a forgatónyomaték	92
4.3. Merev test dinamikai egyensúlya, statika	94
4.3.1. Statikai axiómák, alapösszefüggések	95
4.3.2. Erőrendszer redukciója egy pontba	96
4.3.3. Merev testre ható erőrendszer redukálása a súlypontba	97
4.4. merev testek kinetikai energiája, teljesítménye.....	98
4.4.1. Merev test mozgási energiája haladó mozgásnál.....	98
4.4.2. Merev test mozgási energiája forgó mozgásnál.....	98
4.4.3. Merev test teljesítménye.....	99
4.5. Feladatok, merev test dinamikája.....	100
5. Merev testek kényszermozgása	108
5.1. Két test ütközése	108
5.1.1. Az ütközések osztályozása	109
5.2. Két test centrikus ütközése.....	111
5.2.1. Centrikus, rugalmatlan ütközés	111
5.2.2. Centrikus, rugalmas ütközés.....	113
5.3. Két test excentrikus ütközése.....	115
5.3.1. Excentrikus ütközés utáni sebességek meghatározása	115
5.3.2. Excentrikus ütközés visszavezetése centrikus ütközésre.....	116
5.3.3. Két excentrikusan ütköző test.....	118
5.4. Szabad rezgések, longitudinális hullámmozgás	119
5.4.1. Harmonikus rezgőmozgás, matematikai bevezető	119

5.4.2. Csillapítatlan szabad rezgés	121
5.4.3. Csillapított szabad rezgés	123
5.5. Gerjesztett rezgések	129
5.5.1. Állandó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés	129
5.5.2. Állandó erővel gerjesztett csillapított rezgés	131
5.5.3. Periodikusan változó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés	133
5.5.4. Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés	137
5.6. Transzverzális hullámmozgás	141
5.6.1. A hullámegyenlet	141
5.6.2. A hullámegyenlet általános megoldása	143
5.6.3. A hullámegyenlet megoldása periodikus gerjesztés esetén	143
5.6.4. A befogás figyelembevétele	145
5.6.5. Állóhullám kialakulása	147
5.7. Feladatok	149
5.7.1. Két test ütközése	149
5.7.2. Harmonikus rezgőmozgás	153
6. Áramlástan	161
6.1. Áramló közegek anyagjellemzői	161
6.1.1. A sűrűség	161
6.1.2. A fajtérfogat	161
6.1.3. A fajsúly	162
6.1.4. A hőmérséklet	162
6.1.5. A nyomás	163
6.1.6. Folyadékok osztályozása	163
6.1.7. Ideális gázok állapotváltozása	164
6.1.8. Halmazállapot változások	166
6.2. Nyugvó folyadék egyensúlya, hidrosztatika	167
6.2.1. Matematikai áttekintés	167
6.2.2. A nyomás	168
6.2.3. A hidrosztatika alapegyenlete	169
6.2.4. A hidrosztatikai felhajtó erő	170
6.2.5. A nyomás magasságfüggése	171
6.2.6. Nyomás mérése nyugvó folyadékban	173
6.3. Áramló közegek dinamikája	175
6.3.1. A sebesség	175
6.3.2. A Mach szám	176
6.4. A tömegmegmaradás törvénye	177
6.4.1. Összenyomhatatlan folyadékok stacionárius áramlása	177
6.4.2. Összenyomható folyadékok nem-stacionárius áramlása	179
6.5. Ideális, súrlódásmentesen áramló folyadékok mozgástörvénye	182
6.5.1. Az impulzus-megmaradás törvénye, az Euler egyenlet	182
6.5.2. Az energia-megmaradás törvénye, a Bernoulli egyenlet	186
6.5.3. A Venturi cső	188
6.6. Valóságos folyadékok mozgástörvénye, veszteségek	189
6.6.1. A viszkozitás	189

6.6.2. Valóságos folyadékok osztályozása	190
6.6.3. Newton-féle, ideálisan viszkózus folyadék áramlása	191
6.6.4. A Reynolds szám értelmezése, lamináris és turbulens áramlás	194
6.6.5. A Reynold kísérlet, súrlódó folyadékok áramlása	196
6.6.6. Csővezetékek veszteségei	197
6.7. Ideálisan viszkózus folyadékok mozgástörvénye	198
6.7.1. A Navier-Stokes egyenlet	198
6.7.2. A határreteg kialakulása	201
6.8. Feladatok	203
7. Hőtan	215
7.1. Termodinamikai alapfogalmak	215
7.1.1. A hőmérséklet és hőmérsékleti skálák	215
7.1.2. A hőtágulás	216
7.1.3. Fajtérfogat, móltérfogat	217
7.1.4. A termodinamikai rendszer	218
7.1.5. A termodinamikai rendszer egyensúly	219
7.1.6. A (fizikai) munka	220
7.1.7. A hőenergia, hőmennyiség	221
7.1.8. A belső energia	223
7.1.9. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok	223
7.2. A termodinamika I. főtétele	223
7.2.1. A technikai munka, az entalpia	224
7.2.2. A termodinamika I. főtétele különböző rendszerekben	227
7.2.3. Izochor és izobár fajhők közti kapcsolat	228
7.2.4. Ideális gázok állapotváltozásai	230
7.3. A termodinamika I. főtétele mozgó rendszerekben	236
7.3.1. A termodinamika I. főtétele mozgó, zárt rendszerben	236
7.3.2. A termodinamika I. főtétele nyitott stacionárius rendszerben	237
7.3.3. A termodinamika I. főtétele nyitott, nem-stacionárius rendszerben	238
7.4. A termodinamika II. főtétele	239
7.4.1. Termodinamikai körfolyamatok	239
7.5. Az entrópia	244
7.5.1. A termodinamika folyamatban részt vevő hőmennyiség T-s diagramja	245
7.5.2. Reverzibilis állapotváltozások p-v és T-s diagramja	247
7.6. Hővezetés	251
7.6.1. A hővezetés differenciálegyenlete	252
7.6.2. A határfeltételek	256
7.7. A hővezetés differenciálegyenletének analitikus megoldása	260
7.7.1. Állandósult állapot vizsgálata	260
7.7.2. A Laplace egyenlet direkt megoldása	260
7.7.3. A Laplace-Poisson egyenlet direkt megoldása	261
7.7.4. A hőellenállás, hőátviteli tényező	263
7.7.5. Időbeli változások vizsgálata	264
7.8. A hővezetés differenciálegyenletének numerikus megoldása,	

a véges differenciák módszere	268
7.8.1. A Laplace-Poisson egyenlet numerikus közelítése	268
7.8.2. A peremfeltételek figyelembe vétele	269
7.8.3. Az időbeli változás figyelembevétele, a diffúziós egyenlet numerikus közelítése	273
7.9. Hőátadás, konvekció.....	280
7.9.1. Hőterjedés áramló közegekben	281
7.10. Hősugárzás	282
7.10.1. A hősugárzás alapfogalmai	282
7.10.2. A hősugárzás speciális esetei	283
7.10.3. A hősugárzás Kirchhoff törvénye	285
7.11. Feladatok	287
8. Optikai hullámvezetők alapjai.....	299
8.1. Az elektromágneses tér alapaxiómái, a Maxwell egyenletek	299
8.1.1. Az elektromos és mágneses tér gerjesztettsége és intenzitása.....	300
8.1.2. Az elektromos és mágneses tér forrásossága	301
8.1.3. Anyagparaméterek az elektromágneses térben	302
8.1.4. Az elektromágneses tér energiamérlege.....	303
8.2. Szabadon terjedő elektromágneses hullámok	304
8.2.1. Síkhullámok hullámegyenlete	305
8.2.2. A hullámegyenlet szinuszos időbeli változás esetén.....	308
8.2.3. A hullámegyenlet megoldása	309
8.2.4. A megoldás értelmezése.....	310
8.2.5. Síkhullám ideális szigetelőben.....	312
8.2.6. Síkhullám veszteséges szigetelőben.....	314
8.2.7. Szigetelőbe merőlegesen beeső síkhullámok reflexiója	316
8.3. TE és TM típusú síkhullámok.....	318
8.3.1. Szigetelőbe ferdén beeső hullámok.....	318
8.3.2. Az elektromágneses tér felbontása TE és TM típusú hullámokra.....	319
8.3.3. A közegekben áramló teljesítmény	324
8.3.4. Hullámterjedés az egyes rétegekben	325
8.3.5. A hullámterjedés paramétereinek meghatározása	327
8.3.6. Hullámterjedés a 2. rétegben eltűnő térrel	328
8.3.7. A két réteg illesztése, a reflexió tényező	329
8.3.8. A rétegekben áramló teljesítmény.....	331
8.3.9. A teljesítményáramlás iránya.....	331
8.4. Szigetelőréteg hullámvezető.....	332
8.4.1. A téregyenletek	334
8.4.2. A diszperziós egyenlet	338
8.5. Példák a diszperziós egyenlet megoldására	341
8.6. Az elektromos tér eloszlása a magban.....	343
8.7. Feladatok	346
Irodalom	353
Tárgymutató	354
Névmutató	358

ELŐSZÓ

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. műszaki szakkönyv a mérnök informatikus BSc képzéshez készült, ahol, a fenti témakörök a 'Transzport folyamatok modellezése' c. tárgy keretében kerülnek feldolgozásra. A kötet célja megalapozni a mérnök informatikus képzésben részt vevő hallgatók mérnöki ismereteinek fizikai alapjait, ezzel is elősegítve a szaktárgyakban (robotika, szabályozástechnika, számítógéppel vezérelt irányítások, számítógép hálózatok) előforduló fizikai jelenségek és technológiai folyamatok matematikailag megfogalmazott, a számítógép nyelvére lefordítható ismereteinek átadását.

A műszaki szakkönyv a fizikai jelenségek, technológiai folyamatok köréből csak néhány, a szakképzés során a szaktárgyakban előforduló kérdések tárgyalásával foglalkozik.

Az 1. fejezetben a matematikai összefoglaló közös leírási mód és nyelv kialakítására szolgál. A 2. fejezetben a legegyszerűbb rendszer rendszer-operátorának megismerése a cél, így a tömegpont kinematikájával, a mozgástörvényekkel és azok matematikai megfogalmazásával foglalkozik a szakkönyv. A 3. fejezetben a mozgó rendszerben a mozgásokat létrehozó gerjesztések, a mozgatóerő hatását és az energiaegyensúlyi feltételeket vizsgálva a tömegpont kinetikáját tárgyalja a szakkönyv. Ezután kerül sor a 4. fejezetben az összetett rendszerek, a merev testek dinamikai jellemzőinek bevezetésére és tárgyalására, amelyet az 5. fejezetben a merev testek rugalmas viselkedésének vizsgálata követ. Az 5. fejezet keretében kerül sor a rugalmas és harmonikus hullámmozgás, köztük a longitudinális és transzverzális hullámmozgás során a mozgó rendszer rendszeregyenletének megfogalmazására és megoldási eljárásainak megismerésére. A 6. fejezet témája az anyag szállítása, áramlása során fellépő jelenségek vizsgálata. A gáztörvények és a hidrosztatikai alapfogalmak ismertetése után a tömegárammal és térfogatárammal reprezentált rendszer analízise során az ideális és az ideálisan viszkózus, összenyomható és összenyomhatatlan folyadékok áramlásának dinamikáját tárgyalva, a tömegáram folytonosságára az impulzus és az energiamegmaradási törvények matematikai modelljeinek megfogalmazására és vizsgálatára kerül sor. A 7. fejezet a termodinamikai alapfogalmak, a termodinamikai állapotváltozások részletes elemzése után a termodinamikai rendszerben történő hőátvitel formáinak tárgyalását tartalmazza. A hővezetés differenciálegyenletének analitikus és numerikus, a véges differenciák módszerén alapuló megoldási eljárásainak ismertetése jól reprezentálja a mérnöki feladatok informatikai eszközökkel való megoldásának lehetőségét és szükségességét. Végül a 8. fejezetben a modern informatikai rendszerekben alkalmazott optikai hullámvezetőkben lejátszódó, a jelátvitel szempontjából lényeges elektromágneses hullámterjedés alapjainak megismerésére kerül sor. A szigetelőrétég hullámvezető

magjában és a héjban kialakuló hullámformák tárgyalása lehetőséget ad az átvihető hullámhossz és a vágási frekvencia értelmezésére.

A műszaki szakkönyv elsősorban a hazai felsőfokú képzés szakkönyveire támaszkodik, felhasználva és alkalmazva a mérnöki megismerési folyamatok szabályait. A műszaki életben előforduló, a szakkönyvben tárgyalt fejezeteknek a matematika szigorú szabályai szerinti megfogalmazása azt a készséget kívánja az olvasóban, a hallgatóban kialakítani, hogy az itt nem tárgyalt, de a mérnök informatikus szakmai pályafutása során előforduló jelenségek vizsgálatához kellő bátorságot és szakmai ismeretet adjon.

A műszaki szakkönyv egyes fejezetei végén lévő példák a tárgy oktatásában részt vevő Maczák András, Nagyvárad Anett és dr. Szőke Béla kollégák munkái, akiknek itt mondok köszönetet a lelkes gyakorlatvezetési munkájukért.

Köszönetemet fejezem ki a Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar Műszaki Informatika Tanszéken oktató, dolgozó kollégáimnak, köztük Dr. Szakonyi Lajos tanszékvezetőmnek a bátorításért és könyv megírása során nyújtott segítségért.

Pécsett, 2010. március

Iványi Amália

1. BEVEZETÉS

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv alapja a Transzport folyamatok modellezése c. tárgynak, amely célja az anyagi világ objektív tulajdonságainak, a mozgásban lévő anyag törvényszerűségeinek megismerése.

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv ismeretszerzési módszere a megfigyelés, kísérlet, törvényszerűségek megfogalmazása, elméletek kidolgozása, ezek kísérleti igazolása, a kidolgozott elméletek műszaki alkalmazása a jelenségek, folyamatok leírására, mérnöki szimulációjára.

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv közlési módja, nyelvezete a matematika.

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv a fizikai folyamatok leírására skaláris és vektor mennyiségeket alkalmaz. A skaláris változók jelölése, pl. $x = x_n \cdot \eta$, ahol η a skaláris változó mértékegysége, x_n a skaláris változó értéke a választott mértékegység rendszerben. A vektor mennyiségek jelölése, pl. $\vec{x} = \vec{e}_x x_n \cdot \eta$, ahol η a változó mértékegysége, x_n a változó értéke a választott mértékegység rendszerben, \vec{e}_x az \vec{x} vektor irányába mutató egységvektor.

A vizsgálatok, törvényszerűségek az 1960-ban bevezetett SI nemzetközi mértékegység rendszer alkalmazásával kerülnek megfogalmazásra. Az 1.1. Táblázat tartalmazza a fizikai alapmennyiségek SI egységeit.

1.1. Táblázat

Fizikai alapmennyiségek SI egységei

Fizikai mennyiség	Neve	Jele
Tömeg	Kilogramm	kg
Hosszúság	Méter	m
Idő	Másodperc	s
Elektromos áram	Amper	A
Hőmérséklet	Kelvin	K
Fényerősség	Kandela	cd
Anyagmennyiség	Mól	mol

Az SI mértékegység rendszer kisebb, nagyobb egységeit szokás alkalmazni. A 1.2. Táblázat tartalmazza az SI mértékegység rendszer prefixumait.

1.2. Táblázat

SI-prefixumok

10^{18}	E	exa-	10^{-1}	d	deci-
10^{15}	P	peta-	10^{-2}	c	centi-
10^{12}	T	tera-	10^{-3}	m	mili-
10^9	G	giga-	10^{-6}	μ	mikro-
10^6	M	mega-	10^{-9}	n	nano-
10^3	k	kilo-	10^{-12}	p	piko-
10^2	h	hekto-	10^{-15}	f	femto-
10^1	da	deka-	10^{-18}	a	atto-

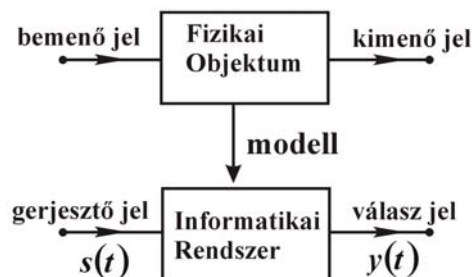
Koherens mértékegység rendszernek nevezzük az egymásból származtatott összetartozó egységeket, pl. ha az út hossza méterben, az idő másodpercben adott, akkor koherens egységek esetén a sebesség méter/másodperc egységgel adható meg.

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv keretében a következő témakörök kerülnek foglalkozásra: a *mechanika* témaköréből a mozgások leírásával, a tömegpontok és merev testek mozgásának törvényszerűségeivel a *kinematika* foglalkozik. A tömegpontok és merev testek mozgástörvényeinek energetikai törvényeit a *kinetika* öleli fel. A tömegpontok és merev testek kényszermozgásainak kinematikai és kinetikai vizsgálataival kiegészített előző vizsgálatok a *dinamika* témakörébe tartoznak. Az *áramlástan* és *hőtani* jelenségek vizsgálata mellett a szigetelőréteg hullámvezetőkben terjedő *elektromágneses hullámterjedés* alapösszefüggéseinek tárgyalása zárja a témakört.

A 'Műszaki fizika informatikusoknak' c. szakkönyv témaköreinek informatikai kérdése a bemenő változó hatására a fizikai objektum, fizikai jelenség kimenő változójának a meghatározása. Ehhez meg kell alkotni a fizikai objektum, jelenség informatikai modelljét (1.1. ábra) és meg kell vizsgálni, hogy az így kialakított rendszer az $s(t)$ gerjesztésre milyen $y(t) = \mathcal{H}\{s(t)\}$ választ ad, ahol $\mathcal{H}\{\bullet\}$, a vizsgált rendszer $s(t)$ gerjesztése, és $y(t)$ válasza közötti kapcsolatot meghatározó *rendszer operátora*. A vizsgálatok célja ennek a rendszer-operátornak a megismerése és modellezése.

A műszaki rendszerek $\mathcal{H}\{\bullet\}$ rendszer operátora különböző tulajdonságokkal rendelkezhet, különböző szempontok szerint osztályozhatók. A következőkben az egy-

gerjesztésű, egy-válaszú (egy bemenetű, egy kimenetű) lineáris, invariáns, kauzális rendszerek tulajdonságainak összefoglalására kerül sor.



1.1. ábra. A fizikai objektum és informatikai modellje

(a) A $\mathcal{H}\{\bullet\}$ rendszer operátora lehet *lineáris* és *nemlineáris*. *Nemlineáris rendszerben* a gerjesztés-válasz közötti kapcsolatot, pl. egy nemlineáris

$$y(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} = As(t) + B \quad (1.1)$$

alakú rendszer operátor írja le.

Lineáris rendszeroperátor esetén, ha a rendszer a tetszőleges $s_1(t)$ gerjesztésre adott válasza $y_1(t) = \mathcal{H}\{s_1(t)\}$, a tetszőleges $s_2(t)$ gerjesztésre adott válasza $y_2(t) = \mathcal{H}\{s_2(t)\}$, akkor a két gerjesztés c_1 , c_2 konstansok melletti lineáris kombinációjára adott válasza az egyes gerjesztések válaszainak ugyanazon lineáris kombinációja lesz, azaz ha

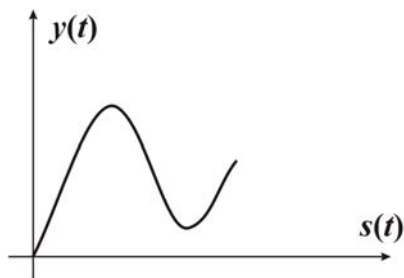
$$\begin{aligned} s_1(t) &\rightarrow y_1(t) = \mathcal{H}\{s_1(t)\}, \\ s_2(t) &\rightarrow y_2(t) = \mathcal{H}\{s_2(t)\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) &\rightarrow y(t) = \mathcal{H}\{c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t)\} \\ &= c_1 \mathcal{H}\{s_1(t)\} + c_2 \mathcal{H}\{s_2(t)\} \\ &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

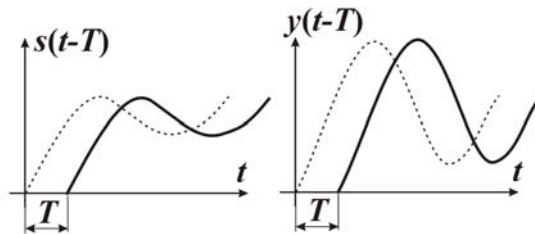
Tehát lineáris rendszer esetén a *szuperpozíció* tétel fennáll. A fentieknek megfelelően az (1.1) rendszer operátora, akkor és csak akkor lineáris, ha B azonosan egyenlő nullával, azaz $B \equiv 0$. Ekkor a gerjesztés-válasz közötti kapcsolatot az origón átmenő görbe írja le (1.2. ábra).

(b) A $\mathcal{H}\{\bullet\}$ rendszer operátora lehet *variáns* (időfüggő) és *idő-invariáns*. Idő-invariáns a rendszer operátora, ha az időbeli eltolás nem befolyásolja a gerjesztés-válasz kapcsolatot. Ekkor, ha a rendszer tetszőleges $s(t)$ gerjesztésre adott válasza $y(t)$, akkor tetszőleges T időkéselettel mellett, szintén T időkéselettel jelenik meg a válasz (1.3. ábra),

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{H}\{s(t)\}, \\ y(t-T) &= \mathcal{H}\{s(t-T)\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$



1.2. ábra. Lineáris rendszerben a gerjesztés-válasz közötti kapcsolatot leíró operátor



1.3. ábra. Idő-invariáns rendszer egy gerjesztés-válasz időfüggvénye

(c) Egy fizikai rendszer lehet *kauzális* vagy *akauzális*. A tetszőleges $s(t)$ gerjesztésre adott $y(t)$ válaszó rendszer akkor *kauzális*, ha a válasz t_1 időpillanatbeli $y(t_1)$ értékét a gerjesztés azonos és korábbi időpillanatbeli értéke, valamint a válaszok korábbi időpillanatbeli értéke határozza meg, azaz

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{H}\{s(t)\}, \\y(t_1) &= \mathcal{H}\{s(t): t \leq t_1, y(t): t < t_1\}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Informatikai szempontból a ‘Műszaki fizika informatikusoknak’ c. szakkönyv keretében megismert fizikai rendszerek vizsgálatának egyik lényeges szempontja a rendszer *analízise*, azaz a rendszer törvényszerűségeinek megismerése során adott gerjesztéshez a válasz meghatározása. Ez a folyamat a direkt feladatmegoldás. A mérnök, köztük a mérnök informatikus azonban nem elégszik meg a rendszerek direkt analízisével (adott gerjesztésre a válasz meghatározása), hanem olyan informatikai rendszert kíván tervezni/előállítani, amely rendszer-operátora megadott gerjesztés mellett éppen a kívánt választ állítja elő (a rendszer olyan rendszer-operátorát tervezi meg, amely a szabályozott bemenő gerjesztésre éppen a kívánt választ/szabályozott kimenő változót eredményezi). Ez a folyamat az inverz feladatmegoldás vagy *szintézis*, amely a mérnöki, köztük a mérnök informatikusi feladatra való felkészülést is jelenti.

2. TÖMEGPONT KINEMATIKÁJA

A dinamika magában foglalja az anyagi pont, egy pontrendszer és a merev testek mozgását szabályozó alapösszefüggésekre, energetikai viszonyokra, kényszer-mozgásokra vonatkozó törvényszerűségeket. A továbbiakban a dinamika két nagy területe kerül feldolgozásra, a *kinematika* és a *kinetika*.

A *kinematika* két tömegpont/merev test egymáshoz viszonyított térbeli helyzetének időbeli megváltozásával, a mozgás leírásával foglalkozik. A *statika* a mozgás speciális esetét, a nyugalom feltételét tárgyalja. Ekkor a két tömegpont/merev test egymáshoz viszonyított helyzete nem változik.

Az *anyagi pontnak* vagy tömegpontnak olyan anyagi részecske, ill. test tekinthető, amely egy pontba koncentrált tömege az eredeti test tömegével megegyezik de geometriai mérete elhanyagolható a mozgásra vonatkozó egyéb méretekhez képest. *Merev testek*, tömeggel és geometriai mérettel rendelkező olyan tömegpontok összessége tekinthető, amely alakja a mozgás során nem változik, kontinuum, a tömegpontok a teret folytonosan töltik ki.

A testek mozgása térben és időben történik. A *tér* metrikus, a Newton-i klasszikus mechanikában, a térben történő távolságmérés eredménye nem függ a mozgástól, a mozgó anyagtól. A tér egyes pontjainak helyzetét egy rögzített koordináta, *vonatkoztatási rendszerben* az \vec{r} *helyzetvektor* írja le. A helyzetvektor hossza $|\vec{r}|$, mértékegysége a méter [m]. A távolság mérésére kisebb és nagyobb egységeket is szokás alkalmazni, ezek között az 1.2. Táblázat alapján a kapcsolat a következő, $1\text{ m} = 10^{-3}\text{ km}$, $1\text{ m} = 10^2\text{ cm}$, $1\text{ m} = 10^3\text{ mm}$, $1\text{ m} = 10^6\text{ }\mu\text{m}$. Az *idő* a klasszikus mechanikában független a testek egymáshoz viszonyított mozgásától és a mozgó anyagtól. Az idő a tér minden pontjában azonos módon, egyenletesen telik. Mértékegysége a másodperc (szekundum) [s]. Az SI mértékegység rendszerben alkalmazott kisebb egységei: $1\text{ s} = 10^3\text{ ms} = 10^6\text{ }\mu\text{s}$.

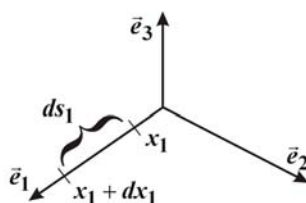
2.1. Vonatkoztatási rendszerek

2.1.1. Ortogonális vonatkoztatási/koordináta-rendszerek

A geometriai tér egy pontja egyértelműen megadható három koordináta-változóval, az x_1 , x_2 , x_3 koordinátákkal. Ekkor egy pont $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ helyzetvektora a következő

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad (2.1)$$

ahol \vec{e}_i , $i=1,2,3$ az egyes koordináta-változók irányába mutató egységvektorok. Az x_1 , x_2 , x_3 értékek az \vec{r} helyzetvektor koordináta vetületei. Egy koordináta-változót rögzítve a helyzetvektor végpontja egy, a koordináta-változóhoz tartozó *koordináta-felületen* mozog. Két koordináta-felület a harmadik koordinátához tartozó *koordináta-vonalban* metszi egymást (2.1. ábra).

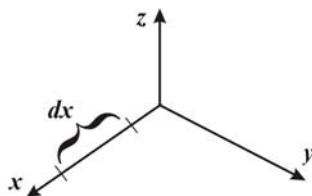


2.1. ábra. Ortogonális koordináta-rendszer koordináta irányai

Az egyes koordináta-tengelyek mentén, a koordináta-változók irányában történő elmozdulások esetén a megtett út ds . Az x_1 , x_2 , x_3 koordinátájú pontnak az $x_1 + dx_1$, x_2 , x_3 koordinátájú ponttól vett távolsága $ds_1 = g_1 \cdot dx_1$, az x_1 , x_2 , x_3 koordinátájú pontnak az x_1 , $x_2 + dx_2$, x_3 koordinátájú ponttól vett távolsága $ds_2 = g_2 \cdot dx_2$, valamint az x_1 , x_2 , x_3 koordinátájú pontnak az x_1 , x_2 , $x_3 + dx_3$ koordinátájú ponttól vett távolsága $ds_3 = g_3 \cdot dx_3$, ahol g_1 , g_2 , g_3 a koordináta-változóktól függő koordináta-függvények.

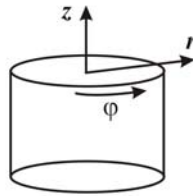
Leggyakrabban a Descartes, a henger és a gömbi koordináta-rendszerek fordulnak elő, így a következőkben ezek koordináta-változóinak, függvényeinek megadására kerül sor.

A 2.2. ábrán látható Descartes koordináta-rendszer esetén a koordináta-változók, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. A koordináta-tengelyek irányában történő elmozdulások során a megtett út (pályaszakasz) $ds_1 = dx$, $ds_2 = dy$, $ds_3 = dz$. A koordináta-változókhoz tartozó koordináta-függvények, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, $g_3 = 1$. A koordináta-tengelyek irányába mutató egységvektorok pedig \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z .



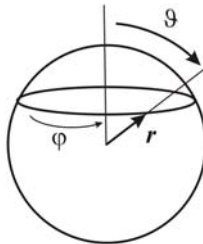
2.2. ábra. Descartes koordináta-rendszer és koordináta-változói

A 2.3. ábrán látható henger koordináta-rendszerben a koordináta-változók a henger sugara, a hengerpaláston a szögelfordulás, valamint a henger tengely irányú elmozdulás, $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$. A koordináta-tengelyek irányában történő elmozdulások esetén, a henger sugarának megváltozásakor a megtett út, $ds_1 = dr$, a paláston a szögelfordulásakor az ívhosszúság megváltozása $ds_2 = r \cdot d\varphi$, és a tengely irányú elmozdulás megváltozása $ds_3 = dz$. A koordináta-változókhoz tartozó koordináta-függvények, $g_1 = 1$, $g_2 = r$, $g_3 = 1$. A koordináta-tengelyek irányába mutató egységvektorok pedig, \vec{e}_r , \vec{e}_φ , \vec{e}_z .



2.3. ábra. Henger koordináta-rendszer és koordináta-változói

A 2.4. ábrán egy gömbi koordináta-rendszer látható, ahol a koordináta-változók rendre az r , a gömb sugara, a gömb északi pólusától a hosszúsági körön való elfordulás ϑ szöge, valamint egy délkörön való elfordulás φ szöge, azaz $x_1 = r$, $x_2 = \vartheta$, $x_3 = \varphi$.



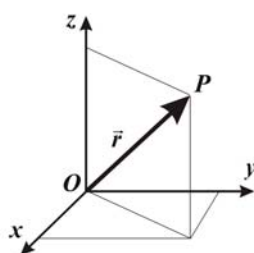
2.4. ábra. Gömbi koordináta-rendszer és koordináta-változói

A koordináta-tengelyek irányában történő elmozdulások esetén a megtett útszakaszok, ill. ívhosszak, $ds_1 = dr$, $ds_2 = r \cdot d\vartheta$, $ds_3 = r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi$. Így a koordináta-változókhoz tartozó koordináta-függvények, $g_1 = 1$, $g_2 = r$, $g_3 = r \cdot \sin \vartheta$. A koordináta-tengelyek irányába mutató egységvektorok pedig, \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ , \vec{e}_φ .

2.1.2. Vektor műveletek

Leggyakrabban a Descartes koordináta-rendszert alkalmazására kerül sor. A 2.5. ábrán a P pont \vec{r} helyzetvektora látható a Descartes koordináta-rendszerben, ahol a helyzetvektor koordináta vetületei rendre x , y , z ,

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (2.2)$$

2.5. ábra. A P pont helyzete Descartes koordináta-rendszerben

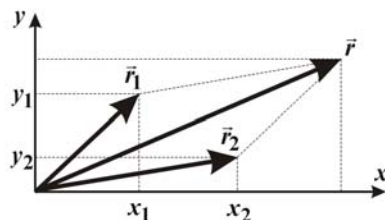
Vektorokon alkalmazott lineáris operációk, a jelen esetben lineáris műveletek az összeadás, a kivonás és az állandóval való szorzás.

Legyen \vec{r}_1 és \vec{r}_2 két helyzetvektor, a Descartes koordináta-rendszerbeli koordináta vetületeivel adott,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z, \\ \vec{r}_2 &= x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

(a) A 2.6. ábrán látható a két helyzetvektor összege

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \quad (2.4)$$



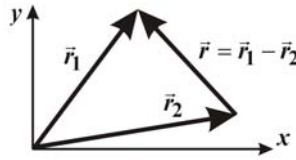
2.6. ábra. Két vektor összege

azaz \vec{r} vektor, amelyre az $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r} = 0$ összefüggés fennáll, azaz az \vec{r}_1 , \vec{r}_2 és a $-\vec{r}$ vektorok zárt háromszöget (több vektor esetén zárt sokszöget) alkotnak (2.6. ábra). Az eredő \vec{r} vektor koordináta vetületei a komponensek koordináta vetületeinek összegeként adható meg

$$\vec{r} = (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\vec{e}_z. \quad (2.5)$$

(b) A két helyzetvektor különbsége az \vec{r}_1 és a $-\vec{r}_2$ vektorok összege (2.7. ábra), azaz $\vec{r}_2 + \vec{r} = \vec{r}_1$ műveletből a keresett \vec{r} különbségi vektor

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2.6)$$



2.7. ábra. Két vektor különbsége

A különbségi \vec{r} vektor koordináta vetületei a komponensek koordináta vetületeinek különbségével a következő alakban fejezhető ki

$$\vec{r} = (x_1 - x_2)\vec{e}_x + (y_1 - y_2)\vec{e}_y + (z_1 - z_2)\vec{e}_z. \quad (2.7)$$

(c) Az \vec{r}_1 helyzetvektornak valamely c állandóval való szorzata a vektor hosszának, abszolút értékének a megnövelését ($|c| > 1$), ill. csökkentését ($|c| < 1$) eredményezi,

$$\vec{r} = c\vec{r}_1 = cx_1\vec{e}_x + cy_1\vec{e}_y + cz_1\vec{e}_z. \quad (2.8)$$

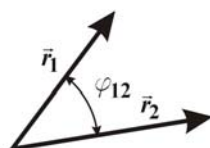
Ekkor a vektor abszolút értéke, a vektor hosszának c értékszeresére nő, ill. csökken

$$r = \sqrt{(cx_1)^2 + (cy_1)^2 + (cz_1)^2} = cr_1. \quad (2.9)$$

(d) Két vektor skaláris szorzata skaláris mennyiség. Az \vec{r}_1 és az \vec{r}_2 vektorok $r = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ skaláris szorzata a két vektor abszolút értékének és a két vektor által bezárt

kisebbsik φ szög koszinuszának szorzatával kapott $r = r_1 r_2 \cos\varphi$ skaláris mennyiség, (2.8. ábra)

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos\varphi. \quad (2.10)$$



2.8. ábra. Két vektor skaláris szorzata

A skaláris szorzatok alkalmazásakor derékszögű koordináta-rendszerben két egymással párhuzamos egységvektor skaláris szorzata egységnyi skaláris értéket ad eredményül, figyelembe véve, hogy párhuzamos vektorok esetén a közbezárt szög 0° , amelyre $\cos 0^\circ = 1$, így ezek skaláris szorzatára fennáll a következő összefüggés,

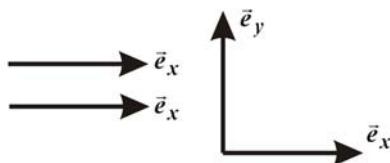
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Két egymásra merőleges egységvektor skaláris szorzata nulla, figyelembe véve, hogy egymásra merőleges vektorok közbezárt szöge 90° , amelyre $\cos 90^\circ = 0$, azaz

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

A fentieknek megfelelően a Descartes koordináta-rendszerben a párhuzamos egységvektorok skaláris szorzatai egységnyi skaláris értéket eredményeznek, míg az egymásra merőleges egységvektorok skaláris szorzatai nulla értéket adnak (2.9. ábra)

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \\ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

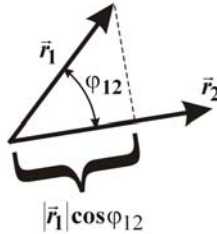


2.9. ábra. Egységvektorok skaláris szorzata

Az $r = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ vektorok skaláris szorzatának eredménye a koordináta komponensekkel is megadható, figyelembe véve az egységvektorok skaláris szorzataira vonatkozó összefüggéseket. Így az $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ skaláris szorzat a következő alakban írható

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) \cdot (x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2.14)$$

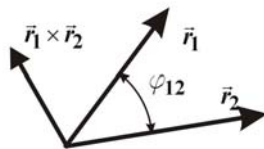
Két vektor $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_2| |\vec{r}_1| \cos \varphi$ skaláris szorzata úgy is értelmezhető, mint az egyik vektornak a másik vektorra eső vetülete, $|\vec{r}_1| \cos \varphi$, szorozva a másik \vec{r}_2 vektor $|\vec{r}_2|$ hosszával (2.10. ábra).



2.10. ábra. Az \vec{r}_1 vektornak az \vec{r}_2 vektorra vonatkozó vetülete

(e) Két vektor vektoriális szorzata vektort eredményez. Az \vec{r}_1 és az \vec{r}_2 vektorok $\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ vektoriális szorzatának azt a \vec{r} vektort tekintjük, amelynek az $r_1 r_2 \sin \varphi$ hosszúsága az \vec{r}_1 és az \vec{r}_2 vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, iránya merőleges mind az \vec{r}_1 mind az \vec{r}_2 vektorra, olyan irányítással, hogy az \vec{r}_1 , az \vec{r}_2 és az \vec{r} vektorok jobbsodrású hármast alkotnak (2.11. ábra)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \quad \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{e}_r |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \sin \varphi. \quad (2.15)$$



2.11. ábra. Az \vec{r}_1 és az \vec{r}_2 vektorok vektori szorzata

Derékszögű koordináta-rendszerben két egymásra merőleges egységvektor vektoriális szorzata a két vektor által kifeszített síkra merőleges, a síkhoz tartozó normális irányú egységvektort eredményez, figyelembe véve, hogy az egymásra merőleges vektorok közbezárt szöge 90° , amelyre $\sin 90^\circ = 1$, azaz

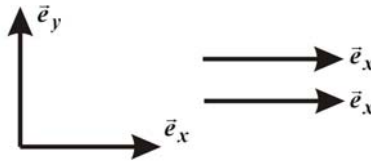
$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Két egymással párhuzamos egységvektor vektoriális szorzata azonban azonosan nulla, mivel az egységvektorok által bezárt szög 0° , amelyre $\sin 0^\circ = 0$, azaz

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

A fentiek alapján Descartes koordináta-rendszerben a párhuzamos egységvektorok vektoriális szorzatai nullahosszúságú vektort eredményeznek, míg az egymásra merőleges egységvektorok vektoriális szorzatai mindkét vektorra merőleges, egységnyi hosszúságú, egységvektort adnak (2.12. ábra),

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y, \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$



2.12. ábra. Egységvektorok vektoriális szorzata

Figyelembe véve az egységvektorok vektoriális szorzataira vonatkozó fenti összefüggéseket, két vektor vektoriális szorzata a vektorok koordináta komponenseivel is kifejezhető a következő determináns kiértékelésével

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_x(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{e}_y(x_1 z_2 - z_1 x_2) + \vec{e}_z(x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

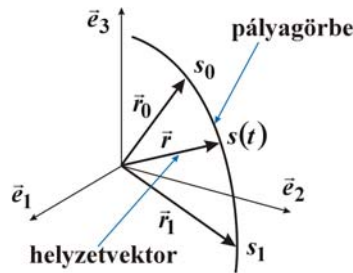
A vektorok szorzatainak tulajdonságai közül ki kell emelni a skaláris szorzat kommutatív tulajdonságát, míg meg kell jegyezni, hogy a vektoriális szorzat nem kommutatív, azaz vektoriális szorzat elemeinek felcserélése ugyanolyan nagyságú, de ellenkező irányú vektort eredményez,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 &= \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1, \\ \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1.\end{aligned}\tag{2.20}$$

2.2. Tömegpont mozgástörvénye

2.2.1. A helyzetvektor és a pályagörbe kapcsolata

Az anyagi pont térbeli és időbeli helyzetváltoztatása az $\vec{r}(t)$ helyzetvektorral adható meg, amely az anyagi pontnak az $s(t)$ pályagörbén való mozgását, mozgástörvényét írja le. A 2.13. ábrán egy általános ortogonális (vonatkozási) koordináta-rendszerben a helyzetvektor és a pályagörbe kapcsolata látható.



2. 13. ábra. A helyzetvektor és a pályagörbe kapcsolata

A $t = t_0$ időpillanatban az ortogonális koordináta-rendszerben a tömegpont pozícióját az $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ helyzetvektor adja meg, amely a pályagörbe $s(t_0) = s_0$ pontjába mutat. A $t = t_1$ időpillanatban a tömegpont helyzetét az $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ helyzetvektor definiálja, amely a pályagörbe $s(t_1) = s_1$ pontjába mutat. Általánosítva, az idő múlásával a tömegpont helyzetét az $\vec{r}(t)$ helyzetvektornak az $s(t)$ pályagörbén való elmozdulása jellemzi, azaz a helyzetvektor az

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))\tag{2.21}$$

összetett függvénnyel adható meg.

Descartes koordináta-rendszerben a helyzetvektor alakja

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x x(t) + \vec{e}_y y(t) + \vec{e}_z z(t), \quad (2.22)$$

ahol $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ a pályagörbe koordináta vetületei.

Henger koordináta-rendszerben az $\vec{r}(t)$ helyzetvektor a következő alakú,

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_R R(t) + \vec{e}_\varphi R(t)\varphi(t) + \vec{e}_z z(t), \quad (2.23)$$

ahol $R(t)$, $\varphi(t)$ és $z(t)$ a helyzetvektor koordináta vetületei, amelyek természetesen az idő múlásával változnak.

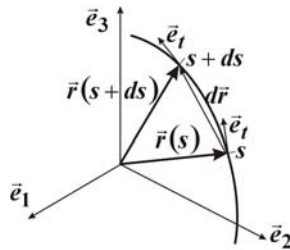
A teljesség kedvéért a *gömbi koordináta-rendszerben* is megadható a helyzetvektor pozíciója,

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_R R(t) + \vec{e}_\vartheta R(t)\vartheta(t) + \vec{e}_\varphi R(t)\sin\vartheta(t) \cdot \varphi(t), \quad (2.24)$$

ahol $R(t)$ a gömb sugara, $R(t)\vartheta(t)$ a helyzetvektor végpontjának a hosszúsági körön való pozíciója, valamint az $R(t)\sin\vartheta(t) \cdot \varphi$ a helyzetvektornak a délkörön való elhelyezkedése.

2.2.2. A pályagörbe görbületi sugara, a pálya síkja és a binormális

Az $s(t)$ pályagörbén a ds pályaszakasz megtételekor a helyzetvektor az $\vec{r}(s)$ pontból $d\vec{r}$ értékkel elmozdul a pályaszakasz $\vec{r}(s + ds)$ pontjába (2.14. ábra).



2.14. ábra. A helyzetvektor megváltozása és a pályagörbén való elmozdulás kapcsolata

Ekkor a helyzetvektor $d\vec{r}$ megváltozásának abszolút értéke, kis elmozdulások esetén, közelíthető a pályaszakasz mentén a ds elmozdulással, azaz

$$d\vec{r} \approx \vec{e}_t ds, \quad (2.25)$$

ahol \vec{e}_t a pályagörbe érintője irányába mutató egységvektor. Minthogy valamely vektor megváltozásának irányába mutató egységvektor előállítható a vektor és a vektor abszolút értékének hányadosával, továbbá figyelembe véve, hogy kis megváltozások esetén a helyzetvektor megváltozásának abszolút értéke közelíthető a pályaszakaszon az elmozdulás hosszával,

$$|d\vec{r}| \approx ds, \quad (2.26)$$

így a pályagörbe érintője irányába mutató egységvektor a következőképpen adható meg

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \approx \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (2.27)$$

Minthogy egy \vec{r} vektornak önmagával vett skaláris szorzata a vektor abszolút értékének négyzetét eredményezi $\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$, így a pályagörbe érintő irányú egységvektorának önmagával vett szorzata egységnyi értékű lesz

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1. \quad (2.28)$$

A pályaszakasz érintő irányú egységvektorának a pályaszakasz szerinti deriváltja (2.28) felhasználásával állítható elő, figyelembe véve, hogy a bal oldal deriváltja egyenlő a jobb oldal deriváltjával,

$$\frac{d}{ds}(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) = 0. \quad (2.29)$$

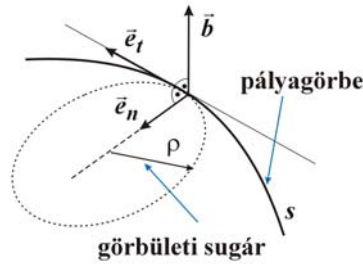
A fenti összefüggéseket felhasználva

$$\frac{d}{ds}(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 2\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 0, \quad (2.30)$$

ahonnan, az egymásra merőleges vektorok skaláris szorzata nulla összefüggés felhasználásával az adódik, hogy a pályagörbe érintő irányú \vec{e}_t egységvektora és a pályagörbe érintő irányú egységvektornak a pályagörbe szerinti $d\vec{e}_t/ds$ deriváltja merőleges egymásra. A 2.15. ábrán látható, a pályagörbe érintőjére merőleges egységvektor a pályagörbe főnormálisa,

$$\vec{e}_n = \frac{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}{\left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right|} = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds}, \quad \left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}, \quad (2.31)$$

ahol ρ a pálya görbületi sugara, azaz a pályagörbéhez simuló kör sugara. A görbületi sugár reciprok értéke pedig a pályagörbe görbülete $G = 1/\rho$.



2.15. ábra. A pályagörbe, a görbületi sugár, a főnormális és a binormális vektorok

A pályagörbe \vec{e}_t érintő-, és \vec{e}_n főnormális irányú egységvektorai meghatározzák a pálya simuló síkját, amelyet a síkra merőleges egységvektorral szokás megadni. Figyelembe véve, hogy két egymásra merőleges egységvektor vektori szorzata jobbsodrású ortogonális koordináta-rendszerben a harmadik koordináta irányába mutató egységvektort eredményezi, így a pályagörbe *simuló síkját* a síkra merőleges irányú egységvektor, a *binormális vektor* adja meg

$$\vec{b} = \vec{e}_t \times \vec{e}_n. \quad (2.32)$$

2.2.3. A tömegpont sebessége és a pályasebesség

A tömegpont elmozdulása esetén a helyzetvektor a pályagörbe pontjai mentén mozog. Ha az \vec{r} helyzetvektor a $t = t_1$ időpillanatban a pályagörbe s_1 pontjába mutat (2.16. ábra)

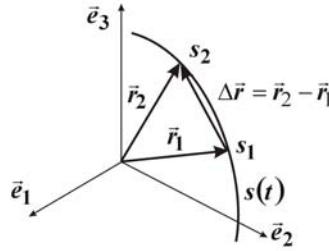
$$t = t_1, \quad s(t_1) = s_1, \quad \vec{r}(s(t_1)) = \vec{r}_1, \quad (2.33)$$

a $t = t_2$ időpillanatban a pályagörbe s_2 pontjába mutat

$$t = t_2, \quad s(t_2) = s_2, \quad \vec{r}(s(t_2)) = \vec{r}_2, \quad (2.34)$$

akkor a $\Delta t = t_2 - t_1$ időintervallum alatt a helyzetvektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ megváltozása következtében a tömegpont közepes vagy átlagsebessége a helyzetvektor Δt időegység alatti $\Delta \vec{r}$ megváltozásából

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.35)$$



2.16. ábra. A helyzetvektor megváltozása, a sebesség és a pályasebesség kapcsolata

A sebesség mértékegysége $[\text{m/s}]$, kisebb, nagyobb egységeit az SI mértékegység rendszernek megfelelően lehet származtatni.

Ha a t_2 időpillanat egyre közelebb van a t_1 időpillanathoz, akkor a helyzetvektor $\Delta \vec{r}$ megváltozása a pályagörbe t_1 időpillanatbeli érintőjéhez tart, azaz a pályagörbe s_1 pontjában a t_1 időpillanatbeli sebességet eredményezi,

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_1} = \vec{v}_1. \quad (2.36)$$

Tehát az *anyag pont sebessége* a helyzetvektor (mozgástörvény) idő szerinti differenciálhányadosa, amelyet a rövidség kedvéért sokszor az $\dot{\vec{r}}$ alakban szokás megadni

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.37)$$

Figyelembe véve, hogy az \vec{r} helyzetvektor végpontja az s pályagörbén mozog, azaz a helyzetvektor időbeli változását az $\vec{r}(s(t))$ összetett függvény írja le, így az idő szerinti differenciálásnál is figyelembe kell venni az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt, azaz

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e}_t \dot{s}(t) = \vec{e}_t v. \quad (2.38)$$

Minthogy (2.27) szerint $d\vec{r}/ds = \vec{e}_t$, a pályagörbe érintő irányú egységvektora, $ds/dt = v$ pedig a pályagörbén való elmozdulás sebességét, a *pályasebességet* adja, így

kijelenthető, hogy a helyzetvektor (mozgástörvény) időszerinti differenciálhányadosa a pillanatnyi sebességet eredményezi, amely a pályagörbe érintője irányába mutat.

Különböző ortogonális koordináta-rendszerekben a sebesség koordináta komponenseivel is megadható.

Descartes koordináta-rendszerben, ahol a helyzetvektort (2.22) összefüggés szerint az $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ vektor írja le, a sebesség a következőképpen adható meg

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_x \dot{x}(t) + \vec{e}_y \dot{y}(t) + \vec{e}_z \dot{z}(t), \quad (2.39)$$

azaz az egyes koordináta-változók irányába mutató sebesség komponensek

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}(t). \quad (2.40)$$

A sebességvektor a koordináta-tengely irányú komponensek vektori eredőjeként adható meg, míg a sebesség nagyságát az eredő vektor abszolút értéke adja meg

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.41)$$

Henger koordináta-rendszerben, ahol (2.23) összefüggésnek megfelelően a helyzetvektor az $\vec{r} = \vec{e}_R R + \vec{e}_\varphi R\varphi + \vec{e}_z z$ összefüggéssel adható meg, amelynek időszerinti differenciálhányadosa a következő lesz

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_R \dot{R} + \vec{e}_\varphi R\dot{\varphi} + \vec{e}_z \dot{z}, \quad (2.42)$$

azaz a koordináta-változók irányába mutató sebesség komponensek

$$v_R = \frac{dR(t)}{dt} = \dot{R}(t), \quad v_\varphi = R \frac{d\varphi(t)}{dt} = R\dot{\varphi}(t), \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t). \quad (2.43)$$

Gömbi koordináta-rendszerben pedig a pillanatnyi sebességet a (2.24) szerinti helyzetvektor idő szerinti differenciálhányadosa adja,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_R \dot{R} + \vec{e}_\vartheta R\dot{\vartheta} + \vec{e}_\varphi R \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \quad (2.44)$$

azaz a koordináta-változók irányába mutató sebességkomponensek

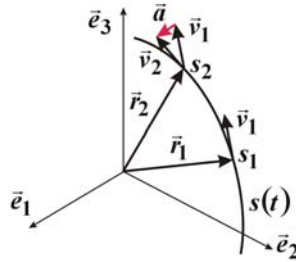
$$v_R = \frac{dR}{dt} = \dot{R}(t), \quad v_\vartheta = R \frac{d\vartheta}{dt} = R \dot{\vartheta}(t), \quad v_\varphi = R \sin \vartheta \frac{d\varphi}{dt} = R \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}. \quad (2.45)$$

2.2.4. A tömegpont gyorsulása és komponensei

Miközben az \vec{r} helyzetvektor a pályagörbe $s(t)$ pontjai mentén mozog, és a pillanatnyi sebesség a pályagörbe érintője irányába mutat, a sebesség időbeli megváltozása a tömegpont gyorsulását eredményezi. Ha a $t = t_1$ időpillanatban az $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ helyzetvektor a pályagörbe $s(t_1) = s_1$ pontjába mutat, ahol a tömegpont pillanatnyi sebessége $\dot{\vec{r}}(t_1) = \vec{v}_1$, miközben a $t = t_2$ időpillanatban az $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$ helyzetvektor a pályagörbe $s(t_2) = s_2$ pontjába mutat, ahol a tömegpont pillanatnyi sebessége $\dot{\vec{r}}(t_2) = \vec{v}_2$ lesz, akkor a $\Delta t = t_2 - t_1$ időintervallum alatt a tömegpont sebességének megváltozása a 2.17. ábrának megfelelően $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, azaz a tömegpont gyorsulása a t_2 időpillanatban a következő

$$\vec{a}(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=t_2} = \vec{a}_2. \quad (2.46)$$

A gyorsulás mértékegysége $[\text{m/s}^2]$, kisebb, nagyobb egységei az SI mértékegység rendszer szabályai szerint származtathatók.



2.17. ábra. A sebességváltozás és a gyorsulás kapcsolata

Tehát a tömegpont gyorsulását a tömegpont sebességének idő szerinti differenciálhányadosa adja. Figyelembe véve azt a tényt, hogy a sebesség a helyzetvektor idő szerinti differenciálhányadosa, így a gyorsulás a helyzetvektor idő szerinti második differenciálhányadosával adható meg.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.47)$$

A rövidség kedvéért a következő jelölést szokás alkalmazni,

$$\bar{\mathbf{a}} = \dot{\bar{\mathbf{v}}} = \ddot{\bar{\mathbf{r}}}. \quad (2.48)$$

A gyorsulásvektor komponenseinek meghatározásához figyelembe kell venni, hogy az $\bar{\mathbf{r}}(s(t))$ helyzetvektor végpontja a pályagörbe mentén mozog, valamint a $\bar{\mathbf{v}}(s(t))$ sebességvektor a pályagörbe érintője irányába mutat. A sebességvektor időbeli megváltozása, a gyorsulás, egyrészt a pályasebesség megváltozásából, másrészt a sebességvektor irányának megváltozásából származik, és így a gyorsulás a következő $\bar{\mathbf{v}}(s(t)) = \bar{\mathbf{e}}_t(s(t))\dot{s}(t)$ összetett függvény időszerinti differenciálhányadosaként állítható elő,

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\bar{\mathbf{v}}(s(t))}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_t(s(t))}{dt}v(t) + \bar{\mathbf{e}}_t \frac{dv(t)}{dt}. \quad (2.49)$$

Figyelembe véve, hogy a pályagörbe érintőjének a pályagörbe menti deriváltja (2.31) szerint a görbületi sugárral normált főnormális vektort eredményez, míg a pályagörbe időszerinti deriváltja (2.38) felhasználásával a pályamenti sebesség,

$$\frac{d\bar{\mathbf{e}}_t(s(t))}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{e}}_t(s(t))}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{\bar{\mathbf{e}}_n}{\rho} v. \quad (2.50)$$

A fenti összefüggések figyelembevételével a (2.49) összefüggéssel adódó gyorsulás két vektorkomponensből áll,

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{e}}_n}{\rho} v^2 + \bar{\mathbf{e}}_t \frac{dv}{dt} = \bar{\mathbf{e}}_n a_n + \bar{\mathbf{e}}_t a_t, \quad (2.51)$$

ahol a pályagörbe érintője irányába mutató

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \bar{\mathbf{e}}_t a_t = \bar{\mathbf{e}}_t \dot{v}, \quad (2.52)$$

a sebességvektor abszolút értékének megváltozásából származó tangenciális, vagy *pályamenti gyorsulás*, miközben a gyorsulás főnormális irányú összetevőjét, a *normális irányú gyorsulást*

$$\bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{e}}_n a_n = \frac{\bar{\mathbf{e}}_n}{\rho} v^2 \quad (2.53)$$

a sebességvektor irányváltozása hozza létre. A gyorsulásvektor nagysága a főnormális és az érintőirányú gyorsuláskomponensekből képzett vektor hossza, azaz

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} . \quad (2.54)$$

A gyorsulásvektor a pályagörbe simuló síkjában fekszik, azaz binormális irányú komponense nincs (2.15. ábra). Ennek igazolásához figyelembe kell venni, hogy az egymásra merőleges vektorok skaláris szorzata nulla, valamint a binormális vektor (2.32) alakját,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_n a_n + \vec{e}_t a_t) \cdot (\vec{e}_t \times \vec{e}_n) = 0 . \quad (2.55)$$

Felhasználva a skaláris és vektoriális szorzatok ciklikusságára vonatkozó

$$\vec{z} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) = \vec{v} \cdot (\vec{z} \times \vec{u}) \quad (2.56)$$

összefüggést,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_n \vec{e}_n \cdot (\vec{e}_t \times \vec{e}_n) + a_t \vec{e}_t \cdot (\vec{e}_t \times \vec{e}_n) , \quad (2.57)$$

és figyelembe véve, hogy egy vektornak önmagával való vektori szorzata mindig nulla,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_n \vec{e}_t \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_n) + a_t \vec{e}_n \cdot (\vec{e}_t \times \vec{e}_t) = 0 , \quad (2.58)$$

belátható, hogy a gyorsulásvektor a pályagörbe síkjában fekszik.

2.2.5. A foronómiai görbék és a hodográf

A előző fejezetekben a tömegpont mozgástörvényének analizésére, a mozgástörvények matematikai megfogalmazására került sor. A következőkben az inverz kapcsolat, az ismert gyorsulás okozta sebesség, valamint az ismert sebességgel megtett út meghatározására kerül sor. A tömegpont mozgását szemléltető karakterisztikákat *foronómiai görbék* néven, a sebességvektorra vonatkozó diagramot *hodográf* néven ismeri a szakmai irodalom.

A sebesség és a gyorsulás közti inverz kapcsolat előállításához ha az $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ gyorsulás esetén a t időpillanatbeli sebesség a mozgás $t = -\infty$ kezdeti időpontjától a jelen t időpontig tartó integrálás alkalmazásával határozható meg. A (2.47) összefüggés mindkét oldalát integrálva, és az időtartamot a megfigyelés $t = t_0$ pillanat előtti és utáni időintervallumokra bontva,

$$\vec{v}(t) = \int_{t=-\infty}^t \vec{a}(\tau) d\tau = \int_{t=-\infty}^{t_0} \vec{a}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau , \quad (2.59)$$

valamint figyelembe véve, hogy a jobb oldalon álló első tag a kezdeti érték, a megfigyelés kezdetén a tömegpont előző időintervallumi mozgásából származó végsebessége

$$\int_{t=-\infty}^{t_0} \vec{a}(\tau) d\tau = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0, \quad (2.60)$$

amelynek figyelembevételével a 2.18. ábrán látható gyorsulás - idő diagram görbe alatti területe a sebesség

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t=t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau. \quad (2.61)$$

A megtett út és a sebesség közti inverz kapcsolat a (2.37) összefüggésből, a $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ kifejezés mindkét oldalának időszerinti integrálásával határozható meg. A $t = -\infty$ kezdeti időponttól a jelen t időpontig tartó időtartamot a megfigyelés $t = t_0$ pillanat előtti és utáni időintervallumokra bontva a helyzetvektor

$$\vec{r}(t) = \int_{t=-\infty}^t \vec{v}(\tau) d\tau = \int_{t=-\infty}^{t_0} \vec{v}(\tau) d\tau + \int_{t=t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau. \quad (2.62)$$

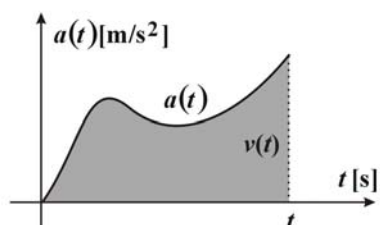
Az előző kifejezés jobb oldalán álló első tag a tömegpont helyzetét megadó, a $-\infty < t \leq t_0$ időintervallumi mozgásából származó helyzetvektor pozíciója, kiindulási értéke

$$\vec{r}(t_0) = \int_{t=-\infty}^{t_0} \vec{v}(\tau) d\tau = \vec{r}_0, \quad (2.63)$$

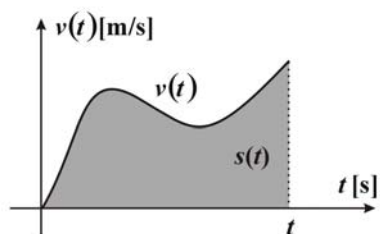
és ezzel a tömegpont mozgását megadó helyzetvektor pozíciója

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t=t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau. \quad (2.64)$$

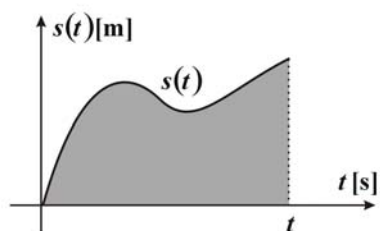
A *foronómiai görbék* keretében a pályagyorsulás - idő karakterisztika a 2.18. ábrán, a pályasebesség - idő karakterisztika a 2.19. ábrán, a menetábra a 2.20. ábrán láthatók. A sebesség - gyorsulás kapcsolatot ábrázoló *hodográf* és a *pályadiagram* a 2.21. ábrán látható.



2.18. ábra. Pályagyorsulás - idő karakterisztika



2.19. ábra. Pályasebesség - idő karakterisztika



2.20. ábra. A tömegpont mozgásának menetábrája



2.21. ábra. A sebesség - gyorsulás kapcsolatát leíró hodográf és a helyzetvektor - sebesség kapcsolatát leíró pályadiagram

2.3. Tömegpont speciális mozgása

2.3.1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Egyenes vonalú egyenletes mozgás akkor jön létre, ha a tömegpont $\vec{a}(t)$ gyorsulása nulla, a $\vec{v}(t)$ sebesség iránya és nagysága állandó, és a pályagörbe ρ görbületi sugara végtelen nagy,

$$\vec{a}(t) = 0, \quad \vec{v}(t) \rightarrow v = \text{áll}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Ha a tömegpont a megfigyelés kezdetén, a $t = 0$ időpillanatban a pályagörbe s_0 pontjából álló helyzetből indul v állandó kezdősebességgel, akkor t időintervallum alatt a pályagörbe s pontjába jut. A változók szétválasztásával mindkét oldalt integrálva

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad ds = v \cdot dt, \quad \int_{s_0}^s ds = s - s_0 = \int_0^t v \cdot dt = vt, \quad (2.66)$$

tehát az állandó sebességgel mozgó tömegpont mozgástörvényét a következő összefüggés írja le

$$s = s_0 + vt. \quad (2.67)$$

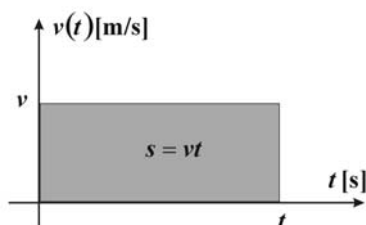
Az egyenes vonalú egyenletes mozgás foronómiai görbéi, a sebesség - idő diagramja a 2.22. ábrán, a megtett út - idő diagramja a 2.23. ábrán látható.

2.3.2. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

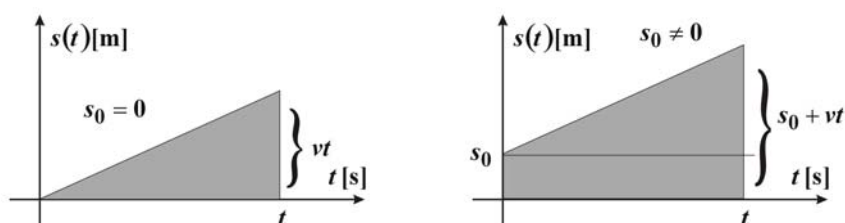
Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a gyorsulásnak a pályagörbére merőleges komponense nulla és a pályamenti gyorsulás állandó,

$$a_n \equiv 0, \quad \vec{a}(t) = a \vec{e}_t, \quad a = \text{áll}. \quad (2.68)$$

Ha a tömegpont a megfigyelés kezdetén, a $t = 0$ időpillanatban a pályagörbe $s(t = 0) = s_0$ pontjából, $v(t = 0) = v_0$ kezdősebességgel indul, akkor t időintervallum alatt v sebességre gyorsul/lassul, miközben a pályagörbe s pontjába jut. A sebesség - gyorsulás kapcsolatból a változók szétválasztásával és mindkét oldalt integrálva az időintervallum végén a tömegpont sebessége a következő



2.22. ábra. Egyenes vonalú egyenletes mozgás sebesség - idő diagramja



2.23. ábra. Egyenes vonalú egyenletes mozgás út - idő diagramja

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad \int_{v_0}^v dv = v - v_0 = \int_0^t a \cdot dt = at, \quad v(t) = v_0 + at. \quad (2.69)$$

A t időintervallum alatt megtett út a változók szétválasztása és mindkét oldal integrálása után

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad \int_{s_0}^s ds = s - s_0 = \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t (v_0 + a\tau) \cdot d\tau = v_0 t + \frac{a}{2} t^2, \quad (2.70)$$

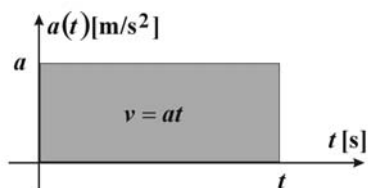
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2. \quad (2.71)$$

Figyelembe véve, hogy a gyorsuló mozgás ideje $t = (v - v_0)/a$, némi rendezés után a megtett út a következő alakokkal is megadható

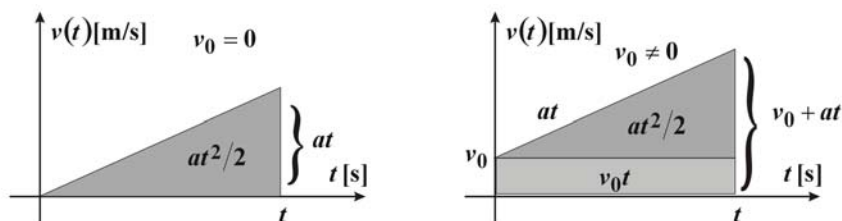
$$s = s_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2, \quad (2.72)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a}.$$

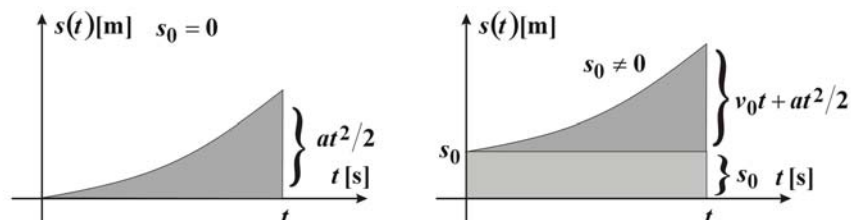
Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás foronómiai görbéi, a gyorsulás - idő diagramja a 2.24. ábrán, a sebesség - idő diagramja a 2.25. ábrán, a megtett út - idő diagramja a 2.26. ábrán látható.



2.24. ábra. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás gyorsulás - idő diagramja



2.25. ábra. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség - idő diagramja



2.26. ábra. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás út - idő diagramja

2.3.3. Hajítás

A Föld felszín közelében nem nagy magasságban a tömegvonzásból származó $g = 9,80552 \text{ m/s}^2$ állandó értékű gyorsulással, a gravitáció hatására fellépő mozgásokat a hajítás témakörébe szokás sorolni. A gyakorlati számításokban a földi nehézségi gyorsulás $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ értékkel közelíthető, és függőlegesen lefelé irányúnak tekinthető. A hajítás egy egyenes vonalú egyenletes mozgás és egy egyenletesen gyorsuló mozgás eredőjeként adódik.

Ha a tömegpont mozgásának megfigyelése a $t = t_0$ időpillanatban az $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ helyzetvektorral adott pontból indul $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ kezdősebességgel és $\vec{a} = \vec{g} = \text{áll. földi}$

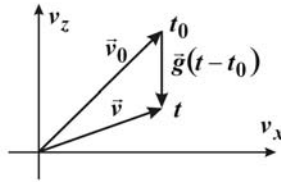
nehézségi gyorsulással, akkor a t -edik időpillanatban a $d\vec{v}/dt = \vec{g}$ alapösszefüggés felhasználásával, a változók szétválasztásával és mindkét oldal integrálásával

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{g} d\tau = \vec{g}(t - t_0), \quad (2.73)$$

hajítás esetén a sebességvektor a következőképpen határozható meg

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0). \quad (2.74)$$

A sebesség alakulása, a hodográf diagram, az $x-z$ koordináta-rendszerben a 2.27. ábrán látható.



2.27. ábra. Hajítás sebesség diagramja, hodográfja

A pályagörbe pontjaihoz tartozó helyzetvektor a $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ összefüggés felhasználásával és (2.74) figyelembevételével, majd a változók szétválasztásával és mindkét oldal integrálásával a következő kifejezés kiértékelésével határozható meg

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}_0 d\tau + \int_{t_0}^t \vec{g}(\tau - t_0) d\tau. \quad (2.75)$$

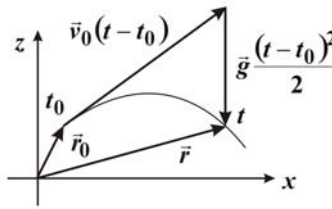
Helyettesítéssel integrálást alkalmazva, $\tau - t_0 = x$ új integrálási változó bevezetésekor az integrálást $d\tau = dx$ változóra kiértékelve, és az alsó határ $\tau = t_0$, $x = 0$ valamint a felső határ, $\tau = t$, $x = t - t_0$ bevezetésével (2.75) a következő lesz

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \int_0^{t-t_0} \vec{g} x dx, \quad (2.76)$$

ahonnan a hajítás során a tömegpont pozícióját a következő helyzetvektor adja

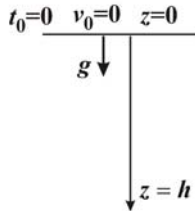
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{g} \frac{(t - t_0)^2}{2}. \quad (2.77)$$

Ekkor a pályagörbe egy, a \vec{g} gyorsulásvektorral párhuzamos tengelyű parabola lesz, ahogy az a 2.28. ábrán látható.



2.28. ábra. Hajítás pályagörbéje és pályavektora

(a) Szabadesés esetén a $t_0 = 0$ pillanatban $z = 0$ helyzetből, $v_0 = 0$ kezdősebesség nélkül \vec{g} nehézségi gyorsulással függőlegesen lefelé indul a szabadon eső tömegpont (2.29. ábra).

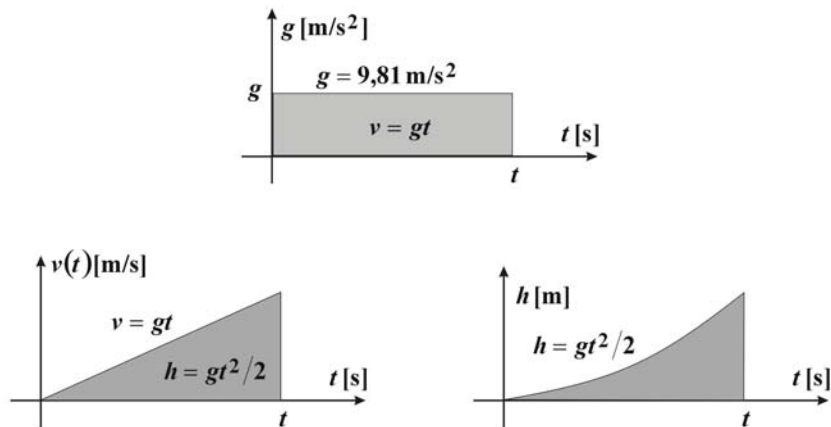


2.29. ábra. Kezdősebesség nélküli szabadesés

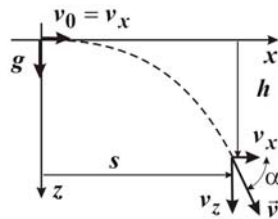
Ekkor t idő múlva (2.74) összefüggés szerint a függőleges sebessége $v = g t$ lesz, a függőlegesen megtett út (2.77) szerint $h = g t^2 / 2$. A h útszakasz megtételéhez szükséges idő $t = \sqrt{2h/g}$, a h út megtétele után a sebessége $v = g t = \sqrt{2gh}$ értéket ér el. A kezdősebesség nélkül induló szabadesés foronómiai görbéi a 2.30. ábrán láthatók.

(b) A vízszintes hajítás egy függőleges irányú gyorsuló mozgás és egy vízszintes irányú egyenletes sebességű mozgás eredője. Ekkor a $z = 0$ helyen $v_x = v_0$ vízszintes irányú kezdősebességgel $a_z = g$ függőleges irányú gyorsulással indul a tömegpont mozgása (2.31 ábra). t idő elteltével vízszintes irányban a tömegpont gyorsulása továbbra is nulla $a_x = 0$, a vízszintes irányú sebessége nem változik $v_x = v_0$, a

vízszintes irányú elmozdulása pedig $s = v_0 t$ lesz. Függőleges irányban t idő elteltével a tömegpont gyorsulása $a_z = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ földi nehézségi gyorsulás lesz, amellyel az eltelt idő alatt $v_z = gt$ sebességre gyorsul fel a $h = gt^2/2$ útszakasz megtétele után. A t -edik időpillanatban a tömegpont sebességének nagysága a sebesség-komponensek vektori eredőjének abszolút értékéből $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ lesz, miközben a sebességvektor iránya $\tan \alpha = v_z/v_x$ összefüggésből határozható meg.



2.30. ábra. Kezdősebesség nélküli szabadesés foronómiai görbéi

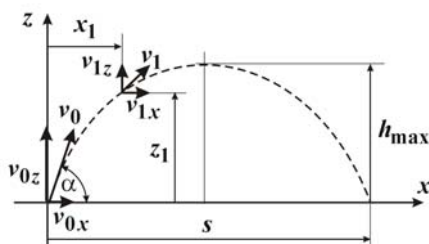


2.31. ábra. Vízszintes hajtás pályagörbéje

(c) *Ferde hajtás* esetén a 2.32. ábrán látható módon $t = 0$ pillanatban elhajított tömegpont \vec{v}_0 kezdősebessége α szöget zár be a vízszintes felszínnel.

Ekkor a kezdősebesség vízszintes és függőleges komponensei a sebességvektor vetületeiből határozhatók meg, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0z} = v_0 \sin \alpha$. A 2.32. ábrán látható koordináta-rendszerben a $t = 0$ pillanatban, a mozgás indulásakor a tömegpont vízszintes irányú gyorsulása nulla $a_x = 0$, függőleges irányú gyorsulása pedig negatív

$a_z = -g$. Az $x=0$, $z=0$ kezdőpontból induló ferde hajtás vízszintes és függőleges kezdősebességei $v_x=v_{0x}$, $v_z=v_{0z}$.



2.32. ábra. A ferde hajtás pályagörbéje és sebességviszonyai

$t = t_1$ idő elteltével a vízszintes és függőleges gyorsulások értéke nem változik, $a_x = 0$, $a_z = -g$. A tömegpont vízszintes irányban egyenes vonalú egyenletes sebességgel mozog $v_{1x} = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, függőleges irányú sebessége azonban a nehézségi gyorsulással módosul, $v_{1z} = v_{0z} - gt_1 = v_0 \sin \alpha - gt_1$. A tömegpont $t = t_1$ pillanatbeli sebessége a sebességkomponensek vektori eredőjének abszolút értéke $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2}$. A vízszintes irányú elmozdulás értéke $x_1 = v_{1x}t_1 = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_1$, a függőleges irányú elmozdulás pedig $z_1 = v_{0z}t_1 - gt_1^2/2 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_1 - g \cdot t_1^2/2$.

A tömegpont függőleges irányban mindaddig a h_{\max} magasságig emelkedik, amíg függőleges irányú sebessége nulla nem lesz, azaz egy pillanatra megáll $v_z = v_{0z} - gt_{em} = v_0 \sin \alpha - gt_{em} = 0$. Ekkor az emelkedés ideje $t_{em} = v_{0z}/g$. Ez alatt az idő alatt az emelkedés maximális magassága $h_{\max} = v_{0z}t_{em} - gt_{em}^2/2$. Az emelkedés idejét figyelembe véve, ez a magasság $h_{\max} = v_{0z}^2/2g$. A tömegpont az emelkedés maximális magasságát elérve egy pillanatra megáll, majd kezdősebesség nélkül a nehézségi gyorsulással szabadesésbe kezd. A süllyedés ideje a következő összefüggésből határozható meg $h_{\max} = gt_s^2/2 = v_{0z}^2/2g$, ahonnan a süllyedés ideje megegyezik az emelkedés idejével, azaz $t_s = \sqrt{v_{0z}^2/g^2} = v_{0z}/g = t_{em}$. A talajra való visszaérkezéskor a tömegpont függőleges irányú sebessége $v_{zvég} = gt_s = v_{0z}$ megegyezik a z -irányú kezdősebességgel. A tömegpont teljes repülési ideje $t_{rep} = t_{em} + t_s = 2t_{em} = 2v_{0z}/g$. A repülési idő alatt a tömegpont vízszintes irányban egyenes vonalú egyenletes mozgással mozog, a vízszintesen megtett út $s = v_{0x}t_{rep} = v_{0x} \cdot 2v_{0z}/g = 2v_0 \cos \alpha \cdot v_0 \sin \alpha/g$. Figyelembe véve a 2α szög szinuszára vonatkozó összefüggést ($\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$), a vízszintesen megtett út

$s = v_0^2 \sin 2\alpha / g$. A becsapódás pillanatában a tömegpont sebessége a sebességvektor abszolút értéke $v_{vég} = \sqrt{v_{zvég}^2 + v_{0x}^2} = \sqrt{v_{0z}^2 + v_{0x}^2}$, azaz a ferde hajtás kezdősebességével érkezik meg a talajra. Némi számolás után belátható, hogy becsapódáskor a sebesség iránya éppen α szöget zár be a vízszintes iránnyal.

2.3.4. Mozgás görbe vonalú síkpályán, körmozgás

Körmozgás esetén a tömegpont helyzetvektora olyan síkgörbén mozog, amelynek a görbületi sugara állandó, $\rho = R$, (2.33. ábra)

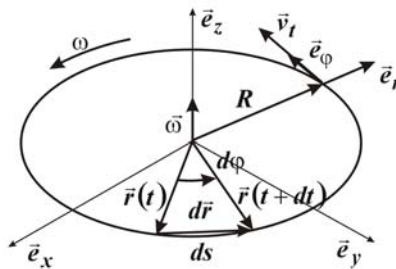
$$\vec{r} = R\vec{e}_r(\varphi(t)), \quad (2.78)$$

ahol R a kör sugara, és a sugár irányába mutató $\vec{e}_r(\varphi(t))$ egységvektor helyzetét az x -tengelytől való elfordulás $\varphi(t)$ szöge határozza meg. Kis szögelfordulás esetén miközben a tömegpont a körpálya pályagörbéjén

$$ds(t) = R d\varphi(t) \quad (2.79)$$

ívhosszúságot fut be, a tömegpont helyzetvektorának megváltozása ezzel az ívhosszúsággal közelíthető

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) \approx ds \vec{e}_\varphi(t) = R d\varphi(t) \vec{e}_\varphi(t). \quad (2.80)$$



2.33. ábra. Körpályán való mozgás sebessége és szögsebessége

A tömegpont sebessége a helyzetvektor idő szerinti deriváltja, azaz

$$\vec{v}(s(t)) = \dot{\vec{r}}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e}_\varphi \frac{R d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi v. \quad (2.81)$$

Bevezetve az ω [rad/s] szögsebességet, mint a szögelfordulás idő szerinti megváltozását/deriváltját,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (2.82)$$

körmozgás esetén a tömegpont sebessége

$$\vec{v}(s(t)) = \vec{e}_\varphi R \omega, \quad (2.83)$$

az elfordulás \vec{e}_φ irányába (a körpálya érintő irányába) mutató vektor

$$v = R \omega \quad (2.84)$$

a kerületi v , *pályasebességgel*.

Figyelembe véve, hogy henger koordináta-rendszerben a φ -irányú \vec{e}_φ egységvektor megadható a másik két egységvektor vektori szorzataként,

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_r, \quad (2.85)$$

amelyet figyelembe véve, a *körmozgás sebessége*

$$\vec{v}(s(t)) = R \omega \vec{e}_\varphi = \omega \vec{e}_z \times R \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.86)$$

ahol az $\vec{r} = R \vec{e}_r$, a körpálya sugara irányába mutató R hosszúságú vektor, míg az $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ *szögsebesség* vektora a körpálya síkjára merőleges, a forgástengely irányába, a binormális irányába mutató ω nagyságú vektor, ahogy az a 2.33. ábrán látható.

Körmozgás esetén a tömegpont *gyorsulása* a sebességvektor idő szerinti megváltozásával, idő szerinti differenciáljával (2.48) határozható meg,

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \quad (2.87)$$

Figyelembe véve a körmozgás sebességének (2.86) alakját és az idő szerinti differenciálást a szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint kiértékelve, a gyorsulás két tagból áll

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}. \quad (2.88)$$

A fenti kifejezés utolsó két tagját tagonként kiértékelve az $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ első tagban bevezetve a *szöggyorsulást*, mint a *szögsebesség* idő szerinti deriváltját

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t), \quad (2.89)$$

az $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ vektor

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z \times R\vec{e}_r = R\dot{\varphi} (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = R\varepsilon \vec{e}_\varphi = \vec{a}_t \vec{e}_\varphi = \vec{a}_t, \quad (2.90)$$

az érintő irányú \vec{a}_t gyorsulás komponensét eredményezi, ahol az érintő irányú gyorsulás nagysága

$$a_t = R\varepsilon = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi}. \quad (2.91)$$

A vektoriális írásmódot alkalmazva és figyelembe véve, hogy

$$\vec{\varepsilon}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = \dot{\omega}(t) \vec{e}_z, \quad (2.92)$$

a szöggyorsulás ugyancsak a körpálya síkjára merőleges forgástengely irányába, a binormális irányába mutató vektor lesz, így az érintő irányú gyorsulás, amely a szögsebesség megváltozásából származik a következő

$$\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad a_t = R\varepsilon. \quad (2.93)$$

A gyorsulás (2.87) kifejezésének második $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ tagjában figyelembe véve, hogy (2.86) szerint a helyzetvektor idő szerinti deriváltja a körmozgás sebessége $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, továbbá felhasználva a kétszeres vektori szorzat kiértékelésére vonatkozó összefüggést

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{z}, \quad (2.94)$$

(2.88) jobb oldalán álló második tag a következő lesz

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r}. \quad (2.95)$$

Mint ahogy a szögsebesség és a sugár irányú vektor merőleges egymásra, így (2.95) jobboldalán álló első tag nulla, míg a második tagban a szögsebesség vektornak önmagával való skaláris szorzata a vektor abszolút értékének négyzetét adja, így

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -|\vec{\omega}|^2 \cdot \vec{r} = -\omega^2 R \vec{e}_r = -\omega^2 \vec{r} = \vec{a}_n, \quad (2.96)$$

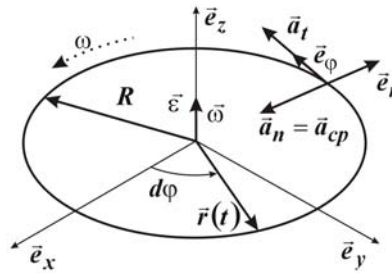
azaz a pályagörbére merőleges irányú, a sebesség irányának megváltozásából származó normális irányú, *centripetális gyorsulás* komponenshez vezet.

Tehát körmozgás esetén a gyorsulásnak két komponense van; egy, a szögsebesség megváltozásából származó érintő irányú gyorsulás és egy, a sebesség vektor irányának megváltozásából származó normális irányú vagy centripetális gyorsulás lép fel (2.34. ábra)

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad (2.97)$$

$$\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \varepsilon R \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 R \vec{e}_r.$$

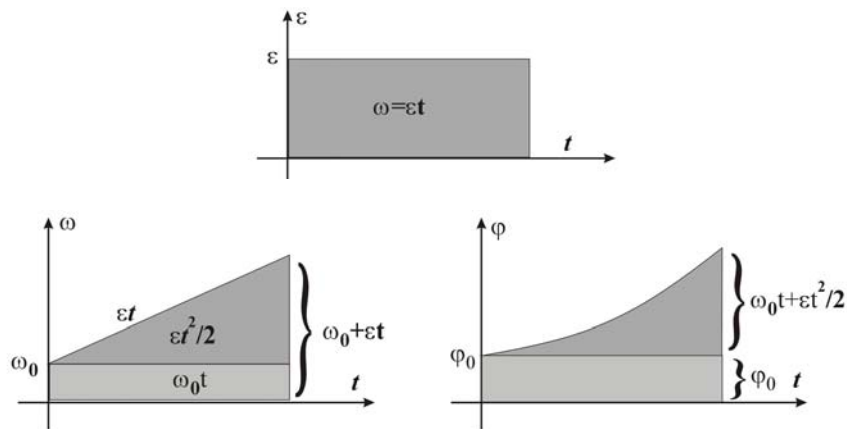


2.34. ábra. Körmozgás gyorsulásai

(a) *Egyenletesen gyorsuló körmozgásnál* az érintő irányú szöggyorsulás állandó, $\varepsilon = \dot{\omega} = \text{áll.}$ Ha a $t = 0$ pillanatban az R sugarú körpálya φ_0 pozíciójú pontjából ω_0 szögsebességgel indul egy tömegpont, akkor t idő múlva a szögsebesség $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ lesz, a pozíciója $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$. Egyenletes szöggyorsulás esetén, a tömegpont körpályán való mozgáshoz tartozó foronómiai görbék nagyon hasonlóak az állandó gyorsulással történő egyenes vonalú mozgás kinematikai görbéihez, ahogy az a 2.35. ábrán látható.

(b) *Egyenletes körmozgás* állandó szögsebességgel való forgást jelent. Minthogy $\omega = \text{áll.}$ esetén a körmozgás pályasebessége is állandó, $v = R\omega$, ekkor nem lép fel pálya irányú, tangenciális vagy szöggyorsulás $\varepsilon = 0$, azonban a sebességvektor irányának megváltozása miatt állandó nagyságú, normális irányú vagy centripetális gyorsulás megfigyelhető $a_n = -R\omega^2 = -v\omega = -\omega^2/R$. Egyenletes közmozgásnál egy teljes körülfordulás ideje a T periódusidő, azaz az $\omega T = 2\pi$ összefüggésből a

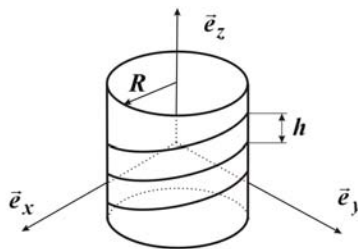
periódusidő $T = 2\pi/\omega$, $T[\text{s}]$, a másodpercenkénti keringések száma a közmozgás frekvenciája $f = 1/T = \omega/2\pi$, [ford/s], a percenkénti fordulatok száma pedig a fordulatszám, $n = 60f = 60/T = 60\omega/2\pi$, [ford/perc].



2.35. ábra. Állandó szöggyorsulású körmozgás kinematikai diagramjai

2.3.5. Mozgás térgörbén

Általában a mozgás a háromdimenziós térben zajlik, ezért a mozgástörvényeket térbeli mozgásokra szokás megfogalmazni. Ilyen térbeli mozgást eredményez pl. egy tömegpontnak egy állandó menetemelkedésű csavarvonal mentén történő elmozdulása (egy henger palástján történő mozgása). Ez a mozgás egy síkbeli körmozgás és egy haladó mozgás eredőjeként tekinthető (2.36. ábra).



2.36. ábra. Tömegpont pályája állandó menetemelkedésű csavarvonal mentén

A tömegpont szögelfordulása $\omega = \text{áll.}$ szögsebességgel való mozgáskor

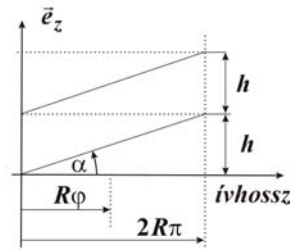
$$\varphi(t) = \omega t, \quad (2.98)$$

a pályagörbén, a csavarvonal mentén mozgó helyzetvektor végpontjának pozíciója az

$$\vec{r} = R\vec{e}_r(t) + \frac{\varphi(t)}{2\pi} h\vec{e}_z \quad (2.99)$$

mozgásegyenlettel adható meg. A menetemelkedés szöge (2.37. ábra)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2R\pi} . \quad (2.100)$$



2.37. ábra. A csavarvonal mentén történő mozgás síkba kiterített képe

A csavarvonal mentén mozgó tömegpont sebessége

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R \frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} + \frac{h}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z . \quad (2.101)$$

Figyelembe véve, hogy $d\vec{e}_r(t)/dt = \omega \vec{e}_\varphi$, továbbá $d\varphi/dt = \omega$, a csavarvonal mentén történő mozgás sebessége a következő alakban adható meg,

$$\vec{v} = R\omega \vec{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi} \omega \vec{e}_z = v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z , \quad (2.102)$$

ahol a henger palástján való érintő irányú pályasebesség $v_\varphi = R\omega$, míg a henger palástján a henger tengelyével párhuzamos irányú sebesség $v_z = h\omega/2\pi$.

2.4. Feladatok, tömegpont kinematikája

2.4.1. Feladat

Egy részecske helyzetének időfüggését az $x(t) = 3t^3$ [m], t [s] pályagörbe írja le, amint a $t = 0$ időpillanatban az origóból indulva a pozitív x -tengely mentén mozog. Határozza meg a részecske $v(t)$ sebességének és $a(t)$ gyorsulásának időbeli változását.

Megoldás

A pályasebesség a pályagörbe idő szerinti deriváltja, $v(t) = d(3t^3)/dt = 9t^2$ [m/s], a gyorsulás a pályasebesség idő szerinti deriváltja, azaz $a(t) = d(9t^2)/dt = 18t$ [m/s²].

2.4.2. Feladat

Egy felfelé dobott labda helyzetét a $z = 7t - 5t^2$ pályagörbe írja le, ahol a távolság méterben, az idő másodpercben adott. Határozza meg a labda v sebességét és a gyorsulását a $t = 0$, valamint a $t = 1,26$ s időpillanatokban.

Megoldás

Figyelembe véve a mozgásegyenlet általános alakját $z = z_0 + v_0t + at^2/2$ és összehasonlítva a megadott mozgásegyenlettel, a labda a $z_0 = 0$ pozícióból indul, kezdősebessége $v_0 = 7$ m/s, gyorsulása $a = -10$ m/s², lefelé mutató. Sebessége a $t = 1,26$ s időpillanatban pedig az $v = v_0 + at$ összefüggés felhasználásával $v = 7 - 10 \cdot 1,26 = -5,6$ m/s szintén lefelé mutató lesz.

2.4.3. Feladat

Egy tömegpont függőleges helyzetét a $z = 3 + 9t - 25t^2$ pályagörbe írja le, ahol a távolság méterben, az idő másodpercben adott. Határozza meg a tömegpont v sebességét és a gyorsulását a $t = 0$, valamint a $t = 2,12$ s időpillanatokban.

Megoldás

Az előző feladat megoldása alapján a tömegpont $z_0 = 3$ m pozícióból indul, $v_0 = 9$ m/s felfelé irányuló kezdősebességgel és $a = -50$ m/s² lefelé mutató gyorsulással. A $t = 2,12$ s időpillanatban a tömegpont sebessége $v = v_0 + at = -97$ m/s lefelé mutató lesz, miközben $z = 3 + 9 \cdot 2,12 - 25 \cdot 2,12^2 = -90,28$ m mélyre süllyed.

2.4.4. Feladat

Vizsgálja meg, hogy változhat-e egy tömegpont sebessége úgy, hogy a sebesség nagysága állandó marad.

Megoldás

Mínt hogy a sebesség vektor mennyiség, azaz iránya és nagysága van, így ha a sebesség nagysága nem változik, akkor a mozgás irányváltozásából származik a sebesség megváltozása.

2.4.5. Feladat

Milyen mozgást végez az a teherautó, amely gyorsul, de sebességének nagysága se nem nő, se nem csökken.

Megoldás

Az előző feladat alapján, minthogy a sebesség vektor mennyiség, azaz iránya és nagysága van, így ha a sebesség nagysága nem változik, akkor a sebesség irányváltozásából származik a gyorsulás, amely szintén vektor mennyiség. Tehát a válasz, minthogy a sebességváltozás állandó, a jármű körmozgást végez.

2.4.6. Feladat

Egy 15 m magas torony tetejéről 3,2 kg tömegű tömegpontot kezdősebesség nélkül elengednek. Határozza meg, mennyi idő múlva és mekkora sebességgel érkezik meg a tömegpont a torony tövébe.

Megoldás

A torony tetejéről a tömegpont szabadon esik $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ gyorsulással, a magasság $h = gt^2/2$ kifejezéséből az esés ideje $t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{30/9,81} = 1,7487 \text{ s}$, a becsapódás sebessége egyrészt a sebesség - gyorsulás $v = gt$ kapcsolatából, $v = 9,81 \cdot 1,7487 = 17,1552 \text{ m/s}$, másrészt némi rendezés után a magasság - sebesség kifejezésére kapott $h = v^2/2g$ kapcsolatból $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{30 \cdot 9,81} = 17,1552 \text{ m/s}$ ugyanarra az eredményre vezet.

2.4.7. Feladat

Egy nyugalomból induló 1,5 kg tömegű téglát a gravitációs erő hatására szabadon esik. Határozza meg, mekkora lesz a téglát sebessége 2 m távolság megtétele után.

Megoldás

A kezdősebesség nélkül szabadon eső tömegpont sebesség - megtett út közötti $h = v^2/2g$ kapcsolatot felhasználva a szabadon eső test sebessége $v = \sqrt{2gh} = 6,2642 \text{ m/s}$ lesz.

2.4.8. Feladat

Egy asztronauta leejt egy kalapácsot a Holdon ($g_{\text{Hold}} = 1,62 \text{ m/s}^2$), amely 1,55 s alatt ér a talajra. Határozza meg a kalapács végsebességét.

Megoldás

A kalapács végsebessége $v = g_{Hold}t = 1,62 \cdot 1,55 = 2,5110$ m/s lesz.

2.4.9. Feladat

Egy robot leejt egy kődarabot a Marson ($g_{Mars} = 3,69$ m/s²). A kődarab 1,2 s alatt ér a talajra. Határozza meg a kődarab becsapódási sebességét.

Megoldás

A kődarab becsapódási sebessége $v = g_{Mars}t = 3,69 \cdot 1,2 = 4,4280$ m/s lesz.

2.4.10. Feladat

Három város egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjaiban (A, B, C) helyezkednek el. Két autó közlekedik az A → B → C útvonalon. András autója az A → B városok közötti utat állandó 60 km/h sebességgel, majd a B → C városok közti utat 90 km/h állandó sebességgel teszi meg. Béla autója az A → B → C útvonalon végig 70 km/h sebességgel halad. Határozza meg, melyik autó átlagos sebessége nagyobb az A → B → C útvonalon.

Megoldás

András autója az A → B városok közötti utat $t_1 = 1/60$ h idő alatt, a B → C városok közti utat $t_2 = 1/90$ h idő alatt teszi meg. Az A → B → C útvonal megtételéhez szükséges idő $t = t_1 + t_2 = 1/60 + 1/90 = 0,0278$ h, az átlagsebessége $v_A = 2/(1/60 + 1/90) = 72$ km/h = 20 m/s. Béla autója végig azonos sebességgel halad, $v_B = 70$ km/h = 19,4444 m/s, így András autója halad nagyobb átlagsebességgel.

2.4.11. Feladat

Három város egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjaiban (A, B, C) helyezkednek el. Két autó közlekedik az A → B → C útvonalon. Az egyik autó az A → B városok közötti utat állandó 60 km/h sebességgel, majd a B → C városok közti utat 100 km/h állandó sebességgel teszi meg, míg a másik autó az A → B → C útvonalon végig 80 km/h sebességgel halad. Határozza meg, melyik autó átlagos sebessége nagyobb az A → B → C útvonalon.

Megoldás

Az előző feladat alapján az egyik autó átlagsebessége $v_1 = 2/(1/60 + 1/100) = 75$ km/h = 20,8333 m/s, a másik autó átlagsebessége $v_2 = 80$ km/h = 22,2222 m/s nagyobb, mint az első autó átlagsebessége.

2.4.12. Feladat

Az autók műszaki vizsgáján a követelmény, hogy fékezéskor a lassítás legalább 6 m/s^2 legyen. Határozza meg, hogy ekkor a 80 km/h sebességgel haladó autó fékezéskor mekkora távolságon áll meg és mennyi ideig tart a fékezés.

Megoldás

Először érdemes sebesség mértékegységét átváltani, $v_0 = 80 \text{ km/h} = 22,2222 \text{ m/s}$. Minthogy az autó megállásig fékez, így a $v = v_0 - at = 0$ összefüggés alapján a fékezés ideje $t = v_0/a = 3,7037 \text{ s}$. A fékezési út pedig egyrészt az $s = v_0t + at^2/2$ összefüggés, másrészt az $s = v_0^2/2a$ összefüggés felhasználásával $41,1523 \text{ m}$ hosszúnak adódik.

2.4.13. Feladat

Egy 18 g tömegű testet 12 m magas torony tetejéről vízszintesen 5 m/s kezdősebességgel elhajítanak. Határozza meg, mennyi idő múlva ér földet.

Megoldás

Habár a tömegpont vízszintes kezdősebességgel indul, a földre érkezés idejét a torony tetejéről való szabadesés határozza meg, $h = gt^2/2$, ahonnan $t = \sqrt{2h/g} = 1,5641 \text{ s}$.

2.4.14. Feladat

Egy torony tetejéről vízszintesen 8 m/s kezdősebességgel elhajítanak egy 15 g tömegű testet. Határozza meg, hogy 3 s ideig történő repülés után a tömegpont a torony talpától milyen messze kerül.

Megoldás

A vízszintes irányú sebességgel a megadott idő alatt $s = v_0t = 24 \text{ m}$ távolra kerül a torony tövétől.

2.4.15. Feladat

Egy 22 g tömegű testet 8 m/s kezdősebességgel vízszintesen elhajítanak. Határozza meg, milyen magas volt a torony, ha a tömegpont 5 s alatt ér földet.

Megoldás

A vízszintes hajítás esetén a függőleges elmozdulást a szabadesés eredményezi, ahonnan a torony magassága $h = gt^2/2 = 122,6250 \text{ m}$.

2.4.16. Feladat

Egy torony tetejéről vízszintesen elhajítanak egy 18 g tömegű testet. Határozza meg, mekkora a tömeg kezdősebessége, ha 3 s alatt a torony talppontjától 26 m távolságra jut.

Megoldás

A vízszintes hajítás esetén a vízszintes távolságot egyenes vonalú egyenletes sebességgel teszi meg a tömegpont, így a vízszintes hajítás kezdősebessége $v_0 = s/t = 8,6667 \text{ s}^{-1}$.

2.4.17. Feladat

Egy 20 m magas torony tetejéről vízszintes irányba 3 m/s kezdősebességgel eldobnak egy 12 g tömegű tömegpontot. Határozza meg, hogy a torony tővétől milyen messze és mennyi idő múlva csapódik be a tömegpont.

Megoldás

A torony tetejéről a $h = gt^2/2$ összefüggés felhasználásával $t = \sqrt{2h/g} = 2,0193 \text{ s}$ alatt teszi meg a tömegpont a függőleges távolságot, ez alatt a vízszintes kezdősebességgel $s = v_0 t = 3t = 6,0578 \text{ m}$ utat fut be.

2.4.18. Feladat

Egy 20 g tömegű testet 8 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé dobnak. Határozza meg, milyen magasra repül, és mennyi idő múlva érkezik vissza a kiindulási pontra.

Megoldás

A tömeg addig emelkedik, amíg sebessége nullára nem csökken, ezután szabadeséssel visszafordul. Az emelkedés magassága $h = v_0^2/2g = 3,2620 \text{ m}$, a mozgás teljes ideje $t = 2v_0/g = 1,6310 \text{ s}$.

2.4.19. Feladat

Egy 15 m magas torony tetejéről kezdősebesség nélkül leejtenek egy 40 g tömegű testet. Határozza meg, mekkora sebességgel és mennyi idő múlva érkezik meg a tömegpont a torony talppontjához.

Megoldás

A torony tetejéről kezdősebesség nélkül szabadeséssel érkező tömegpont sebessége a $h = v^2/2g$ összefüggés felhasználásával $v = \sqrt{2gh} = 17,1552 \text{ m/s}$, az esés idejére pedig egyrészt a $h = gt^2/2$, másrészt a $v = gt$ összefüggésekből $t = 1,7487 \text{ s}$ idő adódik.

2.4.20. Feladat

Egy 8 m magas torony tetejéről 12 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé dobnak egy 38 g tömegű testet. Határozza meg, milyen magasra repül, és mekkora sebességgel érkezik meg a tömegpont a torony talppontjához.

Megoldás

A torony tetejéről felfelé dobt tömegpont mindaddig emelkedik, amíg kezdősebessége nullára nem csökken, ez a magasság $h = v_0^2/2g = 7,3394 \text{ m}$. A torony tővétől mért magasság $h_1 = h + 8 = 15,3394 \text{ m}$. A teljes magasságot elérve a tömegpont egy pillanatra megáll, majd szabadesésbe kezd és a torony tővéhez $v = \sqrt{2gh_1} = 17,3482 \text{ m/s}$ sebességgel érkezik meg.

2.4.21. Feladat

Egy 18 m magas torony tetejéről 6 m/s kezdősebességgel lefelé dobnak egy 40 g tömegű testet. Határozza meg, mekkora sebességgel és mennyi idő múlva érkezik meg a tömegpont a torony talppontjához.

Megoldás

A kezdősebességgel lefelé dobott tömegpont végsebességére a magasság $h = (v^2 - v_0^2)/2g$ kifejezéséből $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 19,7271 \text{ m/s}$ adódik, az esés ideje $t = (v - v_0)/g = 1,3993 \text{ s}$.

2.4.22. Feladat

Egy 7.5 m hosszú zsineg egyik végére és ettől 3 m távolságra szintén egy-egy követ erősítenek. A zsineg másik végét megfogva kilógatják egy hídról, majd onnét elengedve a folyóba ejtik. A két kő csobbanása között 0,15 s idő telik el. Határozza meg, milyen magasan van a híd a víz felett, ha a hang terjedési-sebessége figyelmen kívül hagyható.

Megoldás

A zsineg alsó végén lévő tömegpont $h_1 = gt_1^2/2$ magasságot esik, míg a felette lévő tömegpont $h_2 = gt_2^2/2$ magasságot süllyed, amíg talajt ér. A két magasság megtételéhez szükséges idők közötti eltérés ismeretében $t_2 = t_1 + 0,15$ kapcsolat áll fenn. A híd magassága a zsineg alján és a felette lévő tömegpontra $h = h_1 + 7,5 = h_2 + 4,5$. A fenti összefüggéseket figyelembe véve $h = gt_1^2/2 + 7,5 = g(t_1 + 0,15)^2/2 + 4,5$. Némi rendezés után a $7,5 = (0,3t_1 + 0,0225)g/2 + 4,5$ egyenlet megoldásaként a zsineg alján lévő tömegpont $t_1 = 1,9637$ s ideig, a felette lévő tömegpont $t_2 = 2,1137$ s ideig esik. A híd magassága pedig $h = h_1 + 7,5 = 26,4150$ m.

2.4.23. Feladat

Egy magas ház ötödik emeleti lakás ablaka előtt virágcserep zuhan lefelé. Az 1,2 m magas ablak előtt 0,12 s idő alatt halad el. Feltéve, hogy egy emelet magassága 3 m és a közegellenállásnak szerepe nem jelentős, határozza meg, hányadik emeleti ablakból eshetett ki a cserep.

Megoldás

Feltételezve, hogy az ablak tetejéig a cserep $h_1 = gt_1^2/2$ magasságot tett meg, az ablak aljáig pedig $h_2 = h_1 + 1,2 = gt_2^2/2$ magasságot esett. Figyelembe véve, hogy a két időpillanat között $t_2 = t_1 + 0,12$ kapcsolat áll fenn, az ablak aljáig eső cserepre a következő összefüggés írható fel, $h_2 = gt_1^2/2 + 1,2 = g(t_1 + 0,12)^2/2$, ahonnan némi rendezés után $1,2 = (0,24t_1 + 0,0144)g/2$ az ablak tetejéig $t_1 = 0,9594$ s, az ablak aljáig $t_2 = 1,0794$ s ideig esik a cserep. Az ablak aljáig $h_2 = gt_2^2/2 = 5,7145$ m távolságot tesz meg a cserep, ami hozzávetőleg $5,7145/3 = 1,9048 \approx 2$ emeletet jelent. Tehát a cserep a 7. emeletről eshetett ki.

2.4.24. Feladat

Határozza meg, mekkora a gyorsulása annak a részecskének, amely a lemezjátzó állandó, percnként 33,3 fordulatszámmal forgó korongján a középponttól 10 cm távolságra helyezkedik el.

Megoldás

A percnkénti fordulatszámból a periódusidő $T = 60/n = 1,8018 \text{ s}$, a pályamenti sebesség $v = 2\pi r/T = 0,3487 \text{ m/s}$, a pályagörbe főnormálisa irányú, centripetális gyorsulás pedig $a_{cp} = v^2/r = 1,2160 \text{ m/s}^2$.

2.4.25. Feladat

Határozza meg, mekkora a gyorsulása annak a részecskének, amely a lemezjátszó 50 fordulatszámmal forgó korongján a középponttól 120 mm távolságra helyezkedik el.

Megoldás

Az előző feladathoz hasonlóan a periódusidő $T = 60/n = 1,2 \text{ s}$, a pályamenti sebesség $v = 2\pi r/T = 0,6283 \text{ m/s}$, a pályagörbe főnormálisa irányú, centripetális gyorsulás pedig $a_{cp} = v^2/r = 3,2899 \text{ m/s}^2$.

2.4.26. Feladat

Egy köszörűkő nyugalomból $0,4 \text{ rad/s}^2$ szöggyorsulással indul. Határozza meg, mekkora lesz a szögsebessége 20 körülfordulás után.

Megoldás

A 20 körülforduláshoz tartozó szögelfordulás $\Delta\varphi = 20 \cdot 2\pi = 40\pi \text{ rad}$. A szöggyorsulás és a szögelfordulás közti $\Delta\varphi = \varepsilon t^2/2$ összefüggést felhasználva és figyelembe véve, hogy $\omega = \varepsilon t$, a szögsebesség $\omega = \sqrt{2\varepsilon\Delta\varphi} = 10,0265 \text{ rad/s}$.

2.4.27. Feladat

Határozza meg, mekkora a gyorsulása annak a részecskének, amely egy kerékpár állandó, percnként 50 fordulatszámmal forgó kerekének a középpontjától 100 mm távolságra helyezkedik el.

Megoldás

Az előző feladatokhoz hasonlóan, a forgó mozgás periódusideje $T = 60/n = 1,2 \text{ s}$, a pályamenti sebessége $v = 2\pi r/T = 0,5236 \text{ m/s}$, a pályagörbe főnormálisa irányú, centripetális gyorsulás pedig $a_{cp} = v^2/r = 2,7416 \text{ m/s}^2$.

2.4.28. Feladat

Határozza meg, mekkora a gyorsulása annak a gyermeknek, aki a körhinta állandó, percenként 2 fordulatszámmal forgó hintáján, a középponttól 120 cm távolságra ül.

Megoldás

Az előző feladatokhoz hasonlóan, a forgó mozgás periódusideje $T = 60/n = 30$ s, a pályamenti sebessége $v = 2\pi r/T = 0,2513$ m/s, a pályagörbe főnormálisa irányú, centripetális gyorsulás pedig $a_{cp} = v^2/r = 0,0526$ m/s².

3. TÖMEGPONT KINETIKÁJA

A tömegpont mozgásállapotát környezetével való kölcsönhatása határozza meg. Ezt a kölcsönhatást Newton törvényei foglalják össze.

3.1. Newton axiómái

3.1.1. Newton I. törvénye, a tehetetlenségi törvény

Minden test (anyagi tömegpont) nyugalomban marad, ill. megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg más testek kölcsönhatásai mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszerítik. Valós fizikai folyamatoknál, ha ez a kölcsönhatás, ami erő alakjában lép fel, olyan kicsi, hogy elhanyagolható, vagy a testre, tömegpontra ható erők eredője zérus, akkor a test nyugalomban van vagy állandó sebességgel egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \mathbf{0}, \quad \begin{cases} \vec{v} = 0, \\ \vec{v} = \text{áll.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Newton I. törvénye olyan vonatkoztatási, inercia rendszert jelent, amely a kölcsönhatásokat nem veszi figyelembe.

3.1.2. Newton II. törvénye

A mozgás megváltozása az m tömegű tömegpont mozgásmennyiségének, impulzusának/lendületének időbeli megváltozását okozza. Az m tömegű tömegpont \vec{I} , [kg m/s] *impulzusa* a tömegpont tömegének és sebességének szorzata

$$\vec{I}(\vec{r}, t) = m \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (3.2)$$

és mivel a sebesség vektor mennyiség, így az impulzus is vektor mennyiség lesz. Ekkor a mozgásmennyiség időbeli megváltozása arányos az $\vec{F}(\vec{r}, t)$ mozgatóerővel

$$\frac{d\vec{I}(\vec{r}, t)}{dt} = \dot{\vec{I}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}(\vec{r}, t). \quad (3.3)$$

Az erő mértékegysége a $[F] = 1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ N}$, (newton).

Nem relativisztikus térben, ahol a tömegpont m tömege a mozgásállapotától függetlennek tekinthető, $m = \text{áll.}$, a szorzatfüggvény idő szerinti differenciálási szabályát megtartva, de a tömeget állandónak tekintve, az impulzus időbeli megváltozásából származó erőhatás az m tömeget $\vec{a}(\vec{r}, t)$ gyorsulással mozgatja,

$$\dot{\vec{I}} = \frac{d\vec{I}(\vec{r}, t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}(\vec{r}, t). \quad (3.4)$$

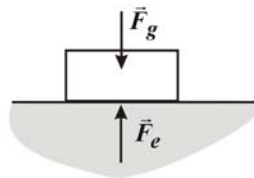
Tehát Newton II. törvénye szerint az impulzus-megváltozásból származó erő a tömegponton sebességváltozást hoz létre, azaz gyorsítja azt.

3.1.3. Newton III. törvénye, a hatás-ellenhatás törvénye

A testek közötti az érintkezéssel vagy érintkezés nélkül fellépő hatással szemben mindig fellép egy vele azonos nagyságú, de ellentétes irányú ellenhatás, a reakció erő,

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_g, \quad (3.5)$$

ahogy az a 3.1. ábrán látható.



3.1. ábra. A hatás-ellenhatás törvény érvényesülése

3.1.4. Kiegészítések

(a) Az erők függetlenségének elve szerint, ha egy tömegpontra több erő hat, azok hatásai összegeződnek (lineáris rendszerben a szuperpozíció elve érvényes), mindegyik erő külön-külön kifejti hatását, azaz mindegyik erő létrehozza a maga gyorsulás komponensét,

$$\vec{F} = m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k. \quad (3.6)$$

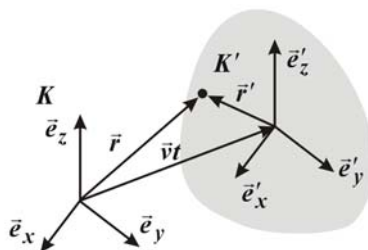
(b) *Gallilei-féle transzformáció* szerint a K álló, és a hozzá képest $\vec{v} = \text{áll.}$ sebességgel mozgó K' koordináta, vonatkoztatási rendszerben a tömegpont gyorsulása és ennek megfelelően az erő ugyanakkora. A 3.2. ábrán látható álló K rendszerben a tömegpont helyzetét az \vec{r} vektor, míg az állandó sebességgel mozgó K' rendszerben az \vec{r}' vektor írja le,

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}' . \quad (3.7)$$

Figyelembe véve, hogy a gyorsulás a helyzetvektor idő szerinti második deriváltja, azaz

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' , \quad (3.8)$$

azonos nagyságú gyorsuláshoz, ill. ezen keresztül azonos nagyságú erőhatáshoz vezet.



3.2. ábra. A tömegpont helyzete a K álló és a K' mozgó koordináta rendszerben

(c) A *D'Alembert-elv* Newton II. törvényét kinetikai egyensúlyi állapotra fogalmazza meg, amely szerint, ha a tömegpont a rá ható erők hatására gyorsuló mozgásba kezd, akkor az egyensúlyi egyenlet a következő,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) - m\vec{a}(\vec{r}, t) = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

ahol a tömegpont gyorsulásából származó $-m\vec{a}$ mennyiség a tömegpont tehetetlensége, vagy inercia ereje.

3.2. Az erőtvények alkalmazása

3.2.1. Tömegpont körmozgásának kinetikája

Newton törvényeinek felhasználásához a tömegpont körmozgása esetén a körmozgás impulzusa vagy lendülete a körmozgás $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ sebességének figyelembevételekor

$$\vec{I} = m\vec{v} = m\vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.10)$$

fellépő erőhatás az impulzus idő szerinti deriváltja,

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}). \quad (3.11)$$

Bevezetve a körmozgásnál fellépő érintő irányú szöggyorsulás $\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \dot{\vec{\epsilon}} \times \vec{r}$ és a pályagörbe főnormálisa irányú $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ gyorsulás komponenseket, a tömegpontra ható erőnek mind érintő, mind főnormális irányú komponense lesz

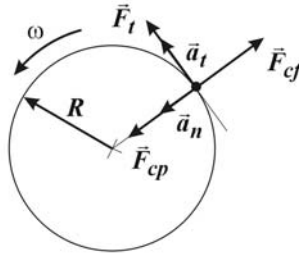
$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n) = m\vec{\epsilon} \times \vec{r} - m\omega^2 \vec{r} = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}. \quad (3.12)$$

tehát fellép egy pályamenti gyorsító erő

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t = m\vec{\epsilon} \times \vec{r} = m(\epsilon \vec{e}_z \times R \vec{e}_r) = m\epsilon R \vec{e}_\varphi, \quad (3.13)$$

és egy, a pályagörbére merőleges irányú *centripetális erő*, amely a pálya görbületi középpontja felé mutat, ahogy az a 3.3. ábrán látható,

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_n = -m\omega^2 \vec{r} = -m\omega^2 R \vec{e}_r = -m\omega v \vec{e}_r = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r. \quad (3.14)$$



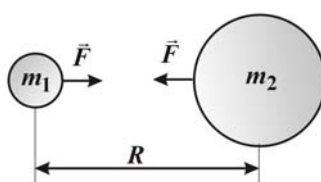
3.3. ábra. Körmozgásnál fellépő erőhatások

Newton III. törvénye szerint ezen főnormális irányú erővel egyidejűleg fellép egy vele azonos nagyságú de ellentétes irányú reakció erő, a *centrifugális erő*, amely a tömegpontot a körpályáról le akarja repíteni,

$$\vec{F}_{cp} = -\vec{F}_{cf}. \quad (3.15)$$

3.2.2. Bolygómozgás dinamikája

A bolygók mozgására vonatkozó mozgástörvényeket csillagászati megfigyelések alapján Kepler fogalmazta meg. A bolygómozgást meghatározó erőkre vonatkozó összefüggéseket viszont Newton az általános tömegvonzásra vonatkozó törvényszerűség megfogalmazásával adta meg (3.4. ábra).



3.4. ábra. A tömegvonzás során fellépő erőhatások

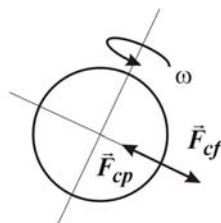
Ez szerint két, egymástól R távolságra lévő m_1 és m_2 tömegpontok között

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (3.16)$$

nagyságú tömegvonzó erő lép fel, ahol a $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ tömegvonzási állandót Cavendish mérte meg.

3.2.3. Testek súlya, a súlyerő

A fentiek alapján a 3.5. ábrán látható elrendezés esetén, a Föld felszínén 1 kg tömegre ható vonzóerő, feltételezve, hogy a Föld tömege $m_F \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a Föld átmérője $D_F \approx 1,274 \cdot 10^7 \text{ m}$, $F_F = \gamma \frac{m_F \cdot 1}{(D_F/2)^2} \approx 9,812 \text{ N}$.



3.5. ábra. A súlyerő meghatározása

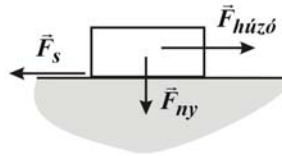
Figyelembe véve, hogy a Föld forgásából származó szögsebesség $\omega \approx 2\pi/24 \text{ rad/h}$, ahonnan az 1 kg tömegre ható centrifugális erő $F_{cf} = -F_{cp} = mR_F\omega^2 \approx 0,033 \text{ N}$. A Föld felszínén a tömegvonzásból és a centrifugális erőből származó erők eredője éppen az 1 kg tömegre ható erőt, $F_g = F_F - F_{cf} \approx 9,81 \text{ N}$, a Föld felszínén a nehézségi gyorsulásból az 1 kg tömegre ható erőt, a súlyerőt adja,

$$\vec{F}_g = m\vec{g}. \quad (3.17)$$

Tehát 1 kg tömeg súlya $F_g = G = mg = 1 \cdot 9,81 \text{ kgm/s}^2 = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$.

3.2.4. A súrlódási erő

Ha egy test egy másikon mozog, és a két felület között súrlódás lép fel, akkor a két test felülete közötti mozgást akadályozó súrlódási erő iránya ellentétes a mozgás irányával (3.6. ábra).



3.6. ábra. A súrlódási erő

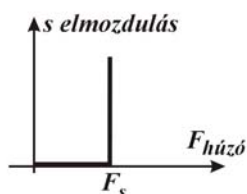
A súrlódás két típusát szokás megkülönböztetni, az egyik a csúszósúrlódás, a másik a tapadási súrlódás.

(a) *Csúszósúrlódás* esetén a súrlódási erő arányos a csúszó testek között fellépő normális irányú F_{ny} nyomóerővel, az m tömeg súlyerejével és a μ (csúszó)súrlódási tényezővel,

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu m g. \quad (3.18)$$

Newton törvényei alapján a csúszósúrlódással mozgó tömeg mindaddig nyugalomban van, amíg a húzóerő el nem éri a súrlódási erő értékét (3.7. ábra), ha a húzóerő nagyobb lesz, mint a súrlódási erő, a tömegpont gyorsuló mozgásba kezd,

$$F_{húzó} = F_s + m a = \mu m g + m a. \quad (3.19)$$

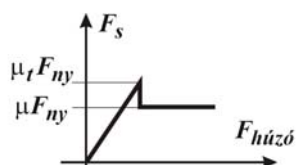


3.7. ábra. A csúszósúrlódás elmozdulás-erő diagramja

(b) A *tapadási súrlódás* a felületek egymáshoz való tapadását biztosítja, ez okozza azt a tényt, hogy súrlódás esetén a nyugvó tömeg elindításához nagyobb erő kell, mint mozgatásához

$$F_{ts} = \mu_t F_{ny} > F_s . \quad (3.20)$$

A tapadási súrlódás esetén a húzóerőt először növelni kell a tapadási súrlódás legyőzéséig, ezután a húzóerő értéke visszaesik a csúszósúrlódás ellensúlyozásáig, ahogy az a 3.8. ábrán látható.



3.8. ábra. A tapadási súrlódás erőviszonyai

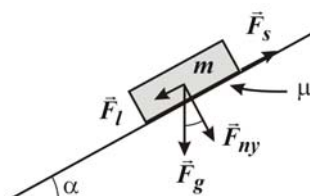
(c) *Súrlódás lejtőn való mozgásnál* a 3.9. ábrán látható m tömegű test csúszik le az α hajlásszögű lejtőn. A test és a lejtő között μ a *súrlódási tényező*.

Az m tömegű test súlya $\vec{F}_g = m\vec{g}$ függőlegesen lefelé mutat, amely felbontható lejtő irányú \vec{F}_l és lejtőre merőleges irányú \vec{F}_{ny} komponensekre,

$$\vec{F}_g = \vec{F}_l + \vec{F}_{ny}, \quad \begin{cases} F_l = mg \sin \alpha, \\ F_{ny} = mg \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.21)$$

A lejtőre merőleges irányú nyomóerő a súrlódási tényező hatására a lejtővel párhuzamos, a mozgás irányával ellentétes irányú súrlódó erőt eredményez,

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu mg \cos \alpha . \quad (3.22)$$



3.9. ábra. Lejtőn lecsúszó tömegre ható erők

Az m tömeg gyorsuló mozgással lecsúszik a lejtőn, ha a súlyerőből származó lejtő irányú erő nagyobb, mint a súrlódási erő, $F_l > F_s$,

$$F_{gy} = F_l - F_s = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = ma , \quad (3.23)$$

ahonnan az m tömeg gyorsulása

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) . \quad (3.24)$$

A megcsúszás határán a súrlódó erő és a lejtő irányú erő éppen egyenlő egymással, $F_l = F_s$, azaz

$$F_l = F_s, \quad mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha , \quad (3.25)$$

amely lehetőséget ad a μ súrlódási együttható mérésére, ui. a lejtő hajlásszögét lassan növelve a megcsúszás határesetéből a súrlódási együttható meghatározható,

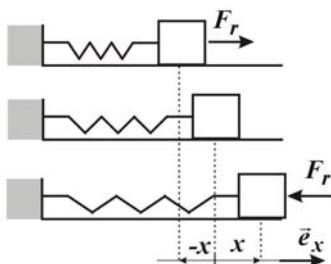
$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha . \quad (3.26)$$

3.2.5. A rugóerő

Rugómozgásnál lineáris kapcsolat van a rugóerő és a rugó kitérése között. Ha a 3.10. ábrán látható rugó hossza x értékkel megváltozik, azaz x értékkel megnyúlik, akkor a rugó visszatérítő ereje ellentétes irányú, de arányos lesz ezzel a kitéréssel,

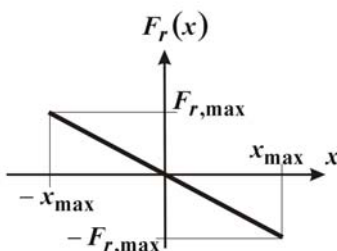
$$\vec{F}_r(x) = -kx\vec{e}_x , \quad (3.27)$$

ahol k , [N/m] a rugóállandó. A rugóerő és a rugó kitérése közti kapcsolatot 3.11. ábrán látható negatív meredekséggel rendelkező, lineáris karakterisztika.



3.10. ábra. A rugóerő és elmozdulás kapcsolata

A rugóerő hatására a rugóhoz csatlakoztatott m tömeg gyorsuló mozgásba kezd, a gyorsulása azonban nem lesz állandó, a rugó kitérésének csökkenésével csökkenő értékű lesz



3.11. ábra. A rugóerő és a rugó kitérése közti kapcsolatot leíró karakterisztika

$$\vec{F}_r(x) = -kx\vec{e}_x = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x, \quad (3.28)$$

$$\vec{a} = a(t)\vec{e}_x = \ddot{x}\vec{e}_x = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x = -\frac{k}{m}x\vec{e}_x.$$

3.3. Az impulzus és az impulzus-megmaradási tétele

3.3.1. Az impulzustétel

Az m tömegpont impulzusa a tömeg és a sebesség szorzata

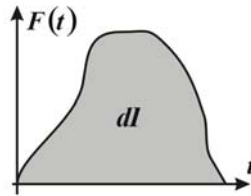
$$\vec{I}(\vec{r}, t) = m\vec{v}(\vec{r}, t). \quad (3.29)$$

Az m tömegpont mozgásmennyiségének, impulzusának időszerinti megváltozása a tömegpont kinetikai egyenletét, a tömegpontra ható erőt eredményezi

$$\dot{\vec{I}}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{I}(\vec{r}, t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t), \quad \int_{\vec{I}_1}^{\vec{I}_2} d\vec{I} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (3.30)$$

Feltéve, hogy az m tömegpont impulzusa a t_0 időpillanatban $\vec{I}(t_0) = m\vec{v}_0$, a t időpillanatban pedig $\vec{I}(t) = m\vec{v}$, akkor az impulzustétel szerint a két időpillanat közti időintervallumban az impulzus-megváltozása a tömegpontra ható erő fellépésével jár (3.12. ábra)

$$\frac{d\vec{I}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{d}{dt}[m\vec{v}(\vec{r}, t)] = \vec{F}(\vec{r}, t), \quad \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{r}, \tau) d\tau = \int_{m\vec{v}_0}^{m\vec{v}} d(m\vec{v}) = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \quad (3.31)$$

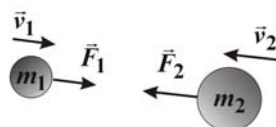


3.12. ábra. Az impulzus és az erő kapcsolata

Ha a tömegpont a $t_0 = 0$ pillanatban az $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ helyen, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ sebességgel rendelkezik, akkor $\vec{F} = \text{áll}$, állandó erő esetén a tömegpont mozgásegyenlete $\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$, ahonnan a tömegpont sebessége $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{F}t/m = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, végül a tömegpont helyzetét az $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \vec{F}t^2/2m$ vektor írja le.

3.3.2. Az impulzus-megmaradás tétele

Ha egy mechanikai rendszerben két tömegpont kölcsönhatásba kerül (3.13. ábra), akkor Newton III. törvénye szerint az m_1 tömegű, \vec{v}_1 sebességű tömegpont impulzus-megváltozásához tartozó \vec{F}_1 erő a hatás-ellenhatás elve alapján megegyezik az m_2 tömegű, \vec{v}_2 sebességű tömegpont impulzus-megváltozásához tartozó \vec{F}_2 erővel,



2.13. ábra. Newton III. törvénye és az impulzus-megmaradási tétel

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \dot{\vec{I}}_1 = -\dot{\vec{I}}_2, \quad \sum_k \dot{\vec{I}}_k = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Figyelembe véve, hogy az idő szerinti differenciálás és az összegezés művelete felcserélhető, így (3.32) fennáll, ha az impulzusok összege nulla, amely az impulzus-megmaradási tételhez vezet,

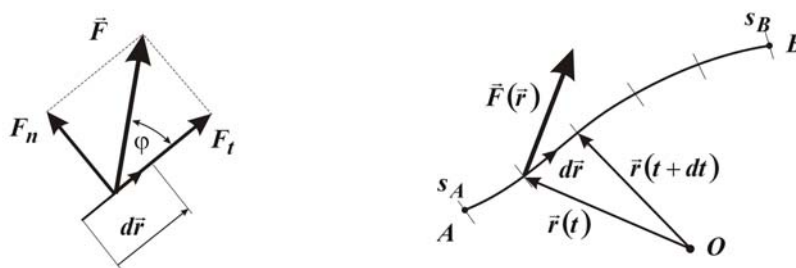
$$\sum_k \dot{\vec{I}}_k = \frac{d}{dt} \sum_k \vec{I}_k = \mathbf{0}, \quad \sum_k \vec{I}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

3.4. Tömegpont dinamikája, energiaviszonyok

3.4.1. A munka

Ha az m tömegpont az \vec{F} erő hatására a $d\vec{r}$ szakaszon elmozdul (3.14. ábra), akkor az erőnek az út irányába eső F_t komponense a dr útszakaszon munkát végez, amely munkavégzés a vektorok skaláris szorzatának felhasználásával a következő alakban írható

$$dW = F_t dr = F dr \cos \varphi = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.34)$$



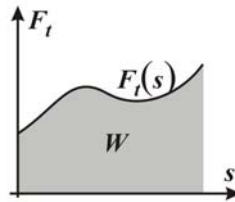
3.14. ábra. Az elmozduláson végzett munka

Ha az elmozdulás során az $\vec{F}(\vec{r})$ erő nem állandó, akkor az m tömegpont a pálya \vec{r}_A helyzetvektorral jellemzett s_A pontjából az \vec{r}_B helyzetvektorral jellemzett s_B pontjába mozgatva a munkavégzés

$$W_{AB} = \int_{W_A}^{W_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.35)$$

A munka mértékegysége, $1\text{Nm} = 1\text{J}$, (joule).

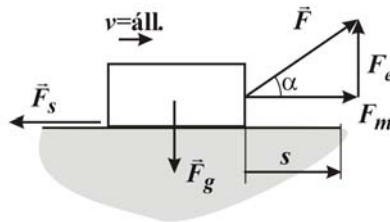
Az erő pálya irányába eső komponense és a munkavégzés kapcsolata a 3.15. ábrán látható.



3.15. ábra. Az erő munkája

3.4.2. A mozgóerő munkája

Feltételezve, hogy az m tömeg állandó sebességgel mozog a 3.16. ábrán látható \vec{F} erő hatására egy μ súrlódási együtthatóval rendelkező felületen, az erő felbontható egy, a mozgás irányába eső \vec{F}_m mozgóerő, és egy felfelé mutató \vec{F}_e emelő komponensre,



3.16. ábra. Állandó sebességgel való mozgás erőviszonyai

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e, \quad \begin{cases} F_m = F \cos \alpha, \\ F_e = F \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.36)$$

Ekkor a m tömeg súlya $F_g = mg$, a felületet nyomó F_{ny} nyomóerő azonban a húzóerőből származó, felfelé mutató komponens hatására a súlyerőnél kisebb lesz, így a súrlódási erő nagysága ezzel a nyomóerővel számítandó

$$\begin{aligned} F_{ny} &= F_g - F_e = mg - F \sin \alpha, \\ F_s &= \mu F_{ny} = \mu(mg - F \sin \alpha). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Az m tömeg akkor mozog állandó sebességgel, ha a mozgás irányába ható erők eredője zérus, azaz a mozgatóerő és a súrlódási erő egyensúlyban van,

$$\sum_k F_k = 0, \quad F_m = -F_s, \quad (3.38)$$

ekkor az s útszakasz megtételekor az erő mozgató komponense által végzett munka, a súrlódás legyőzésére, rendszerbe betáplált munkavégző képesség lesz

$$W = F_m s = -F_s s = -\mu(mg - F \sin \alpha) s. \quad (3.39)$$

3.4.3. A kinetikus vagy mozgási energia

A munkavégzés az m tömegpont impulzus-megváltozásával is kifejezhető,

$$W(t) = \int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{I}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}. \quad (3.40)$$

Figyelembe véve, hogy az impulzus a tömeg és a sebesség szorzata, $\vec{I}(\vec{r}, t) = m\vec{v}(\vec{r}, t)$, továbbá, hogy a helyzetvektor idő szerinti deriváltja a sebesség $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, az előző (3.40) kifejezés átalakítható

$$W(t) = \int_{\vec{r}} m\dot{\vec{v}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} m \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2, \quad (3.41)$$

ahonnan a \vec{v} sebességgel mozgó tömegpont mozgási energiája a $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = v^2$ összefüggés figyelembevételével

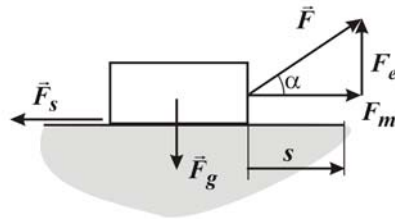
$$W_m(t) = \int_{\vec{v}} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_{\vec{v}} \vec{I} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2. \quad (3.42)$$

3.4.4. A gyorsítóerő munkája

Abban az esetben, ha az 3.17. ábrán látható elrendezésben a húzóerő út-irányú komponense nagyobb, mint a súrlódási erő $F_m > F_s$, a két erő különbségéből származó

$$F_{gy} = F_m - F_s = m a \quad (3.43)$$

gyorsítóerő a gyorsulással gyorsítja a tömegpontot.



3.17. ábra. A gyorsítóerő munkája

Ha a gyorsítóerő állandó, és a tömegpont álló helyzetből indul, akkor t idő eltelte után $s = at^2/2$ utat tesz meg, miközben $v = at$ sebességre gyorsul, és ekkor a gyorsítóerő munkája

$$W_{gy} = W_m - W_s = (F_m - F_s)s = F_{gy}s = mas = ma \frac{a}{2} t^2 = \frac{1}{2} mv^2. \quad (3.44)$$

3.4.5. A helyzeti vagy potenciális energia

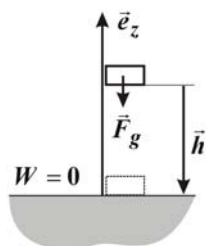
A 3.18. ábrán látható m tömegpontra ható nehézségi erő hatására a tömegpont súlya $F_g = mg$.

A tömegpontot h magasságba emelve a nehézségi erő leküzdésére befektetett munka

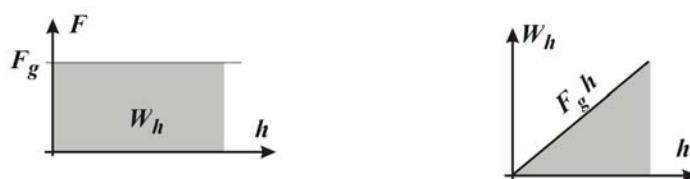
$$W_h = \vec{F}_g \cdot \vec{h} = mgh, \quad (3.45)$$

az m tömegpont munkavégző képességét, potenciális energiáját növeli meg.

Az m tömegpont h magasságból leejtve, a nehézségi erő munkát végez, az m tömegpont elveszti munkavégző képességét, potenciális energiáját, ahogy az a 3.19. ábrán látható.



3.18. ábra. A helyzeti energia



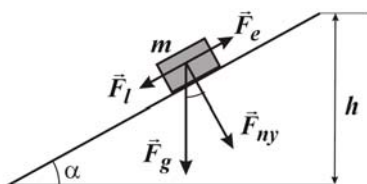
3.19. ábra. A súlyerő és a potenciális energia kapcsolata

3.4.6. Emelés lejtőn

Az α hajlásszögű lejtőn az m tömeg h magasságig való, súrlódás mentes emeléskor az $F_g = mg$ súlyerőt lejtő irányú $F_l = mg \sin \alpha$ és arra merőleges $F_{ny} = mg \cos \alpha$ komponensekre bontva, a lejtő $l = h/\sin \alpha$ hossza mentén a lejtő irányú erőt kompenzáló $F_e = F_l$ emelő erő végez munkát, ahogy az a 3.20. ábrán látható,

$$W_l = F_e l = F_l l = mg \sin \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = mgh, \quad (3.46)$$

azaz a lejtőn való emeléskor súrlódás mentes esetben a munkavégzés a függőleges elmozdulástól függ.



3.20. ábra. A lejtőn való emelés munkája

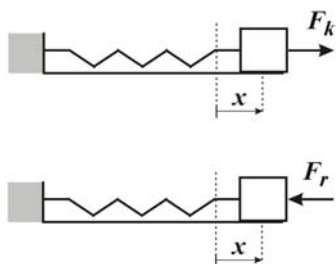
3.4.7. A rugóerő munkája, a rugó potenciális energiája

A 3.21. ábrán látható k rugóállandóval rendelkező rugót, a rugóerőt ellensúlyozó $F_k = -F_r = kx$ külső erővel megfeszítve, az x távolságra megnyújtott rugó rugóerejének munkája

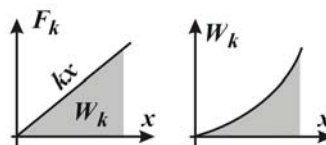
$$W_r = \int_0^x \vec{F}_r(x) \cdot d\vec{x} = -\int_0^x kx \cdot dx = -k \frac{x^2}{2}, \quad (3.47)$$

a rugó megfeszítésekor a külső erő által a rendszerbe betáplált munka, a rugó potenciális energiája lesz (3.22. ábra)

$$W_k = -W_r = k \frac{x^2}{2}. \quad (3.48)$$



3.21. ábra. A rugóerő és a külső erő kapcsolata

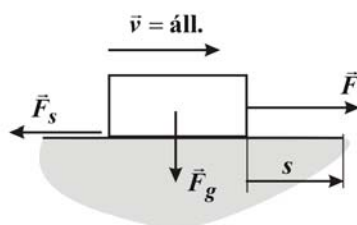


3.22. ábra. A külső erő munkája

3.4.8. A belső energia, a súrlódási hő

A 3.23. ábrán látható m tömeget $\vec{v} = \text{áll.}$ sebességgel mozgatva a μ súrlódási együtthatóval rendelkező felületen, az \vec{F} húzóerő a súrlódási erő legyőzésére fordítódik, $F = -F_s = -\mu mg$. Ekkor a súrlódás legyőzésére a rendszerbe táplált munkavégzés/energia hővé alakul,

$$W_{hő} = \vec{F} \cdot \vec{s} = -F_s s. \quad (3.49)$$

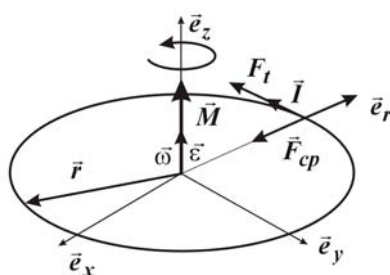


3.23. ábra. A súrlódási munka hővé alakul

3.5. A forgatónyomaték

Ahogy az a későbbiekben igazoltan látható lesz, a forgatónyomatékot a forgástengelytől az erő támadáspontjába mutató helyzetvektor és az erő vektori szorzata adja (3.24. ábra).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.50)$$



3.24. ábra. Körmozgásnál a forgatónyomaték

Körmozgásnál figyelembe véve, hogy az erőnek egy érintő irányú és egy főnormális irányú komponense van,

$$\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_t + \vec{F}_{cp}) = \vec{r} \times \vec{F}_t + \vec{r} \times \vec{F}_{cp}, \quad (3.51)$$

minthogy az $\vec{r} \times \vec{F}_{cp}$ vektor komponensek párhuzamosak egymással, az előző egyenletben a második tag vektori szorzata nullát eredményez, és így körmozgásnál forgatónyomatékat csak a tangenciális erő eredményez, ahonnan,

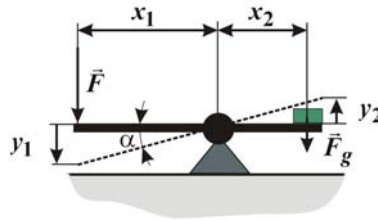
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t = \vec{r} \times m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}), \quad (3.52)$$

amely összefüggés kiértékelésénél (2.94) figyelembevételével a forgatónyomaték kifejezésében a második tag nulla, mivel az \vec{r} sugár és az érintő irányú $\vec{\varepsilon}$ gyorsulás komponensek merőlegesek egymásra,

$$\vec{M} = \vec{r} \times m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) = m(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\varepsilon} - m(\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon})\vec{r} = mr^2\vec{\varepsilon}. \quad (3.53)$$

3.5.1. Erőátviteli eszközök

(a) Az emelő forgási középpontjára a hatóerő és a súlyerő forgatónyomatéka azonos, egyensúlyi állapot lép fel (3.25. ábra).



3.25. ábra. Az emelő

Az emelő egyik karján ható \vec{F} erő munkája fedezi az m tömeg felemelésének munkáját és figyelembe véve, hogy az erő merőlegesen hat az emelő karjára,

$$Fx_1 = F_g x_2, \quad (3.54)$$

ahonnan az emelő erő

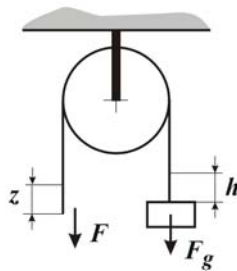
$$F = F_g \frac{x_2}{x_1}, \quad (3.55)$$

miközben az m tömeg függőleges elmozdulása az α elfordulási szögek egyenlőségéből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \quad y_2 = y_1 \frac{x_2}{x_1}. \quad (3.56)$$

(b) Az álló csiga, mint erőátviteli eszköz esetében a csiga tengelyére a súlyerő és a húzóerő nyomatéka egyenlő, ahonnan következik, hogy a csiga mindkét oldalán a kötélnél ugyanakkora erő ébred (3.26. ábra). Ekkor az emelő erő megegyezik az m tömeg súlyerejével

$$F = F_g. \quad (3.57)$$



3.26. ábra. Az álló csiga

Az m tömeg függőleges elmozdulása során a munkavégzés azonos a húzóerő által végzett munkával,

$$W_{F_g} = W_F, \quad (3.58)$$

miközben a teher emelési magassága megegyezik az F erő kifejtés útjával, ahogy az a 3.26. ábrán látható

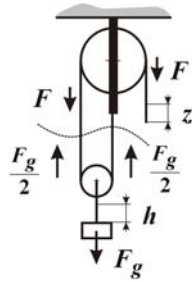
$$h = z. \quad (3.59)$$

(c) A mozgó csiga egyik szára a súlyerő felével emel, a kötelek elvágásakor az álló csiga kötélerője, a húzóerő a súlyerő fele, ahogy az a 3.27. ábrán látható

$$F = \frac{F_g}{2}. \quad (3.60)$$

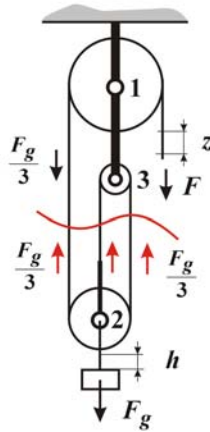
Az m tömeg emelése során a súlyerő és a húzóerő munkája azonos, ahonnan a tömeg h magassáig való emelésekor a húzóerőt $2h$ úton kell kifejtetni

$$F_g h = F z, \quad z = 2h. \quad (3.61)$$



3.27. ábra. A mozgó csiga

(d) A 3.28. ábrán látható csiga rendszer esetén a 2. számú mozgó csigára rögzített súlyerővel a három kötélereje tart egyensúlyt, amelyek nagysága $F_g/3$.



3.28. ábra. Egy csiga rendszer erőviszonyai

A rögzített tengely körül elforduló 3. számú álló csiga köteleiben szintén a súlyerő harmada lép fel, $F_g/3$, a két kötélereő forgatónyomatéka egyensúlyban van.

Az 1. számú, álló csiga köteleiben fellépő erők forgatónyomatékainak egyenlőségéből az emelőerő

$$F = \frac{F_g}{3}. \quad (3.62)$$

Az emelőerő munkája fedezi a súlyerő emeléséhez szükséges munkát, ahonnan a teher h magasságra való emeléséhez a húzóerőnek $3h$ szakaszon kell hatnia,

$$W_{F_g} = W_F, \quad z = 3h. \quad (3.63)$$

3.6. A teljesítmény

Az időegység alatt végzett munka a teljesítmény, mértékegysége a $1 \text{ Nm/s} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$ (watt),

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW(t)}{dt}. \quad (3.64)$$

Mint ahogy elemi úton való elmozduláskor a munkavégzés $dW(t) = \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$, így a teljesítmény kifejezésében a szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\dot{\vec{r}} \\ &= \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{v}} \vec{F} \cdot d\vec{v} \end{aligned}, \quad (3.65)$$

azaz teljesítményt az erő időbeli megváltozása, és a mozgásmennyiség/impulzus időbeli megváltozása eredményez,

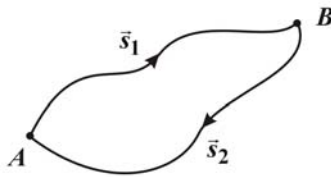
$$P(t) = \int_{\vec{r}} \dot{\vec{F}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{v}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{v}. \quad (3.66)$$

Ha az erő és a sebesség időben állandó, a teljesítmény is állandó lesz, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, azaz az \vec{F} erőnek a \vec{v} sebesség irányába eső komponense hoz létre teljesítményt.

3.7. A konzervatív erőtérf

A 3.29. ábrán látható módon egy m tömegpontot az \vec{s}_1 úton elmozdítva az A pontból a B pontba, majd az \vec{s}_2 úton a B pontból az A pontba visszatérítve, mechanikai értelemben nincs munkavégzés

$$\int_{(s_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{(s_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (3.67)$$



3.29. ábra. Konzervatív erőterben a munkavégzés nem függ az út alakjától

Figyelembe véve, hogy az integrálási határok megfordítása az integrál előjelét ellenkezőre változtatja, így konzervatív erőterben a végzett munka nem függ az út alakjától, csak az elmozdulás végpontjának helyzetétől

$$\int_{(s_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{(s_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(s_2)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (3.68)$$

3.8. A mechanikai energiamegmaradási tétele

Egy mechanikai rendszer összes energiája állandó, azaz a mozgási energia, a helyzeti energia, a súrlódási energia és a munkavégzésre fordított energiák összege állandó

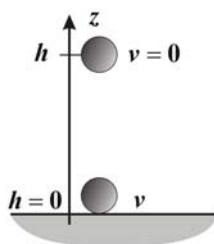
$$W_m + W_h + W_s + \int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{áll}. \quad (3.69)$$

A mechanikai energiaegyensúlyi egyenlet szerint pedig a mechanikai rendszerbe betáplált, W_{gen} energia fedezi egyrészt a rendszer $W_{belső}$ belső energiájának megváltozását, másrészt a rendszer munkavégzésre fordított $\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ energiáját,

$$W_{gen} = W_{belső} + \int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.70)$$

3.8.1. A helyzeti és mozgási energia kapcsolata

A 3.30. ábrán látható módon az m tömegpontot h magasságból leejtve elveszti $W_h = mgh$ helyzeti/potenciális energiáját, a rendszerben felhalmozott belső energiáját.

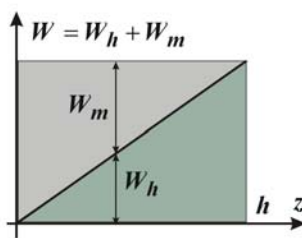


3.30. ábra. A helyzeti energia mozgási energiává alakul

A tömegpont a talajra \vec{v} sebességgel érkezik, $W_m = mv^2/2$ mozgási energiával rendelkezik. Miközben a magasságát elveszti a sebessége egyre nő, azaz a rendszer összes energiája állandó marad

$$W_h + W_m = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{áll.}, \quad (3.71)$$

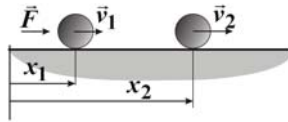
ahogy az a 3.31. ábrán látható.



3.31. ábra. Az energiamegmaradási diagram

3.8.2. A kinetikai energia és a gyorsító erő munkája

A 3.32. ábrán látható tömegpontot \vec{v}_1 sebességről \vec{v}_2 sebességre gyorsítja az \vec{F} erő, miközben az x_1 koordinátájú helyről az x_2 koordinátájú helyre jut.



3.32. ábra. A gyorsító erő hatása

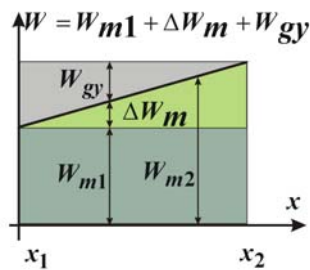
Az m tömegpont mozgási energiájának megváltozását

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (3.72)$$

az \vec{F} gyorsító erőnek a $\Delta x = x_2 - x_1$ úton végzett

$$W_{gy} = F \Delta x = F(x_2 - x_1) \quad (3.73)$$

munkája fedezi $\Delta W_m = W_{gy}$, ahogy az a 3.33. ábrán látható.



3.33. ábra. A rendszer energia diagramja

A rendszer összes energiája a mozgás során állandó marad, azaz miközben W_{m1} mozgási energiával indult a tömegpont az x_1 koordinátájú helyzetből, a mozgás végére az x_2 koordinátájú helyen a mozgási energiája W_{m2} értékre változik, miközben a gyorsító erő munkája a mozgási energia növelésére fordítódik,

$$W = W_{m1} + \Delta W_m + W_{gy} = \text{áll.} \quad (3.74)$$

3.8.3. A kinetikai energia és a súrlódási erő munkája

Ha a 3.34. ábrán látható m tömegpontra ható mozgatóerő egyensúlyt tart a súrlódási erővel, a tömegpont egyenletes mozgást végez,

$$F_m = -F_s, \quad F_m = -\mu mg. \quad (3.75)$$

Ekkor a \bar{v} sebességgel mozgó test

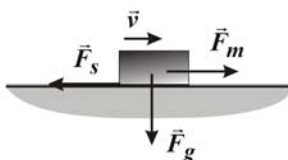
$$\Delta W_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (3.76)$$

kinetikai energia megváltozása fedezi az s úton fellépő

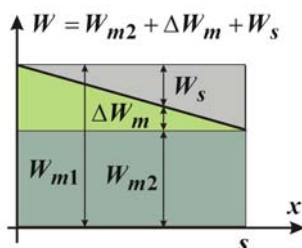
$$W_s = F_s \cdot s = \mu mgs, \quad (3.77)$$

súrlódási veszteséget, miközben a rendszer összes energiája állandó marad (3.35. ábra),

$$W_{m1} = W_{m2} + \Delta W_m + W_s = \text{áll.} \quad (3.78)$$



3.34. ábra. A súrlódó erő és a mozgatóerő komponensek



3.35. ábra. A rendszer energia diagramja

3.9. Feladatok, atömegpont kinetikája

3.9.1. Feladat

Határozza meg, mekkora a súlya egy 15 kg tömegű zsáknak.

Megoldás

A zsák súlya $G = mg = 15 \cdot 9,81 = 147,1500 \text{ N}$.

3.9.2. Feladat

Határozza meg, mekkora erő ébred abban a kötélben, amelyre 10 kg tömegű zsákot akasztanak.

Megoldás

A kötélben a zsák súlyával azonos nagyságú, ellentétes irányú erő ébred, $F = mg = 98,1 \text{ N}$.

3.9.3. Feladat

Határozza meg, mekkora erővel nyomja a talajt a 2 kg tömegű szék, ha egy 80 kg tömegű férfi ráül.

Megoldás

A talajt a két tömeg együttes súlya, $F = (m_{sz} + m_f)g = 804,4200 \text{ N}$ nyomja.

3.9.4. Feladat

Egy bolti eladó 5 doboz, egyenként 100 N súlyú konzervet tesz fel a padlóról a 150 cm magas polcra. Határozza meg, mennyi munkát végez.

Megoldás

A bolti eladó a dobozok helyzeti energiáját változtatja meg, azaz a befektetett munka $W = n \cdot mgh = 5 \cdot 100 \cdot 1,5 = 750 \text{ J}$.

3.9.5. Feladat

Egy 5 kg tömegű test 1,5 m/s sebességgel mozog súrlódásmentesen, vízszintes felületen. Határozza meg, mekkora munkavégzéssel növelhető meg a sebessége kétszeresére.

Megoldás

A kétszeres sebesség és az egyszeres sebesség mozgási energiájának különbsége a szükséges befektetett munka, azaz $W = m(2v_1)^2/2 - mv_1^2/2 = 3 \cdot v_1^2 m/2 = 16,8750 \text{ J}$.

3.9.6. Feladat

Egy 8000 N súlyú, görgőkön lévő ágyú 120 N súlyú golyót lő ki 80 m/s kezdősebességgel. Határozza meg, mekkora sebességgel lökődik vissza az ágyú.

Megoldás

A hatás, ellenhatás elve alapján a mozgásmennyiségek egyenlőségéből $m_g v_g = m_a v_a$, ahonnan az ágyú visszalökési sebessége $v_a = 1,2000 \text{ m/s}$.

3.9.7. Feladat

Egy porszívót a vízszintessel 65° szöget bezáró nyelénél fogva 70 N erővel tolnak. Határozza meg, mekkora a munkavégzés, ha a porszívó 5 m távolságot csúszik előre a padlón.

Megoldás

A munkavégzést az erőnek az út irányába eső komponense hoz létre, azaz $W = F \cos \alpha \cdot s = 70 \cdot \cos 65^\circ \cdot 5 = 147,9164 \text{ J}$.

3.9.8. Feladat

Határozza meg, milyen magasra jut az a 3 kg tömegű, 5 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé indított tömegpont, mikor sebessége éppen a felére csökken.

Megoldás

A tömegpont induláskor meglévő mozgási energiája fedezi a sebesség csökkenéskor meglévő mozgási energiáját és a megszerzett helyzeti energiáját, $mv_1^2/2 = mgh + m(v_1/2)^2/2$, ahonnan a megszerzett magasság $h = (v_1^2 - (v_1/2)^2)/2g$, $h = (5^2 - 2,5^2)/(2 \cdot 9,81) = 0,9557 \text{ m}$.

3.9.9. Feladat

Határozza meg, mekkora impulzussal kell meglökni a 4 kg tömegű, 12 m/s sebességű testet, hogy mozgási energiája 400 J legyen.

Megoldás

A $W_{2m} = mv_2^2/2$ mozgási energiából meghatározható az impulzus hatására megváltozott sebesség, $v_2 = 2W_{2m}/m = \sqrt{200} = 14,1421 \text{ m/s}$. A tömeg impulzus-megváltozása $\Delta I = m(v_2 - v_1) = 8,5684 \text{ kg m/s}$.

3.9.10. Feladat

Egy 15 m magas torony tetejéről egy 3,2 kg tömegű tömegpont kezdősebesség nélkül leesik. Határozza meg, mekkora lesz a tömegpont mozgási energiája és a sebessége a becsapódás pillanatában.

Megoldás

A torony tetején a tömegpont helyzeti energiával rendelkezik, amely a torony tövében mozgási energiává alakul, $W_h = mgh = W_m$, $W_m = 3,2 \cdot 9,81 \cdot 15 = 470,8800 \text{ J}$, ahonnan a becsapódás pillanatában a tömegpont sebessége $W_m = mv^2/2$, $v = \sqrt{2W_m/m} = 17,1552 \text{ m/s}$.

3.9.11. Feladat

Egy függőlegesen felfelé hajított test tömege 20 g, kezdősebessége 8 m/s. Határozza meg, milyen magasra repül, és mekkora sebességgel érkezik vissza.

Megoldás

A függőlegesen felfelé hajított test mindaddig emelkedik, amíg sebessége nullára nem csökken, azaz az indulásnál kapott mozgási energiája helyzeti energiává alakul, $W_m = mv^2/2 = W_h = mgh$, ahonnan az emelkedés magassága $h = v^2/2g = 3,2620 \text{ m}$. A tetőpont elérése után a tömegpont egy pillanatra megáll, majd esni kezd, ekkor a helyzeti energiája átalakul mozgási energiává, azaz a talajra való visszaérkezési sebessége megegyezik a kiindulási sebességével.

3.9.12. Feladat

Egy 8 m magas torony tetejéről 12 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajított test tömege 38 g. Határozza meg, milyen magasra repül, és mekkora sebességgel érkezik meg a tömegpont a torony talppontjához.

Megoldás

A tömegpont a torony tetejéről mindaddig emelkedik, amíg a sebessége nullára nem csökken, azaz a mozgási energiája helyzeti energiává alakul,

$W_m = mv^2/2 = W_h = mgh$, ahonnan az emelkedés magassága $h = v^2/2g = 7,3394$ m, a torony magasságával együtt, $h_1 = 8 + 7,3394 = 15,3394$ m magasra emelkedik. A tetőpontról leesik, miközben a helyzeti energiája mozgási energiává alakul, $mv_1^2/2 = mgh_1$, ahonnan a torony tővéhez érkezéskor a tömegpont sebessége $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 17,3482$ m/s.

3.9.13. Feladat

Egy 18 m magas torony tetejéről a függőlegesen lefelé hajtott 40 g tömegű tömegpont kezdősebessége 6 m/s. Határozza meg, mekkora sebességgel érkezik meg a tömegpont a torony talppontjához.

Megoldás

A torony tetején, a mozgás kezdeti pillanatában a tömegpont helyzeti és mozgási energiája alakul át a torony alján mozgási energiává, $mgh + mv_0^2/2 = mv_1^2/2$, ahonnan a torony tővében a tömegpont sebessége $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 19,7271$ m/s lesz.

3.9.14. Feladat

Egy 20 m magas torony tetejéről vízszintes irányba 3 m/s kezdősebességgel elhajítunk egy 1,2 kg tömegű tömegpontot. Határozza meg a becsapódás pillanatában a tömegpont mozgási energiáját és sebességét.

Megoldás

A torony tetején a tömegpont helyzeti és mozgási energiájának összege fedezi a becsapódás pillanatához tartozó mozgási energiáját, azaz $W_{m1} + W_h = W_{m2}$, ahonnan $W_{m2} = mv_1^2/2 + mgh = 240,8400$ J, a becsapódási sebesség pedig a $W_{m2} = mv_2^2/2$ mozgási energiából $v_2 = \sqrt{2W_{m2}/m} = 20,0350$ m/s.

3.9.15. Feladat

100 N súlyú gyerek 2,5 m magasból csúszik le egy 30° hajlásszögű csúszdán. Határozza meg, mekkora munkát végez a gravitációs erő a gyereken.

Megoldás

A gyerek elveszti a helyzeti energiáját, $W_g = W_h = mgh = 100 \cdot 2,5 = 250$ J.

3.9.16. Feladat

Egy liftben áll egy 70 kg tömegű férfi. Határozza meg a lábaira ható nyomóerőt, ha a lift áll, amikor felfelé halad 3 m/s sebességgel és amikor lefelé gyorsul 4 m/s² gyorsulással.

Megoldás

Amikor a férfi az álló liftben tartózkodik, a lábaira a súlyereje hat, $F_g = mg = 686,7000 \text{ N}$; amikor felfelé halad állandó sebességgel mivel nincs gyorsulás, továbbra is az F_g súlyerő hat; lefelé haladva a gyorsuló mozgás következtében a férfi súlya a gyorsító erővel csökken, és így a lábaira ható nyomóerő $F = mg - ma = 70 \cdot (9,81 - 4) = 406,7000 \text{ N}$ lesz.

3.9.17. Feladat

Egy lift felfelé indulva állandó gyorsulással 0,6 s alatt teszi meg az első 2 m szakaszt. A liftben egy utas 3 kg tömegű csomagot tart a kezében. Határozza meg, mekkora erővel tartja az utas a csomagot.

Megoldás

A lift gyorsulása a $h = at^2/2$ megtett út kifejezéséből $a = 2h/t^2 = 11,1111 \text{ m/s}^2$, így a doboz súlya a gyorsító erővel megnő, azaz $F = mg + ma = 62,7633 \text{ N}$ lesz.

3.9.18. Feladat

Egy gyerek vízszintes talajon fekvő 5 kg tömegű dobozt a vízszintessel 40° szöget bezáró kötél segítségével 25 N erővel húzza úgy, hogy a doboz a talajon marad. 0,2 súrlódási tényező esetén határozza meg a súrlódási erőt és a doboz gyorsulását.

Megoldás

A húzóerőnek a függőleges komponense csökkenti a doboz súlyerejét és ekkor a súrlódási erő $F_s = \mu(mg - F \sin \alpha) = 0,2 \cdot (5 \cdot 9,81 - 25 \sin 40^\circ) = 6,5961 \text{ N}$. A húzóerő vízszintes komponense és a súrlódási erő különbsége gyorsítja a doboz tömegét, $F \cos \alpha - F_s = ma$, ahonnan a doboz gyorsulása $a = (F \cos \alpha - F_s)/m = 2,5110 \text{ m/s}^2$.

3.9.19. Feladat

Egy 3 kg tömegű test 0,1 súrlódási együtthatójú vízszintes felületen 5 m/s kezdősebességgel meglöknek. Határozza meg, mekkora utat tesz meg megállásig.

Megoldás

A tömegpont indulásnál kapott mozgási energiáját a súrlódási munka emészti fel, azaz $mv_0^2/2 = \mu mgs$, ahonnan a megállásig megtett út, $s = v_0^2/2\mu g = 12,7421$ m .

3.9.20. Feladat

Határozza meg, mekkora munkát kell kifejtetni az 1,2 kg tömegű testnek a 0,08 súrlódási együtthatójú felületen 6 m úton való húzásához.

Megoldás

A tömegpont húzásához a súrlódási munkát kell legyőzni, azaz $W_s = \mu mgs = 0,08 \cdot 1,2 \cdot 9,81 \cdot 6 = 5,6506$ J munkát kell kifejtetni.

3.9.21. Feladat

Egy 3,2 kg tömegű 0,09 súrlódási együtthatójú felületen mozog. Határozza meg, mekkora súrlódási veszteség lép fel, miközben tömegpont 12 m/s kezdősebessége felére csökken.

Megoldás

A tömegpont mozgási energiájának megváltozása fedezi a súrlódási veszteséget, azaz $W_s = mv_0^2/2 - m(v_0/2)^2/2 = 172,8000$ J lesz a súrlódási veszteség.

3.9.22. Feladat

Egy 6 kg tömegű 15 m/s kezdősebességgel vízszintes pályán induló testet 25 N súrlódási erő fékez 18 m hosszú szakaszon. Határozza meg a test sebességét a szakasz végén.

Megoldás

Az induláshoz tartozó mozgási energia fedezi a súrlódási veszteséget és a szakasz végén a mozgási energiát, $W_{m1} = W_s + W_{m2}$, azaz $mv_1^2/2 = F_s \cdot s + mv_2^2/2$, ahonnan a tömeg sebessége a szakasz végén $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2F_s \cdot s/m} = 8,6603$ m .

3.9.23. Feladat

Egy 3kg tömegű test, vízszintes pályán álló helyzetből 10 m/s^2 gyorsulással indul. Határozza meg, mekkora lesz a sebessége 12 m szakasz megtétele után, ha közben 15 N súrlódási erő fékezi.

Megoldás

Ha az adott gyorsulással mozog a test, az adott szakasz megtétele után a sebessége $s = v_1^2/2a$ összefüggés alapján, $v_1 = \sqrt{2as} = 15,4919$ m lenne. Ennek a mozgási energiának egy része fedezi a súrlódási veszteséget és csak a maradék energia fedezi a tömeg mozgásához tartozó sebességet, $mv_1^2/2 = F_s \cdot s + mv_2^2/2$, ahonnan a súrlódási veszteség fedezése után a tömeg sebessége $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2F_s \cdot s/m} = 10,9545$ m.

3.9.24. Feladat

Határozza meg, mekkora annak a 3 kg tömegű testnek a súrlódási vesztesége, amely 14 m/s sebességről 9 m/s sebességre lassul.

Megoldás

A mozgási energia megváltozása fedezi a súrlódási veszteséget, azaz $W_s = mv_1^2/2 - mv_2^2/2 = 172,5000$ J.

3.9.25. Feladat

Egy 9 kg tömegű test 8 m/s kezdősebességgel felfelé indul egy 10 m hosszú, 30° hajlásszögű lejtő aljáról. Mozgása közben 3,5 N súrlódási erő fékezi. Határozza meg, milyen magasra jut a test.

Megoldás

A tömeg lejtő alján lévő mozgási energiája fedezi a súrlódási veszteséget és a lejtőn való emelkedéshez tartozó helyzeti energiát, azaz $W_{m0} = W_s + W_h$. Figyelembe véve a lejtő hajlásszögét miközben a lejtőn l utat tesz meg, $h = l \sin \alpha$ magassáig emelkedik. Mindezek figyelembevételével $mv_0^2/2 = mgh + F_s h/\sin \alpha$, ahonnan a h magasság kifejezhető $h = (mv_0^2/2)/(mg + F_s/\sin \alpha)$, $h = 3,0224$ m.

3.9.26. Feladat

Egy 4 kg tömegű test 6 m/s kezdősebességgel lefelé indul a 9 m hosszú, 30° hajlásszögű lejtő tetejéről. Mozgás közben 2,8 N súrlódási erő fékezi. Határozza meg, mekkora lesz a tömeg sebessége a lejtő alján.

Megoldás

A lejtő tetején a tömeg helyzeti és mozgási energiája fedezi a súrlódási veszteséget és a lejtő alján a megmaradó mozgási energiáját, $W_{mfent} + W_h = W_s + W_{mlent}$.

Figyelembe véve, hogy a 9 m hosszú, 30° hajlásszögű lejtő magassága $h = l \sin \alpha = 9 \cdot \sin 30^\circ = 4,5 \text{ m}$, az energia $mv_{fent}^2/2 + mgh = F_s \cdot l + mv_{lent}^2/2$

kifejezéséből a lejtő alján a tömeg sebessége $v_{lent} = \sqrt{v_{fent}^2 + 2gh - (2F_s \cdot l)/m}$,
 $v_{lent} = 10,5683 \text{ m/s}$ lesz.

3.9.27. Feladat

Határozza meg, mekkora súrlódó erő fékezi azt az 5 kg tömegű, testet, amelyet egy 10 m hosszú, 30° hajlásszögű lejtő alján 12 m/s kezdősebességgel felfelé lökve az a lejtő fele magasságáig jut.

Megoldás

A tömeg lejtő alján meglévő mozgási energiája fedezi egyrészt a súrlódási munkát, másrészt a lejtőn való emelkedéshez tartozó helyzeti energiáját, $W_{m0} = W_s + W_h$. Ha a tömeg a lejtő fele magasságáig jut, akkor $h = l \sin \alpha/2 = 5 \text{ m}$ magasra jut. Ekkor az energia egyenlet $mv_0^2/2 = F_s \cdot l/2 + mgl \sin \alpha/2$ felhasználásával a súrlódási erő a következő $F_s = (mv_0^2/2 - mgl \sin \alpha/2)/(l/2) = 22,9500 \text{ N}$.

3.9.28. Feladat

Egy 12 kg tömegű test álló helyzetből csúszik le egy 5 m hosszú, 30° hajlásszögű lejtőn. Mozgás közben 8 N súrlódási erő fékezi. Határozza meg, mekkora lesz a tömeg sebessége a lejtő alján.

Megoldás

A tömeg lejtő tetején meglévő helyzeti energiája fedezi a súrlódási munkát és a lejtő alján lévő mozgási energiáját, $W_h = W_s + W_m$, azaz $mgl \sin \alpha = F_s \cdot l + mv^2/2$, ahonnan a tömeg sebessége a lejtő alján $v = \sqrt{2gl \sin \alpha - 2F_s \cdot l/m} = 6,5102 \text{ m/s}$.

3.9.29. Feladat

Egy 5 kg tömegű test 4 rad/s szögsebességgel forog függőleges síkban egy 12 m hosszú madzag végén. Határozza meg, mekkora erő feszíti a madzagot a pálya tetőpontján.

Megoldás

A körmozgás során, a pálya tetőpontján a normális irányú gyorsítóerő reakció ereje, a centrifugális erő lép fel, amelyet a tömeg súlyereje csökkent, azaz a madzagot feszítő erő $F = F_{cf} - F_g = m\omega^2 - mg = 5 \cdot 12 \cdot 4^2 - 5 \cdot 9,81 = 910,9500 \text{ N}$.

3.9.30. Feladat

Egy 80 kg tömegű férfi 2 s alatt rohan fel a 3 m magas lépcsősoron. Határozza meg, mekkora az átlagos teljesítménye.

Megoldás

Az átlagos teljesítmény az adott időegység alatt végzett munka, azaz $P = W/t = mgs/t = 80 \cdot 9,81 \cdot 3/2 = 1177,2 \text{ W}$.

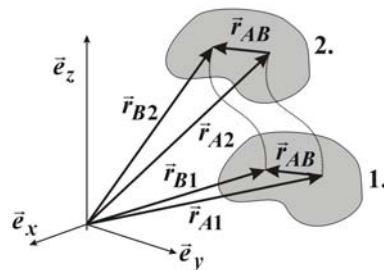
4. MEREV TESTEK DINAMIKÁJA

*Merev test*nek azon anyagi pontok összessége tekinthető, amelyek pozíciója nem független egymástól. A merev testet három pontja, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ definiál egyértelműen. A merev test mozgásállapotát az anyagi pontjainak mozgásállapota határozza meg.

4.1. Merev test haladó mozgása

Az 4.1. ábrán látható merev test $A-B$ pontjainak távolsága \vec{r}_{AB} . Az 1. számú pozícióban a merev test $A-B$ pontjainak helyzetvektora \vec{r}_{A1} , ill. \vec{r}_{B1} , a köztük lévő kapcsolat

$$\vec{r}_{B1} = \vec{r}_{A1} + \vec{r}_{AB}. \quad (4.1)$$



4.1. ábra. Merev test haladó mozgása

Miközben a merev test haladó mozgást végez, a 2. számú pozícióba jutva az $A-B$ pontjainak helyzetvektora közti kapcsolat

$$\vec{r}_{B2} = \vec{r}_{A2} + \vec{r}_{AB} \quad (4.2)$$

lesz. Általánosítva, az $A-B$ pontok helyzetvektorai a mozgás során változnak, de az egymáshoz való viszonyuk állandó marad

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB}. \quad (4.3)$$

A merev rest A - B pontjainak sebessége a helyzetvektorok idő szerinti deriváltjai,

$$\vec{v}_B(t) = \frac{d\vec{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} = \vec{v}_A(t), \quad (4.4)$$

a A - B pontok sebessége azonos lesz, minthogy az A - B pontok egymáshoz való viszonya nem változik. A merev test haladó mozgása során az A - B pontok gyorsulása a sebességvektorok idő szerinti deriváltjai, mivel azonban a sebességvektorok időfüggvénye minden időpillanatban azonos, így a gyorsulás vektorok is azonosak lesznek,

$$\vec{a}_B(t) = \frac{d\vec{v}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}_A(t)}{dt} = \vec{a}_A(t). \quad (4.5)$$

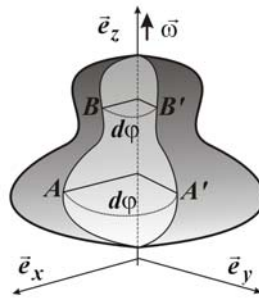
Összegezve, megállapítható, hogy haladó mozgása során a merev test minden pontjának azonos a sebessége és a gyorsulása, a merev test pontjai által leírt pályák egybevágó görbék lesznek.

4.2. Merev test forgó mozgása

4.2.1. Merev test egyenletes forgó mozgása

Merev test egyenletes forgó mozgása esetén az A - B pontok ugyanakkora szögsebességgel mozognak, $\vec{\omega} = \text{áll}$. Ekkor az merev test A - B pontjai ugyanakkora szöggel fordulnak el, ahogy az a 4.2. ábrán látható

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_A = \varphi_{A0} + \omega t, \\ \varphi_B = \varphi_{B0} + \omega t, \end{array} \right\} d\varphi_A = d\varphi_B = \omega t. \quad (4.6)$$



4.2. ábra. Merev test forgó mozgása

4.2.2. Merev test egyenletesen gyorsuló forgó mozgása

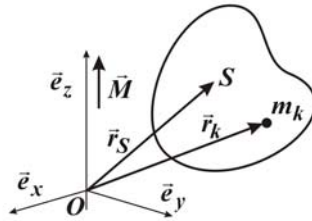
Egyenletesen gyorsuló forgómozgás esetén a merev test A - B pontjainak szöggyorsulása állandó, azaz $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon} = \text{áll}$. Ekkor t időtartam alatt az A - B pontok szögelfordulása,

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_A &= \vec{\omega}_{A0} + \vec{\varepsilon}t, & \vec{\varphi}_A &= \vec{\varphi}_{A0} + \vec{\omega}_{A0}t + \vec{\varepsilon}\frac{t^2}{2}, & d\vec{\omega}_A &= d\vec{\omega}_B, \\ \vec{\omega}_B &= \vec{\omega}_{B0} + \vec{\varepsilon}t, & \vec{\varphi}_B &= \vec{\varphi}_{B0} + \vec{\omega}_{B0}t + \vec{\varepsilon}\frac{t^2}{2}, & d\vec{\varphi}_A &= d\vec{\varphi}_B, \end{aligned} \quad (4.7)$$

azaz egyenletesen gyorsuló forgómozgás esetén a szögsebesség változás és a szögelfordulás megváltozása a merev test minden pontjára azonos.

4.2.3. Merev test súlypontja vagy tömegközéppontja

A merev testet elemi tömegpontok összességének tekintve (4.3. ábra), az elemi tömegpontok helyzetvektora rendre \vec{r}_k , $k=1,2,\dots$. A merev test tömegpontjainak súlyereje $\vec{F}_{gk} = m_k \vec{g}$. A merev test tömege a tömegpontok tömegének összessége, $m = \sum_k m_k$, súlyereje az m tömeg súlyereje $\vec{F}_g = m \vec{g}$.



4.3. ábra. A merev test súlypontja

Az ábrán látható Descartes koordináta-rendszerben az O pontra, a merev test súlyerejének forgató nyomatéka egyensúlyt tart a tömegpontok súlyerejének forgató nyomatékával, azaz

$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_{gk} = \vec{r}_S \times \vec{F}_g. \quad (4.8)$$

Részletesen kiértékelve, és a nehézségi gyorsulásokat mindkét oldalon figyelmen kívül hagyva

$$\sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{g} = \vec{r}_S \times m \vec{g}, \quad \sum_k \vec{r}_k m_k = \vec{r}_S m, \quad (4.9)$$

ahonnan a merev test súlypontja az 4.3. ábrán látható referencia rendszerben

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_k \vec{r}_k m_k}{m}. \quad (4.10)$$

4.2.4. Merev test impulzusa és statikai nyomatéka

A 4.4. ábrán látható merev test mozgásmennyisége, impulzusa az elemi tömegpontok impulzusainak, (lendületeinek) összessége. A tömegpontok tömegét állandónak tekintve az összegezés és az idő szerinti differenciálás művelete felcserélhető,

$$\vec{I} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt} \sum_k m_k \vec{r}_k, \quad [I] = \text{N} \cdot \text{s}, \quad (4.11)$$

az összegezés eredménye éppen a merev testnek az O pontra vonatkozó statikai nyomatékát adja,

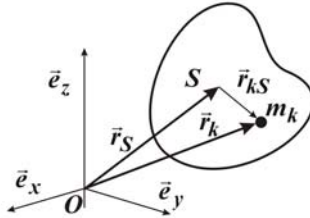
$$\vec{S}_O = \sum_k m_k \vec{r}_k = m \vec{r}_S, \quad [S_O] = \text{N} \cdot \text{m}. \quad (4.12)$$

A elemi tömegpontoknak az O ponttól vett távolságai a 4.4. ábra alapján kifejezhetők a súlypont helyzetvektorával és az elemi tömegpontoknak a súlyponttól vett távolságaival $\vec{r}_k = \vec{r}_S + \vec{r}_{kS}$, amelyet figyelembe véve a merev test O pontra vonatkozó statikai nyomatéka

$$\vec{S}_O = \sum_k m_k \vec{r}_k = \sum_k m_k (\vec{r}_S + \vec{r}_{kS}) = m \vec{r}_S + \sum_k m_k \vec{r}_{kS}, \quad (4.13)$$

ahol az utolsó tag az S súlypontra vonatkozó statikai nyomatékot jelenti, $\sum_k m_k \vec{r}_{kS} = \vec{S}_S$,

$$\vec{S}_O = m \vec{r}_S + \sum_k m_k \vec{r}_{kS} = m \vec{r}_S + \vec{S}_S. \quad (4.14)$$



4.4. ábra. Merev test statikai nyomatéka

(4.12) és (4.14) összevetéséből a merev test súlypontra vonatkozó statikai nyomatékára azonosan nulla összefüggés adódik,

$$\vec{S}_S = \sum_k m_k \vec{r}_{kS} \equiv \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

A fenti összefüggések felhasználásával a merev test impulzusa a statikai nyomaték idő szerinti deriváltja,

$$\vec{I} = \dot{\vec{S}}_O = m \dot{\vec{r}}_S = m \vec{v}_S, \quad (4.16)$$

amely úgy értelmezhető, hogy a merev test az \vec{I} impulzus hatására a súlypont \vec{v}_S sebességével kezd el mozogni.

A merev testre ható külső erők hatására, az impulzus idő szerinti deriváltját felhasználva,

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} = m \dot{\vec{v}}_S = m \vec{a}_S, \quad [F] = \text{N}, \quad (4.17)$$

a merev test a súlypont gyorsulásával kezd mozogni. (4.16) figyelembe vételével a merev testre ható gyorsító erő a statikai nyomatékkal is kifejezhető

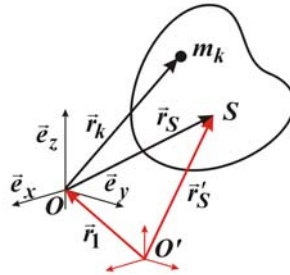
$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} = \ddot{\vec{S}}_O = m \dot{\vec{v}}_S = m \ddot{\vec{r}}_S. \quad (4.18)$$

Meg kell jegyezni, hogy a merev test súlypontja nem függ a referencia koordináta rendszer felvételétől. A 4.5. ábrán látható merev test statikai nyomatéka a felvett koordináta rendszerben az O pontra

$$\vec{S}_O = \sum_k m_k \vec{r}_k = m \vec{r}_S, \quad (4.19)$$

az \vec{r}_1 helyzetvektorral eltolt O' pontra pedig

$$\vec{S}_{O'} = \sum_k m_k (\vec{r}_1 + \vec{r}_k) = m\vec{r}_1 + \sum_k m_k \vec{r}_k = m\vec{r}_1 + m\vec{r}_S. \quad (4.20)$$



4.5. ábra. A merev test súlypontja független a referencia rendszer felvételétől

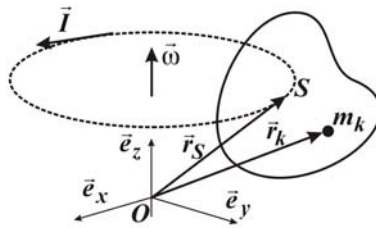
Figyelembe véve, hogy a merev test súlypontja az O' referencia ponttól $\vec{r}'_S = \vec{r}_1 + \vec{r}_S$ távolságra helyezkedik el, az O' pontra vonatkozó statikai nyomaték

$$\vec{S}_{O'} = m(\vec{r}_1 + \vec{r}_S) = m\vec{r}'_S \quad (4.21)$$

lesz, azaz a súlypont a helyén marad.

4.2.5. Merev test forgó mozgása, a perdület és az inercia nyomaték

(a) A 4.6. ábrán látható merev test minden elemi tömegpontja $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog a z -tengely körül, azaz az egyes tömegpontok



4.6. ábra. A merev test forgó mozgása

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k \quad (4.22)$$

sebességgel mozognak. Mivel a *merev test impulzusa* az egyes tömegpontok impulzusainak összege,

$$\vec{I} = \sum_k \vec{I}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k m_k \vec{\omega} \times \vec{r}_k, \quad (4.23)$$

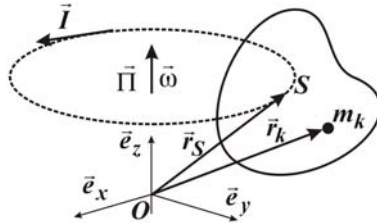
és a merev test tömegpontjainak szögsebessége ugyanakkora, amely kiemelhető az összegezés elé, a körmozgásnál a merev test impulzusát a szögsebesség és a referencia pontra vett statikai nyomaték vektori szorzata adja,

$$\vec{I} = \vec{\omega} \times \sum_k m_k \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{S}_O = \vec{\omega} \times m \vec{r}_S. \quad (4.24)$$

Ez úgy értelmezhető, hogy forgó mozgásnál a merev test impulzusa a merev test tömege mellett a szögsebesség és a súlypont helyzetvektorának vektori szorzatával arányos.

(b) Egy merev test k -adik tömegpontjának az O referencia pontra vonatkozó *perdülete* vagy impulzusnyomatéka a tömegpont \vec{r}_k helyzetvektorának és \vec{I}_k impulzusának vektori szorzata (4.7. ábra)

$$\vec{H}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k, \quad [H] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (4.25)$$



4.7. ábra. A merev test perdülete

Figyelembe véve azonban, hogy körmozgásnál a k -adik tömegpont sebessége $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$, a tömegpont perdülete a következő

$$\vec{H}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k = \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k). \quad (4.26)$$

Felhasználva a kettős vektori szorzatok kiértékelésére vonatkozó (2.94) összefüggést,

$$\vec{H}_k = \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) \cdot \vec{\omega} - m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r}_k \quad (4.27)$$

és figyelembe véve, hogy a jobb oldalon álló kifejezés második tagja nulla, mivel a k -adik tömegpont \vec{r}_k helyzetvektora és az $\vec{\omega}$ szögsebesség vektor merőlegesek egymásra, a k -adik tömegpont perdülete

$$\vec{H}_k = m_k r_k^2 \vec{\omega}. \quad (4.28)$$

Bevezetve a k -adik tömegpont *tehetetlenségi* vagy *inercia nyomatékát* (a másodrendű nyomatékot),

$$\Theta_k = m_k r_k^2, \quad [\Theta] = \text{kg m}^2, \quad (4.29)$$

a k -adik tömegpont \vec{H}_k perdülete az inercia nyomatékkal a következő alakban adható meg,

$$\vec{H}_k = m_k r_k^2 \vec{\omega} = \Theta_k \vec{\omega}. \quad (4.30)$$

Figyelembe véve, hogy a merev test perdülete tömegpontjaihoz tartozó perdületeinek összessége, így a 4.7. ábrán látható merev testnek az O pontra vonatkozó perdülete

$$\vec{H}_O = \sum_k \vec{H}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{I}_k = \sum_k m_k r_k^2 \vec{\omega}. \quad (4.31)$$

Bevezetve a merev test O pontra vonatkozó *tehetetlenségi* vagy *inercia* (másodrendű) *nyomatékát*

$$\Theta_O = \sum_k m_k r_k^2 \quad (4.32)$$

a merev test O pontra vonatkozó perdülete a következő alakban adható meg,

$$\vec{H}_O = \sum_k m_k r_k^2 \vec{\omega} = \Theta_O \vec{\omega}. \quad (4.33)$$

A merev test O pontra vonatkozó perdülete a súlypontra vonatkozó adatokkal is megadható. A 4.8. ábrán látható módon a k -adik tömegpontnak a referencia O pontra vonatkozó helyzetvektora az O referencia pontnak az S súlypontra, és a súlypontnak a

k -adik tömegpontra vonatkozó helyzetvektorok összegével kifejezve, $\vec{r}_k = \vec{r}_S + \vec{r}_{kS}$, a merev test O pontra vonatkozó perdülete

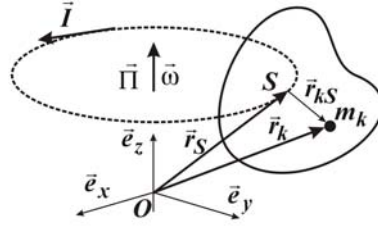
$$\vec{H}_O = \sum_k (\vec{r}_S + \vec{r}_{kS}) \times \vec{I}_k = \vec{r}_S \times \sum_k \vec{I}_k + \sum_k \vec{r}_{kS} \times \vec{I}_k, \quad (4.34)$$

azaz a súlypontnak a referencia ponttól való távolsága és a merev test impulzusának vektori szorzatához hozzáadódik a merev test súlypontra vonatkozó perdülete,

$$\vec{H}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{H}_S, \quad (4.35)$$

ahol a merev test súlypontra vonatkozó perdülete a következő,

$$\vec{H}_S = \sum_k \vec{r}_{kS} \times \vec{I}_k = \sum_k m_k r_{kS}^2 \vec{\omega} = \Theta_S \vec{\omega}. \quad (4.36)$$



4.8. ábra. Az O pontra és a súlypontra vonatkozó perdület kapcsolata

4.2.6. Párhuzamos tengelyek tétele, a Steiner tétel

Könnyen belátható, hogy a (4.35) összefüggés általánosítható, és a merev test két, egymással párhuzamos A és B tengelyeire vonatkozó perdületek között a kapcsolatot a következő módon adható meg,

$$\vec{H}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{I} + \vec{H}_A. \quad (4.37)$$

Figyelembe véve a merev test impulzusának $\vec{I} = m\vec{v}_S = m\vec{\omega} \times \vec{r}_S$ kifejezését és bevezetve az O pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték kifejezését $\Theta_O = \sum_k m_k r_k^2$,

az O pontra vonatkozó perdület a következő,

$$\vec{H}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{H}_S = (m\vec{r}_S^2 + \Theta_S) \vec{\omega} = \Theta_O \vec{\omega}, \quad (4.38)$$

ahonnan azonos szögsebességek esetén (a forgástengelyek párhuzamosak az O pontban és az S pontban) a merev test O pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a merev test súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték és a forgástengelynek a súlypont távolságából és a merev test tömegéből számított tehetetlenségi nyomaték összegével,

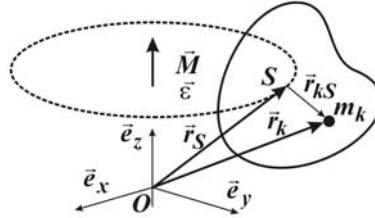
$$\Theta_O = m\vec{r}_S^2 + \Theta_S. \quad (4.39)$$

A fenti összefüggés a *Steiner tétel*. Meg kell azonban jegyezni, hogy párhuzamos forgástengelyek esetén a Steiner tételből következően a merev test súlypontjára lesz a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték,

$$\Theta_S = \Theta_O - m\vec{r}_S^2. \quad (4.40)$$

4.2.7. A perdülettétel, a forgatónyomaték

(a) A merev test k -adik tömegpontjának az O pontra vonatkozó perdületének idő szerinti deriváltja a perdülettétel szerint a tömegpontra ható forgatónyomatékot adja (4.9. ábra).



4.9. ábra. A merev testre ható forgatónyomaték

Figyelembe véve a perdület $\vec{H}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k$ kifejezését és alkalmazva a szorzatfüggvény deriválási szabályát, a k -adik tömegpontra ható forgatónyomaték

$$\vec{M}_k = \dot{\vec{H}}_k = \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times \vec{I}_k) = \dot{\vec{r}}_k \times \vec{I}_k + \vec{r}_k \times \dot{\vec{I}}_k, \quad [M] = \text{N} \cdot \text{m}. \quad (4.41)$$

A fenti kifejezésben a jobboldalon álló első tagban a helyzetvektor idő szerinti deriváltja a k -adik tömegpont sebessége $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$, a második tagban az impulzus idő szerinti deriváltja a k -adik tömegpontra ható erő $\vec{F}_k = \dot{\vec{I}}_k$, ahonnan a k -adik tömegpontra ható forgatónyomaték

$$\vec{M}_k = \vec{v}_k \times \vec{I}_k + \vec{r}_k \times \vec{F}_k. \quad (4.42)$$

Mínt hogy az \vec{I}_k impulzus a \vec{v}_k sebesség irányába mutat, így a jobb oldalon az első tagban a két, egymással párhuzamos vektor vektori szorzata nulla,

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \quad (4.43)$$

továbbá bevezetve a forgó mozgásnál az érintő irányú \vec{F}_t és a főnormális irányú \vec{F}_{cp} erőkomponenseket, $\vec{F}_k = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}$, és figyelembe véve, hogy a centripetális erő párhuzamos az \vec{r}_k helyzetvektorral, így csak a tangenciális erőkomponens hoz létre forgatónyomatékot,

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times (\vec{F}_t + \vec{F}_{cp}) = \vec{r}_k \times \vec{F}_t. \quad (4.44)$$

A forgómozgásnál megismert összefüggések szerint a k -adik tömegpontra ható tangenciális erőkomponens $\vec{F}_t = m_k \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k$ kifejezését felhasználva és a kettős vektori szorzatok kiértékelésre vonatkozó (2.94) összefüggést felhasználva

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times (m_k \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k) = m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) \vec{\varepsilon} - m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{\varepsilon}) \vec{r}_k, \quad (4.45)$$

a jobb oldalon álló második tag nulla, mivel az \vec{r}_k helyzetvektor és az $\vec{\varepsilon}$ szögsebesség merőleges egymásra. Ezzel a merev test k -adik tömegpontjára ható forgatónyomaték a k -adik tömegpont referencia pontra vonatkozó tehetetlenségi vagy inercia nyomatéka és a szögsebesség szorzata

$$\vec{M}_k = m_k (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) \vec{\varepsilon} = m_k r_k^2 \vec{\varepsilon} = \Theta_k \vec{\varepsilon}. \quad (4.46)$$

Hasonló eredményre vezet a k -adik tömegpont (4.30) összefüggéssel kapott $\vec{I}_k = \Theta_k \vec{\omega}$ perdületének idő szerinti deriváltja

$$\vec{M}_k = \dot{\vec{I}}_k = \Theta_k \dot{\vec{\omega}} = \Theta_k \vec{\varepsilon}. \quad (4.47)$$

(b) A merev testre ható forgatónyomaték a tömegpontokra ható forgatónyomatékok összege, ahonnan a merev test O ponton átmenő tengely körüli elfogatásakor a forgatónyomaték (4.9. ábra)

$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{M}_k = \sum_k \dot{\vec{H}}_k = \sum_k m_k r_k^2 \dot{\vec{\omega}} = \Theta_O \vec{\varepsilon}. \quad (4.48)$$

(c) A merev test O pontra vonatkozó forgatónyomatéka az S súlyponti adatokkal is kifejezhető, egyrészt a párhuzamos tengelyekre vonatkozó Steiner tétel felhasználásával $\Theta_O = m\vec{r}_S^2 + \Theta_S$,

$$\vec{M}_O = (m\vec{r}_S^2 + \Theta_S) \vec{\varepsilon}, \quad (4.49)$$

másrészt a (4.35) felhasználásával $\vec{H}_O = \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{H}_S$,

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = \vec{r}_S \times \dot{\vec{I}} + \dot{\vec{H}}_S, \quad (4.50)$$

azaz némi rendezés után a merev testnek az O pontra vonatkozó forgatónyomatéka a súlypontra vonatkozó forgatónyomaték $\dot{\vec{H}}_S = \vec{M}_S$ és a súlypontnak az O tengely körüli elfordulásához tartozó forgatónyomaték $\vec{r}_S \times \dot{\vec{I}} = \vec{r}_S \times \vec{F}$ összege,

$$\vec{M}_O = \vec{r}_S \times \vec{F} + \vec{M}_S. \quad (4.51)$$

4.3. A merev test dinamikai egyensúlya, statika

A dinamika speciális esetének tekinthető a nyugalom, ami a merev testek körében a statika fogalmába tartozik. Az előző pont alapján a merev test nyugalomban van, ha a merev testre ható (4.51) forgatónyomaték nulla,

$$\vec{M}_O = \vec{r}_S \times \vec{F} + \vec{M}_S = \mathbf{0}. \quad (4.52)$$

Az előző egyenlet két tagja két feltétel teljesülését jelenti. Az első tag a *transzlációs egyensúlyi feltétel*,

$$\vec{r}_S \times \vec{F} = \mathbf{0}, \quad \sum_k \vec{F}_k = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

azaz ha a merev testre ható erők eredője nulla, az nyugalomban van, ill. egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A (4.52) kifejezés második tagja a *rotációs*, ill. a *forgási egyensúlyi feltétel*hez vezet,

$$\vec{M}_S = \mathbf{0}, \quad \sum_k \vec{M}_k = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

azaz ha a merev testre nem hat forgatónyomaték, az nyugalomban van.

Az előzőek alapján egy merev test nyugalmi állapotának kinetikai feltétele esetén bármely A pontra a merev testre ható erők és forgatónyomatékok eredője zérus értéket ad,

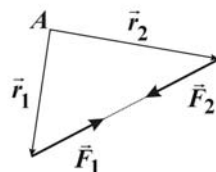
$$\vec{F} = \mathbf{0}, \quad \vec{M}_A = \mathbf{0}. \quad (4.55)$$

4.3.1. Statikai axiómák, alapösszefüggések

(a) Statikában a merev testnek a környezettel való kölcsönhatása a testre ható *erő* formájában jelenik meg. Mint ismeretes az erő vektor mennyiség, nagysága, iránya azaz hatásvonalja mellett támadáspontja is van. Ha egy merev testre több erő hat, azok eredője vektoriális összegezéssel határozható meg.

(b) *Két erő egyensúlya* esetén, a két, közös hatásvonalú, azonos nagyságú, de ellentétes irányú erő egyensúlyban van, ha eredőjük nulla, nyomatékuk a tetszőlegesen választott A pontra zérus, (4.10. ábra),

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.56)$$

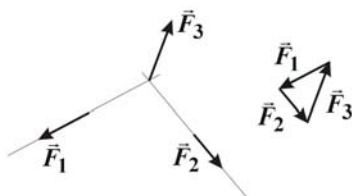


4.10. ábra. Két erő egyensúlya

(c) *Három erő egyensúlya* esetén, ha az erők egy síkban helyezkednek el, hatásvonalaik egy pontban metszik egymást, akkor a vektorok nyílfolyama egységes, (4.11. ábra), az erők egy zárt háromszöget alkotnak, az erők eredője zérus,

$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \mathbf{0}. \quad (4.57)$$

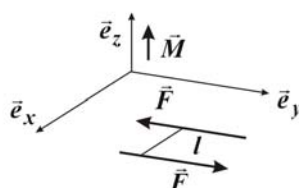
Némi okfejtés után belátható a tér bármely pontjára a nyomatékok zérus volta is.



4.11. ábra. Három erő egyensúlya

(d) Az erőhatások speciális esete az *erőpár*, ekkor a két, egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú, párhuzamos hatásvonalú erők bármely pontra vett forgatónyomatéka azonos (4.12. ábra), és merőleges a erőpár síkjára, $\vec{e}_M \perp \vec{e}_F$, azaz $\vec{e}_M \cdot \vec{e}_F = 0$,

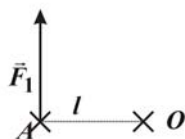
$$\vec{M} = lF\vec{e}_M. \quad (4.58)$$



4.12. ábra. Az erőpár forgató nyomatéka

4.3.2. Erőrendszer redukciója egy pontba

A 4.13. ábrán látható, A pontban ható erők eredője az O pontra vonatkozóan egy \vec{F}_1 eredő erőt és egy \vec{M}_1 forgatónyomatékot eredményez,



4.13. ábra. Az A pontban ható erők eredője

$$\sum_k \vec{F}_k = \vec{F}_1, \quad \sum_k \vec{M}_k = \vec{F}_1 l = \vec{M}_1. \quad (4.59)$$

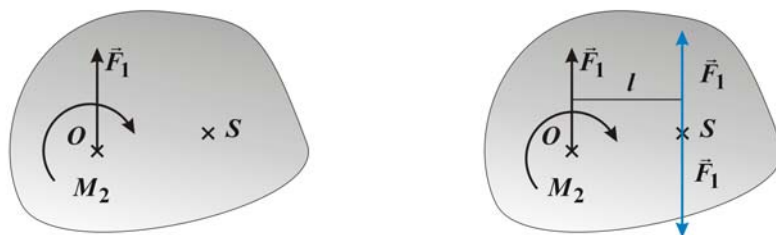
Az A pontban ható erő redukálható az O pontba. A 4.14. ábrán látható módon az O pontban elhelyezett két, ellentétes irányú, azonos nagyságú \vec{F}_1 erő eredője nulla, azonban az A pontban és az O pontban lévő, két egymással párhuzamos, de ellentétes irányú \vec{F}_1 erők egy erőpárt alkotnak, miközben az O pontban megjelenik egy \vec{F}_1 erő is. Ezek után a rendszer úgy tekinthető, mint az O pontban ható \vec{F}_1 erő mellett fellépő az O pontra vonatkozó \vec{M}_1 forgatónyomaték.



4.14. ábra. Az erőrendszernek az O pontban két azonos nagyságú, de ellentétes irányú, nulla eredőjű erővel való bővítése után a rendszerben az O pontba áthelyezett erő és forgatónyomaték

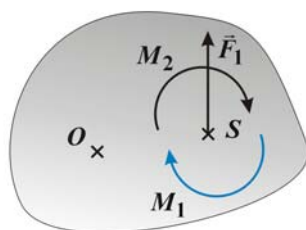
4.3.3. Merev testre ható erőrendszer redukálása a súlypontba

Az előző elvek alapján a 4.15. ábrán látható merev testre az O pontban ható \vec{F}_1 erő és \vec{M}_2 forgatónyomaték áthelyezhető az S súlypontba a következő lépések alapján,



4.15. ábra. Merev testre ható erő és forgatónyomaték redukciója

- az S súlypontban elhelyezésre kerül a nulla eredőjű, két ellentétes előjelű \vec{F}_1 erő;
- az S súlypontban hat az \vec{F}_1 erő és fellép az \vec{M}_1 forgató nyomaték;
- az eredmény, az S súlypontban hat az \vec{F}_1 erő és az $\vec{M}_1 + \vec{M}_2$ forgató nyomatékok összege (4.16. ábra).



4.16. ábra. A redukció eredménye

4.4. Merev testek kinetikai energiája, teljesítménye

4.4.1. Merev test mozgási energiája haladó mozgásnál

Haladó mozgásnál a merev test mozgási energiája a tömegpontok mozgási energiáinak összege, azaz

$$W_m = \sum_k W_{mk} = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2. \quad (4.60)$$

Figyelembe véve, hogy haladó mozgásnál a merev test minden pontja azonos, a súlypont \vec{v}_S sebességével mozog, és a merev test tömegpontjainak összege pedig éppen a merev test tömegét adja, a merev test mozgási energiája némi átalakítások után a következő alakban is megadható

$$W_m = \frac{1}{2} m \vec{v}_S^2 = \frac{1}{2} \vec{v}_S \cdot \vec{I}. \quad (4.61)$$

4.4.2. Merev test mozgási energiája forgó mozgásnál

A súlypont körüli forgó mozgásnál a k -adik tömegpont sebessége, $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$, mozgási energiája

$$W_{mk} = \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k). \quad (4.62)$$

Figyelembe véve a skalár-vektor szorzatok ciklikusságára vonatkozó (2.56) összefüggést, és bevezetve a k -adik tömegpont impulzusának kifejezését, a mozgási energia a következő alakra hozható

$$W_{mk} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times \vec{I}_k). \quad (4.63)$$

A fenti kifejezés a k -adik tömegpont $\vec{\Pi}_k = \vec{r}_k \times \vec{I}_k$ perdületével és $\vec{\Pi}_k = \vec{\omega} \Theta_k$ tehetetlenségi nyomatékával is megadható

$$W_{mk} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_k = \frac{1}{2} \Theta_k \omega^2. \quad (4.64)$$

A tömegpontok energiájának összege adja a merev test energiáját, azaz a súlypont körüli elfordulásnál a forgó mozgásból származó mozgási energia

$$W_m = \sum_k W_{mk} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_S = \frac{1}{2} \omega^2 \Theta_S. \quad (4.65)$$

Amennyiben a merev test egyidejűleg haladó és forgó mozgást is végez, a mozgási energiája a kétféle mozgásból származó energia összege,

$$W_m = \frac{1}{2} (\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}_S). \quad (4.66)$$

4.4.3. Merev test teljesítménye

A teljesítmény az időegység alatt végzett munka alapján, az összetett mozgást végző merev test teljesítménye a (4.66) kifejezésben szereplő munka idő szerinti deriváltja. Feltéve azonban, hogy a merev test haladó és forgó mozgása állandó sebességgel történik,

$$P = \frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{v}_S \cdot \dot{\vec{I}} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\Pi}}_S \right) \quad (4.67)$$

és figyelembe véve, hogy az impulzus idő szerinti deriváltja a merev testre ható erőt, a perdületének idő szerinti deriváltja pedig a forgató nyomatékot adja, a merev test teljesítménye a következő

$$P = \frac{1}{2}(\vec{v}_S \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_S). \quad (4.68)$$

4.5. Feladatok, merev test dinamikája

4.5.1. Feladat

Határozza meg egy súlytalannak tekinthető 2 m hosszú rúd két végén lévő 2 kg és 3 kg tömegek súlypontját.

Megoldás

Feltéve, hogy a súlypont a 2 kg tömegtől x távolságra helyezkedik el, és figyelembe véve, hogy a súlypontra az elsőrendű, statikai nyomaték nulla, $S_S = m_1 x - m_2(l - x) = 2 \cdot x - 3 \cdot (2 - x) = 0$, a súlypont a 2 kg tömegtől $x = 1,2000$ m távolságra, a 3 kg tömegtől $2 - x = 0,8000$ m távolságra helyezkedik el.

4.5.2. Feladat

Egy 8 m hosszú, súlytalannak tekinthető rúd két végén 5 kg és 3 kg nagyságú tömegek helyezkednek el. Határozza meg a merev test statikai nyomatékát a rúd középpontjára.

Megoldás

A statikai nyomaték a rúd jobb és bal oldalán lévő tömegek figyelembe vételével $S_k = m_1 l/2 - m_2 l/2 = (5 - 3)4 = 8$ kg m.

4.5.3. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a súlytalannak tekinthető 3 m hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő 18 kg és 24 kg tömegű gyerekek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Feltéve, hogy az alátámasztási pont a 18 kg tömegű gyerektől x távolságra helyezkedik el, a forgatónyomatékok egyenlőségéből, $m_1 x = m_2(l - x)$, az alátámasztási pont helye $x = 1,7143$ m a könnyebbik gyerektől és $l - x = 1,2857$ m a nehezebb gyerektől.

4.5.4. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a súlytalannak tekinthető 3,2 m hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő 15 kg és 27 kg tömegek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Az előző feladat mintájára az alátámasztási pontot a könnyebb tömegtől 2,0571 m távolságra kell elhelyezni.

4.5.5. Feladat

Határozza meg, mekkora tömegű gyerek ül a 2,8 m hosszú, egyensúlyban lévő 8 kg tömegű mérleghinta egyik végén, ha az alátámasztási ponttól 1,2 m távolságra lévő másik végén 21 kg tömegű gyerek helyezkedik el.

Megoldás

A mérleghinta súlyát a hinta közepére koncentrálna, az alátámasztási pontra az ismert súlyú gyerek forgatónyomatéka tart egyensúlyt az ismeretlen gyerek és a hinta súlyának forgatónyomatékával, $m_1 x = m(l/2 - x) + m_2(l - x)$, ahonnan a másik gyerek tömege $m_2 = (21 \cdot 1,2 - 8 \cdot 0,2)/1,6 = 14,7500$ kg.

4.5.6. Feladat

Határozza meg, hol kell alátámasztani a 18 kg tömegű, 3,6 m hosszú mérleghintát, hogy a két végén elhelyezkedő 12 kg és 24 kg tömegű gyerekek egyensúlyban legyenek.

Megoldás

Az előző feladat mintájára, $12 \cdot x + 18 \cdot (x - 3,6/2) = 24(3,6 - x)$, a könnyebb gyerektől $x = 2,2000$ m távolságban kell alátámasztani.

4.5.7. Feladat

Egy nyugalomban lévő 5 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,1 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,12 ms idő alatt. Határozza meg, mekkora sebességgel mozog a merev test az impulzus hatására.

Megoldás

A merev test sebessége $v = \Delta I / m = 0,1/5 = 0,02$ m/s lesz.

4.5.8. Feladat

Egy nyugalomban lévő 2 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,08 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,16 ms idő alatt. Határozza meg, mekkora gyorsulással kezd el a merev test mozogni.

Megoldás

Az impulzus hatására $F = \Delta I / \Delta t = 0,08 / 0,00016 = 500 \text{ N}$ erő éri, amely hatásra $a = F / m = 500 / 2 = 250 \text{ m/s}^2$ gyorsulással kezd el mozogni.

4.5.9. Feladat

Határozza meg, mekkora impulzus éri azt a 3,2 kg tömegű merev testet, amely 12 m/s sebességgel kezd el mozogni.

Megoldás

$$I = mv = 3,2 \cdot 12 = 38,4000 \text{ Ns} .$$

4.5.10. Feladat

Egy nyugalomban lévő, 10 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,06 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,12 ms idő alatt. Határozza meg, mekkora a merev testre ható forgatónyomaték, a súlypontjától 2,5 m távolságban lévő forgástengely körüli elforduláskor.

Megoldás

Az erő $F = \Delta I / \Delta t = 0,06 / 0,00012 = 500,0000 \text{ N}$, a forgató nyomaték $M = xF = 2,5 \cdot 500 = 1250 \text{ Nm}$.

4.5.11. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a mozgási energiája annak a nyugalomban lévő, 12 kg tömegű merev testnek, amelyet a súlypontjában 18,2 kg m/s nagyságú impulzus ér.

Megoldás

$$W_m = mv^2 / 2 = m / 2 \cdot (I/m)^2 = I^2 / 2m = 18,2^2 / (2 \cdot 12) = 13,8017 \text{ J} .$$

4.5.12. Feladat

Egy 6 kg tömegű merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $3,2 \text{ kg m}^2$. Határozza meg, mekkora szögsebességgel kezd el forogni a merev test, ha a forgástengelyre merőleges síkban, attól 3 m távolságban 12 kg m/s nagyságú impulzus éri.

Megoldás

Minthogy a perdület $\Pi = r \cdot I = \Theta \omega$, ahonnan a forgás szögsebessége $\omega = r \cdot I / \Theta = 12 \cdot 3 / 3,2 = 11,2500 \text{ rad/s}$.

4.5.13. Feladat

Határozza meg, mekkora impulzus éri azt az 5 kg tömegű merev testet, amely 6 rad/s szögsebességgel forog a súlyponttól 1,2 m távolságra lévő forgástengely körül.

Megoldás

A merev testet ért impulzus hatására a súlypontja $v_S = \omega r_S$ sebességgel kezd el forogni, azaz a merev testet $I = m v_S = m \omega r_S = 5 \cdot 6 \cdot 1,2 = 36 \text{ kg m/s}$ impulzus éri.

4.5.14. Feladat

Határozza meg két tömegpontból álló merev test súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, ha a tömegek 3 kg és 4 kg nagyságúak, és a köztük lévő távolság 9 m.

Megoldás

Feltéve, hogy a súlypont a 3 kg tömegtől x távolságra helyezkedik el, akkor a 4 kg tömegtől $9 - x$ távolságra lesz. A súlypontra az elsőrendű, statikai nyomaték nulla összefüggést felhasználva, $S_S = m_1 x - m_2 (l - x) = 0$, a súlypont a 3 kg tömegtől $x = 4 \cdot 9 / (3 + 4) = 5,1429 \text{ m}$ távolságra van. A súlypont ismeretében a tömegpontok másodrendű, inercia nyomatéka

$$\Theta_S = m_1 x^2 + m_2 (l - x)^2 = 3 \cdot 5,1429^2 + 4(9 - 5,1429)^2 = 138,8571 \text{ kg m}^2.$$

4.5.15. Feladat

Egy súlytalannak tekinthető 2,7 m hosszú rúd két végén azonos nagyságú, 5 kg tömegű testek helyezkednek el. Határozza meg a merev testként kezelhető forgó rendszer tehetetlenségi nyomatékát, ha a rúd harmadában elhelyezett, a rúdra merőleges forgástengely körül megforgatják.

Megoldás

$$\Theta = m(l/3)^2 + m(2l/3)^2 = 5(0,9^2 + 1,8^2) = 20,2500 \text{ kg m}^2 .$$

4.5.16. Feladat

Egy nyugalomban lévő 15 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,02 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,8 ms idő alatt, amely hatására a merev test a súlypontjától 1,2 m távolságban lévő forgástengely körül elfordul. Határozza meg, mekkora a merev testre ható forgatónyomaték.

Megoldás

A merev testet az impulzusból származó erő forgatja el, ekkor a forgatónyomaték $M = x \cdot F = 1,2 \cdot 0,02/0,0008 = 30 \text{ N m}$.

4.5.17. Feladat

Egy nyugalomban lévő 5 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,05 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,2 ms idő alatt. Határozza meg, mekkora a test perdülete, ha forgástengely a súlyponttól 3 m távolságra helyezkedik el.

Megoldás

A perdület a merev test impulzusnyomatéka, $\Pi = r \cdot \Delta I = 3 \cdot 0,05 = 0,15 \text{ kg m}^2/\text{s}$.

4.5.18. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a tehetetlenségi nyomatéka a pontszerűnek tekinthető, 1200 kg tömegű, 45 km/óra sebességű autónak a 125 m sugarú kanyarban.

Megoldás

$$\Theta = mr^2 = 1200 \cdot 125^2 = 18,7500 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2 .$$

4.5.19. Feladat

Határozza meg, mekkora az impulzusa a 850 kg tömegű, 35 km/óra sebességű autónak a 120 m sugarú kanyarban.

Megoldás

$$I = mv = 850 \cdot 35 \cdot 10^3 / 3600 = 8,2639 \text{ kN s} .$$

4.5.20. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a perdülete az 1500 kg tömegű, 65 km/óra sebességű autónak a 60 m sugarú kanyarban.

Megoldás

$$\Pi = r I = r m v = 60 \cdot 1500 \cdot 65 \cdot 10^3 / 3600 = 1625000 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

4.5.21. Feladat

Egy súlytalannak tekinthető vízszintes rúd egyik vége függőleges tengely körül 3 rad/s szögsebességgel fordul körbe. A rúdon a forgástengelytől 25 cm távolságban 1,2 kg, 55 cm távolságban 3 kg tömegek vannak rögzítve. Határozza meg a rúd impulzusnyomatékát.

Megoldás

A rendszernek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_F = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 1,2 \cdot 0,25^2 + 3 \cdot 0,55^2 = 0,9825 \text{ kg m}^2$. A forgó rendszer perdülete $\Pi = \Theta_F \omega = 0,9825 \cdot 3 = 2,9475 \text{ kg m}^2/\text{s}$.

4.5.22. Feladat

Egy 3 kg tömegű merev test súlypontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka 15 kg m^2 . Határozza meg a merev test forgási energiáját, ha a súlyponttól 45 cm távolságra lévő forgástengely körül 5 rad/s szögsebességgel forog.

Megoldás

Steiner tétel alapján a merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_F = \Theta_S + m r_{SF}^2 = 15 + 3 \cdot 0,45^2 = 15,6075 \text{ kg m}^2$. A forgási energia pedig $W_f = \Theta_F \omega^2 / 2 = 15,6075 \cdot 5^2 / 2 = 195,0938 \text{ J}$.

4.5.23. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz a mozgási energiája annak a vízszintes helyzetű, súlytalannak tekinthető 2,4 m hosszú rúd két végén lévő 4 kg és 6 kg tömegekből álló merev testnek, ha a rúd közepén átmenő függőleges tengely körül 4,8 rad/s szögsebességgel forog.

Megoldás

A tömegpontokból álló merev test forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = m_1(l/2)^2 + m_2(l/2)^2 = (6 + 4) \cdot 1,2^2 = 14,4000 \text{ kg m}^2$, a mozgási energiája $W_m = \Theta \omega^2 / 2 = 14,4000 \cdot 4,8^2 / 2 = 165,8880 \text{ J}$.

4.5.24. Feladat

Egy nyugalomban lévő 3 kg tömegű merve testet a súlypontjában 0,05 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,1 ms alatt. Határozza meg, mekkora szögsebességgel kezd el a merev test a súlyponttól 2 m távolságban lévő forgástengely körül forogni, ha a súlypontra vonatkozó inercia nyomatéka 4,5 kg m².

Megoldás

A forgástengelyre vonatkozó inercia nyomatéka a súlyponti adatokkal $\Theta_F = \Theta_S + mr^2 = 4,5 + 3 \cdot 2^2 = 16,5 \text{ kg m}^2$. Mivel az impulzus és a forgó mozgás sugara merőleges egymásra, a forgó tömeg perdülete $\Pi = r \cdot \Delta I = \Theta_F \omega$, ahonnan a szögsebesség $\omega = r \cdot \Delta I / \Theta_F = 2 \cdot 0,05 / 16,5 = 0,0061 \text{ rad/s}$.

4.5.25. Feladat

Egy 5 kg tömegű merev test forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka 2,4 kg m². Határozza meg a merev test forgástengelytől 60 cm távolságra lévő súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás

Steiner tétele alapján $\Theta_S = \Theta_F - mr^2 = 2,4 - 5 \cdot 0,6^2 = 0,6000 \text{ kg m}^2$.

4.5.26. Feladat

Egy nyugalomban lévő 2 kg tömegű merev testet a súlypontjában 0,06 kg m/s nagyságú impulzus ér 0,1 ms alatt. Határozza meg, mekkora forgatónyomaték hat a merev testre, ha a forgástengely a súlyponttól 3 m távolságban helyezkedik el.

Megoldás

A merev testet ért impulzus hatására $F = \Delta I / \Delta t = 0,06 / 0,0001 = 600 \text{ N}$ erő éri, amely a forgástengelytől mért távolság hatására $M = rF = 3 \cdot 600 = 1800 \text{ J}$ forgatónyomatékot eredményez.

4.5.27. Feladat

Egy 3,2 kg tömegű merev test forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka 6 kg m^2 . Határozza meg, mekkora lesz a merev testre ható forgatónyomaték, ha a forgástengelyre merőleges síkban, a forgástengelytől 45 cm távolságban 3 N erő hat.

Megoldás

$$M = d \cdot F = 0,45 \cdot 3 = 1,3500 \text{ Nm} .$$

4.5.28. Feladat

Egy merev test forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka $4,6 \text{ kg m}^2$. Határozza meg, mekkora gyorsulással kezd el a test forogni, ha a forgástengelyre merőleges síkban a tengelytől 38 cm távolságban 4 N erő hat.

Megoldás

$$M = d \cdot F = \Theta_F \varepsilon , \text{ ahonnan } \varepsilon = d \cdot F / \Theta_F = 0,38 \cdot 4 / 4,6 = 0,3304 \text{ rad/s} .$$

4.5.29. Feladat

Két, egy 320 g tömegű, és egy 480 g tömegű tömegpontok egy súlytalannak tekinthető 1,8 m sugarú tárcsa kerületén helyezkednek el. A tárcsa középpontja körül egyenletes sebességgel forog. Határozza meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás

$$\Theta = m_1 r_0^2 + m_2 r_0^2 = 0,8 \cdot 1,8^2 = 2,5920 \text{ kg m}^2 .$$

4.5.30. Feladat

Egy 3,2 m sugarú tárcsa kerületén, a tárcsa síkjában 5,2 N nagyságú erőpár hat. Határozza meg a tárcsára ható forgatónyomatékot.

Megoldás

$$M = 2r_0 F = 2 \cdot 3,2 \cdot 5,2 = 33,2800 \text{ Nm} .$$

5. MEREV TESTEK KÉNYSZERMOZGÁSA

Merev testek kényszermozgása egy külső erő hatására jön létre. Ez a külső, kényszerítő erő lehet *két test ütközése* során a testek impulzus-megváltozásából származó erőhatás, amely a testek ütközésének vizsgálatához vezet.

A test mozgását előidéző külső kényszererő *mechanikai hullámmozgást* is előidézhet, ekkor az anyagi részecskék kimozdulásával a mechanikai hullámmozgás energiát, impulzust szállít. A mechanikai hullámmozgás longitudinális és transzverzális típusú lehet aszerint, hogy a hullámmozgás során az anyagi részecskék kimozdulása a hullám terjedésének irányába vagy arra merőlegesen történik. *Longitudinális hullámmozgás*nál az anyagi részecskék kimozdulása a hullám terjedési irányával párhuzamosan történik. Ilyen pl. a rugómozgás, a hanghullámok terjedése, a harmonikus rezgőmozgás. *Transzverzális hullámmozgás* esetén az anyagi részecskék kimozdulása a terjedés irányára merőlegesen történik. Ilyen mozgás, pl. a kötélben haladó hullámmozgás és az elektromágneses hullámok.

5.1. Két test ütközése

Két test ütközésének vizsgálatára a következő feltételek mellett kerül sor.

- Az ütközés igen rövid idő alatt játszódik le, azaz ha a t az ütközés előtti, míg a $t + \Delta t$ az ütközés utáni időpillanatot jelöli, az ütközés lejátszódásához tartozó Δt időintervallum nullának tekinthető, azaz $\Delta t \rightarrow 0$;
- Az ütközés pillanatában a tömegek helyzetüket nem változtatják meg;
- Az ütközés elemzésénél csak a két test kölcsönhatásának vizsgálatára kerül sor, a külső erők hatása figyelmen kívül marad.

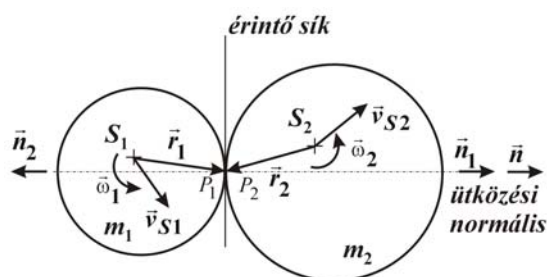
Feltételezve, hogy az ütközés pillanatában a két test P_1 , ill. P_2 pontjai érintkeznek egymással (*5.1. ábra*), a két érintkezési ponthoz tartozó érintő sík az *ütközés simuló síkja*, az erre merőleges vektor az *ütközés normálisa*, amely valamelyik irányban felvehető, pl. az ábrán $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$.

Ha a testek S_1 , S_2 súlypontjainak ütközés előtti sebessége ill. szögsebessége \vec{v}_{S1} , \vec{v}_{S2} , ill. $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, továbbá a súlypontoknak az ütközési pontoktól való távolsága rendre \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , az ütközés előtti pillanatban a P_1 , P_2 pontok sebessége

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{1S} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{2S} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2,\end{aligned}\tag{5.1}$$

azaz az ütközés előtt a testek mozgásmennyisége, az impulzusa (lendülete) és impulzusnyomatéka (perdülete) ismert,

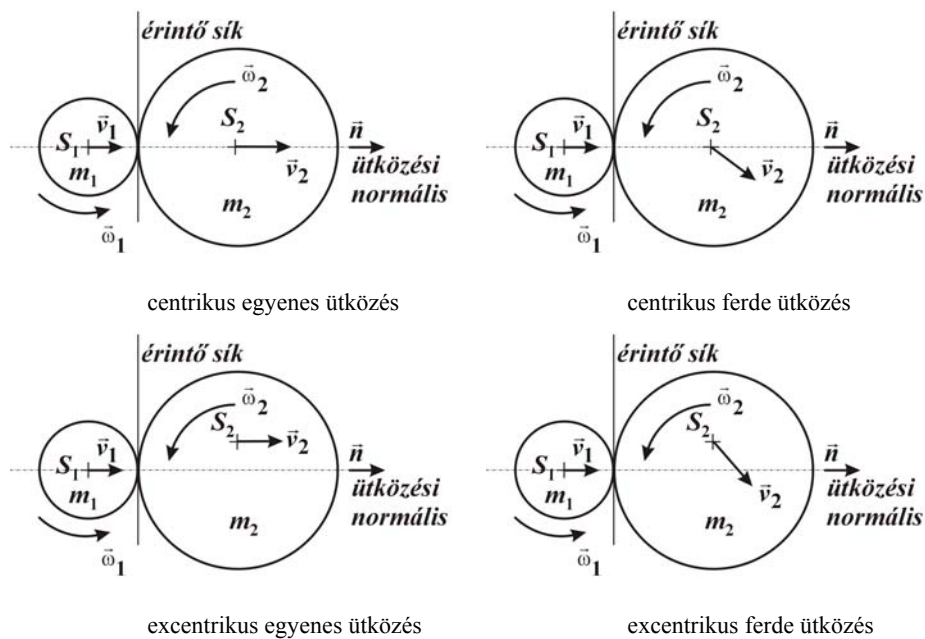
$$\vec{I}_i = m_i \vec{v}_{S_i}, \quad \vec{\Pi}_{P_i} = \vec{r}_{S_i} \times \vec{I}_i + \vec{\Pi}_{S_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$



5.1. ábra. Az ütközési normális és érintő sík

5.1.1. Az ütközések osztályozása

Két test ütközése centrikus és excentrikus, egyenes, ill. ferde ütközés lehet, ahogy az 5.2. ábrán látható.



5.2. ábra. Az ütközési típusok

- *Egyenes az ütközés*, ha az ütközés pillanatában a két test súlypontjának sebessége párhuzamos az ütközési normálissal;
- *Ferde az ütközés*, ha az ütközés pillanatában a két test súlypontjának sebessége nem párhuzamos az ütközési normálissal;
- Az ütközés *centrikus*, ha az ütközési normális átmegy a testek súlypontján;
- Az ütközés *excentrikus*, ha az ütközési normális nem megy át a testek súlypontján.

Az ütközés dinamikai szempontból való osztályozás szerint lehet rugalmas és rugalmatlan.

(a) *Két test ütközése rugalmas*, ha az ütközési pontra a két test mozgásmennyisége, az impulzusa

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^2 \vec{I}_i = \sum_{i=1}^2 m_i \vec{v}_{Si}, \quad (5.3)$$

és a perdülete,

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^2 \vec{H}_{P_i} = \sum_{i=1}^2 (\vec{r}_{Si} \times \vec{I}_i + \vec{H}_{Si}) = \sum_{i=1}^2 (\vec{r}_{Si} \times \vec{I}_i + \vec{\omega}_i \Theta_{Si}), \quad (5.4)$$

valamint a mozgási energiája

$$W_m = \sum_{i=1}^2 W_{mi} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \vec{v}_{Si} \cdot \vec{I}_i + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i \cdot \vec{H}_{Si} \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 \Theta_{Si} \right), \quad (5.5)$$

az ütközés előtti t és az ütközés utáni $t + \Delta t$ időpillanatokban nem változik,

$$\begin{aligned} \vec{I}(t) - \vec{I}(t + \Delta t) &= 0, & \vec{I}(t) &= \vec{I}(t + \Delta t), \\ \vec{H}(t) - \vec{H}(t + \Delta t) &= 0, & \vec{H}(t) &= \vec{H}(t + \Delta t), \\ W_m(t) - W_m(t + \Delta t) &= 0, & W_m(t) &= W_m(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (5.6)$$

(b) *Két test ütközése rugalmatlan*, ha az ütközési pontra a két test mozgásmennyisége az ütközés során nem változik, az ütközés előtti mozgási energiája azonban veszteség formájában deformációs munkává, hővé, hangenergiává alakul,

$$\begin{aligned} \vec{I}(t) - \vec{I}(t + \Delta t) &= 0, & \vec{I}(t) &= \vec{I}(t + \Delta t), \\ \vec{H}(t) - \vec{H}(t + \Delta t) &= 0, & \vec{H}(t) &= \vec{H}(t + \Delta t), \\ W_m(t) - W_m(t + \Delta t) &\neq 0, & W_m(t) &\neq W_m(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.2. Két test centrikus ütközése

Centrikus ütközések esetén az ütközési normális hatásvonala átmegy a két test súlypontján, így a testek perdülete nem változik, egyrészt mivel az ütközési pont és a súlypont közti \vec{r}_i , $i = 1, 2$ vektorok és az ütközés során fellépő \vec{I}_i , $i = 1, 2$ impulzusok párhuzamosak, így vektori szorzatuk nulla,

$$\vec{r}_{Si} \times \vec{I}_i = \mathbf{0}, \quad (5.8)$$

másrészt a testek súlypontjaira vonatkozó forgatónyomatékból a $\Delta t \rightarrow 0$ időintervallum alatt keletkezett perdület nulla,

$$\vec{H}_{Si}(t + \Delta t) - \vec{H}_{Si}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} \vec{M}_S(\tau) d\tau = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

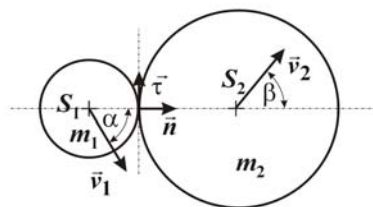
Tehát centrikus ütközés esetén a testek impulzus összege és mozgási energia összege nem változik, miközben az ütközés előtti és utáni sebességek megváltoznak,

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^2 m_i \vec{v}_{Si} = \text{áll}, \quad W_m = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 = \text{áll}. \quad (5.10)$$

5.2.1. Centrikus, rugalmatlan ütközés

Minthogy rugalmatlan ütközés esetén a mozgási energia nem marad állandó, így az impulzus-megmaradási tétel figyelembevételével a két test mozgásmennyisége, jelen esetben az impulzusok összege az ütközés során nem változik.

(a) Az 5.3. ábrán látható centrikus rugalmatlan ferde ütközés során legyen az ütközés előtt az m_1 tömeg sebessége \vec{v}_1 , az m_2 tömeg sebessége \vec{v}_2 , az ütközés után a két tömeg közös sebessége \vec{u} .



5.3. ábra. Két test sebessége centrikus rugalmatlan ferde ütközés előtt

Az impulzustétel alkalmazásával

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \quad (5.11)$$

az ütközés utáni sebesség

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.12)$$

A számítások elvégzéséhez a sebességek felbonthatók az ütközési normális és a simuló síkba eső komponensekre a felvett koordináta irányoknak megfelelően,

$$\begin{aligned} v_{1n} &= v_1 \cos \alpha, & v_{1\tau} &= -v_1 \sin \alpha, \\ v_{2n} &= v_2 \cos \beta, & v_{2\tau} &= v_2 \sin \beta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

amelyekkel az ütközés utáni közös sebesség komponensei

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta}{m_1 + m_2}, \\ u_\tau &= \frac{m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1 v_1 \sin \alpha + m_2 v_2 \sin \beta}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

és ezzel az ütközés utáni sebesség nagysága és az ütközési normálishoz való hajlásszöge

$$u = \sqrt{u_n^2 + u_\tau^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{u_\tau}{u_n} \quad (5.15)$$

meghatározható.

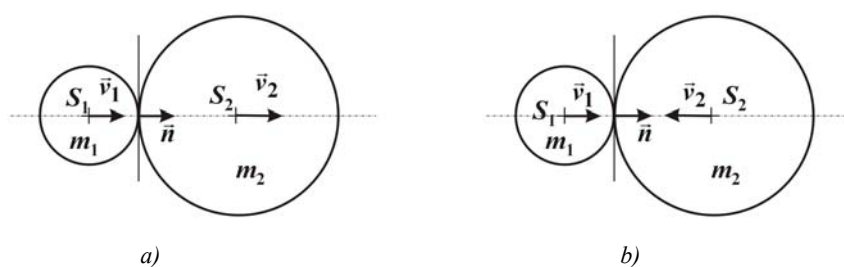
(b) Az 5.4.a ábrán látható *centrikus, rugalmatlan egyenes* ütközés esetén, minthogy a két tömeg azonos irányba halad, sebességeik azonos irányba mutatnak, az egyik tömeg utoléri a másikat és centrikus, egyenes, rugalmatlan ütközés után közös sebességgel folytatják az utat,

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (5.16)$$

amíg az 5.4.b ábrán látható egyenes ütközés esetén, minthogy a két tömeg egymással szembe halad, sebességeik ellenkező irányba mutatnak, a centrikus, egyenes,

rugalmatlan ütközés során az ütközés előtti impulzusok ellenkező előjelűek. Az ütközés utáni sebesség irányát előre feltételezve, ha az ütközés utáni sebességre pozitív érték adódik, akkor a felvett irányban haladnak, ha negatív érték adódik, akkor a felvett iránnyal ellenkező irányú lesz a közös sebesség

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.17)$$



5.4. ábra. Rugalmatlan, centrikus, egyenes ütközések

5.2.2. Centrikus, rugalmas ütközés

Centrikus rugalmas ütközéskor a tömegek impulzusa mellett a kinetikai energiák összege is változatlan, azaz ütközés előtt és után a tömegek impulzus összege és kinetikai energiájának összege változatlan.

Az 5.5. ábrán látható *centrikus, rugalmas ütközés* esetén legyen az ütközés előtt az m_1 tömeg sebessége \vec{v}_1 , az m_2 tömeg sebessége \vec{v}_2 , az ütközés után a két tömeg sebessége \vec{u}_1 , ill. \vec{u}_2 .

Az impulzusokra és kinetikus energiákra vonatkozó egyenletek a következő alakban adhatók meg,

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \\ \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 \vec{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_2^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Mindkét oldalt a tömegek szerint rendezve,

$$\begin{aligned} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) &= m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1 (\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2) &= m_2 (\vec{u}_2^2 - \vec{v}_2^2), \end{aligned} \quad (5.19)$$

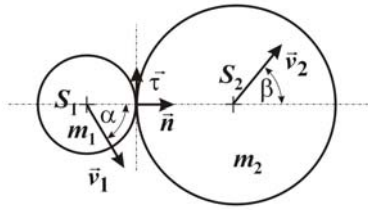
és a második egyenletet elosztva az elsővel és figyelembe véve a nevezetes szorzatokra vonatkozó összefüggéseket

$$\frac{(\bar{v}_1^2 - \bar{u}_1^2)}{(\bar{v}_1 - \bar{u}_1)} = \frac{(\bar{u}_2^2 - \bar{v}_2^2)}{(\bar{u}_2 - \bar{v}_2)}, \quad (5.20)$$

a következő két lineáris egyenlet adódik

$$\begin{aligned} m_1 (\bar{v}_1 - \bar{u}_1) &= m_2 (\bar{u}_2 - \bar{v}_2), \\ (\bar{v}_1 + \bar{u}_1) &= (\bar{u}_2 + \bar{v}_2), \end{aligned} \quad (5.21)$$

ahonnan a két ismeretlen sebesség meghatározható.



5.5. ábra. Rugalmas, centrikus ferde ütközés

(a) Ha a *centrikus rugalmas ütközés ferde típusú*, azaz a súlypontok sebességeinek az 5.5. ábrán látható módon, érintő sík irányú komponense is van, akkor az (5.21) egyenletben a sebességek felbonthatók az ütközési normális és az érintősík irányú komponensekre,

$$\begin{aligned} v_{1n} &= v_1 \cos \alpha, & v_{1\tau} &= -v_1 \sin \alpha, \\ v_{2n} &= v_2 \cos \beta, & v_{2\tau} &= v_2 \sin \beta, \end{aligned} \quad (5.22)$$

és a komponensekre vonatkozó egyenletekből határozhatók meg az ütközés utáni sebesség komponensek

$$\left. \begin{aligned} m_1 (v_{1n} - u_{1n}) &= m_2 (u_{2n} - v_{2n}), \\ (v_{1n} + u_{1n}) &= (u_{2n} + v_{2n}), \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} m_1 (v_{1\tau} - u_{1\tau}) &= m_2 (u_{2\tau} - v_{2\tau}), \\ (v_{1\tau} + u_{1\tau}) &= (u_{2\tau} + v_{2\tau}), \end{aligned} \right. \quad (5.23)$$

ahonnan az egyes tömegek ütközés utáni sebessége és az ütközési normálistól való eltérés iránya a következő

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sqrt{u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2}, & \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}}, \\
 u_2 &= \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2\tau}^2}, & \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

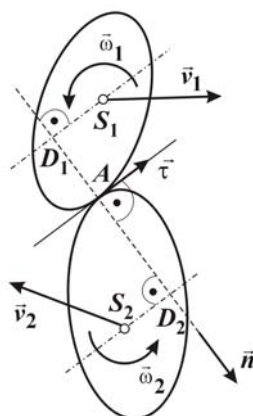
(b) Ha a *centrikus rugalmas ütközés egyenes típusú*, azaz a súlypontok sebességeinek csak normális irányú komponense van, az (5.21) egyenletből közvetlenül meghatározhatók az ütközési normális irányú sebesség komponensek

$$\begin{aligned}
 m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2), \\
 (v_1 + u_1) &= (u_2 + v_2).
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

Az ütközés utáni sebességek irányát előre feltételezve, ha az ütközés utáni sebességekre pozitív érték adódik, akkor a felvett irányban haladnak a tömegek, ha negatív érték adódik, akkor a felvett iránnyal ellenkező irányú lesz a sebesség.

5.3. Két test excentrikus ütközése

Excentrikus ütközés esetén a ütközési normális nem megy át a tömegek súlypontjain, ahogy az 5.6. ábrán látható.



5.6. ábra. Két test excentrikus ütközése

5.3.1. Excentrikus ütközés utáni sebességek meghatározása

A kérdéskör vizsgálatához csak az egyik, az 5.7. ábrán látható 1. számú testet tekintve, azt a 2. számú testtel való ütközés miatt az A pontban az ütközés normálisa irányú \vec{I}_A impulzus éri.

Legyen a súlypont ütközés előtti sebessége és szögsebessége \vec{v}_S , $\vec{\omega}$, a súlypont ütközés utáni sebessége és szögsebessége \vec{u}_S , $\vec{\Omega}$. Az ütközési A pontban a testet \vec{I}_A impulzus éri, amely hatására rugalmatlan ütközéskor megváltozik a test impulzusa és perdülete.

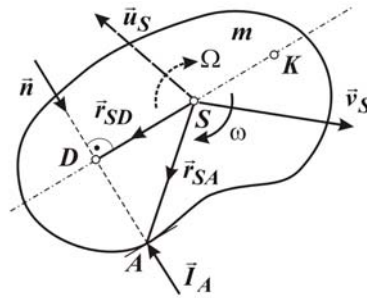
Az ütközés előtti és utáni impulzusok egyenlőségéből

$$\vec{I}_A + m\vec{v}_S = m\vec{u}_S, \quad (5.26)$$

és az ütközés előtti és utáni perdületek egyenlőségéből

$$\vec{\Pi}_A = \vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A + \vec{\omega} \Theta_S = \vec{\Omega} \Theta_S, \quad (5.27)$$

a súlypont ütközés utáni \vec{u}_S sebessége és $\vec{\Omega}$ szögsebessége meghatározható, amely valójában, ha derékszögű koordináta komponensekre bontjuk, komponensenként egy-egy egyenletet eredményez.



5.7. ábra. Excentrikus ütközés modellezése

5.3.2. Excentrikus ütközés visszavezetése centrikus ütközésre

Bár bonyolultabbnak látszik, a testet a D ütközési talppontban (5.7. ábra) egy redukált m_D tömeggel helyettesítve a fenti feladat a jól ismert centrális ütközésekre visszavezethető.

Az \vec{I}_A impulzus hatására megváltozik a test súlypontjának a sebessége és szögsebessége

$$\begin{aligned} \vec{I}_A &= m\vec{u}_S - m\vec{v}_S, & \vec{u}_S - \vec{v}_S &= \frac{\vec{I}_A}{m}, \\ \vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A &= \Theta_S \vec{\Omega} - \Theta_S \vec{\omega}, & \vec{\Omega} - \vec{\omega} &= \frac{\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A}{\Theta_S}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Az ütközési talppont sebessége ütközés előtt és után a következő alakban adható meg

$$\begin{aligned}\vec{v}_D &= \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SD}, \\ \vec{u}_D &= \vec{u}_S + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{SD},\end{aligned}\quad (5.29)$$

ahonnan az ütközési talppont sebesség változása

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \vec{u}_S - \vec{v}_S + (\vec{\Omega} - \vec{\omega}) \times \vec{r}_{SD}. \quad (5.30)$$

Az (5.28) összefüggés felhasználásával a talpponti sebességváltozás

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \frac{\vec{I}_A}{m} + \frac{1}{\Theta_S} (\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A) \times \vec{r}_{SD}. \quad (5.31)$$

Felhasználva azt a tényt, hogy a vektori szorzatok sorrendjének cseréje előjelváltást eredményez, a fenti kifejezés a következő alakban is előállítható

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \frac{\vec{I}_A}{m} - \frac{1}{\Theta_S} \vec{r}_{SD} \times (\vec{r}_{SA} \times \vec{I}_A), \quad (5.32)$$

és alkalmazva a többszörös vektori szorzatok kiértékelésre vonatkozó (2.95) összefüggést, az a következő összefüggésre vezet

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \frac{\vec{I}_A}{m} - \frac{1}{\Theta_S} (\vec{r}_{SD} \cdot \vec{I}_A) \cdot \vec{r}_{SA} + \frac{1}{\Theta_S} (\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}_{SD}) \cdot \vec{I}_A. \quad (5.33)$$

Figyelembe véve, hogy \vec{r}_{SD} merőleges az A pontban fellépő \vec{I}_A impulzus hatásvonalára, így az előző kifejezés jobboldalán álló második tag nulla, $\vec{r}_{SD} \cdot \vec{I}_A \equiv 0$, továbbá alkalmazva a két vektor skaláris szorzatára vonatkozó kiértékelési szabályt, amely szerint $\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}_{SD} = r_{SD} \cdot r_{SA} \cdot \cos \varphi_{DSA}$, azaz $r_{SA} \cdot \cos \varphi_{DSA}$ az r_{SA} vektornak a r_{SD} vektorra eső vetülete, azaz maga a r_{SD} távolság, és így

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \left(\frac{1}{m} + \frac{r_{SD}^2}{\Theta_S} \right) \vec{I}_A, \quad (5.34)$$

amely az \vec{I}_A impulzus hatásvonalába eső D pontba redukált tömeggel a talpponti sebességváltozás

$$\vec{u}_D - \vec{v}_D = \frac{\vec{I}_A}{m_D}, \quad (5.35)$$

amely egy centrális ütközési modellnek felel meg, ahol a talppontra, mint az ütközési normális hatásvonalába eső redukált tömegközéppontra a redukált tömeg

$$\frac{1}{m_D} = \frac{1}{m} + \frac{r_{SD}^2}{\Theta_S}. \quad (5.36)$$

Az m_D redukált tömeget a megfelelő, D pontba helyezve, a centrális ütközés szabályai szerint lehet eljárni.

5.3.3. Két excentrikusan ütköző test

Az 5.6. ábrán látható, excentrikusan ütköző testek m_{D1} , m_{D2} redukált tömegeit

$$\frac{1}{m_{D1}} = \frac{1}{m_1} + \frac{r_{S1D1}^2}{\Theta_{S1}}, \quad \frac{1}{m_{D2}} = \frac{1}{m_2} + \frac{r_{S2D2}^2}{\Theta_{S2}} \quad (5.37)$$

a D_1 , D_2 talppontokban helyezve, a centrális ütközés szabályai szerint lehet eljárni. Az egyes testekre az A pontban az oda-vissza ható erőimpulzusokkal a centrális ütközésnél bevezetett összefüggések alkalmazhatók

$$m_{D1}\vec{v}_{D1} + m_{D2}\vec{v}_{D2} = m_{D1}\vec{u}_{D1} + m_{D2}\vec{u}_{D2}. \quad (5.38)$$

Ha az ütközés rugalmas, az impulzus-megmaradási tétel mellett az energia-megmaradási tételt is figyelembe kell venni,

$$\frac{1}{2}m_{D1}\vec{v}_{D1}^2 + \frac{1}{2}m_{D2}\vec{v}_{D2}^2 = \frac{1}{2}m_{D1}\vec{u}_{D1}^2 + \frac{1}{2}m_{D2}\vec{u}_{D2}^2. \quad (5.39)$$

A két egyenlet rendezésével

$$\begin{aligned} m_{D1}(\vec{v}_{D1} - \vec{u}_{D1}) &= m_{D2}(\vec{u}_{D2} - \vec{v}_{D2}), \\ m_{D1}(\vec{v}_{D1}^2 - \vec{u}_{D1}^2) &= m_{D2}(\vec{u}_{D2}^2 - \vec{v}_{D2}^2), \end{aligned} \quad (5.40)$$

a második egyenletet elosztva az elsővel

$$(\vec{v}_{D1} + \vec{u}_{D1}) = (\vec{u}_{D2} + \vec{v}_{D2}), \quad (5.41)$$

rugalmas ütközéskor az ütközési normális irányában elhelyezett redukált tömegek ismeretében a sebességek a centrális ütközés szabályai szerint meghatározhatók,

$$m_{D1}(\vec{v}_{D1} - \vec{u}_{D1}) = m_{D2}(\vec{u}_{D2} - \vec{v}_{D2}), \quad (5.42)$$

$$(\vec{v}_{D1} + \vec{u}_{D1}) = (\vec{u}_{D2} + \vec{v}_{D2}).$$

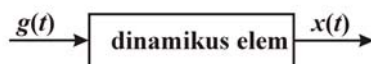
5.4. Szabad rezgések, longitudinális hullámmozgás

5.4.1. Harmonikus rezgőmozgás, matematikai bevezető

Informatikai szempontból az 5.8. ábrán látható dinamikus elem $g(t)$ gerjesztésre adott válasza $x(t)$. Az $x(t)$ elmozdulásra, mint kimenő változóra vonatkozó mozgásegyenlet egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet, azaz a dinamikus elem rendszeregyenlete

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + k_0x(t) = g(t), \quad (5.43)$$

ahol k_1 , k_0 konstansok.



5.8. ábra. Dinamikus elem gerjesztése, válasza

A fenti differenciálegyenlet klasszikus megoldási módszere az összetevőkre bontással történik, azaz $x(t)$ elmozdulás egy $x_f(t)$ szabad válasz és egy $x_g(t)$ gerjesztett válasz összegeként határozható meg

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t). \quad (5.44)$$

Az $x_f(t)$ szabad válasz a homogén differenciálegyenletet, a *magára hagyott rendszer* rendszeregyenletét elégíti ki, $g(t) = 0$,

$$\frac{d^2x_f(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx_f(t)}{dt} + k_0 x_f(t) = 0. \quad (5.45)$$

A szabad választ exponenciális alakban keresve

$$x_f(t) = Me^{\lambda t}, \quad (5.46)$$

azt a homogén differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$\lambda^2 Me^{\lambda t} + k_1 \lambda Me^{\lambda t} + k_0 Me^{\lambda t} = (\lambda^2 + k_1 \lambda + k_0) Me^{\lambda t} = 0, \quad (5.47)$$

a triviálistól eltérő megoldás a zárójelben lévő

$$(\lambda^2 + k_1 \lambda + k_0) = 0, \quad (5.48)$$

karakterisztikus polinomot kielégítő λ_1, λ_2 *sajátértékek* meghatározásával kapható meg

$$x_f(t) = M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.49)$$

Az $x_g(t)$ gerjesztett válasz kielégíti a teljes, inhomogén rendszeregyenletet,

$$\frac{d^2x_g(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx_g(t)}{dt} + k_0 x_g(t) = g(t). \quad (5.50)$$

Lineáris rendszerben a $x_g(t)$ gerjesztett válasz hasonlít a $g(t)$ gerjesztésre, ezért a gerjesztett választ a *próbafüggvény* módszerrel szokás keresni. A dinamikus elem mozgásegyenletének a teljes válasza

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + x_g(t), \quad (5.51)$$

ahol az M_1, M_2 konstansok a *kezdeti feltételekből* határozhatók meg. A dinamikus elem kezdeti, $t = 0$ időpillanatbeli elmozdulása legyen x_0

$$x(t=0) = x_0 = M_1 + M_2 + x_g(t=0), \quad (5.52)$$

amíg a dinamikus elem kezdeti, $t = 0$ időpillanatbeli sebessége legyen v_0 ,

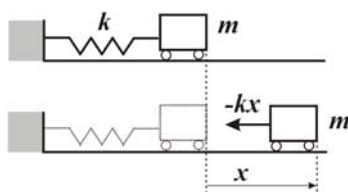
$$\dot{x}(t=0) = v_0 = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dot{x}_g(t=0). \quad (5.53)$$

Az utolsó két (5.52), (5.53) egyenletekből az M_1 , M_2 konstansok előállíthatók, és ezzel a dinamikus elem mozgástörvényét kielégítő $x(t)$ elmozdulás értéke meghatározható.

5.4.2. Csillapítatlan szabad rezgés

Az 5.9. ábrán látható, egyik végén rögzített, elhanyagolható tömegű, k rugóállandóval rendelkező rugó másik végére m tömeget rögzítve, azt nyugalmi helyzetéből x távolságra kitérítve, majd elengedve, az m tömeg a rugóerő hatására $-kx(t) = m\ddot{x}(t)$ rezgőmozgásba kezd, amely mozgásegyenlete egy hiányos, másodrendű, homogén differenciálegyenlet, a mozgó rendszer rendszeregyenlete

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (5.54)$$



5.9. ábra. Csillapítatlan szabad rezgés

Mínt hogy a rendszer gerjesztése nulla, $g(t) = 0$, nincs gerjesztett válasz, $x_g(t) = 0$, a fenti rendszeregyenlet $x(t)$ megoldása az $x_f(t)$ szabad válasz lesz

$$x(t) = x_f(t). \quad (5.55)$$

A szabad válasz $x_f(t) = de^{\lambda t}$ általános alakját a mozgásegyenletbe helyettesítve,

$$m\lambda^2 de^{\lambda t} + k de^{\lambda t} = (m\lambda^2 + k) de^{\lambda t} = 0, \quad (5.56)$$

a triviálisól eltérő megoldáshoz tartozó karakterisztikus polinomból a komplex konjugált sajátértékek

$$(m\lambda^2 + k) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega_0, \quad (5.57)$$

ahol $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a rezgőmozgás *saját-körfrekvenciája*. A kapott sajátértékeket figyelembe véve a rugó végére rögzített m tömeg $x(t)$ kitérése

$$x(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t}, \quad (5.58)$$

ahol az exponenciális kifejezést kiértékelve

$$x(t) = d_1 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + d_2 (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t), \quad (5.59)$$

és rendezve

$$x(t) = (d_1 + d_2) \cos \omega_0 t + j(d_1 - d_2) \sin \omega_0 t, \quad (5.60)$$

a rugó végére rögzített m tömeg harmonikus rezgőmozgásba kezd.

A d_1 , d_2 konstansok a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Feltéve, hogy a rugó kitérése a $t = 0$ időpillanatban $x(t = 0) = x_0$, és azt elengedve a rugóerő hatására $\dot{x}(t = 0) = v(t = 0) = v_0$ kezdősebességgel indul vissza az m tömeg,

$$x(t = 0) = x_0 = (d_1 + d_2), \quad \dot{x}(t = 0) = v_0 = j\omega_0(d_1 - d_2), \quad (5.61)$$

ahonnan a két konstans összege és különbsége

$$d_1 + d_2 = x_0, \quad d_1 - d_2 = \frac{v_0}{j\omega_0}. \quad (5.62)$$

A kapott kifejezéseket (5.60) összefüggésbe helyettesítve az m tömeg kitérése az idő függvényében a következő lesz

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (5.63)$$

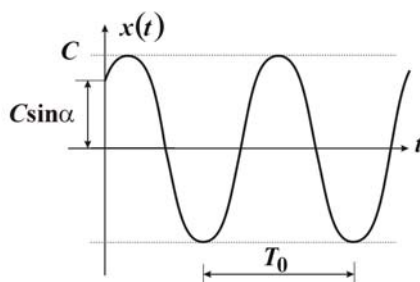
amely egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (5.64)$$

ahol a harmonikus rezgőmozgás amplitúdója és a kezdőfázisa, valamint periódusideje az 5.10. ábrán látható

$$C = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}, \quad \alpha = \arctg(v_0/x_0\omega_0), \quad T_0 = 2\pi/\omega_0. \quad (5.65)$$

Ekkor a k rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömeg a rugó nyugalmi állapota körül C amplitúdóval csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást végez.



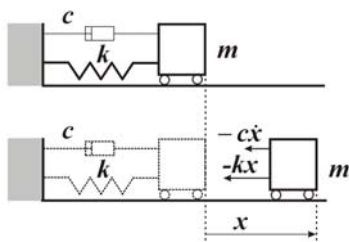
5.10. ábra. A csillapítatlan szabad rezgés kitérése

5.4.3. Csillapított szabad rezgés

Az 5.11. ábrán látható elrendezésben a rugó végére rögzített m tömeget nyugalmi helyzetéből x értékkel kitérítve az m tömegre a k rugóállandójú rugó rugóereje és a c csillapítási tényezőjű, a sebességgel arányos csillapító erő hat, $-kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$, ahonnan az m tömeg mozgásegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (5.66)$$

egy csillapított szabad rezgés rendszeregyenlete, amely egy másodrendű, homogén differenciálegyenlet.



5.11. ábra. Csillapított szabad rezgés

Mint ahogy a $g(t)$ gerjesztés nulla, $x_g(t) = 0$, a mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz lesz, amely általános megoldását

$$x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}, \quad (5.67)$$

az (5.66) mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinomból a sajátértékek,

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (5.68)$$

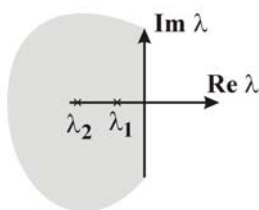
A harmonikus rezgőmozgást végző test mozgásának vizsgálatához a sajátértékeket kell részletesen elemezni a következők szerint.

(a) *Nagy csillapítású rendszer* esetén a sajátértékek (5.68) kifejezésében a második tag, a diszkrimináns pozitív,

$$r = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} > 0, \quad \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}, \quad (5.69)$$

a csillapítási tényező $c > 2\sqrt{km}$. Ekkor a két sajátérték negatív valós érték lesz, ahogy az 5.12. ábrán látható módon a λ sajátértékek komplex számsíkján mindkét sajátérték a bal félsíkon helyezkedik el,

$$\lambda_1 = -\rho + r = -\rho_1, \quad \lambda_2 = -\rho - r = -\rho_2, \quad \rho = \frac{c}{2m}. \quad (5.70)$$



5.12. ábra. Nagy csillapítású rendszer sajátértékei

A sajátértékek ismeretében a harmonikus mozgást végző test kitérése

$$x(t) = d_1 e^{-\rho_1 t} + d_2 e^{-\rho_2 t}. \quad (5.71)$$

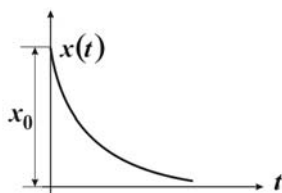
A d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg. Feltéve, hogy ismert a rugó $t = 0$ pillanatbeli x_0 kitérése és v_0 visszatérési kezdősebessége

$$t = 0, \quad x(t=0) = x_0 = d_1 + d_2, \quad \dot{x}(t=0) = v_0 = -\rho_1 d_1 - \rho_2 d_2, \quad (5.72)$$

a d_1, d_2 állandók a következő valós értékű állandók lesznek

$$d_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\rho_2 x_0 + v_0}{\rho_2 - \rho_1}, \quad d_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\rho_1 x_0 + v_0}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (5.73)$$

ahonnan a nagy csillapítású rendszer kitérését két monoton csökkenő, exponenciális görbe összege írja le. Ekkor nincs rezgés, a kezdeti kitérés után a d_1, d_2 állandók értékének megfelelően a kitérés, a lengéscsillapító nagy értékű c csillapítási tényezőjének megfelelően, megszűnik, és a rendszer visszatér eredeti, nyugalmi állapotába, ahogy az 5.13. ábrán látható.

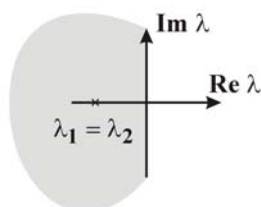


5.13. ábra. Nagy csillapítású rendszer kitérése

(b) Kritikus csillapítású rendszer esetén a $\lambda_i, i=1,2$ sajátértékek (5.68) kifejezésében a diszkrimináns éppen nulla,

$$r = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0, \quad \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}, \quad (5.74)$$

a csillapítási tényező $c = 2\sqrt{km}$. Ekkor a két sajátérték az 5.14. ábrán látható módon azonos nagyságú, negatív valós értékű lesz,



5.14. ábra. Kritikus csillapítású rendszer sajátértékei

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\rho. \quad (5.75)$$

Többszörös sajátértékek esetén, a homogén mozgásegyenlet $g(t)=0$, $x_g(t)=0$, szabad válaszána általános megoldása exponenciálisan csökkenő polinom alakjában állítható elő,

$$x(t) = x_f(t) = e^{-\rho t}(d_1 + d_2 t), \quad (5.76)$$

ahol a d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg. Feltéve, hogy a rugó $t=0$ pillanatbeli, kezdeti kitérése x_0 és visszatérési kezdeti sebessége v_0 ,

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = d_1, \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = [-\rho(d_1 + d_2 t) + d_2]e^{-\rho t}|_{t=0} = -\rho d_1 + d_2, \end{aligned} \quad (5.77)$$

ahonnan $d_1 = x_0$, és $d_2 = v_0 + \rho d_1 = v_0 + \rho x_0$, azaz d_1 , d_2 állandók valós értékűek, nem lép fel rezgés, sőt, mivel az exponenciális tényező gyorsabban csökken, mint ahogy t nő, a megoldás éppen egy aperiodikus határesetnek megfelelően lassan csökkenő, a nyugalmi állapothoz közelítő kitérés áll elő, ahogy az 5.15. ábrán látható.



5.15. ábra. Kritikus csillapítású rendszer aperiodikus kitérése

(c) *Kiss csillapítású rendszer* esetén a λ_i , $i=1,2$ sajátértékek (5.68) kifejezésében a diszkrimináns negatív értékű,

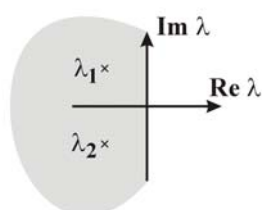
$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0, \quad \left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}, \quad (5.78)$$

a csillapítási tényező $c < 2\sqrt{km}$. Ekkor a két sajátérték az 5.16. ábrán látható módon komplex konjugált párt alkotnak,

$$\lambda_1 = -\rho + j\omega_1, \quad \lambda_2 = -\rho - j\omega_1, \quad (5.79)$$

ahol ω_1 a csillapított rendszer saját körfrekvenciája

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}. \quad (5.80)$$



5.16. ábra. Kis csillapítású harmonikus szabadrezgés sajátértékei

Meg kell jegyezni, hogy a csillapított rendszer saját körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítás nélküli rendszeré, lengésideje pedig hosszabb, mint a csillapítatlan szabadrezgésé

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.81)$$

A mozgásegyenlet megoldása a komplex konjugált sajátértékekkel

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.82)$$

A fenti megoldást a kezdeti, $t=0$ pillanatbeli x_0 kitérés v_0 sebesség értékekhez illesztve

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = d_1 + d_2, \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \end{aligned} \quad (5.83)$$

a d_1, d_2 állandók egymás komplex konjugáltjai $\bar{d}_2 = \bar{d}_1^*$,

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 &= \frac{\lambda_2 x_0 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(-\rho - j\omega_1)x_0 - v_0}{(-\rho - j\omega_1) - (-\rho + j\omega_1)} = \frac{(-\rho - j\omega_1)x_0 - v_0}{-2j\omega_1}, \\ \bar{d}_2 &= \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(-\rho + j\omega_1)x_0 - v_0}{(-\rho + j\omega_1) - (-\rho - j\omega_1)} = \frac{(-\rho + j\omega_1)x_0 - v_0}{2j\omega_1},\end{aligned}\quad (5.84)$$

amelyek a komplex formalizmus segítségével exponenciális alakban is megadhatók

$$\bar{d}_1 = |d_1|e^{j\delta} \quad \bar{d}_2 = \bar{d}_1^* = |d_1|e^{-j\delta}, \quad (5.85)$$

ahol

$$|d_1| = \frac{\sqrt{(-\rho x_0 - v_0)^2 + (\omega_1 x_0)^2}}{2\omega_1}, \quad \delta = \arctg\left(\frac{-\omega_1 x_0}{-\rho x_0 - v_0}\right) + 90^\circ. \quad (5.86)$$

Ezzel a mozgásegyenlet megoldása, a rugó kitérése

$$x(t) = |d_1|e^{j\delta}e^{(-\rho + j\omega_1)t} + |d_1|e^{-j\delta}e^{(-\rho - j\omega_1)t}, \quad (5.87)$$

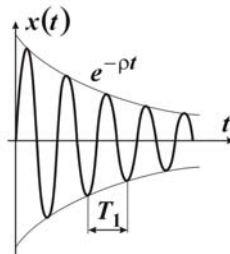
a közös tényezők kiemelése és némi rendezés után a következő lesz

$$x(t) = |d_1|e^{-\rho t} \frac{(e^{j(j\omega_1 t + \delta)} + e^{-j(j\omega_1 t + \delta)})}{2} = 2|d_1|e^{-\rho t} \cos(j\omega_1 t + \delta), \quad (5.88)$$

amely közvetlenül is felírható a komplex időfüggvényből a következő alakban

$$x(t) = 2 \operatorname{Re}\{ |d_1|e^{-\rho t} e^{j(j\omega_1 t + \delta)} \} = 2|d_1|e^{-\rho t} \cos(j\omega_1 t + \delta). \quad (5.89)$$

A kis csillapítású szabadrezgés kitérése 5.17. ábrán látható.

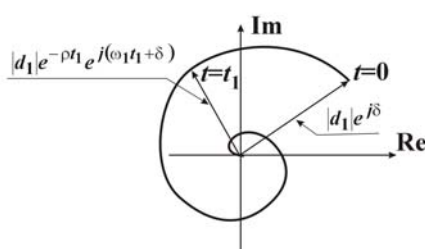


5.17. ábra. Kis csillapítású szabadrezgés kitérése

A kis csillapítású szabadrezgés

$$\bar{x}(t) = |d_1| e^{-\rho t} e^{j(\omega_1 t + \delta)} \quad (5.90)$$

komplex időfüggvényének változása a komplex számsíkon is ábrázolható, ahol az 5.18. ábrán látható módon az idő múlásával az amplitúdó csökken és a fáziseltolás nő.



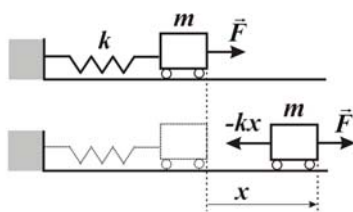
5.18. ábra. Kis csillapítású szabad rezgés komplex időfüggvényének (Nyquist) diagramja

5.5. Gerjesztett rezgések

5.5.1. Állandó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés

Az 5.19. ábrán látható rendszer egy gerjesztett rezgést ábrázol, ahol a rugó végére rögzített m tömeg x értékkel való kitérését az \vec{F} , időben állandó kényszererő segíti, míg a rugó $-kx$ visszatérítő ereje gátolja. Ezzel a csillapítatlan, gerjesztett rezgés mozgásegyenlete a következő lesz,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F. \quad (5.91)$$



5.19. ábra. Állandó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés

A mozgásegyenlet megoldása egy szabad és egy gerjesztett válasz összegéből áll

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t). \quad (5.92)$$

A szabad válasz továbbra is az (5.54) homogén rendszeregyenlet (5.58) megoldása az (5.57) komplex konjugált sajátértékekkel és ω_0 sajátrezgési körfrekvenciával,

$$x_f(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.93)$$

A lineáris mozgásegyenlet gerjesztett válasza hasonlít a gerjesztésre, és mivel a gerjesztés egy állandó erő, így a gerjesztett válasz is egy konstans, állandó érték lesz

$$x_g(t) = X_g. \quad (5.94)$$

Figyelembe véve, hogy a gerjesztett válasz idő szerinti első és második deriváltja nulla, $\dot{x}(t) \equiv 0$, $\ddot{x}(t) \equiv 0$, a mozgásegyenletbe helyettesítve a gerjesztett válasz a következő lesz,

$$m\ddot{x}_g(t) + kx_g(t) = F, \quad X_g = \frac{F}{k}. \quad (5.95)$$

A rendszer teljes válasza a két komponens összege, azaz

$$x_f(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t} + \frac{F}{k}. \quad (5.96)$$

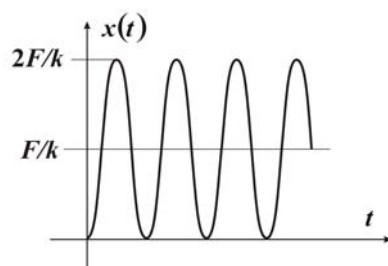
A d_1 , d_2 állandókat továbbra is a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Feltéve, hogy a $t = 0$ pillanatban a rugó $x(t=0) = 0$ kitérése és $\dot{x}(t=0) = v(t=0) = 0$ sebessége is nulla, azaz nyugalmi állapotban van,

$$\left. \begin{aligned} x(0) = 0 &= d_1 + d_2 + \frac{F}{k}, \\ v(0) = 0 &= j\omega_0(d_1 - d_2), \end{aligned} \right\} d_1 = d_2 = -\frac{F}{2k}, \quad (5.97)$$

ahonnan a rugó kitérésének időfüggvénye némi rendezés után

$$x_f(t) = -\frac{F}{2k} 2 \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + \frac{F}{k} = -\frac{F}{k} \cos \omega_0 t + \frac{F}{k} = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (5.98)$$

Tehát a csillapítatlan, állandó erővel gerjesztett rendszer válasza a 0 és $2F/k$ értékek között F/k állandó amplitúdójú harmonikus rezgés lesz, ahogy az 5.20. ábrán látható.

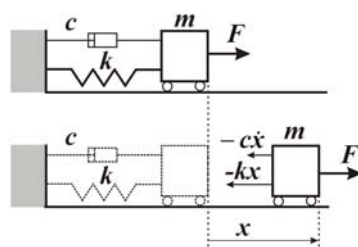


5.20. ábra. Csillapítatlan, állandó erővel gerjesztett harmonikus rezgőmozgás

5.5.2. Állandó erővel gerjesztett csillapított rezgés

Az 5.21 ábrán állandó erővel gerjesztett csillapított rezgőmozgás látható, ahol a k rugóállandójú rugó mozgásának kialakításában a végére rögzített m tömeg és a sebességgel arányos c csillapítási tényezőjű lengéscsillapító mellett az időben állandó F erő is hatással van. Így a mozgásegyenlet egy inhomogén másodrendű differenciálegyenlet

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F. \quad (5.99)$$



5.21. ábra. Állandó erővel gerjesztett csillapított rezgés

A mozgásegyenlet megoldása az $x_f(t)$ szabad és az $x_g(t)$ gerjesztett válaszok összessége

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t), \quad (5.100)$$

ahol a szabad válasz az

$$m\ddot{x}_f(t) + c\dot{x}_f(t) + kx_f(t) = 0 \quad (5.101)$$

homogén mozgásegyenletet kielégítő $x_f(t) = de^{\lambda t}$ általános alak. Kis csillapítást feltételezve, $c < 2\sqrt{km}$ a homogén mozgásegyenlet karakterisztikus polinomjához tartozó (5.79) sajátértékek komplex konjugált párt alkotnak,

$$\lambda_1 = -\rho + j\omega_1, \quad \lambda_2 = -\rho - j\omega_1, \quad \rho = \frac{c}{2m}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}, \quad (5.102)$$

és ezzel a szabad válasz (5.82) alakú lesz

$$x_f(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.103)$$

A lineáris rendszerben az időben állandó erőnek megfelelően a gerjesztett válasz is időben állandó lesz, $x_g(t) = X_g$, ahonnan a gerjesztett válasz nagysága

$$m\ddot{x}_g(t) + c\dot{x}_g(t) + kx_g(t) = F, \quad x_g(t) = X_g = \frac{F}{k}. \quad (5.104)$$

A kis csillapítású, állandó erővel történő gerjesztésű rugómozgás mozgásegyenletének teljes megoldása

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F}{k}. \quad (5.105)$$

A d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Feltéve, hogy a $t = 0$ pillanatban a rugó nyugalmi állapotban van, azaz mind a kitérése, mind a sebessége nulla,

$$x(t=0) = 0 = d_1 + d_2 + \frac{F}{k}, \quad v(t=0) = 0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \quad (5.106)$$

a két állandó egymás konjugáltjai lesznek,

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= -\frac{F}{k} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{F}{k} \frac{(-\rho - j\omega_1)}{-2j\omega_1} = -\frac{F}{2k} \left(1 - j \frac{\rho}{\omega_1}\right), \\ \bar{d}_2 &= \bar{d}_1^* = -\frac{F}{k} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{F}{k} \frac{(-\rho + j\omega_1)}{2j\omega_1} = -\frac{F}{2k} \left(1 + j \frac{\rho}{\omega_1}\right), \end{aligned} \quad (5.107)$$

amely exponenciális alakban is megadható,

$$\bar{d}_1 = -\frac{F}{2k} \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{j\delta}, \quad \delta = -\arctg\left(\frac{\rho}{\omega_1}\right),$$

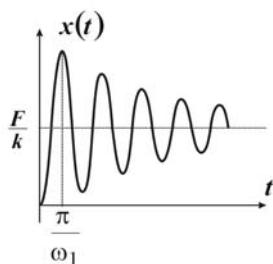
$$\bar{d}_2 = \bar{d}_1^* = -\frac{F}{2k} \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} e^{-j\delta}.$$
(5.108)

Tehát a kis csillapítású, állandó erővel gerjesztett harmonikus rezgőmozgás kezdeti feltételeket is kielégítő megoldása

$$x(t) = \frac{F}{k} - \frac{F}{2k} \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} \left(e^{j(\omega_1 t + \delta)} + e^{-j(\omega_1 t + \delta)} \right),$$
(5.109)

amely az F erő által keltett állandó, F/k nagyságú kitérés körül egy exponenciálisan csillapodó amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást eredményez, ahogy az 5.22. ábrán látható

$$x(t) = \frac{F}{k} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\omega_1}\right)^2} \cos(\omega_1 t + \delta) \right).$$
(5.110)

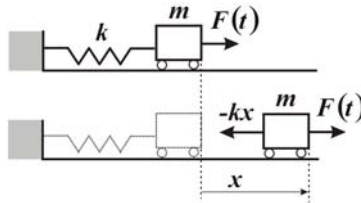


5.22. ábra. Állandó erővel csillapított harmonikus rezgőmozgás kitérése

5.5.3. Periodikusan változó erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés

Az 5.23. ábrán látható k rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömeget $F(t) = F_0 \sin \omega t$ nagyságú, időben periodikusan változó erővel mozgatva a csillapítatlan mozgás mozgásegyenlete a következő lesz

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \omega t = F(t).$$
(5.111)



5.23. ábra. Periodikusan gerjesztett csillapítatlan rezgés

A mozgásegyenlet megoldása a korábbiakból jól ismert homogén egyenlet kielégítő szabad válasz a $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$ két, komplex konjugált sajátértékkel, ahol $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a sajátrezgés körfrekvenciája

$$x_f(t) = d_1 e^{j\omega_0 t} + d_2 e^{-j\omega_0 t}, \quad (5.112)$$

míg a gerjesztett válasz a lineáris hiányos másodrendű differenciálegyenlet gerjesztéséhez hasonlóan $x_g(t) = X_0 \sin \omega t$ alakú lesz, amelyet a teljes mozgásegyenletbe helyettesítve

$$m\ddot{x}_g(t) + kx_g(t) = (k - \omega^2 m)X_0 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \quad (5.113)$$

a sajátrezgés körfrekvenciájának figyelembevételével a gerjesztett válasz

$$X_0 = \frac{F_0}{(k - \omega^2 m)} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \omega^2 \frac{m}{k}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (5.114)$$

$$x_g(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \sin \omega t.$$

A teljes megoldás a szabad válasz és a gerjesztett válasz összege, azaz

$$x(t) = x_f(t) + x_g(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \sin \omega t. \quad (5.115)$$

A d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg. Feltételezve, hogy a rugó kitérése és sebessége is nulla a $t = 0$ pillanatban,

$$x(0) = 0 = d_1 + d_2, \quad v(0) = 0 = j\omega_0(d_1 - d_2) + \omega \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cdot 1, \quad (5.116)$$

$$\bar{d}_1 = -\frac{\omega}{2j\omega_0} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}, \quad \bar{d}_2 = \bar{d}_1^* = \frac{\omega}{2j\omega_0} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2},$$

ahonnan a két konstans egymás komplex konjugáltja. Ekkor az (5.112) alakú szabad válasz egy ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás lesz,

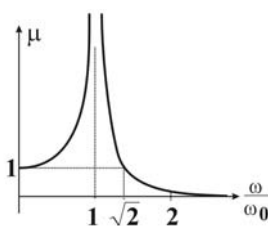
$$x_f(t) = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \sin \omega_0 t, \quad (5.117)$$

és ezzel a rugómozgás kezdeti feltételekhez illesztett kitérése

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (5.118)$$

Az (5.118) teljes választ vizsgálva a válasz amplitúdójában a rezgés frekvenciájától függő tényező abszolút értéke az 5.24. ábrán látható μ rezonanciatényező,

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \right|}. \quad (5.119)$$



5.24. ábra. A rezonancia tényező változása a gerjesztő erő frekvencia függvényében

Az ábrából látható, hogy ha a gerjesztés körfrekvenciája nagyon kicsi, a rezonancia tényező értéke közel egy. Mindaddig, amíg a gerjesztés körfrekvenciája kisebb, mint a rendszer saját körfrekvenciája, a rezonancia tényező értéke nagyobb lesz egynél; ahogy

gerjesztés körfrekvenciája közeledik a rendszer saját körfrekvenciájához a rezonancia tényező és vele a rezgés amplitúdója is rohamosan nő, majd ahogy a gerjesztés körfrekvenciája egyre nagyobb a rendszer saját körfrekvenciájánál, a rezonancia tényező értéke fokozatosan csökken.

Amikor a gerjesztő jel körfrekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával, a rezonanciatényező végtelen nagyra válik, rezonancia lép fel. A csillapítás nélküli, periodikus erővel gerjesztett rendszer válaszát vizsgálva ezen a körfrekvencián, az (5.118) kifejezést átalakítva

$$x(t) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \frac{(\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (5.120)$$

látható hogy $\omega = \omega_0$ esetén a nevező és a számláló is nulla. Ekkor a L'Hospital szabály alkalmazásával¹ $x(t)$ határértéke előállítható,

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega}(\omega_0 \cos \omega t - \omega \sin \omega_0 t)}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (5.121)$$

amelyet kiértékelve és rendezve

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\omega_0 t \cos \omega t - \sin \omega_0 t}{-2\omega}, \quad (5.122)$$

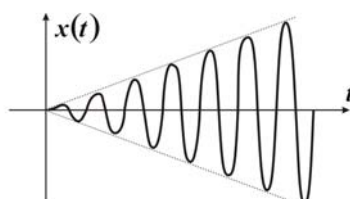
$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \frac{F_0}{2k} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t), \quad (5.123)$$

látható, hogy rezonancia esetén a második tag amplitúdója az idő múlásával arányosan nő, azaz a végtelenhez tart, ahogy az 5.25. ábrán látható.

A mechanikai rezgőmozgásoknál a rezonancia jelenség kialakulásának határt szab a következő pontban tárgyalt külső és belső csillapítás, valamint a szerkezet mechanikai igénybevételének következtében létrejövő tönkremenetel. Ezzel szemben a rezonancia közeli állapot kialakulása gyakori jelenség. Ekkor a két körfrekvencia közel van egymáshoz, $\omega \approx \omega_0$, azaz $\omega/\omega_0 \approx 1$, a rugó kitérése két harmonikus rezgés szuperpozíciója,

¹ a számláló deriváltja osztva a nevező deriváltjával

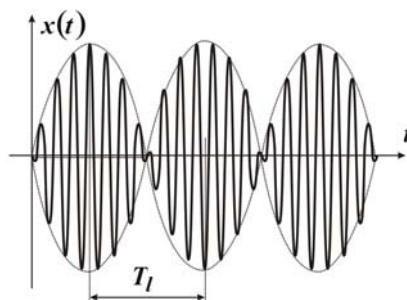
$$x(t) \approx \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} (\sin \omega t - \sin \omega_0 t). \quad (5.124)$$



5.25. ábra. Csillapítás nélküli, periodikus erővel gerjesztett rendszer válasza rezonancia frekvencián

Figyelembe véve, hogy $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin[(\alpha - \beta)/2] \cos[(\alpha + \beta)/2]$ a rugómozgás kitérése egy $(\omega - \omega_0)/2$ kis körfrekvenciájú, T_l hosszú periódusidejű, és egy $\omega \approx \omega_0$ nagyfrekvenciájú, T_0 rövid periódusidejű rezgés szorzata, azaz 5.26. ábrán látható rezgés, úgynevezett *lebegés* jön létre,

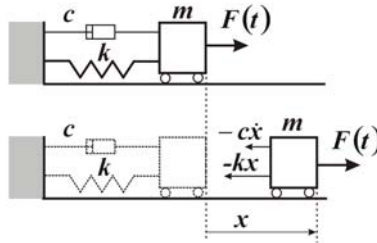
$$T_l = \frac{2\pi}{(\omega - \omega_0)/2} = \frac{4\pi}{\omega - \omega_0}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.125)$$



5.26. ábra. Két harmonikus rezgőmozgás összege, a lebegés jelensége

5.5.4. Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés

Az 5.27. ábrán látható, k rugóállandójú, c csillapítási tényezőjű lengéscsillapított rendszerhez rögzített m tömeget $F(t) = F_0 \sin \omega t$ harmonikus erő gerjeszti.



5.27. ábra. Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgő rendszer

Ekkor a mechanikai rezgőmozgást végző rendszer mozgásegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (5.126)$$

A lineáris rendszernek megfelelően a gerjesztett válasz a kényszererőhöz hasonlóan szintén harmonikusan változó lesz, $x_g(t) = X_0 \sin(\omega t - \varphi)$. A komplex formalizmust alkalmazva a gerjesztett válasz az $\hat{X}_g = X_0 e^{-j\varphi}$ komplex amplitúdó bevezetésével

$$x_g(t) = \text{Im}\{X_0 e^{j(\omega t - \varphi)}\} = \text{Im}\{X_0 e^{-j\varphi} e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{\hat{X}_g e^{j\omega t}\}, \quad (5.127)$$

valamint a gerjesztő harmonikus erőt is a komplex írásmód alkalmazásával az $\hat{F} = F_0$ komplex csúcsértékkel kifejezve

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \text{Im}\{F_0 e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{\hat{F} e^{j\omega t}\}, \quad (5.128)$$

a gerjesztett válasz a következő egyenletből határozható meg

$$m \text{Im}\{j\omega)^2 \hat{X}_g e^{j\omega t}\} + c \text{Im}\{j\omega \hat{X}_g e^{j\omega t}\} + k \text{Im}\{\hat{X}_g e^{j\omega t}\} = \text{Im}\{\hat{F} e^{j\omega t}\}, \quad (5.129)$$

ahonnan

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)\hat{X}_g = \hat{F}, \quad (5.130)$$

a gerjesztett válasz exponenciális alakja

$$\hat{X}_g = \frac{\hat{F}}{-\omega^2 m + j\omega c + k} = \frac{F_0}{\sqrt{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{\omega c}{-\omega^2 m + k}\right)}. \quad (5.131)$$

Némi rendezés után a gerjesztett válasz amplitúdója és kezdőfázisa megadható a csillapítás nélküli rendszer saját körfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ figyelembevételével

$$X_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \quad (5.132)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega c}{-\omega^2 m + k}\right) = \arctg\left(\frac{c\omega}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right). \quad (5.133)$$

Mint hogy a homogén mozgásegyenlet sajátértékei megegyeznek a kis csillapítású $c < 2\sqrt{km}$ rendszer (5.79) sajátértékeivel,

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm j\omega_1 = -\frac{c}{2m} \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}, \quad (5.134)$$

és a szabad válasz (5.82) kifejezését alkalmazva a harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgőmozgás mozgásegyenletének válasza, a rugó kitérése

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + X_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (5.135)$$

A nyugalomból induló mozgás kezdeti feltételei, nulla kitérés és nulla kezdősebesség figyelembevételével

$$x(0) = 0 = d_1 + d_2, \quad v(0) = 0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \omega X_0 \cos \varphi, \quad (5.136)$$

a d_1, d_2 állandók egymás komplex konjugáltjai lesznek,

$$\bar{d}_1 = \frac{\omega X_0 \cos \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{\omega X_0 \cos \varphi}{2j\omega_1}, \quad \bar{d}_2 = \bar{d}_1^* = \frac{\omega X_0 \cos \varphi}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\omega X_0 \cos \varphi}{2j\omega_1}, \quad (5.137)$$

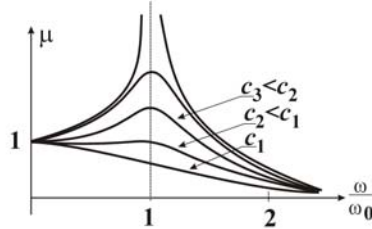
és ezzel a harmonikus erővel gerjesztett kis csillapítású rugómozgás kezdeti feltételekhez illesztett kitérése

$$x(t) = -\frac{\omega X_0 \cos \varphi}{\omega_1} e^{-\rho t} \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} + X_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (5.138)$$

$$x(t) = X_0 \left(\sin(\omega t - \varphi) - e^{-\rho t} \frac{\omega \cos \varphi}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$

ahol az $X_0 = \mu F/k$ amplitúdó (5.132) alakú kifejezésébe a μ rezonanciatényező változása a gerjesztő harmonikus erő ω/ω_0 körfrekvenciája függvényében az 5.28. ábrán látható,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \quad (5.139)$$



5.28. ábra. Kis csillapítású rendszer c csillapítási tényezőjétől függő rezonancia tényező

Az ábrából látható, hogy $\omega/\omega_0 = 1$, esetén, amikor a gerjesztő jel körfrekvenciája és a csillapítatlan rendszer saját körfrekvenciája azonos, a rezonanciatényező nem lesz végtelen, hanem a rezgő rendszer c csillapítási tényezőjétől függően maximális értéket ér el,

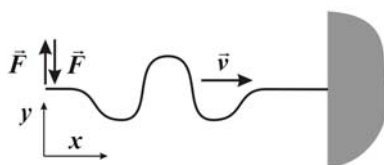
$$\mu_{\max} = \frac{\sqrt{km}}{c} = \frac{m\omega_0}{c}, \quad (5.140)$$

azaz a c csillapítási tényezőtől függően nagyobb csillapítási tényezőhöz a rezonancia tényező maximális értéke kisebb lesz.

5.6. Transzverzális hullámmozgás

5.6.1. A hullámegyenlet

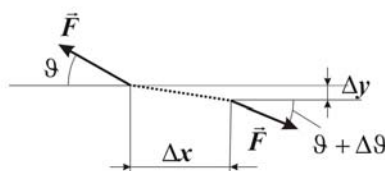
Transzverzális mechanikai hullámmozgás jön létre, ha egy kifeszített kötélnél végén a kötéltre merőleges irányban ható erő mozgat, ahogy az 5.29. ábrán látható.



5.29. ábra. Kifeszített kötélen haladó transzverzális hullám

Az m tömegű, l hosszúságú kötélnél egységnyi hosszú szakaszának $\mu = m/l$, [kg/m] elemi tömege transzverzális mozgást végezve, y irányú kitérése a hely és az idő függvénye lesz, $y(x, t)$. Feltételezve, hogy a kötélnél elemi Δx szakaszára ható erő a szakasz mentén állandó, és a Δx hosszúságú szakasz Δy kitérése elég kicsi, azaz a ϑ -szög kicsi, (5.30. ábra)

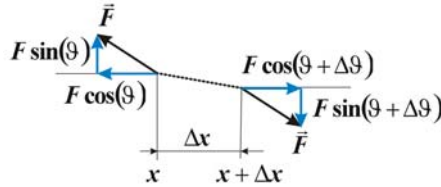
$$\cos \vartheta \approx \cos(\vartheta + \Delta \vartheta) \approx 1, \quad \sin \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta \approx \frac{dy}{dx}, \quad (5.141)$$



5.30. ábra. A kötélnél elemi szakaszára ható erők

az erők egyensúlyi állapotára vonatkozó összefüggések szerint (5.31. ábra) az x -irányú komponensek eredője nulla, míg az y -irányú komponensek eredője az a kényszerítő erő, amely a Δx kötélszakasz y -irányú kitérését eredményezi

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = 0, \\ F_y &= F_y(x + \Delta x) - F_y(x) = F[\sin(\vartheta + \Delta \vartheta) - \sin(\vartheta)]. \end{aligned} \quad (5.142)$$



5.31. ábra. A kötél elemi szakaszára ható erő komponensek

Figyelembe véve, hogy (5.141) szerint $\sin(\vartheta) \approx \left. \frac{dy}{dx} \right|_x$ és $\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) \approx \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+\Delta x}$, továbbá, hogy a két szögfüggvény különbségét képezve és a kötélszakasz Δx hosszával osztva majd a kötélszakasz hosszát nullára csökkentve éppen az y -irányú kitérés hely szerinti második deriváltjához vezet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (5.143)$$

amelyet figyelembe véve, az y -irányú erők eredője a kitérés hely szerinti második deriváltjával lesz arányos

$$F_y = F \left[\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_x \right] = F \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Delta x. \quad (5.144)$$

Az y -irányú erő hatására az Δx kötélszakasz elemi tömege y -irányú gyorsuló mozgásba kezd,

$$F_y = m a_y(x,t) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad (5.145)$$

amely egy egy-dimenziós hullámegyenlet, a transzverzális mozgást végző tömegpontok mozgásegyenlete, ahol a v a hullám *terjedési sebessége*

$$v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (5.146)$$

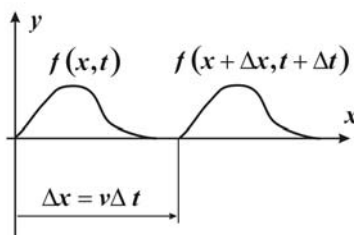
ahol $\mu = m/l$ a kötél egységnyi hosszára vonatkoztatott fajlagos tömege.

5.6.2. A hullámegyenlet általános megoldása

A fenti (5.146) hullámegyenlet általános megoldása egy retardált (késleltetett) hullámmozgást ír le, ui. idő szükséges az információ terjedéséhez, amely az $\pm x$ irányba haladó hullámkomponensekre $y(x,t) = f(t \mp x/v)$ alakú lesz, mivel

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial t^2} &= f''(t \mp x/v), \\ \frac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} f''(t \mp x/v), \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t \mp x/v)}{\partial x^2}, \quad (5.147)$$

és így mind a $+x$ -irányba, mind a $-x$ -irányba terjedő hullámfüggvény kielégíti a hullámegyenletet. A megoldásban a $+x$ tengely irányába haladó hullámformát az $y^+(x,t) = f^+(x,t) = f(t - x/v)$, a $-x$ tengely irányába haladó hullámformát az $y^-(x,t) = f^-(x,t) = f(t + x/v)$ alakú megoldás adja (5.32. ábra).

5.32. ábra. A $+x$ irányba haladó hullám

5.6.3. A hullámegyenlet megoldása periodikus gerjesztés esetén

Feltéve, hogy egy időben harmonikusan változó $F(t) = F_0 \cos \omega t$ erő gerjeszti a transzverzális hullámmozgást, a komplex formalizmus alkalmazásával az erő megadható az \hat{F} komplex csúcserőértékével

$$F(t) = F_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}\{F_0 e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\hat{F} e^{j\omega t}\}, \quad \hat{F} = F_0. \quad (5.148)$$

A vizsgált rendszer lineáris, ezért a hullámmozgás is harmonikusan változó transzverzális kitérés lesz, \hat{Y} komplex csúcserőértékkel

$$y(x,t) = \operatorname{Re}\{\hat{Y}(x) e^{j\omega t}\}. \quad (5.149)$$

A komplex formalizmus alkalmazásával az (5.146) hullámegyenlet jobb és bal oldalát kiértékelve

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \hat{Y}(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t} \right\}, \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \operatorname{Re} \left\{ (j\omega)^2 \hat{Y}(x) e^{j\omega t} \right\}, \quad (5.150)$$

a helyfüggő $\hat{Y}(x)$ komplex csúcértékre adódó

$$v^2 \frac{\partial^2 \hat{Y}(x)}{\partial x^2} = (j\omega)^2 \hat{Y}(x), \quad (5.151)$$

homogén, másodrendű, hiányos differenciálegyenlet megoldását $\hat{Y}(x) = Y_0 e^{kx}$ alakban keresve, azt a fenti egyenletbe helyettesítve,

$$v^2 k^2 (Y_0 e^{kx}) = (j\omega)^2 (Y_0 e^{kx}), \quad (5.152)$$

a kapott karakterisztikus polinomból k terjedési együttható és a hozzá tartozó k_0 cirkuláris hullámszám értéke meghatározható

$$k = \mp j \frac{\omega}{v} = \mp j k_0, \quad k_0 = \frac{\omega}{v}. \quad (5.153)$$

A cirkuláris hullámszám ismeretében a kötélen haladó hullám T periódusideje és a kötélen haladó hullám A hullámhossza megadható,

$$k_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{A}, \quad T = \frac{2\pi}{k_0} \frac{1}{v}, \quad A = \frac{2\pi}{k_0}. \quad (5.154)$$

A terjedési együttható ismeretében az x helyen a kötélen y -irányú kitérése

$$\hat{Y}(x) = Y^+ e^{-jk_0 x} + Y^- e^{+jk_0 x}, \quad (5.155)$$

ahol $Y^+ e^{-jk_0 x}$ a pozitív x -irányba terjedő hullám komponens, $Y^- e^{+jk_0 x}$ a negatív x -irányba terjedő hullám komponens. A periodikus gerjesztésű hullámmozgás teljes megoldása

$$y(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{Y}(x) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left(Y^+ e^{-jk_0 x} + Y^- e^{+jk_0 x} \right) e^{j\omega t} \right\}, \quad (5.156)$$

azaz a transzverzális hullámmozgás kitérése a kötél mentén az idő függvényében

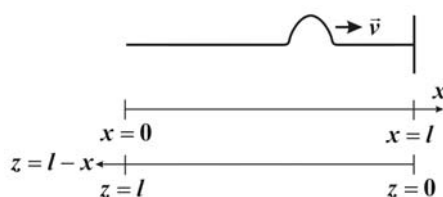
$$\begin{aligned} y(x,t) &= Y^+ \cos(\omega t - k_0 x) + Y^- \cos(\omega t + k_0 x), \\ y(x,t) &= Y^+ \cos\omega(t - x/v) + Y^- \cos\omega(t + x/v). \end{aligned} \quad (5.157)$$

5.6.4. A befogás figyelembevétele

A transzverzális hullámmozgás (5.157) kitérésében az Y^+ , és az Y^- amplitúdók a kötélvég befogásának ismeretében határozhatók meg, azaz a (5.157) megoldást illeszteni kell a kötél végén lévő peremfeltételhez. Az 5.33. ábrán látható elrendezés esetén az l hosszúságú kötél végén, a befogásnál a kötél kitérésének komplex amplitúdója

$$\hat{Y}(l) = Y^+ e^{-jk_0 l} + Y^- e^{+jk_0 l}, \quad (5.158)$$

ahol $Y_2^+ = Y^+ e^{-jk_0 l}$ a befogásnál a beeső, és $Y_2^- = Y^- e^{+jk_0 l}$ a reflektált komponens.



5.33. ábra. A reflexiós tényező értelmezése

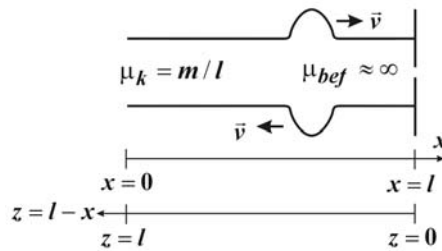
A befogás helyén a hullám reflektálódik, amely hatást az r_2 reflexiós tényezővel, a reflektált hullámkomponens és a beeső hullámkomponens hányadosával lehet figyelembe venni,

$$r_2 = r(x=l) = \frac{Y_2^-}{Y_2^+} = \frac{Y^- e^{+jk_0 l}}{Y^+ e^{-jk_0 l}} = \frac{Y^-}{Y^+} e^{+j2k_0 l}. \quad (5.159)$$

Bevezetve a befogás helyétől induló $l-x=z$ koordináta rendszert, és a reflexiós tényezőt figyelembe véve, a kötél bármely x helyén a hullámmozgás kitérésének komplex amplitúdója

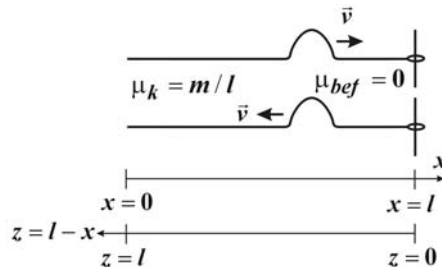
$$\hat{Y}(x) = Y_2^+ e^{jk_0(l-x)} + Y_2^- e^{-jk_0(l-x)} = Y_2^+ \left(e^{jk_0(l-x)} + r_2 e^{-jk_0(l-x)} \right). \quad (5.160)$$

(a) *Merev falhoz való csatlakozás* esetén az $x=l$ befogásnál a kötéel vége rögzített, annak kitérése nulla, azaz az (5.160) kifejezésben a reflexiós tényező értéke $r_2 = -1$. Ez azt jelenti, hogy a kötéel végén a beérkező hullám ellenkező fázisban verődik vissza, $Y_2^- = -Y_2^+$, ahogy az 5.34. ábrán látható.



5.34. ábra. Reflexió merev falhoz való csatlakozásnál

(b) *Szabad végű kötéel* esetén az $x=l$ befogásnál a kötéel vége szabadon elmozdulhat, az 5.35. ábrán látható módon a reflektált hullám azonos fázisban halad végig a kötélén, $Y_2^- = Y_2^+$



5.35. ábra. Reflexió szabad végű kötélén

(c) A *reflexiós tényező* az anyagparaméterek ismeretében a kötéel egységnyi hosszához tartozó fajlagos tömeggel is értelmezhető.

A befogott végen a fal tömege végtelen nagy, ezért az egységnyi hosszra jutó 'fajlagos tömeg' $\mu_{bef} \approx \infty$, míg a kötéel egységnyi hosszra jutó fajlagos tömege $\mu_k = m/l$. Ekkor a befogás helyén a reflexiós tényező

$$r_2 = \frac{\mu_k - \mu_{bef}}{\mu_k + \mu_{bef}} \approx -1. \quad (5.161)$$

Szabadon elmozduló kötélvégen a egységnyi hosszra jutó ‘fajlagos tömeg’ $\mu_{bef} = 0$, amely kifejezéssel a reflexiós tényező

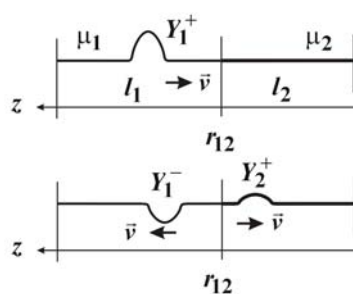
$$r_2 = \frac{\mu_k - \mu_{bef}}{\mu_k + \mu_{bef}} \approx +1. \quad (5.162)$$

(d) Az előzőek alapján értelmezhető a reflexiós tényező két különböző anyagparaméterű kötélcsatlakozásánál is (5.36. ábra). Feltéve, hogy az első szakasz végén, az $x = l_1$ helyen a beeső hullám amplitúdója Y_1^+ , a reflektált hullám amplitúdója Y_1^- , a második szakaszon elinduló hullám amplitúdója pedig Y_2^+ , a csatlakozásnál fellépő reflexió mellett a csatlakozási pontban, az 1. szakasz végén és a 2. szakasz elején a kitérés azonos, azaz

$$Y_1(x = l_1) = Y_2(x = l_1), \quad Y_1^+ + Y_1^- = Y_1^+(1 + r_{12}) = Y_2^+. \quad (5.163)$$

A kötélszakaszok fajlagos tömegét tekintve, ha az 1. szakasz fajlagos tömege $\mu_1 = m_1/l_1$, a második szakasz fajlagos tömege $\mu_2 = m_2/l_2$, akkor az 1. szakaszból érkező hullámra vonatkozó reflexiós tényező

$$r_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (5.164)$$



5.36. ábra. Reflexió két különböző kötélcsatlakozásánál

5.6.5. Állóhullámok kialakulása

Ha a befogásnál a reflexiós tényező értéke ± 1 , a kötélén állóhullámok alakulnak ki.

A szabad végű kötélcsatlakozás reflexiós tényezője $r_2 = +1$, amelyet a kötélcsatlakozás (5.160) alakú komplex amplitúdójába helyettesítve és figyelembe véve, hogy

$(e^{jx} + e^{-jx})/2 = \cos x$, a kötélt kitérése a kötélt végétől számított $z = l - x$ koordináta rendszerben a következő,

$$\hat{Y}(x) = Y_2^+ 2 \left(\frac{e^{jk_0(l-x)} + e^{-jk_0(l-x)}}{2} \right) = 2Y_2^+ \cos k_0(l-x), \quad (5.165)$$

amely a kötélt végén maximális kitérést mutat. A kötélt elemi szakaszainak kitérése valós időfüggvényre való visszatérés után a következő lesz

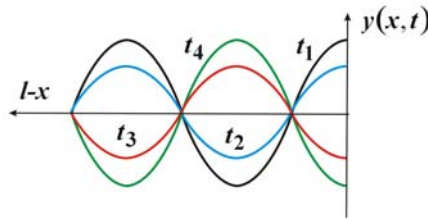
$$y(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{Y}(x) e^{j\omega t} \right\} = 2Y_2^+ \cos k_0(l-x) \cos \omega t. \quad (5.166)$$

A kialakult állóhullámok az 5.37. ábrán láthatók, amelyek csomópontjai a $\cos k_0(l-x) = 0$ helyeken lesznek

$$\cos k_0(l-x) = 0, \quad k_0(l-x) = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.167)$$

azaz a kötélt végétől éppen negyed-hullámhosszra van az első csomópont és ezután fél-hullámhosszonként megismétlődik

$$(l-x) = (2n+1) \frac{\pi/2}{k_0} = (2n+1) \frac{\pi/2}{2\pi/\lambda} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.168)$$



5.37. ábra. Állóhullámok kialakulása szabad végű kötélen

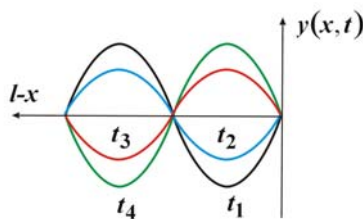
A merev falhoz csatlakozó kötélt reflexiósi tényezője $r_2 = -1$. A kötélt elemi szakaszainak kitérését leíró (5.160) komplex amplitúdóba helyettesítve, és figyelembe véve, hogy $(e^{jx} - e^{-jx})/2j = \sin x$, a merev falhoz csatlakozó kötéltvég kitérése éppen nulla,

$$\hat{Y}(x) = 2jY_2^+ \left(\frac{e^{jk_0(l-x)} - e^{-jk_0(l-x)}}{2j} \right) = 2jY_2^+ \sin k_0(l-x). \quad (5.169)$$

A kötélem elemi szakaszainak kitérését leíró valós időfüggvény a következő,

$$y(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{Y}(x) e^{j\omega t} \right\} = 2Y_2^+ \sin k_0(l-x) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.170)$$

Az állóhullám csomópontjai a kötélm végén és attól $\lambda/2$ hullámhosszonként alakulnak ki (5.38. ábra)



5.38. ábra. Állóhullámok kialakulása a merev falhoz csatlakozó kótélen

$$\begin{aligned} \sin k_0(l-x) &= 0, \quad k_0(l-x) = 2n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ (l-x) &= 2n \frac{\pi}{2k_0} = 2n \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (5.171)$$

5.7. Feladatok

5.7.1. Merev testek ütközése

5.7.1. Feladat

Egy 5 g tömegű, 5 m/s sebességű test utolér egy 10 g tömegű, 3 m/s sebességű testet, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Rugalmatlan ütközés esetén az impulzus-megmaradási tételt alkalmazva, $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$ az ütközés utáni közös sebességet az 5 g tömeg sebességével azonos irányúnak feltételezve a két tömeg együtt

$u = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2) = (5 \cdot 5 + 10 \cdot 3) / 15 = 3,6667 \text{ m/s}$ sebességgel haladnak tovább.

5.7.2. Feladat

Egy 5 g tömegű, 3 m/s sebességű test szembe mozog egy 10 g tömegű, 5 m/s sebességű testtel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Az ütközés utáni sebesség irányát az 5 g tömegű test sebességével azonos irányúnak feltételezve, az impulzus-megmaradási tételt alkalmazva $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$, a két tömeg ütközés utáni közös sebessége $u = (5 \cdot 3 - 10 \cdot 5) / 15 = -2,3333 \text{ m/s}$ a felvett irányral ellentétes lesz.

5.7.3. Feladat

Egy 2 g tömegű, 4 m/s sebességű golyó utolér egy 3 g tömegű, 2 m/s sebességű golyót, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Ütközés után a golyók a közös $u = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 2) / 5 = 2,8000 \text{ m/s}$ sebességgel folytatják útjukat.

5.7.4. Feladat

Egy 8 g tömegű, 5 m/s sebességű golyóval szembe mozog egy 3 g tömegű, 4 m/s sebességű golyó, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a testek ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Feltéve, hogy ütközés után a 8 g tömegű golyó irányában haladnak tovább, az ütközés utáni közös sebességük $u = (8 \cdot 5 - 3 \cdot 4) / 11 = 2,5455 \text{ m/s}$ lesz.

5.7.5. Feladat

Egy 2 g tömegű golyó 4 m/s sebessége 30° -os szöget zár be a vele szembe haladó 3 g tömegű, 2 m/s sebességű golyó középpontját összekötő egyenessel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Feltéve, hogy a 3 g tömegű golyó jobbról balra halad, a 2 g tömegű golyó pedig a vízszintessel 30° -os szöget zár be, a 2 g tömegű golyó sebességének komponensei $v_{1x} = v_1 \cos 30^\circ = 4 \cdot \cos 30^\circ = 3,4641 \text{ m/s}$, $v_{1y} = v_1 \sin 30^\circ = 2,0000 \text{ m/s}$, amíg a 3 g tömegű golyónak csak vízszintes komponense van, $v_{2x} = -v_2 = -2 \text{ m/s}$, $v_{2y} = 0$. Az impulzus-megmaradási tételt a vízszintes és függőleges komponensekre külön-külön felírva, $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x$, $m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2) u_y$, az ütközés utáni közös sebesség komponensek $u_x = (2 \cdot 3,4641 - 3 \cdot 2)/5 = 0,1856 \text{ m/s}$, $u_y = (2 \cdot 2)/5 = 0,8000 \text{ m/s}$. Az ütközés utáni sebesség nagysága a sebességkomponensek eredője $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 0,8213 \text{ m/s}$, a sebesség iránya pedig $\alpha = \arctg(u_y/u_x) = \arctg(0,8000/0,1856) = 76,9357^\circ$ szöget zár be a vízszintessel.

5.7.6. Feladat

Egy 4 g tömegű golyó 6 m/s sebessége 30° -os szöget zár be a vele egyirányba haladó 5 g tömegű, 2 m/s sebességű golyó középpontját összekötő egyenessel, majd centrikusan, rugalmatlanul ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

Descartes koordináta rendszert alkalmazva, a 4 g tömegű golyó sebességének x, y komponensei, $v_{1x} = 6 \cdot \cos 30^\circ = 5,1962 \text{ m/s}$, $v_{1y} = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3,0000 \text{ m/s}$, az 5 g tömegű golyó sebesség komponensei, $v_{2x} = 2 \text{ m/s}$, $v_{2y} = 0$. Az ütközés utáni sebesség komponensek $u_x = (4 \cdot 5,1962 + 5 \cdot 2)/9 = 3,4205 \text{ m/s}$, $u_y = (4 \cdot 3)/9 = 1,3333 \text{ m/s}$, a sebesség nagysága $u = 3,6712 \text{ m/s}$, és iránya $\alpha = 21,2961^\circ$.

5.7.7. Feladat

Egy 6 g tömegű golyó 8 m/s sebessége 30° -os szöget zár be a végtelen nagy tömegű, állónak tekinthető falhoz való ütközés során az ütközési normálisához képest. Határozza meg ütközés után a golyó sebességét.

Megoldás

A golyó sebességét az ütközési normális és az érintő sík irányú komponensekre bontva, $v_{1n} = 8 \cdot \cos 30^\circ = 6,9282 \text{ m/s}$, $v_{1\tau} = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4,0000 \text{ m/s}$, a fal ütközés

előtti sebessége nulla. Az impulzusok normális irányú komponenseit a fal végtelen nagy tömege elnyeli, azaz az ütközés utáni sebesség normális irányú komponense nulla lesz, $u_n = 0$, miközben a golyó az érintősík irányú sebessége nem változik, $u_{1\tau} = v_{1\tau} = 4,0000 \text{ m/s}$. Tehát a végtelen nagy tömegű falhoz való ütközés után a golyó a falba ütközve a fal mentén az érintő irányú sebességével fog mozogni, amíg a súrlódási munka fel nem emészti a golyó mozgási energiáját.

5.7.8. Feladat

Határozza meg egy 5 g tömegű, 3 m/s sebességű golyó és egy 10 g tömegű, álló golyó centrikus rugalmatlan ütközése utáni mozgási sebességet.

Megoldás

Ütközés után a közös sebesség $u = (5 \cdot 3 + 10 \cdot 0)/15 = 1,0000 \text{ m/s}$ lesz.

5.7.9. Feladat

Egy 5 g tömegű, 3 m/s sebességű és egy 4 g tömegű, 6 m/s sebességű golyók mozognak egymás felé, majd centrikusan, rugalmasan ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

A mozgó golyók impulzusainak egyenlőségéből $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, és az energiákra vonatkozó egyenletből $m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2$, a tömegek szerint csoportosítva és a nevezetes szorzatot felismerve, némi rendezés után két lineáris egyenlet adódik, $5(3 - u_1) = 4(u_2 + 6)$, $(3 + u_1) = (u_2 - 6)$, ahonnan az ütközés utáni sebességek $u_1 = -5,0000 \text{ m/s}$, $u_2 = 4,0000 \text{ m/s}$, azaz az 5 g tömegű golyó visszafordul 5,0000 m/s sebességgel, míg a 4 g tömegű golyó 4,0000 m/s sebességgel folytatja útját.

5.7.10. Feladat

Egy 5 g tömegű, 6 m/s sebességű golyó utolér egy 8 g tömegű, 3 m/s sebességű golyót, majd centrikusan, rugalmasan ütköznek. Határozza meg a golyók ütközés utáni sebességének nagyságát és irányát.

Megoldás

A golyók impulzusainak egyenlőségéből $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, és az energiákra vonatkozó egyenletből $m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2$, a tömegek szerint csoportosítva és a nevezetes szorzatot felismerve, némi rendezés után két lineáris

egyenlet adódik, $5(6 - u_1) = 8(u_2 - 3)$, $(6 + u_1) = (u_2 + 3)$, ahonnan az ütközés utáni sebességek $u_1 = 2,3077$ m/s, $u_2 = 5,3077$ m/s.

5.7.2. Harmonikus rezgőmozgás

5.7.11. Feladat

Egy 25 N/m rugóállandójú rugóra erősített 150 g tömegű test 5 cm amplitúdójú csillapítás mentes harmonikus rezgőmozgást végez a vízszintes síkban. Határozza meg a rezgés frekvenciáját.

Megoldás

A csillapítás mentes rezgőmozgás saját körfrekvenciája $\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{k/m}$, ahonnan a frekvencia $f = \sqrt{k/m}/2\pi = 2,0547$ Hz.

5.7.12. Feladat

Egy függőleges helyzetű rugó végén 50 g tömegű test függ. Határozza meg a rugóállandót, ha a testet 70 g tömegűre cserélve a rugó megnyúlása 7 cm-rel növekszik.

Megoldás

A rugót feszítő súlyerő és a rugó megnyúlása közti kapcsolatot alkalmazva $\Delta F_g = k\Delta x$, a rugóállandó $k = \Delta F_g / \Delta x = 0,02 \cdot 9,81 / 0,07 = 2,8029$ N/m.

5.7.13. Feladat

Egy 35°-os lejtővel párhuzamosan elhelyezett 50 N/m rugóállandójú rugó végére 1 kg tömeget akasztanak. Határozza meg a rugó megnyúlását, ha a felületek súrlódásmentesnek tekinthetők.

Megoldás

A tömeg súlyerejének lejtő irányú komponense $G_l = mg \sin 35^\circ$ feszíti a rugót, $G_l = kx$, ahonnan a rugó megnyúlása $x = 1 \cdot 9,81 \cdot \sin 35^\circ / 50 = 0,1125$ m.

5.7.14. Feladat

Egy 1,5 kg tömegű testet egy rugó közbeiktatásával, egyenletes sebességgel vontatnak. A testre ráhelyezett további 0,5 kg tömeg esetén a rugó 12 cm-rel hosszabbra nyúlik. Határozza meg a rugóállandó értékét, ha a súrlódási együttható 0,2.

Megoldás

A súlyerő növekedésből származó súrlódási erő hozza létre a rugó megnyúlás növekedést, $F_s = \mu \cdot \Delta m \cdot g = k \Delta x$, ahonnan a rugóállandó $k = (\mu \cdot \Delta m \cdot g) / \Delta x$, azaz $k = (0,2 \cdot 0,5 \cdot 9,81) / 0,12 = 8,1750 \text{ N/m}$.

5.7.15. Feladat

Egy liftben a 30 N/m rugóállandójú rugó végére erősített tömeg 1,8 kg. Határozza meg a rugó megnyúlását, ha az egy lift 1,5 m/s² gyorsulással kezd el felfelé mozogni.

Megoldás

A tömegre ható gyorsító erő hozza létre a rugó megnyúlását, $\Delta x = (m \cdot a) / k = 1,8 \cdot 1,5 / 30 = 0,0900 \text{ m} = 9 \text{ cm}$.

5.7.16. Feladat

Határozza meg annak a rugónak a rugóállandóját, amely végén lévő 2,6 kg tömegű test 4 rad/s körfrekvenciájú csillapítatlan szabadrezgést végez.

Megoldás

A csillapítatlan szabadrezgés saját körfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ahonnan a rugóállandó $k = m\omega_0^2 = 2,6 \cdot 4^2 = 41,6000 \text{ N/m}$.

5.7.17. Feladat

Egy 3 N/m rugóállandójú rugóhoz 200 g tömeget csatlakoztatva, azt a vízszintes síkban 3,8 N, időben állandó erő húz. Határozza meg, mekkora kitérés körül fog kialakulni a harmonikus rezgőmozgás.

Megoldás

A rugómozgás mozgásegyenlete $m\ddot{x} + kx = F$, ahonnan a gerjesztett válasz $X_g = F/k = 3,8/3 = 1,2667 \text{ m}$.

5.7.18. Feladat

Egy 2,8 Ns/m csillapítási tényezőjű, 5 N/m rugóállandójú rugóhoz a vízszintes síkban 480 g tömeget csatlakoztatva, azt 5 N nagyságú, időben állandó erő húz. Határozza meg a rugó saját körfrekvenciáját.

Megoldás

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$. A szabad válasz sajátértékeiből $0,48\lambda^2 + 2,8\lambda + 5 = 0$, $\lambda = -2,9167 \pm j1,3819 = -\rho \pm j\omega_1$, ahonnan a rezgő rendszer saját körfrekvenciája $\omega_1 = 1,3819$ rad/s.

5.7.19. Feladat

Egy 3 Ns/m csillapítású, függőlegesen elhelyezett 24 N/m rugóállandójú rugóhoz 260 g tömeget csatlakoztatva, azt 6,8 N nagyságú, időben állandó erő húz. Határozza meg a rugó megnyúlását.

Megoldás

A csillapított rugómozgás mozgásegyenlete, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F + mg$, állandósult állapotban a gerjesztett válasz $X_g = (F + mg)/k = (6,8 + 0,26 \cdot 9,81)/24 = 0,3896$ m.

5.7.20. Feladat

Egy 1,5 Ns/m csillapítású, 6 N/m rugóállandójú rugóhoz, a vízszintes síkban csatlakoztatott 500 g tömeget $F(t) = 5 \cos \omega t$ N, $\omega = 2$ rad/s, nagyságú harmonikus erő terhel. Határozza meg a rugó kitérését állandósult állapotban.

Megoldás

Az $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ mozgásegyenlet gerjesztett válaszának komplex amplitúdója a $-m\omega^2 \hat{X}_g + j\omega c \hat{X}_g + k \hat{X}_g = \hat{F}$ egyenlet megoldása, $\hat{X}_g = 5 / (-0,5 \cdot 2^2 + 6 + j2 \cdot 1,5)$
 $\hat{X}_g = 0,8000 - j0,6000 = 1e^{-j36,8699^\circ}$, ahonnan állandósult állapotban a kitérés valós időfüggvénye $x_g(t) = 1 \cos(2t - 36,8699^\circ)$ m.

5.7.21. Feladat

Határozza meg, mekkora húzóerő szükséges a 60 N/m rugóállandójú rugóhoz csatlakoztatott 500 g tömegű testnek a 30° hajlásszögű lejtőn állandó sebességgel való

húzásához, ha a lejtőn való mozgásnál 12 N súrlódási erő lép fel és a rugó megnyúlása 5,6 cm .

Megoldás

A F_h húzóerő ellensúlyozza a rugó megnyújtásához szükséges $F_r = kx$ rugóerőt, fedezi az F_s súrlódási erőt és, mivel a tömeg felfelé mozog, a súlyerő $G_l = mg \sin 30^\circ$ lejtő irányú komponensét, azaz $F_h = kx + F_s + mg \sin 30^\circ$, ahonnan $F_h = 60 \cdot 0,056 + 12 + 0,5 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ = 17,8125 \text{ N}$.

5.7.22. Feladat

Egy 30° hajlásszögű lejtő tetején rögzített 3 N/m rugóállandójú rugóhoz 440 g tömeg csatlakozik. Határozza meg a rugó megnyúlását, ha a test és a lejtő között fellépő súrlódási erő 1,4 N .

Megoldás

A tömeg súlyerejének lejtő irányú komponense ellensúlyozza a rugóerőt és fedezi a súrlódási erőt, $kx + F_s = G_l = mg \sin 30^\circ$, ahonnan a rugó megnyúlása $x = (0,44 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ - 1,4) / 3 = 0,2527 \text{ m}$.

5.7.23. Feladat

Egy 30 N/m rugóállandójú rugóhoz vízszintes asztalon 360 g tömeg csatlakozik. Határozza meg, mekkora erő húzza a rugót, ha 12 N súrlódási erő mellett a rugó megnyúlása 8 cm .

Megoldás

A húzóerő ellensúlyozza a rugóerőt és fedezi a súrlódási erőt, $kx + F_s = F_h$, ahonnan $F_h = 30 \cdot 0,08 + 12 = 14,4000 \text{ N}$.

5.7.24. Feladat

Egy 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz 200 g tömeg csatlakozik vízszintes síkban. A rugót 5 cm-rel megnyújtva, az elengedés után 4 cm/s sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a kialakuló csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciáját, valamint a rezgés amplitúdóját és kezdőfázisát.

Megoldás

A rugó mozgásegyenlete $0,2\ddot{x}(t) + 3,2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0,2\lambda^2 + 3,2 = 0$, a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \sqrt{-3,2/0,2} = \pm j4$, azaz a rendszer saját körfrekvenciája $\omega_0 = 4$ rad/s. Ezzel a rezgő rendszer elmozdulása $x(t) = d_1 e^{j4t} + d_2 e^{-j4t}$. A d_1, d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0,05 = d_1 + d_2$, és $v(0) = 0,04 = j4d_1 - j4d_2$, $d_1 = (0,04 + j4 \cdot 0,05)/(j2 \cdot 4)$, $d_1 = 0,0250 - j0,0050 = 0,0255e^{-j11,3099^\circ}$, $d_2 = (0,04 - j4 \cdot 0,05)/(-j2 \cdot 4)$, $d_2 = 0,0250 + j0,0050 = 0,0255e^{j11,3099^\circ}$. Látható, hogy a két állandó egymás komplex konjugáltja. Ezzel a rezgő rendszer kitérése $x(t) = 0,0255e^{-j11,3099^\circ} e^{j4t} + 0,0255e^{j11,3099^\circ} e^{-j4t}$. A közös állandót kiemelve és az exponenciális alakot rendezve egy eltolt cos függvényt eredményez, $x(t) = 2 \cdot 0,0255 \left(e^{j(4t-11,3099^\circ)} + e^{-j(4t-11,3099^\circ)} \right) / 2 = 0,0510 \cos(4t - 11,3099^\circ)$. Tehát a harmonikus rezgő rendszer saját körfrekvenciája $\omega_0 = 4$ rad/s, a harmonikus rezgőmozgás a nyugalmi állapot körül történik, $0,0510$ m = 5,1 cm amplitúdóval és $11,3099^\circ$ kezdőfázissal.

5.7.25. Feladat

Egy 2,8 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz 200 g tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót 5 cm-rel megnyújtva, az 4 cm/s sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat egy csillapított harmonikus szabadrezgést ír le, ahol a mozgásegyenlet $0,2\ddot{x}(t) + 2,8\dot{x}(t) + 3,2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0,2\lambda^2 + 2,8\lambda + 3,2 = 0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \left(-2,8 \pm \sqrt{2,8^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 3,2} \right) / (2 \cdot 0,2)$, $\lambda_1 = -1,2554$ [1/s] és $\lambda_2 = -12,7446$ [1/s]. Mivel a sajátértékek valósak, a rendszer csillapodó mozgást végez. A rendszer elmozdulása a szabad válasz $x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$. A d_1, d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0,05 = d_1 + d_2$, és $v(0) = 0,04 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1 = (0,05\lambda_2 - 0,04)/(\lambda_2 - \lambda_1) = 0,0589$ [m],

$d_2 = (0,05\lambda_1 - 0,04)/(\lambda_1 - \lambda_2) = -0,0089$ [m]. Ezzel a mozgó rendszer kitérése $x(t) = 5,89e^{-1,2554t} - 0,89e^{-12,7446t}$ [cm], azaz a rendszer a $t = 0$ pillanatbeli maximális kitérés után lassan csillapodva, visszatér nyugalmi állapotába.

5.7.26. Feladat

Az előző feladathoz képest, legyen a csillapítási tényező kisebb. Egy 1,6 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz 200 g tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót 5 cm-rel megnyújtva, az 4 cm/s sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat megoldása az előzőhöz hasonlóan történik, most egy csillapított harmonikus szabadrezgést ír le a mozgásegyenlet $0,2\ddot{x}(t) + 1,6\dot{x}(t) + 3,2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0,2\lambda^2 + 1,6\lambda + 3,2 = 0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \left(-1,6 \pm \sqrt{1,6^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 3,2}\right) / (2 \cdot 0,2)$, most azonban a két sajátérték azonos lesz, $\lambda_{1,2} = \lambda = -4$ [1/s]. Mivel a sajátértékek azonosak a rendszer szabad válasza exponenciálisan csillapodó polinom alakú lesz, $x(t) = (d_1 + d_2 t)e^{\lambda t}$. A d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0,05 = d_1$, és $v(0) = 0,04 = -4d_1 + d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1 = 0,0500$ [m], $d_2 = 0,04 + 4 \cdot 0,05 = 0,2400$ [m]. Ezzel a mozgó rendszer kitérése továbbra is egy csillapodó mozgás, éppen a harmonikus rezgőmozgás kialakulásának határesetén $x(t) = (5,00 + 24t)e^{-4t}$ [cm], azaz a rendszer kitérése a $t = 0$ pillanatbeli kitérés után még egy ideig nő, és csak azután kezd el csillapodni.

5.7.27. Feladat

Tovább csökkentve a csillapítási tényezőt, a rugó kitérése harmonikus rezgőmozgássá alakul. Egy 0,8 Ns/m csillapítási tényezőjű, 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz 200 g tömeg csatlakozik a vízszintes síkban. A rugót 5 cm-rel megnyújtva, az 4 cm/s sebességgel kezd el visszatérni. Határozza meg a rendszer sajátértékeit, valamint a csillapított mozgó rendszer kitérésének időfüggvényét.

Megoldás

A feladat mozgásegyenlete $0,2\ddot{x}(t) + 0,8\dot{x}(t) + 3,2x(t) = 0$. A mozgásegyenlet megoldása a szabad válasz, $x(t) = x_f(t) = de^{\lambda t}$. A szabad választ a mozgásegyenletbe helyettesítve, a karakterisztikus polinom, $0,2\lambda^2 + 0,8\lambda + 3,2 = 0$, ahonnan a sajátértékek $\lambda_{1,2} = \left(-0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 3,2} \right) / (2 \cdot 0,2)$, most a két sajátérték komplex konjugált párt alkot, $\lambda_1 = -2,0000 + j3,4641$ [1/s], $\lambda_2 = -2,0000 - j3,4641$ [1/s]. A szabad válasz $x(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$, ahol a d_1 , d_2 állandók a kezdeti feltételből határozhatók meg, azaz $x(0) = 0,05 = d_1 + d_2$, és $v(0) = 0,04 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, ahonnan a két állandó értéke $d_1 = (0,05\lambda_2 - 0,04) / (\lambda_2 - \lambda_1) = 0,0250 - j0,0202 = 0,0321 e^{-j38,9483^\circ}$ [m], és a másik $d_2 = (0,05\lambda_1 - 0,04) / (\lambda_1 - \lambda_2) = 0,0250 + j0,0202 = 0,0321 e^{+j38,9483^\circ}$ [m] a d_1 komplex konjugáltja. Ezzel a mozgásegyenlet megoldása némi rendezés után $x(t) = 3,21 e^{-2t} 2 \left(e^{j(3,4641t - 38,9483^\circ)} + e^{-j(3,4641t - 38,9483^\circ)} \right) / 2$ [cm] egy csillapodó amplitúdójú harmonikus rezgőmozgás, $x(t) = 6,42 e^{-2t} \cos(3,4641t - 38,9483^\circ)$ [cm].

5.7.28. *Feladat*

Egy 3,2 N/m rugóállandójú rugóhoz a vízszintes síkban csatlakozó 200 g tömeget nyugalmi helyzetéből 4,8 N, időben állandó erő kitérít. Határozza meg a kialakuló csillapítatlan rezgőmozgás kitérését.

Megoldás

Az inhomogén mozgásegyenlet $0,2\ddot{x}(t) + 3,2x(t) = 4,8$. A szabad válasz $x_f(t) = de^{\lambda t}$ sajátértékei a $0,2\lambda^2 + 3,2 = 0$ karakterisztikus polinomból $\lambda_{1,2} = \pm j4$ [1/s]. A gerjesztett válasz egy állandó lesz a gerjesztésnek megfelelően, $x_g(t) = X_g$, amelyet a mozgásegyenletbe helyettesítve, ahonnan $X_g = 1,5$ [m]. Ezzel a teljes megoldás $x(t) = x_f(t) + X_g = d_1 e^{j4t} + d_2 e^{-j4t} + 1,5$. Az ismeretlen állandók a nyugalomból induló mozgás kezdeti feltételből határozhatók meg, $x(0) = 0 = d_1 + d_2 + 1,5$, $v(0) = 0 = j4d_1 - j4d_2$, ahonnan $d_1 = d_2 = -0,75$, azaz a megoldás egy harmonikus rezgőmozgás lesz, $x(t) = -0,75 \cdot 2 \left(e^{j4t} + e^{-j4t} \right) / 2 + 1,5$, amely az állandó erő hatására történő megnyúlás értéke körül leng $x(t) = 1,5(1 - \cos 4t)$ [m].

5.7.29. Feladat

Határozza meg, mekkora sebességgel halad a 2 kg tömegű, 4,6 m hosszú kötélben az a transzverzális hullám, amelyet 1,8 N erővel mozgatnak.

Megoldás

A transzverzális hullám haladási sebessége $v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{F/(m/l)}$
 $v = \sqrt{1,8/(2/4,6)} = 2,0347 \text{ m/s}$.

5.7.30. Feladat

Határozza meg, mekkora erővel kell mozgatni a 2,4 kg tömegű, 6 m hosszú kötelet, hogy a rajta kialakuló transzverzális hullám 5 m/s sebességgel fusson végig rajta.

Megoldás

A transzverzális hullám haladási sebessége $v = \sqrt{F/(m/l)}$, ahonnan a kötelet mozgató erő nagysága $F = v^2 m/l = 10 \text{ N}$.

6. ÁRAMLÁSTAN

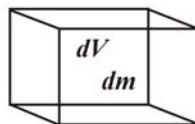
Az áramlástan keretében áramló közegek, folyadékok, gőzök, gázok áramlásának dinamikai viselkedésének megismerése, elemzése a cél. A vizsgálatok a statisztikai törvények alapján az áramló közeg dinamikájának elemzésére épül, és nem az egyes elemi anyagrészecskék, folyadék, gáz molekulák mozgástörvényét vizsgálja.

6.1. Áramló közegek anyagjellemzői

6.1.1. A sűrűség

A sűrűség az egységnyi térfogat tömege, azaz a 6.1. ábrán látható dV térfogatban lévő dm tömegmennyiség, amely a geometriai tér pontjaiban nem feltétlenül állandó, a hely függvényében változhat, ugyancsak az idő múlásával is változhat a geometriai tér pontjaiban a sűrűség

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}, \quad [\rho] = \text{kg/m}^3. \quad (6.1.)$$



6.1. ábra. Az elemi térfogat elemi tömege

6.1.2. A fajtérfogat

A fajtérfogat az elemi tömeg térfogatát jelöli, a sűrűség reciproka, és ennek megfelelően a geometriai tér pontjaiban az idő múlásával szintén változhat

$$v(\vec{r}, t) = \lim_{dm \rightarrow 0} \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)}, \quad [v] = \text{m}^3/\text{kg}. \quad (6.2)$$

6.1.3. A fajsúly

A fajsúly az egységnyi térfogat súlya. A sűrűség ismeretében szintén meghatározható. A sűrűséghez hasonlóan a geometriai tér pontjaiban az idő múlásával az értéke változhat,

$$\gamma(\vec{r}, t) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dG}{dV} = g \cdot \rho(\vec{r}, t), \quad [\gamma] = \text{N/m}^3. \quad (6.3)$$

6.1.4. A hőmérséklet

A hőmérséklet az áramló közeg belső energia-viszonyainak egyik jellemzője. Mérése Celsius [$^{\circ}\text{C}$], Fahrenheit [$^{\circ}\text{F}$] fokban ill. Kelvinben [K] történik. A különböző hőmérséklet skálák közötti kapcsolat a következő:

Celsius és Fahrenheit hőmérsékleti skála kapcsolata a víz forráspontja és fagyáspontja közötti differencia adja, amíg a Celsius skálán a víz fagyáspontja 0°C és forráspontja 100°C , addig a Fahrenheit skálán a víz fagyáspontja 32°F és forráspontja 212°F , ahogy az a 6.2. ábrán látható. A két hőmérsékleti skála közti átszámítás a következő szabály szerint történhet

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32, \quad T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32). \quad (6.4)$$

Celsius	Fahrenheit	Kelvin
100°C	212°F	373,160 K
0°C	32°F	273,16 K
-32°C	0°F	
-40°C	-40°F	0 K

6.2. ábra. Kapcsolat a Celsius, a Fahrenheit és a Kelvin hőmérsékleti skálák között

A Celsius és a Kelvin hőmérsékleti skála kapcsolata az abszolút nulla hőmérséklet és a víz fagyáspontja közti kapcsolattal adható meg, a hőmérsékleti skálák közti átszámítás a következő szabály szerint történik,

$$T_K = T_C + 273,16, \quad T_C = T_K - 273,16. \quad (6.5)$$

6.1.5. A nyomás

A nyomás az egységnyi felületre merőlegesen ható nyomóerő, mértékegysége a pascal [Pa],

$$p(\vec{r}, t) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF_n}{dA}, \quad [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} . \quad (6.6)$$

6.1.6. Folyadékok osztályozása

Az áramló közegek vizsgálata során a folyadékokat ideálisnak és valóságos folyadékoknak lehet tekinteni.

Az *ideális folyadék* a teret egyenletesen tölti ki, homogén eloszlásúnak, tökéletesen összenyomhatatlannak tekinthető, 100 bar felett azonban lényeges térfogatváltozás állhat be. Az ideális folyadékrezecskék között nincs vonzóerő, a folyadékrezecskék között nem ébred 'húzófeszültség', a rezecskék között nincs belső súrlódás, nem ébred 'csúszató feszültség', ezért az ideális folyadékok viszkozitás-mentesek és súrlódásmentes az áramlásuk.

A *valóságos folyadék* a geometriai teret nem egyenletesen tölti ki, eloszlása, sűrűsége, fajsúlya a tér pontjaiban különböző lehet, összenyomható, fajsúlya a nyomás és a hőmérséklet függvényében változhat

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{E} p \right), \quad (6.7)$$

ahol E a rugalmassági modulus

$$E = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} . \quad (6.8)$$

A valóságos folyadékok hőmérsékletfüggő tágulása, térfogatváltozása számítható, ha a folyadék térfogata T_1 hőmérsékleten V_1 , akkor a hőmérsékletnek ΔT értékkel való megváltozása esetén, a $T_2 = T_1 + \Delta T$ hőmérsékleten a térfogata

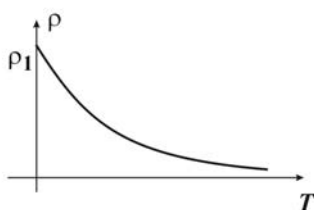
$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta T), \quad (6.9)$$

ahol β [1/K] a köbös tágulási együttható. Ekkor a hőmérsékletváltozás hatására a térfogatváltozás miatt megváltozik az anyag sűrűsége is (6.3. ábra),

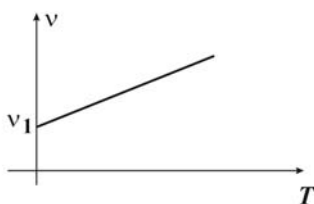
$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{m}{V_1(1 + \beta \Delta T)} = \frac{\rho_1}{(1 + \beta \Delta T)}, \quad (6.10)$$

és megváltozik a fajtérfogata is (6.4. ábra),

$$v_2 = \frac{1}{\rho_2} = v_1(1 + \beta\Delta T). \quad (6.11)$$



6.3. ábra. Folyadékok sűrűségének hőmérséklet függése



6.4. ábra. Folyadékok fajtérfogatának hőmérséklet függése

A valóságos folyadék belső sűrűdása a kinematikai sűrűdással jellemezhető, a különböző sebességű rétegek között csúsztatófeszültség ébred, a folyadék η viszkozitással rendelkezik, ugyanakkor a valóságos folyadékok folyadékmolekulái és a környezet között vonzó-taszító erő lép fel, amely a felületi feszültség kialakulásához, a kapillaritás jelenségéhez vezet.

6.1.7. Ideális gázok állapotváltozásai

A gázok állapotváltozását az állapotváltozók közti kapcsolat írja le. Az állapotváltozók a V térfogat, a T hőmérséklet és a p nyomás. Egy adott, m tömegű ideális gázra vonatkozó általános gáztörvény

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (6.12)$$

ahol R a gázállandó, levegőre $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

(a) Ha a gáz állapotváltozása azonos hőmérsékleten zajlik, *izotermikus állapotváltozás* jön létre. Ha a két állapot között a hőmérséklet nem változik, $T_1 = T_2 = T$, az általános gáztörvény az első és a második esetben

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_1}{m/V_1} = RT, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_2}{m/V_2} = RT, \quad (6.13)$$

ahonnan minthogy a gáz tömege az állapotváltozás során nem változik, a Boyle-Mariotte törvény adódik,

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (6.14)$$

(b) Az állandó térfogat mellett létrejövő állapotváltozás *izochor típusú*, $V_1 = V_2 = V$. Az azonos tömegű gázra vonatkozó állapotváltozást a Gay-Lussac I törvénye írja le,

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_1}{m/V} = RT_1, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_2}{m/V} = RT_2, \quad (6.15)$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (6.16)$$

(c) Állandó nyomáson létrejövő állapotváltozás *izobár típusú* lesz, $p_1 = p_2 = p$, ekkor az azonos tömegű gáz állapotváltozását Gay-Lussac II törvénye fogalmazza meg,

$$\frac{p}{m/V_1} = RT_1, \quad \frac{p}{m/V_2} = RT_2, \quad (6.17)$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (6.18)$$

(d) Ha az állapotváltozás során a gáz nyomása és térfogata is változik, de a környezettel nincs energia-kapcsolata, azaz nem ad le és nem vesz fel energiát, az *állapotváltozás adiabatikus* típusú lesz. Adiabatikus állapotváltozás esetén az ideális gáz állapotváltozói között a következő kapcsolat áll fenn,

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa, \quad \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa = \frac{p_2}{p_1}, \quad (6.19)$$

ahol κ az *adiabatikus kitevő*. A fenti kapcsolatot az általános gáztörvénybe helyettesítve a hőmérséklet - nyomás kapcsolata a következő,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (6.20)$$

míg a hőmérséklet - térfogat kapcsolata a következő lesz,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa} \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa-1}. \quad (6.21)$$

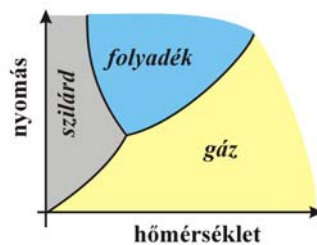
A fentiek alapján az adiabatikus állapotváltozás esetén az ideális gáz állapotváltozóra fennáll a következő kapcsolat,

$$p v^{\kappa} = \text{áll.}, \quad \frac{T}{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \text{áll.}, \quad T v^{\kappa-1} = \text{áll.} \quad (6.22)$$

(e) Végül, ha az állapotváltozás teljesen általános, megszorítások nélkül jön létre, a gáz mindhárom állapotváltozója mellett a környezetével energia-kapcsolatba is lép az *állapotváltozás politropikusnak* tekinthető. Politropikus állapotváltozásnál az állapotváltozók közötti kapcsolat hasonló az adiabatikus állapotváltozásnál kapott összefüggésekhez, ekkor a κ adiabatikus kitevőt az n *politropikus kitevő* váltja fel. Ha az állapotváltozás közben hőelvonás történik, akkor $n < \kappa$, hőenergia hozzáadás esetén $n > \kappa$.

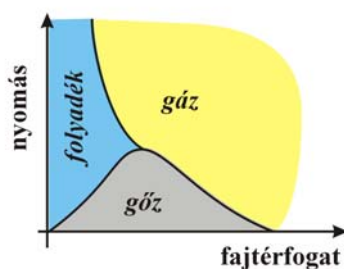
6.1.8. Halmazállapot változások

A gázok és folyadékok állapotváltozásai összefüggnek, sokszor egyidejűleg jelennek meg az anyag különböző halmazállapotai. A 6.5. ábrán a halmazállapot változások nyomás - hőmérséklet kapcsolata látható. Állandó nyomáson a hőmérséklet növelésével a szilárd halmazállapotú gáz folyékonyá, majd légneművé válik, miközben a hőmérsékletet állandó értéken tartva a gázok folyékonyá, esetenként szilárd halmazállapotúvá válnak.



6.5. ábra. Gázok halmazállapot változása a hőmérséklet-nyomás függvényében

A halmazállapot változások egy másik jellemzése a 6.6. ábrán látható fajtérfogat - nyomás változás függvényében történő vizsgálat. Az ábrából látható, hogy állandó nyomás mellett a térfogat növelésével a cseppfolyós halmazállapotú gázból légnemű gáz keletkezhet.



6.6. ábra. Gázok halmazállapot változása a fajtérfogat-nyomás függvényében

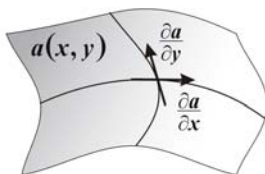
6.2. Nyugvó folyadék egyensúlya, hidrosztatika

6.2.1. Matematikai áttekintés

A 6.7. ábrán látható $a(x, y)$ függvény egy felületet ír le. A felület valamely pontjába megrajzolható a felülethez illeszthető érintősík, amelyet a két koordináta változó irányába mutató vektorokkal írható le. Az x -irányú érintővektort a felület adott pontjában a felület x -irányú deriváltja, azaz a felület változásának nagysága és az egységvektor iránya adja,

$$\vec{e}_x \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = \vec{e}_x \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{a(x + dx, y) - a(x, y)}{dx}, \quad (6.23)$$

ahol $\partial a(x, y)/\partial x$ a többváltozós függvény egyik változója szerinti deriválást jelöli.



6.7. ábra. A gradiens fogalma

Hasonlóan az y -irányú érintővektort a felület adott pontjában a felület y -irányú deriváltja, azaz a felület változásának nagysága és az y -irányú egységvektor iránya adja,

$$\vec{e}_y \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \vec{e}_y \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{a(x, y + dy) - a(x, y)}{dy}. \quad (6.24)$$

Általánosítva, az $a(\vec{r})$ skalár-vektor függvény $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ helyzetvektorral adott pontjában a változás sebességének nagysága az érintő vektorok változásának nagyságával adható meg, ez a gradiens vektor,

$$\mathbf{grad} a(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z}. \quad (6.25)$$

A szakmai irodalomban a gradiens jelölésére a ∇ 'nabla' vektort is szokás alkalmazni, ahol a gradiens a nabla vektor skalár-vektor függvényre való alkalmazása vektort ad eredményül, amely egy helyzetvektor szerinti deriválást takar

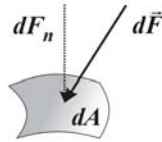
$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \quad (6.26)$$

és ezzel

$$\nabla a(\vec{r}) = \mathbf{grad} a(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial a(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial a(\vec{r})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial a(\vec{r})}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) a(\vec{r}). \quad (6.27)$$

6.2.2. A nyomás

A nyugvó folyadék jellemzője a benne uralkodó nyomás, amely az egységnyi felületre merőlegesen ható erő nagyságával arányos (6.8. ábra),



6.8. ábra. A nyomás fogalma

$$p(\vec{r}) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF_n(\vec{r})}{dA}, \quad (6.28)$$

mértékegysége a pascal, $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$. A folyadékok belsejében valamely pontban a nyomás minden irányban azonos nagyságú, ugyanakkor a folyadéknyomásból származó nyomóerő merőleges lesz a folyadékot tartó edény falára. A nyomás skaláris mennyiség, a térbeli és időbeli eloszlása azonban nem feltétlenül állandó. A nyomás hely-szerinti változását a 'nyomás gradiens' vektor írja le

$$\mathbf{grad} p(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) p(\vec{r}). \quad (6.29)$$

Tehát a nyomás gradiense a legnagyobb nyomásváltozás irányába mutató vektort adja, a gradiens vektor hossza, abszolút értéke pedig a nyomásváltozás nagyságát mutatja

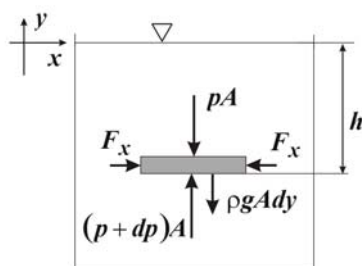
$$|\mathbf{grad} p(\vec{r})| = \sqrt{\left(\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial z} \right)^2}. \quad (6.30)$$

6.2.3. A hidrosztatika alapegyenlete

Nyugvó folyadékokban az erők eredője nulla. Az 6.9. ábrán látható elrendezés h mélységben lévő $A \cdot dy$ térfogatban lévő folyadékelemre az x -irányú erők eredője nulla,

$$\sum F_x = 0, \quad (6.31)$$

az y -irányú erők eredője is nulla, de ezek az erők az $A \cdot dy$ térfogatelemre ható y -irányú erőből a fedőlappra ható pA nyomóerőből, az alsó lapra felfelé ható, a nyomásváltozás figyelembevételével keletkezett nyomóerőből, $(p + \Delta p)A$, valamint az $A \cdot dy$ térfogatban jelenlévő folyadékelem súlyerejéből származik,



6.9. ábra. A h magasságú folyadékoszlop nyomása

$$\Sigma F_y = (p + \Delta p)A - pA - \rho g A dy = 0, \quad (6.32)$$

ahonnan a dy folyadékoszlop magasságából származó nyomásnövekedés értéke

$$\Delta p = \rho g dy. \quad (6.33)$$

Mindkét oldalt összegezve a folyadékoszlop h magasságára és feltéve, hogy a folyadék felszínén a nyomás p_1 , miközben a folyadék h mélységében a nyomás p_2 ,

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \int_{y=-h}^0 \rho g dy = \rho g h, \quad (6.34)$$

ahonnan a folyadékoszlop h mélységében a nyomás a felszínen mért nyomáshoz hozzáadódik a folyadékoszlop magasságából származó nyomás,

$$p_2 = p_1 + \rho g h. \quad (6.35)$$

A nyomást különböző mértékegységekben szokás mérni, a külső légnyomást levegőre a következő adatokkal szokás figyelembe venni

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1013 \text{ mbar} = 760 \text{ Hgmm}, \quad (6.36)$$

a mindennapi gyakorlatban némi kerekítés után,

$$p_0 = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2 \approx 10^5 \text{ Pa} \approx 1000 \text{ mbar} = 760 \text{ Hgmm}. \quad (6.37)$$

6.2.4. A hidrosztatikai felhajtó erő

Egy folyadékba más sűrűségű testet helyezve, arra felhajtó erő hat (6.10. ábra). Az A alapterületű, h magasságú testet a ρ sűrűségű folyadékban l mélységbe helyezve a testre ható erők egyensúlyából a testre ható felhajtó erő meghatározható.

Az l mélységben lévő fedőlapra ható, lefelé mutató erő

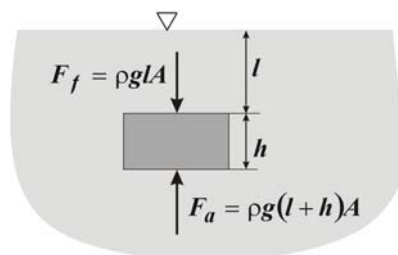
$$F_f = \rho g l A, \quad (6.38)$$

az $l + h$ mélységben lévő alaplagra ható, felfelé mutató erő

$$F_a = \rho g (l + h) A, \quad (6.39)$$

az emelő erő

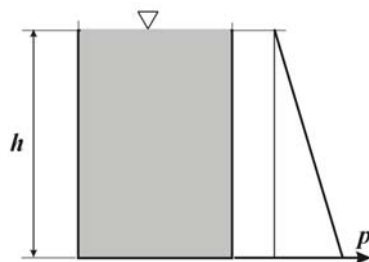
$$F_e = F_a - F_f = \rho g h A . \quad (6.40)$$



6.10. ábra. Arkhimédész törvénye

Az emelő erővel tart egyensúlyt a hA térfogatú, $\gamma = g\rho_{test}$ fajsúlyú test $G = g\rho_{test}hA$ súlyereje. Az egyensúlyi feltételből meghatározható a test l merülési mélysége. A fenti törvényt a szakirodalom *Arkhimédész törvényeként* ismeri.

Pascal törvénye szerint egy edényben lévő folyadékra ható nyomás minden irányban, a folyadék minden elemi térfogatára és az edény falára is ugyanolyan mértékben adódik át, ahogy az 6.11. ábrán látható. A folyadékoszlop magasságával nő az oldalfalra ható nyomóerő.



6.11. ábra. Pascal törvénye

6.2.5. A nyomás magasságfüggése

A magasság növekedésével a nyomás csökken,

$$\Delta p = -\rho g \Delta h, \quad \frac{dp}{dh} = -\rho g . \quad (6.41)$$

Mint ahogy a magasság növekedésével a nyomás és a hőmérséklet is változik (szabványosított módon kb. $6,5\text{C}^\circ$ a hőmérséklet csökkenés ezerméterenként), az általános gáztörvényből figyelembe véve a sűrűség változását a nulla magasságszinthez mért értékekhez viszonyítva

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}, \quad (6.42)$$

és a (6.41) összefüggésbe helyettesítve

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}, \quad (6.43)$$

majd a változók szétválasztásával mindkét oldalt integrálva

$$\frac{dp}{p} = -g\rho_0 \frac{1}{p_0} \frac{T_0}{T} dh, \quad \ln p = -g\rho_0 \frac{1}{p_0} \frac{T_0}{T} h. \quad (6.44)$$

Az integrálási állandó értéke a nulla szinthez tartozó értékek ismeretében a következő

$$p(h) = C e^{-g\rho_0 \frac{1}{p_0} \frac{T_0}{T} h}, \quad p(0) = p_0 = C, \quad (6.45)$$

ahonnan a nyomás változása a magasság függvényében a következő lesz,

$$p(h) = p_0 e^{-g\rho_0 \frac{1}{p_0} \frac{T_0}{T(h)} h}, \quad (6.46)$$

ahol $T(h)$ a hőmérséklet értéke h magasságban.

Politropikus állapotváltozást feltételezve a hőmérsékletváltozás magasság-függését figyelembe véve (6.44) első egyenletének integrálásánál azt figyelembe véve a nyomásváltozás értéke meghatározható. Feltételezve, hogy a hőmérsékletváltozás elhanyagolható, a magasság függvényében a nyomásváltozás, ill. a nyomás függvényében a magasságváltozás közti kapcsolat megadható

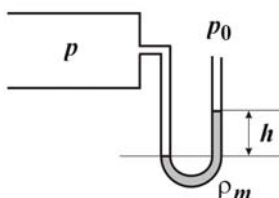
$$T = \text{áll}, \quad p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}, \quad h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (6.47)$$

6.2.6. Nyomás mérése nyugvó folyadékban

A nyomásmérés legtöbb esetben nyomáskülönbség méréssel történik. Ekkor a nyomással egyensúlyt tartó mérőfolyadék magasságából a hidrosztatikai egyensúlyra vonatkozó összefüggés felhasználásával határozható meg a keresett nyomás.

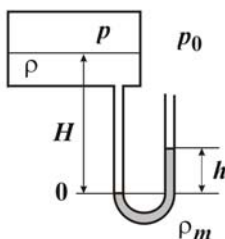
(a) Elhanyagolható sűrűségű gázzal töltött tér nyomásmérése történhet a 6.12. ábrán látható nyitott U-csöves manométerrel. Ekkor a tartályban lévő p nyomás egyensúlyt tart a külső p_0 légnyomással, valamint a h magasságú, ρ_m sűrűségű mérőfolyadék hidrosztatikai nyomásával, azaz

$$p = p_0 + \rho_m g h. \quad (6.48)$$



6.12. ábra. Elhanyagolható sűrűségű gáz nyomásmérése nyitott U-csöves manométerrel

(b) Folyadékot tartalmazó zárt tartály nyomásának nyitott U-csöves manométerrel történő mérésekor ugyancsak a hidrosztatikai egyensúlyi állapotra vonatkozó összefüggés vezet eredményre (6.13. ábra).



6.13. ábra. U-csöves nyitott manométeres nyomásmérés folyadékot tartalmazó zárt tartályban

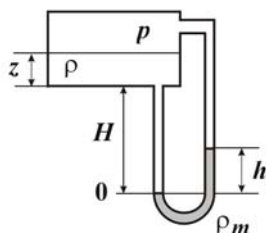
Ha a zárt tartályban a ρ sűrűségű folyadék felett a nyomás p , a nyitott végű U-csöves manométer esetén a külső légnyomás p_0 , valamint a manométerben a ρ_m sűrűségű mérőfolyadék szintkülönbsége h , a nulla szintre felírt hidrosztatikai egyensúlyi egyenletből

$$p + \rho H = p_0 + \rho_m h, \quad p = p_0 + \rho_m h - \rho H, \quad (6.49)$$

azonban egy járulékos folyadékszint magasság mérésre is szükség van a H ismeretéhez.

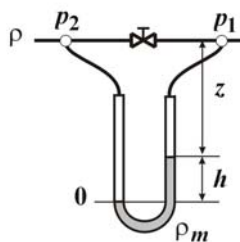
(c) Az U-csöves manométer szintmérőként is használható. Feltéve, hogy a 6.14. ábrán látható zárt tartályban a ρ sűrűségű folyadék felett p nyomás uralkodik, továbbá ismert a manométerben a ρ_m sűrűségű mérőfolyadék h szintkülönbsége, és a tartály aljának a nulla szinttől való H távolsága. A hidrosztatikai egyensúlyi egyenletből

$$p + \rho g(H + z) = p + \rho_m g h, \quad z = \frac{\rho_m}{\rho} h - H. \quad (6.50)$$



6.14. ábra. U-csöves manométer, mint szintmérő

(d) Csővezeték két pontja közötti nyomáskülönbség mérésekor a ρ sűrűségű folyadékot szállító csővezeték két pontjához csatlakozik az U-csöves manométer (6.15. ábra).



6.15 ábra. Csővezeték két pontja közötti nyomáskülönbség mérése

A manométer egyik szára a p_1 nyomású, a másik szára p_2 nyomású szakaszhoz van csatlakoztatva, $p_2 > p_1$, a manométer ρ_m sűrűségű mérőfolyadék magasság különbsége h . A hidrosztatikai egyensúlyi egyenletből a csővezeték két pontja közti nyomáskülönbség meghatározható,

$$p_1 + \rho g(h + z) = p_2 + \rho g z + \rho_m g h, \quad p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g h. \quad (6.51)$$

Meg kell jegyezni, hogy a nyomás-különbség mérés csak akkor működik, ha a mérőfolyadék sűrűsége nagyobb, mint a csővezetékben áramló közeg sűrűsége.

6.3. Áramló közegek dinamikája

Áramló közegek vizsgálatánál különbséget kell tenni egyfázisú és többfázisú közegek áramlástanai elemzése között. Az áramló közeg *egyfázisúnak* tekinthető, ha az anyagszemcsék, ill. a folyadék, vagy gázmolekulák azonos tulajdonságokkal rendelkeznek. *Többfázisúnak* tekinthető az áramló közeg, ha különböző tulajdonságú az áramló közeg összetevői, pl. telített vízgőz mellett az áramlás során történő hűlés következtében a kondenzvíz is jelen van, és a kétféle tulajdonságú közeg dinamikájának együttes vizsgálatára kerül sor.

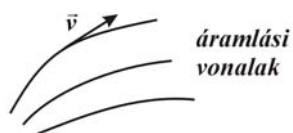
Az egyfázisú áramlás során az *ideális folyadékok*, áramló közegek vizsgálatánál az anyagszemcsék, folyadékmolekulák között nem ébred belső súrlódás, viszkozitásmentesnek tekinthető az anyag. A *valóságos folyadékoknál* a molekulák közti belső súrlódás, a viszkozitás, a felületi feszültség és a folyadékok, áramló közegek rugalmasságának változását figyelembe véve kell a közeg dinamikai vizsgálatát elvégezni.

Az áramlás dinamikájának vizsgálatánál, akár egyfázisú vagy többfázisú, akár ideális vagy valóságos az áramló közeg vagy folyadék, eleget kell tennie a tömeg-megmaradás, az impulzus-megmaradás és az energia-megmaradás törvényeinek.

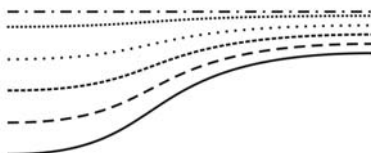
6.3.1. A sebesség

A korábbi kinematikai vizsgálatoknál a sebesség a helyzetvektor idő szerinti deriváltjaként került bevezetésre, $\vec{v}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{r}}(t)$. A mozgó közegek dinamikai vizsgálatánál a sebessége önállóan értelmezhető $\vec{v}(\vec{r}, t)$. A sebesség egy vektorteret ír le, amelyet áramvonalakkal lehet szemléltetni, 6.16. ábra. A sebesség vektor az áramvonal érintője irányába mutat, a sebesség nagysága pedig az áramvonalak sűrűségével jellemezhető.

A mozgó folyadékmolekula, az áramló közeg térfogatelemének pályagörbéje, lamináris áramlás esetén a 6.17. ábrán, míg egy turbulens áramlás áramvonal-képe a 6.18. ábrán látható.



6.16. ábra. Áramvonalak



6.17. ábra. Stacionárius áramlás áramvonalai



6.18. ábra. Turbulens áramlás áramvonala

6.3.2. A Mach szám

Általában az áramló folyadékok, közegek összenyomhatatlanok. A gázok, gőzök is összenyomhatatlannak tekinthetők, ha terjedési sebességük a hangsebesség alatt marad. A gáz terjedési sebességének a hangsebességhez való viszonya a Mach számmal jellemezhető,

$$Ma = \frac{|\vec{v}_{gáz}|}{|\vec{v}_{hang}|}. \quad (6.52)$$

Hangsebesség alatt, $Ma < 1$, a gázok terjedési sebessége szubszonikusnak tekinthető, egy kis értékkel a hangsebesség felett, $Ma \geq 1$, már szuperszonikus lesz a terjedés, míg $Ma > 5$ esetén hiperszonikus a terjedés. Egynél nagyobb Mach szám esetén a terjedés irányában a gázban a nyomás megnő, az áramlás során a gázmolekulák torlódnak, ezek a torlódások a lökéshullámok, ill. fejhullámok kialakulását okozzák.

6.4. A tömegmegmaradás törvénye

Az *anyag-megmaradási* tétel áramlástani megfogalmazása a folytonossági vagy kontinuitási tétel, a tömegáram folytonosságára vonatkozó tétel.

6.4.1. Összenyomhatatlan folyadékok stacionárius áramlása

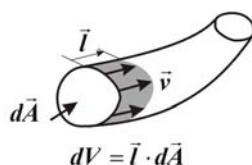
Összenyomhatatlan folyadékok esetén a közeg sűrűsége hely és idő szerinti eloszlása is állandó, azaz ha általánosan a sűrűség $\rho(\vec{r}, t)$, stacionárius áramlás esetén a sűrűség hely szerinti és idő szerinti eloszlása állandó, azaz

$$\rho = \text{áll.} \quad (6.53)$$

Stacionárius áramlás esetén az áramlási vonalak mentén kialakuló elemi dV térfogat $dm = \rho dV$ tömegének időbeli megváltozása, a $q_m = \partial m / \partial t$ tömegáram nulla, (6.19. ábra)

$$q_m = \frac{\partial m}{\partial t} = 0, \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \rho \frac{\partial}{\partial t} dV = 0.$$



6.19. ábra. Az áramlási vonalak mentén létrejövő elemi térfogat

Az idő szerinti deriválást tagonként elvégezve, a jobb oldalon álló első tag nulla, mivel a közeg sűrűsége állandó; a második tagban azonban figyelembe kell venni, hogy az elemi térfogat egy \vec{l} hosszúságú, $d\vec{A}$ felületű elemi térfogat, $dV = \vec{l} \cdot d\vec{A}$, ahol

$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \vec{v}$ a közeg áramlási sebessége, és bevezetve a $q_v = \partial V / \partial t$ térfogatáram fogalmát,

$$q_m = \rho \frac{\partial V}{\partial t} = \rho q_v = 0, \quad (6.55)$$

$$q_m = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{l} \cdot d\vec{A}) = \rho \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A},$$

stacionárius áramlás esetén a tömegáram a sűrűség és a térfogatáram szorzataként adható meg, ahol a térfogatáram az \vec{A} felületen \vec{v} sebességgel átáramló közeg mennyisége

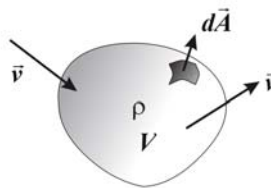
$$q_m = \frac{\partial m}{\partial t} = \rho q_v, \quad \rho v = \frac{\partial V}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (6.56)$$

A 6.20. ábrán látható, az áramló közeg teljes V térfogatára kiterjesztve,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_{A_{be}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{ki}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (6.57)$$

a térfogatot határoló zárt felületre azonos a ki és a beáramló közeg mennyisége, azaz a felületen átáramló tömegáram összessége nulla,

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (6.58)$$



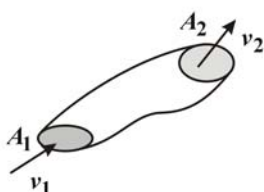
6.20. ábra. Stacionárius áramlás esetén azonos a térfogatba belépő és kilépő anyagmennyiség

A 6.21. ábrán látható csőszakasz belépő felülete a vizsgált térfogatból kifelé mutató felületi normálissal \vec{A}_1 , az áramló közeg sebessége \vec{v}_1 , a kilépő felülete \vec{A}_2 , az áramló közeg sebessége \vec{v}_2 , és alkalmazva a vektorok skaláris szorzatára vonatkozó összefüggést, a folytonossági egyenletet, az egyes keresztmetszeteken a $q_m = \rho v A$

tömegáram folytonosságára vonatkozó feltételt, a következő alakban lehet megfogalmazni,

$$\rho_1 v_{1n} A_1 = \rho_2 v_{2n} A_2, \quad (6.59)$$

ahol $vA = q_v$ a térfogatáram.



6.21. ábra. Stacionárius áramlás

Ha a stacionárius áramlás során a közeg beáramlása a D_1 átmérőjű csőszakaszon, a kiáramlása a D_2 átmérőjű csőszakaszon történik, akkor a kontinuitási, tömegáram folytonosságára vonatkozó feltétel a következő alakban adható meg,

$$\rho_1 v_{1n} \frac{D_1^2 \pi}{4} = \rho_2 v_{2n} \frac{D_2^2 \pi}{4}. \quad (6.60)$$

6.4.2. Összenyomható folyadék nem-stacionárius áramlása

Összenyomható folyadékok nem-stacionárius áramlás esetén a 6.22. ábrán látható dx, dy, dz oldalú térfogatelemben az áramló közeg sűrűsége nem állandó, $\rho(\vec{r}, t) \neq \text{áll}$.

A térfogatelemben az időegység alatt az x -irányból beáramló tömeg, a tömegáram

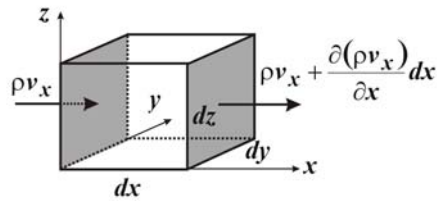
$$\left(\frac{dm_x}{dt} \right)_{be} = \rho v_x dy dz, \quad (6.61)$$

Taylor sorral közelítve a dx szakaszon a tömeg megváltozását az időegység alatt, a térfogatelemből az x -irányba kiáramló tömeg,

$$\left(\frac{dm_x}{dt} \right)_{ki} = \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right] dy dz, \quad (6.62)$$

ahonnan a térfogatelem tömegének az x -irányú áramlás következtében az időegység alatti megváltozása, tömegárama

$$\frac{dm_x}{dt} = \left(\frac{dm_x}{dt} \right)_{ki} - \left(\frac{dm_x}{dt} \right)_{be} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz . \quad (6.63)$$



6.22. ábra. A folytonossági egyenlet nem-stacionárius áramlásra

Az y , és a z -irányú áramlásokra is felírhatók hasonló összefüggések,

$$\frac{dm_y}{dt} = \left(\frac{dm_y}{dt} \right)_{ki} - \left(\frac{dm_y}{dt} \right)_{be} = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz , \quad (6.64)$$

$$\frac{dm_z}{dt} = \left(\frac{dm_z}{dt} \right)_{ki} - \left(\frac{dm_z}{dt} \right)_{be} = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz . \quad (6.65)$$

Az anyagmegmaradási törvényt figyelembe véve az elemi térfogattól kiáramló tömegek összege csökkenti a térfogatelemben lévő anyag sűrűségét, azaz

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_x}{dt} + \frac{dm_y}{dt} + \frac{dm_z}{dt} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz , \quad (6.66)$$

ahol az $dx dy dz$ térfogatelemmel egyszerűsítve az összenyomható folyadékokra, nem-stacionárius áramlás esetén a folytonossági egyenlet a következő alakban írható fel,

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz , \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

A fenti kifejezés tömörebb írásmóddal is megadható a sebesség vektoriális tulajdonságának és a nabla vektor (6.26) alakjának alkalmazásával. Ekkor a két vektor skaláris szorzata, a műveletek elvégzése után skaláris mennyiséget eredményez. Ezt a műveletet a matematika a 'div' képzéssel jelöli, amely a térfogat forrásosságát adja meg,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) &= \text{div } \vec{v}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r}) &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{e}_x v_x + \vec{e}_y v_y + \vec{e}_z v_z).\end{aligned}\tag{6.68}$$

Ezzel a fenti, (6.67) összefüggés, a nem-stacionárius áramlásra vonatkozó folytonossági egyenlet differenciális alakja a következő,

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,\tag{6.69}$$

amely a térfogatba ki-, beáramló közegek tömegének megváltozását a térfogatelemben maradó közeg sűrűségének időbeli megváltozásához köti.

A (6.69) kifejezésben jelzett műveleteket részletesen kiértékelve,

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,\tag{6.70}$$

ahol $\partial \rho / \partial \vec{r}$ a sűrűség hely szerinti megváltozását, a sűrűség gradiensét, míg $(\partial / \partial \vec{r}) \cdot \vec{v}$ a sebesség divergenciáját jelöli, azaz

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathbf{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div}(\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.\tag{6.71}$$

A nem-stacionárius áramlásra vonatkozó folytonossági egyenlet a teljes $dV = dx dy dz$ térfogatra is megfogalmazható (6.67) első sorának a térfogatra vonatkozó integrálját képezve (térfogatra összegezve). Némi átalakítás után a folytonossági egyenlet integrális alakja a következő, amely nem-stacionárius áramlás esetén a tömegáram folytonosságára vonatkozó törvény integrális alakja fogalmazza meg,

$$\oint_A \rho \vec{v} d\vec{A} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0.\tag{6.72}$$

Ha azonban stacionárius az áramlás, azaz a térfogatelemben az anyagáram sűrűsége állandó, $\partial\rho/\partial t = 0$, a fenti (6.71) és (6.72) egyenletek a jól ismert $\partial(\rho\vec{v})/\partial\vec{r} = 0$, ill. $\oint_A \rho\vec{v}d\vec{A} = 0$ összefüggésekhez vezetnek.

6.5. Ideális, súrlódásmentesen áramló folyadék mozgástörvénye

6.5.1. Az impulzus-megmaradás törvénye, az Euler egyenlet

Az áramló közeg m tömege az \vec{F} erőhatás következtében mozgásba kezd,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (6.73)$$

Mivel azonban stacionárius az áramlás, a térfogat tömege nem változik, ezért a fenti egyenlet jobb oldalán az első tag nulla. A jobb oldalon álló második tagot vizsgálva, figyelembe kell venni, hogy az áramló közeg sebessége a hely és az idő függvénye, azaz

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}(t), t), \quad (6.74)$$

ezért a sebesség idő szerinti deriváltját képezve a láncszabályt is alkalmazni kell,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{\partial\vec{r}} \cdot \frac{\partial\vec{r}(t)}{\partial t}. \quad (6.75)$$

Figyelembe véve, hogy a sebesség idő szerinti megváltozása a gyorsulás, itt az m tömegű folyadék egy, a sebesség idő szerinti deriváltjából származó \vec{a}_l lokális gyorsulással és egy, a sebesség hely szerinti megváltozásából származó úgynevezett \vec{a}_k konvektív gyorsulással rendelkezik,

$$\vec{a}_l = \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{\partial t}, \quad \vec{a}_k = \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{\partial\vec{r}} \cdot \frac{\partial\vec{r}(t)}{\partial t}. \quad (6.76)$$

A konvektív gyorsulást elemezve, a (6.76) kifejezés második tagjában az első tényező a sebesség hely szerinti megváltozását, gradiensét, a második tényező az m tömeg helyzetvektorának idő szerinti megváltozását, $\partial\vec{r}(t)/\partial t = \vec{v}(\vec{r}(t), t)$, a sebességét jelöli. A fenti kifejezésben három vektor szorzata szerepel, amelyet a következő szabályok szerint kell kiértékelni,

$$\vec{a}_k = \frac{\partial\vec{r}(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{v}(\vec{r}(t), t)}{\partial\vec{r}} = \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial\vec{r}} \right) \vec{v}. \quad (6.77)$$

A nabra vektort újra alkalmazva a kifejezés egészen egyszerűnek tekinthető

$$\vec{a}_k = \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (6.78)$$

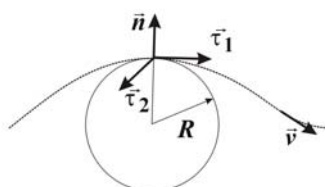
A kijelölt műveleteket részletesen elvégezve

$$\vec{a}_k = \left[(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \right] \cdot \vec{v}, \quad (6.79)$$

az a konvektív gyorsulás vektorkomponenseire a következő kifejezéséhez adja,

$$\begin{aligned} \vec{a}_k = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{e}_x \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \\ + \vec{e}_y \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Egyszerűbbnek tűnik a fenti műveletek elvégzése az áramvonalakhoz illesztett természetes koordináta rendszerben, ahol az áramvonal érintője és binormálisa definiálja az áramlás érintő síkját, a normálisa (a görbületi középponttól kifelé mutató vektor irányával) pedig az érintő síkra merőleges normális vektort (6.23. ábra).



6.23. ábra. Természetes koordináta rendszer egységvektora

Ekkor a sebesség érintő síkbeli és az arra merőleges normális irányú komponenseire

$$\vec{v} = v_\tau \vec{e}_\tau + v_n \vec{e}_n, \quad (6.81)$$

az $\vec{a}_k = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ konvektív gyorsulást kiértékelve és a nabra vektort a fenti természetes koordináta rendszerben alkalmazva

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{e}_\tau + \frac{\partial}{\partial n} \vec{e}_n, \quad (6.82)$$

a következő kifejezés adódik,

$$\vec{a}_k = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left[(v_\tau \vec{e}_\tau + v_n \vec{e}_n) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \vec{e}_\tau + \frac{\partial}{\partial n} \vec{e}_n \right) \right] (v_\tau \vec{e}_\tau + v_n \vec{e}_n), \quad (6.83)$$

amelyet részletesen kiértékelve a konvektív gyorsulás érintősíkbeli és a normális irányú komponensei a következők lesznek,

$$\vec{a}_k = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{v} + v_n \frac{\partial}{\partial n} \vec{v}, \quad (6.84)$$

ahol

$$\vec{a}_k = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n = \left(v_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \right) \vec{e}_\tau + \left(v_\tau \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \vec{e}_n. \quad (6.85)$$

Ezzel a sebesség idő szerinti totális deriváltja

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v}, \quad (6.86)$$

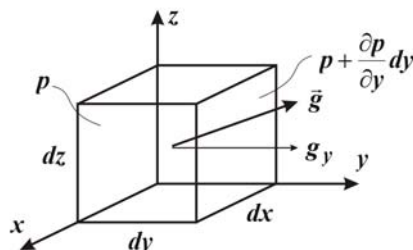
akár a Descartes x, y, z koordináta rendszerben, akár a természetes τ, n koordináta rendszerekben kiértékelhető.

Összegezve, tehát az m tömegre ható erőből egy lokális és egy konvektív gyorsulás származik,

$$\vec{F} = m(\vec{a}_l + \vec{a}_k) = m \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} \right]. \quad (6.87)$$

Az m tömeg mozgásának leírása után a folyadékelemre ható erők komponenseit is érdemes megvizsgálni. Az erőkomponensek egyrészt a folyadék áramlását előidéző nyomásváltozásból erednek, másrészt egy aktív gyorsító erőből, pl. a folyadékelem súlyerejéből származnak. A 6.24. ábrán látható $dx dy dz$ térfogatelemre a nyomásváltozásból származó y -irányú erőkomponens a Taylor sor felhasználásával, a belépő felületen és a kilépő felületen ható erők különbségéből

$$dF_{p,y} = p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz . \quad (6.88)$$



6.24. ábra. Az elemi térfogat tömegére ható erők

A nehézségi erőből származó erőkomponens

$$dF_{g,y} = \rho g_y dx dy dz , \quad (6.89)$$

és ezzel az y -irányú mozgásmennyiség megváltozása

$$\frac{dI_y}{dt} = F_y = m \frac{dv_y}{dt} = \rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt} = \rho g_y dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz . \quad (6.90)$$

(a) Az elemi térfogatra vonatkozó tömegmennyiség súrlódásmentes áramlására vonatkozó mozgástörvény y -irányú komponense,

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} . \quad (6.91)$$

Az x - és a z -irányú változásokat hasonló módon felírva és vektoriálisan összegezve,

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} , \quad (6.92)$$

továbbá figyelembe véve a sebesség idő szerinti totális deriváltjának (6.86) kifejezésbeli alakját, a súrlódásmentesen áramló közeg elemi térfogatának mozgástörvényét az Euler egyenlet differenciális alakja írja le,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}}. \quad (6.93)$$

(b) A teljes térfogatra is kiértékelhetők az előző erők komponensei. A tömegre ható súlyerő

$$\vec{F}_g = \int_V \rho \vec{g} dV, \quad (6.94)$$

a nyomásból származó nyomóerő

$$\vec{F}_p = - \oint_A p d\vec{A} = - \int_V \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} dV. \quad (6.95)$$

Az impulzus idő szerinti megváltozásából származó gyorsító erő egyrészt a súlyerő, másrészt a nyomásból származó nyomóerő kompenzálásával a következő egyensúlyi egyenletre vezet

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p. \quad (6.96)$$

Az egyes erőkomponenseket az előző kifejezésekből behelyettesítve, és figyelembe véve, hogy a tömeg a sűrűségnek a térfogatra vett összege, integrálja,

$$m = \int_V \rho dV, \quad (6.97)$$

ahonnan a V térfogatban lévő, súrlódásmentesen áramló m tömeg mozgástörvényét az Euler egyenlet integrális alakja adja

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{g} dV - \oint_A p d\vec{A} = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} dV. \quad (6.98)$$

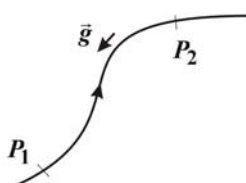
6.5.2. Az energia-megmaradás törvénye, a Bernoulli egyenlet

Ideális folyadék veszteségmentes áramlása időben állandó sebességgel történik. Ekkor a mozgásmennyiséget reprezentáló Euler egyenlet (6.93) differenciális alakja a következő kifejezésre egyszerűsödik

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} = \rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}}. \quad (6.99)$$

Egy zárt áramvonal két, P_1 , P_2 pontja közötti útszakaszon való elmozdulás energiaigénye (6.25. ábra)

$$\int_{P_1}^{P_2} \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \rho \vec{g} d\vec{r} - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} d\vec{r}. \quad (6.100)$$



6.25. ábra. Elmozdulás egy áramvonal két pontja között

Feltéve, hogy az áramvonal P_1 , P_2 pontjában a sebességek \vec{v}_1 , \vec{v}_2 értékűek, a fenti kifejezés baloldalán a helyzetvektor szerinti deriválás és integrálás formálisan semlegesíti egymást, így az a sebesség megváltozása szerinti integráláshoz vezet,

$$\int_{P_1}^{P_2} \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \rho \vec{v} d\vec{v} = \rho \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2}{2}, \quad (6.101)$$

míg a jobboldal kiértékelésekor figyelembe véve a P_1 , P_2 pontok közti h_1 , h_2 magasságkülönbséget, valamint a p_1 , p_2 nyomáskülönbséget, a következő kifejezés adódik

$$\int_{P_1}^{P_2} \rho \vec{g} d\vec{r} - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} d\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} \rho \vec{g} d\vec{r} - \int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho \vec{g} (h_2 - h_1) - (p_2 - p_1). \quad (6.102)$$

Ezzel az egységnyi térfogatban lévő anyagmennyiségnek a P_1 , P_2 pontok közti ideális, súrlódásmentes elmozduláskor az energiaigénye a következő

$$\rho \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2}{2} = -\rho \vec{g} (h_2 - h_1) - (p_2 - p_1), \quad (6.103)$$

amely némi rendezés után

$$\rho \frac{\bar{v}_2^2}{2} + \rho \bar{g} h_2 + p_2 = \rho \frac{\bar{v}_1^2}{2} + \rho \bar{g} h_1 + p_1 \quad (6.104)$$

a Bernoulli egyenlethez vezet

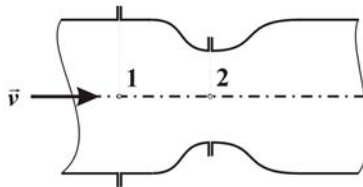
$$\rho \frac{\bar{v}^2}{2} + \rho \bar{g} h + p = \text{áll.} \quad (6.105)$$

Figyelembe véve, hogy ideális, súrlódásmentes áramlás esetén a V térfogat $m = \rho V$ anyagmennyisége nem változik, a fenti összefüggést a V térfogattal megszorozva, az energia-megmaradási törvényhez vezet, ahol $W_m = \rho V \bar{v}^2 / 2$ a mozgási energia, $W_h = \rho V \bar{g} h$ a helyzeti energia, míg $W_p = pV$ a nyomásból származó energia tag.

6.5.3. A Venturi cső

Áramló anyag sebességének, nyomásának mérésére szolgál a keresztmetszet szűkítő elem, a konfúzor (6.26. ábra).

Stacionárius áramlás esetén ($\rho = \text{áll}$), egy vízszintes csőben elhelyezett szűkítő elem segítségével végezve el a mérést, a mérési pontok azonos magasságban helyezkednek el, $h_1 = h_2$, míg az 1. számú helyen a cső keresztmetszete A_1 , az áramló folyadék sebessége v_1 , a nyomás p_1 , a 2. számú helyen a cső keresztmetszete A_2 , az áramló folyadék sebessége v_2 , a nyomás p_2 .



6.26. ábra. A keresztmetszet szűkítő elem

Az energiaegyensúlyi egyenlet az 1. és a 2. számú helyeken,

$$\rho \frac{\bar{v}_2^2}{2} + \rho \bar{g} h_2 + p_2 = \rho \frac{\bar{v}_1^2}{2} + \rho \bar{g} h_1 + p_1, \quad (6.106)$$

a tömegáram folytonosságára vonatkozó egyenlet a két helyen térfogatárammal kifejezve

$$q_m = \rho q_v, \quad q_v = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2. \quad (6.107)$$

A térfogatáramra vonatkozó egyenletből a v_1 sebesség $v_1 = v_2 A_2/A_1$. Az energia-
megmaradási egyenletből az azonos magasságban lévő mérőpontok nyomáskülönbsége

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2}{2} = \rho \frac{\vec{v}_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right), \quad (6.108)$$

és figyelembe véve, hogy pl. a 2. mérőponton a térfogatáram $q_v = v_2 A_2$,

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho \frac{1}{2} \left(\frac{q_v}{A_2} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right), \quad (6.109)$$

a térfogatáram arányos lesz a nyomáskülönbség négyzetgyökével,

$$q_v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{A_2^2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2} \Delta p} = C \sqrt{\Delta p}, \quad (6.110)$$

ahol C a mérésből meghatározott állandó.

6.6. Valóságos folyadék mozgástörvénye, veszteségek

6.6.1. A viszkozitás

Amíg ideális folyadék, ill. gárrészecskék között nincs kölcsönhatás, a közeg sebessége egy keresztmetszetben állandónak tekinthető, addig a valóságos folyadék, közeg áramlása esetén az egymás melletti folyadékrétegek között a súrlódás következtében csúszás jön létre, a keresztmetszetben a sebesség nem lesz állandó (6.27. ábra), a cső fala mellett a sebesség nulla lesz, ún. határréteg alakul ki.

A sebességváltozás mértéke dv_x/dy , a folyadékrétegre ható súrlódási erő, a sebességváltozást létrehozó jellemző a viszkozitás,

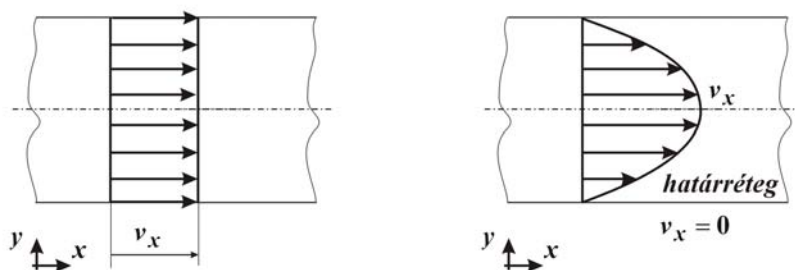
$$F = A \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (6.111)$$

ahol η a dinamikai viszkozitás. A súrlódás következtében az elemi folyadékrétegre ható nyíróerő hatására kialakuló τ csúsztató-, nyíró-feszültség (6.28. ábra) következtében a folyadékrétegek elcsúsznak egymáson,

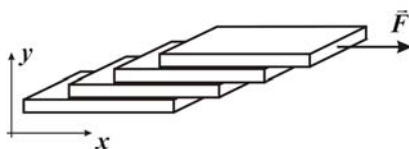
$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad [\tau] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{Pa}, \quad (6.112)$$

ahol a dinamikai viszkozitás és a csúsztató/nyírófeszültség közötti kapcsolat

$$\eta = \frac{F}{A} = \frac{\tau}{\frac{dv_x}{dy}}, \quad [\eta] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 1 \text{Pa} \cdot \text{s}. \quad (6.113)$$



6.27. ábra. Ideális és valóságos folyadék sebességprofilja

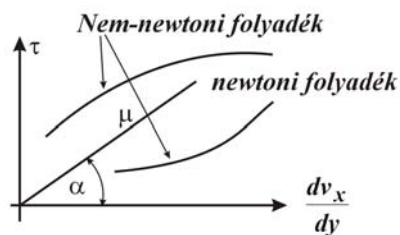


6.28. ábra. A nyíróerő hatására az elemi folyadékrétegek megcsúsznak egymáson

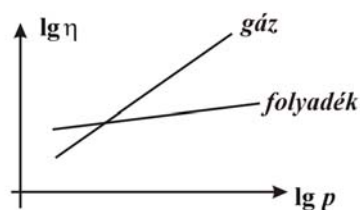
6.6.2. Valóságos folyadékok osztályozása

Valóságos folyadékokat a viszkozitás szempontjából osztályozni lehet. Ha az áramló közeg viszkozitása közel állandó, $\eta = \text{áll.}$, a közeg *Newtoni* közegnek, ha azonban a viszkozitás nem állandó, $\eta \neq \text{áll.}$, nem *Newtoni* közegnek tekinthető az áramló folyadék. A legtöbb áramló közeg, folyadék ideálisan viszkózusnak, Newtoni típusúnak tekinthető.

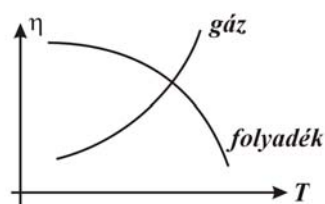
Az áramló folyadékok viszkozitása függhet az áramlás sebességváltozásától, (6.29. ábra), a folyadékban kialakuló nyomástól (6.30. ábra) és az áramló közeg hőmérsékletétől (6.31. ábra).



6.29. ábra. A viszkozitás és a deformáció sebességváltozásának kapcsolata



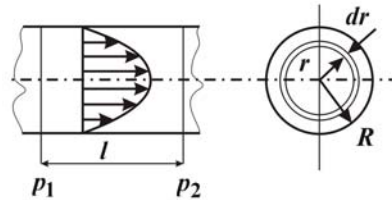
6.30. ábra. A viszkozitás és az áramló közeg nyomása közti kapcsolat



6.31. ábra. A viszkozitás és az áramló közeg hőmérséklete közti kapcsolat

6.6.3. Newton-féle, ideálisan viszkózus folyadék áramlása

Ideálisan viszkózus folyadékok áramlásának elemzéséhez a sebesség hely-szerinti változását megengedve, de az időbeli változástól eltekintve, a $\partial v(\vec{r}, t)/\partial t = 0$ feltétellel élve, a 6.32. ábrán látható R sugarú cső, l hosszúságú, p_1 , p_2 nyomáskülönbségű szakaszán az η viszkozitású folyadék áramlik.



6.32. ábra. Ideálisan viszkózus folyadék áramlási képe

Az r sugarú, dr szélességű csőelem két végpontján a p_1 , p_2 nyomás-különbségből származó $F_{p1} = p_1 r^2 \pi$, $F_{p2} = p_2 r^2 \pi$ erők különbsége gyorsítja a folyadékréteg áramlását, míg az r sugarú csőelem palástján a csúszósurlódásból származó $F_s = -\eta 2r\pi \partial v(r)/\partial r$ erő lassítja. A gyorsító és fékező erők egyensúlya

$$F_{p1} - F_{p2} - F_s = 0, \quad (6.114)$$

és a fenti összefüggéseket részletesen kifejtve, a sebesség hely szerinti megváltozása

$$\Delta p r^2 \pi = -\eta 2r\pi \frac{\partial v(r)}{\partial r}, \quad \frac{\partial v(r)}{\partial r} = -\frac{\Delta p r}{\eta 2l}. \quad (6.115)$$

A sugár szerinti integrálást elvégezve és az integrálási állandót a peremfeltételhez illesztve (a henger palástján a folyadék réteg áramlási sebessége nulla),

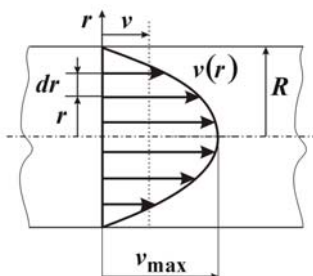
$$v(r) = -\frac{\Delta p}{\eta 2l} \frac{r^2}{2} + C, \quad v(r=R) = 0 = -\frac{\Delta p}{\eta 2l} \frac{R^2}{2} + C, \quad C = \frac{\Delta p}{\eta 2l} \frac{R^2}{2}, \quad (6.116)$$

a sebesség eloszlását egy parabolikus görbe írja le (6.33. ábra)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{\eta 4l} (R^2 - r^2). \quad (6.117)$$

A sebesség maximális értéke a hengeres cső tengelye mentén található, értéke

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{\eta 4l} R^2. \quad (6.118)$$



6.33. ábra. Ideálisan viszkózus folyadék áramlási sebesség profilja parabolikus eloszlású

Az áramlás során az egységnyi idő alatt szállított anyagmennyiség, a térfogatáram,

$$q_v = \frac{dV}{dt} = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{r=0}^R v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2r\pi dr . \quad (6.119)$$

A kijelölt integrálást elvégezve a térfogatáram a maximális sebesség és a fél keresztmetszet szorzata lesz

$$q_v = v_{\max} 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) \Big|_0^R = v_{\max} \frac{R^2\pi}{2} . \quad (6.120)$$

A sebesség átlagértéke pedig egyrészt a sebességnek a keresztmetszetre vett átlagértéke, másrészt a térfogatáram és a keresztmetszet hányadosa,

$$v_k = \frac{1}{R^2\pi} \int_{r=0}^R v(r) 2r\pi dr = \frac{q_v}{R^2\pi} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\Delta p}{\eta 8l} R^2 . \quad (6.121)$$

A Newton-féle ideálisan viszkózus folyadék áramlása közben fellépő súrlódás következtében a csővezetékben nyomásesés lép fel, amely a közepes sebességgel, a cső méretével és a dinamikai viszkozitás ismeretében megadható

$$\Delta p = \frac{\eta 8l}{R^2} v_k . \quad (6.122)$$

A nyomáseséshez egy 'veszteségi magasság' $h' = \Delta p / \rho g$ rendelhető, amely a nyomásesés figyelembe vételével a következő alakban adható meg

$$h' = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\eta 8l}{R^2} \frac{v_k}{\rho g}. \quad (6.123)$$

A csővezeték sugara helyett az átmérőjét alkalmazva és bevezetve egy dimenzió nélküli mérőszámot, a *Reynolds számot*

$$Re = \frac{dv_k \rho}{\eta} \quad (6.124)$$

a veszteségi magasság a következő lesz

$$h' = \frac{\eta 8l}{R^2} \frac{v_k}{\rho g} = \frac{\eta 32l}{d^2} \frac{v_k}{\rho g} = 64 \frac{\eta}{dv_k \rho} \frac{l}{d} \frac{v_k^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{v_k^2}{2g}. \quad (6.125)$$

A Newton-féle ideálisan viszkózus folyadékok áramlása során fellépő, a viszkozitás miatti súrlódásból származó nyomásesést, majd a veszteségi magasságot legkényelmesebb egy λ csősúrlódási tényezőként megfogalmazni, ahol a *csősúrlódási tényező* egyenes csőszakaszra

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (6.126)$$

és ezzel a veszteségi magasság

$$h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_k^2}{2g}. \quad (6.127)$$

6.6.4. A Reynolds szám értelmezése, lamináris és turbulens áramlás

A csővezetékben lévő közeg áramlását meghatározó erőhatások az impulzusból származó erőhatás és a súrlódási veszteség lesz. Ezen két erőhatás egy elemi szakaszon egyrészt az áramló folyadék mozgását gyorsító erőhatás, amely figyelembe véve, hogy a keresztmetszet dimenziója a távolság dimenziójának négyzetével arányos

$$F_I = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(\rho Vv) \approx \rho Av^2 \approx \rho l^2 v^2, \quad (6.128)$$

másrészt a folyadék áramlását lassító, a viszkozitás hatását reprezentáló súrlódási erőhatás, amely arányos lesz a folyadék viszkozitásával, a sebességével és egy hosszúság dimenziójú taggal,

$$F_s = \eta A \frac{dv}{dr} \approx \eta lv. \quad (6.129)$$

A két erő, az áramló folyadék mozgását gyorsító és az áramlást lassító erők hányadosa

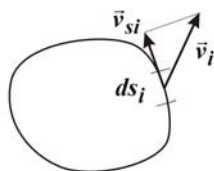
$$\frac{F_l}{F_s} \approx \frac{\rho l^2 v^2}{\eta lv} = \frac{lv\rho}{\eta} \approx Re, \quad (6.130)$$

éppen a Reynolds szám, amellyel jellemezhető a folyadékáramlás lamináris és turbulens tulajdonsága.

Lamináris az áramlás, ha a sebességnek nincs az áramlás irányára merőleges komponense, míg az áramlás *turbulens/örvényes* lesz, ha az áramlás irányára merőleges sebességkomponens is fellép. Turbulens áramlásnál a folyadékrezecske forgómozgást is végez, (6.34. ábra), ez a fogómozgás a cirkulációval, vagy 'rotációval' jellemezhető,

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^n v_{si} ds_i, \quad \Gamma = \oint_S v_s ds. \quad (6.131)$$

Ha a Γ cirkuláció nulla, a folyadék áramlása örvénymentes.



6.34. ábra. Turbulens áramlásnál a pályagörbe érintője irányú sebességkomponens is van

A 6.35. ábrán látható körpályán $v = c/r$ sebességgel mozgó folyadékrezecske cirkulációja az ABCDA zárt görbeszakaszra

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}. \quad (6.132)$$

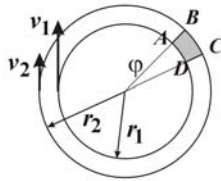
Mínt hogy az AB és a CD szakaszok mentén a sebességnek nincs érintő irányú komponense $\vec{v}_\varphi \perp d\vec{r}$, a cirkuláció értéke nulla lesz,

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{v}_\varphi \cdot d\vec{r} = 0, \quad \Gamma_{CD} = -\int_C^D \vec{v}_\varphi \cdot d\vec{r} = 0. \quad (6.133)$$

A másik két szakaszra kiértékelve a cirkuláció értékét,

$$\Gamma_{BC} = v_2 s_{BC} = \frac{c}{r_2} \varphi r_2 = c\varphi, \quad \Gamma_{DA} = -v_1 s_{DA} = -\frac{c}{r_1} \varphi r_1 = -c\varphi, \quad (6.134)$$

ahonnan a teljes zárt görbére a cirkuláció nulla, azaz az áramlás lamináris.



6.35. ábra. Folyadékreszezske cirkulációja az ABCDA zárt görbére

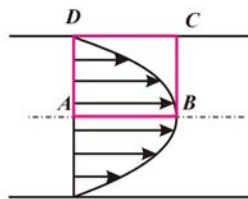
A következőkben egy parabolikus típusú $v(r) = v_{\max}(1 - r^2/R^2)$ sebességprofil (6.36. ábra) cirkulációját az ABCDA zárt görbére meghatározva a BC és a DA szakaszokra nulla értéket eredményez, míg az AB és a CD szakaszokra kiértékelve a cirkuláció értékét,

$$\Gamma_{AB} = v_{\max} s_{AB}, \quad \Gamma_{CD} = v(r=R) s_{CD} = 0, \quad (6.135)$$

ahonnan a zárt görbére vett cirkuláció értéke

$$\Gamma = v_{\max} s_{AB} \neq 0 \quad (6.136)$$

nem lesz nulla, azaz az áramlás turbulens.

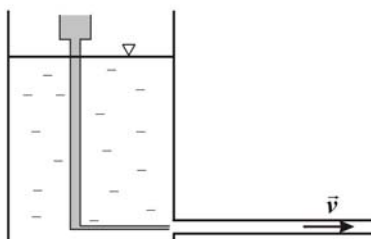


6.36. ábra. Turbulens áramlás cirkulációja

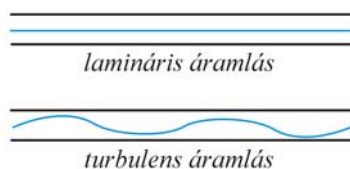
6.6.5. A Reynold kísérlet, súrlódó folyadékok áramlása

Reynold kísérlete szerint, egy áramló közegbe színes folyadékot vegyítve (6.37. ábra), lamináris áramlás esetén a kétféle folyadék az áramlás során hosszan nem keveredik, minthogy nincs az áramlás irányára merőleges sebességkomponens. Növelve

azonban az áramló közeg sebességét, a kétféle folyadék keveredni fog, turbulenssé válik az áramlás, ahogy az a 6.38. ábrán látható.



6.37. ábra. A Reynolds kísérlet



6.38. ábra. A lamináris és a turbulens áramlás áramvonalai

6.6.6. Csővezetékek veszteségei

Csőidomok, mint például konfúzor (szűkítő elem), diffúzor (tágító elem), könyök, elágazás, keresztmetszet változás jellemzésére bevezethető a csőelem ξ veszteségi tényezője,

$$\xi = \lambda \frac{l_e}{d} \quad (6.137)$$

amely rendszerint előre, az idomhoz tartozó adatokkal együtt ismeretes. Így meg lehet adni, hogy milyen hosszú 'egyenértékű' csőhossznak, egyenes csőnek felelne meg a vizsgált idom. Ezzel a különböző csőszakaszokból, idomokból összeillesztett csővezeték veszteségi tényezője a csőszakasznak és idomdarabok veszteségi magasságainak összegeként meghatározható,

$$h' = \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \xi_j \frac{v_j^2}{2g} \quad (6.138)$$

A csővezetéken a $q_v = vA$ térfogatáram átáramoltatásához a csőrendszer eleje és vége között Δp nyomásesésre van szükség. A csőrendszer $h' = \Delta p / \rho g$ veszteségi magassága ismeretében az áramláshoz szükséges nyomásesés meghatározható

$$h' = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{q_v^2 / A^2}{2g}, \quad \Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \frac{q_v^2}{A^2}. \quad (6.139)$$

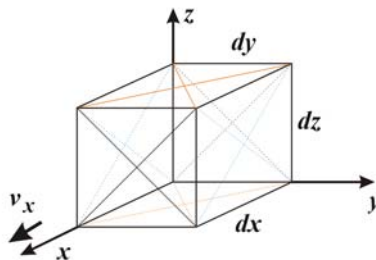
6.7. Ideálisan viszkózus folyadékok mozgástörvénye

6.7.1. A Navier-Stokes egyenlet

Nem viszkózus folyadékok mozgástörvényét, az impulzus-megmaradási törvényét a (6.96) Euler egyenlet írja le, amely az áramló folyadék elemi térfogatra ható, a nyomásváltozásból és a súlyerőből származó erőhatásokat veszi figyelembe. Ha azonban a folyadék ideálisan viszkózus, azaz newtoni típusú az áramló folyadék, a fenti erőhatások mellett a viszkozitásból származó csúsztató és húzófeszültségekből származó súrlódási erőt is figyelembe kell venni,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_s. \quad (6.140)$$

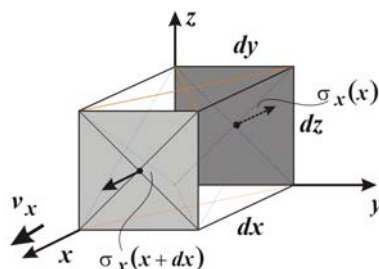
Az \vec{F}_s súrlódási erő meghatározásához a 6.39. ábrán látható $dV = dx dy dz$ térfogatelemre ható húzó és csúsztatófeszültségek vizsgálatára van szükség.



6.39. ábra. Az elemi térfogatelem az x -irányú sebességkomponenssel

Az x -irányú v_x sebesség hatására az elemi térfogat $x=0$ helyen lévő $dydz$ felületelemen egy $\sigma_x(x)$ húzófeszültség, míg a dx koordinátával távolabb lévő $x+dx$ helyen lévő $dydz$ felületelemen egy $\sigma_x(x+dx)$ húzófeszültség keletkezik (6.40. ábra). Ez utóbbi érték, mivel a dx távolság kicsi, Taylor sorral közelíthető,

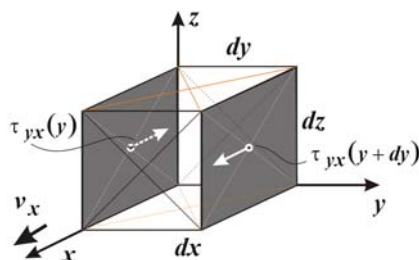
$$\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (6.141)$$



6.40. ábra. Az elemi térfogat két szemközti felületén ébredő húzófeszültségek

Az x -irányú sebességkomponens hatására az elemi kocka négy oldalalajján csúsztatófeszültségek keletkeznek. Az $y=0$ és az $y+dy$ koordinátájú helyeken elhelyezkedő $dzdx$ felületelemeken (6.41. ábra) a csúsztatófeszültségek értéke $\tau_{yx}(y)$, és ugyancsak a Taylor sor alkalmazásával

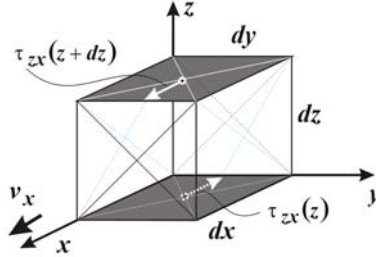
$$\tau_{yx}(y+dy) = \tau_{yx}(y) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy. \quad (6.142)$$



6.41. ábra. Az y és az $y+dy$ felületeken keletkezett x -irányú csúsztatófeszültségek

Az x -irányú sebességkomponens hatására az elemi kocka $z=0$ és a $z+dz$ koordinátájú helyeken elhelyezkedő $dx dy$ felületelemeken (6.42. ábra) a csúsztatófeszültségek értéke $\tau_{zx}(z)$, és ugyancsak a Taylor sor alkalmazásával

$$\tau_{zx}(z+dz) = \tau_{zx}(z) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz. \quad (6.143)$$



6.42. ábra. A z és a $z+dz$ felületeken keletkezett x -irányú csúsztatófeszültségek

A fenti húzó és csúsztatófeszültségek hatására az ideálisan viszkózus folyadék elemi térfogatára ható súrlódási erő x -irányú komponense

$$F_{s,x} = [\sigma_x(x+dx) - \sigma_x(x)]dydz + [\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)]dzdx + [\tau_{zx}(z+dz) - \tau_{zx}(z)]dxdy, \quad (6.144)$$

és a fenti közelítéseket alkalmazva ez a súrlódási erő a következő lesz,

$$F_{s,x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dz dx + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy. \quad (6.145)$$

Figyelembe véve, hogy az elemi térfogat $dV = dx dy dz$, a fenti kifejezés a következő

$$F_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV. \quad (6.146)$$

Mint hogy ideálisan viszkózus, newtoni folyadékokra az η viszkozitás állandónak tekinthető, így az x -irányú sebességkomponens változásával a húzó és a csúsztatófeszültségek rendre a következő alakban adhatók meg,

$$\sigma_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \eta_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \eta_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (6.147)$$

amelyeket a súrlódási erő kifejezésébe helyettesítve

$$F_{s,x} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV, \quad (6.148)$$

és figyelembe véve, hogy a zárójelben a sebesség x -irányú komponensének az egyes koordináta irányok szerinti második deriváltja szerepel, amelyet röviden a Laplace operátorral lehet szimbolizálni, azaz

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \Delta v_x, \quad (6.149)$$

és ezzel a viszkozitás hatására keletkező súrlódási erő x -irányú komponense

$$F_{s,x} = \eta \Delta v_x dV. \quad (6.150)$$

A sebesség y - és z -irányú komponensei hatására hasonló gondolatmenet alapján a súrlódó erő y - és z -irányú komponensei

$$F_{s,y} = \eta \Delta v_y dV \quad F_{s,z} = \eta \Delta v_z dV. \quad (6.151)$$

Az erőkomponenseket vektoriálisan összegezve,

$$\vec{F}_s = \eta \Delta \vec{v} dV \quad (6.152)$$

a súrlódási erő egységnyi térfogatra a következő lesz,

$$\frac{\vec{F}_s}{dV} = \eta \Delta \vec{v}, \quad (6.153)$$

amellyel a súrlódásmentes, ideális folyadékok Euler egyenletét kiegészítve a newtoni folyadékok viszkózus áramlására vonatkozó mozgásmennyiségre vonatkozó törvényt, a Navier-Stokes egyenletet adja,

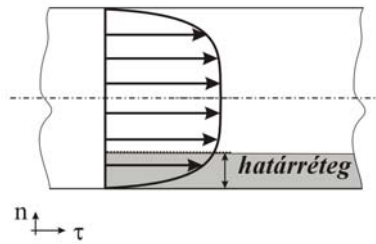
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \eta \Delta \vec{v}. \quad (6.154)$$

6.7.2. A határréteg kialakulása

Az ideálisan viszkózus folyadékok áramlásánál érdemes megvizsgálni a folyadékot szállító cső fala mentén a határréteg (6.43. ábra) kialakulását. Természetes koordináta rendszert alkalmazva a sugár irány tekinthető a normális iránynak, míg a cső palástja definiálja az érintősíkot.

A határréteg áramlását vizsgálva a sebesség normális irányú komponense sokkal kisebbnek tekinthető, mint a fallal párhuzamos sebességkomponens, ugyanakkor a fallal párhuzamos irányú változás sokkal kisebb, mint a falra merőleges irányú változás,

$$v_\tau \gg v_n, \quad \frac{\partial}{\partial n} \gg \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (6.155)$$



6.43. ábra. A határréteg kialakulása

Az ideálisan viszkózus folyadékok mozgásmennyiségére vonatkozó Navier-Stokes egyenletben a súlyerőből származó komponenst elhanyagolva, $\vec{g} \approx \mathbf{0}$, továbbá a határrétegben létrejövő áramlást stacionáriusnak tekintve, $\partial/\partial t = 0$, a mozgásmennyiségre vonatkozó (6.154) összefüggés egyszerűsödik. A mozgásmennyiség érintő irányú komponense

$$\rho \left(v_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \tau} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial n^2} \right), \quad (6.156)$$

míg a normális irányú komponensben

$$\rho \left(v_\tau \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) = -\frac{\partial p}{\partial n} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial n^2} \right), \quad (6.157)$$

(6.155) következtében a bal oldalon lévő mindkét tag és a jobb oldalon álló második tag nullának tekinthető, így a kapott

$$\frac{\partial p}{\partial n} \approx 0 \quad (6.158)$$

kifejezés azt jelenti, hogy egy adott hengerpalást mentén, a határrétegen belül és kívül a nyomás ugyanakkora lesz.

A határreteken kívül azonban a sűrűdés elhanyagolható, $\eta = 0$, ezért az áramlásnak csak érintő irányú $\vec{u} = u_\tau \vec{e}_\tau$ sebességkomponense van, amely mozgásmennyiségére vonatkozó Euler egyenlet

$$\rho \left(u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (6.159)$$

Ismerve a határreteken kívül az áramlási sebességet, a határreteg peremén a kétféle áramlási modellhez tartozó megoldás a nyomásváltozáson keresztül illeszthető, a (6.159) kifejezést (6.156) kifejezésbe helyettesítve, továbbá az egyes rétegekben az áramló közeg sűrűségét azonosnak tekintve a folytonossági egyenletet is figyelembe véve a határretegben a sebességeloszlás meghatározható,

$$\rho \left(v_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \right) = \rho u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial n^2} \right), \quad (6.160)$$

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0. \quad (6.161)$$

6.8. Feladatok

6.8.1. Feladat

Adja meg Kelvinben és Fahrenheit fokban a 45 C° hőmérséklet értéket.

Megoldás

$$T_K = T_C + 273 = 318\text{ K}, \quad T_F = 9T_C/5 + 32 = 113\text{ F}^\circ.$$

6.8.2. Feladat

Adja meg Kelvinben és Celsius fokban a $39,2\text{ F}^\circ$ hőmérséklet értéket.

Megoldás

$$T_C = 5(T_F - 32)/9 = 4\text{ C}^\circ, \quad T_K = T_C + 273 = 277\text{ K}.$$

6.8.3. Feladat

Hidrogéngáz 20 atm nyomáson -235 C° hőmérsékleten cseppfolyósítható. Adja meg ezt a hőmérsékletet Fahrenheit fokban és Kelvinben is.

Megoldás

$$T_K = T_C + 273 = -235 + 273 = 38 \text{ K}, \quad T_F = 9T_C/5 + 32 = -391 \text{ F}^\circ.$$

6.8.4. Feladat

Határozza meg, mekkora a gázállandója annak a gáznak, amely 2 g tömegének 0 C° hőmérsékleten, 80 kPa nyomáson a térfogata 1,5 liter.

Megoldás

A $p/(m/V) = RT$ összefüggés alapján a gázállandó értéke $R = pV/(mT)$, $R = 219,7802 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

6.8.5. Feladat

4 g tömegű, 1 atm nyomású, 273 K hőmérsékletű hélium gáz nyomása változatlan térfogat mellett felére csökken. Határozza meg a gáz állapotváltozás utáni hőmérsékletét.

Megoldás

Mint hogy a gáz tömege nem változik, az általános gáztörvény alkalmazásával, $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$, figyelembe véve, hogy a gáz térfogata állandó $V_1 = V_2$, a nyomása pedig a felére csökken $p_2 = p_1/2$, így az állapotváltozás után a gáz hőmérséklete $T_2 = T_1/2 = 136,5000 \text{ K}$ lesz.

6.8.6. Feladat

64 g tömegű levegő 3 atm nyomáson 30°C hőmérsékletéről olyan hőmérsékletre melegszik, amelyen a térfogata 35 dm³ lesz. Határozza meg, mekkora volt a levegő térfogata és mekkora hőmérsékletre melegedett, ha $R_{\text{levegő}} = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A gázállandó felhasználásával $p_1/(m/V_1) = RT_1$ az állapotváltozás előtt a levegő térfogata $V_1 = mRT_1/p_1 = 18,6 \text{ dm}^3$. Mint hogy az állapotváltozás állandó nyomáson zajlik, a levegő új hőmérséklete $T_2 = T_1V_2/V_1 = 570,1613 \text{ K} = 297,1613 \text{ C}^\circ$ lesz.

6.8.7. Feladat

20 g tömegű, 1 atm nyomású, 300 K hőmérsékletű gáz nyomása változatlan térfogat mellett felére csökken. Határozza meg, mekkora volt a gáz sűrűsége és mekkora lesz a hőmérséklete az állapotváltozás után, ha $R_{gáz} = 325 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

Kiindulási állapotban az általános gáztörvényből $p_1/\rho_1 = RT_1$ a gáz sűrűsége $\rho_1 = p_1/RT_1 = 10^5/(325 \cdot 300) = 1,0256 \text{ kg}/\text{m}^3$, az állapotváltozás utáni hőmérséklete pedig $T_2 = T_1/2 = 150 \text{ K}$ lesz.

6.8.8. Feladat

Egy ideális gáz nyomása 15,2 bar, hőmérséklete 25 C° , térfogata 10 liter. Határozza meg a tartályban lévő gáz tömegét és sűrűségét, ha $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A $p/\rho = RT$ összefüggés felhasználásával a gáz sűrűsége $\rho = p/RT$, $\rho = 17,7724 \text{ kg}/\text{m}^3$, a tömege pedig $m = \rho V = 17,7724 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0,1777 \text{ kg}$.

6.8.9. Feladat

94 g oxigén 5 atm nyomáson 25 C° hőmérsékletéről olyan hőmérsékletre melegszik, hogy a térfogata 20 dm^3 lesz. Határozza meg, mennyi volt a gáz térfogata az állapotváltozás előtt és mekkora lesz a hőmérséklete, ha $R_{oxigén} = 260 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A kiindulási állapotban $p_1 V_1/m = R_{oxigén} T_1$ összefüggés felhasználásával a gáz kezdeti térfogata $V_1 = m \cdot R_{oxigén} T_1/p_1 = 0,0146 \text{ m}^3 = 14,6 \text{ dm}^3$. Figyelembe véve, hogy az állapotváltozás állandó nyomáson megy végbe, az általános gáztörvényből $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$ a gáz hőmérséklete $T_2 = T_1 V_2/V_1 = 408,2192 \text{ K} = 135,2192 \text{ C}^\circ$ lesz.

6.8.10. Feladat

Határozza meg, mekkora volt annak az 50 g tömegű gáznak a térfogata, amelyet 2,5 atm nyomáson 40 C° hőmérsékletéről olyan hőmérsékletre melegedett, hogy térfogata 60 dm³ lesz, ha $R = 295 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A gáztörvény alapján a kiindulási állapotban $p_1/\rho_1 = RT_1$ összefüggésből a gáz térfogata $V_1 = mRT_1/p_1 = 0,05 \cdot 295 \cdot (40 + 273)/(2,5 \cdot 10^5) = 0,0185 \text{ m}^3 = 18,5 \text{ liter}$.

6.8.11. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz annak a 40 g/dm³ sűrűségű, 20 C° hőmérsékletű, 1,2 atm nyomású gáznak a hőmérséklete, amely nyomása változatlan térfogat mellett 1,6 bar értékre változik, $R = 292 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

Állandó térfogat mellett az általános gáztörvényt alkalmazva $T_2 = T_1 p_2/p_1$, ahonnan $T_2 = (20 + 273) \cdot (1,6 \cdot 10^5)/(1,2 \cdot 10^5) = 390,6667 \text{ K} = 117,6667 \text{ C}^\circ$.

6.8.12. Feladat

Határozza meg, mekkora lesz annak a 20 g, 4 liter térfogatú, 280 K hőmérsékletű gáznak a nyomása, amely sűrűsége változatlan térfogat mellett 0,8 kg/m³ értékre változik, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A $p/\rho = RT$ összefüggés alapján $p_2 = \rho_2 RT_2$, $p_2 = 0,8 \cdot 287 \cdot 280 = 0,64288 \text{ atm}$.

6.8.13. Feladat

Határozza meg, mekkora hőmérsékletre melegszik 4,2 atm nyomáson a 85 g tömegű, 32 C° hőmérsékletű gáz, ha térfogata 18 dm³ lesz, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A $p/\rho = RT$ összefüggés alapján $T_2 = p_2 V_2/mR = 309,8996 \text{ K} = 36,8996 \text{ C}^\circ$.

6.8.14. Feladat

Egy gáz nyomása 12 bar , hőmérséklete 35 C° , térfogata 12 liter . Határozza meg a tartályban lévő gáz sűrűségét és tömegét, ha $R = 260\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

Felhasználva a $p/\rho = RT$ összefüggést, a gáz sűrűsége $\rho = 14,9850\text{ kg}/\text{m}^3$, tömege $m = \rho V = 14,9850 \cdot 12 \cdot 10^{-3}\text{ kg} = 0,1798\text{ kg}$.

6.8.15. Feladat

Héliummal töltött 500 m^3 térfogatú léggömb nyomása induláskor 1atm, hőmérséklete 27 C° . Határozza meg, mennyi lesz a léggömb térfogata olyan magasságban, ahol a hőmérséklet -5 C° , a légnyomás pedig $0,5\text{ atm}$.

Megoldás

Az általános gáztörvényt alkalmazva $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$, a léggömb térfogata $V_2 = V_1p_1T_2/p_2T_1 = 500 \cdot 1 \cdot (-5 + 273)/(0,5 \cdot (27 + 273)) = 893,3333\text{ m}^3$.

6.8.16. Feladat

10 liter nitrogéngázt 27 C° hőmérsékleten, 1atm nyomáson beletöltenek egy üres, 5 liter térfogatú tartályba. Határozza meg, mennyi lesz a gáz nyomása, ha közben a hőmérséklete 17 C° értékre csökken.

Megoldás

Az általános gáztörvény felhasználásával $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$, az áttöltés után a gáz nyomása $p_2 = p_1V_1/V_2 \cdot T_2/T_1$, $p_2 = 1,0345 \cdot 10^6\text{ Pa} = 10,345\text{ atm}$ lesz.

6.8.17. Feladat

Határozza meg, mekkora erőt fejt ki egy vízzel töltött $50\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ alapterületű, 30 cm magas akvárium a medence fenekére. Határozza meg, mekkora a nyomás a medence fenekén, ha a víz sűrűsége $\rho = 10^3\text{ kg}/\text{m}^3$.

Megoldás

A víz térfogata $V = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,0600\text{ m}^3$, a nyomóerő a víztömeg súlya, $F = G = mg = V\rho g = 0,06 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 588,6000\text{ N}$, a fenéken a nyomás az egységnyi

felületre ható nyomóerő, $p = F/A = 588,6000/(0,5 \cdot 0,4) = 2943 \text{ Pa}$, önállóan is számítható a vízoszlop magasságából, $p = \rho gh = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,3 = 2943 \text{ Pa}$.

6.8.18. Feladat

Határozza meg, milyen magasan áll a felül zárt tartályban az $5,2 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű folyadék, a folyadék felett 1350 Hgmm , míg a tartály alján $2,8 \text{ bar}$ nyomás mérhető (a higany sűrűsége $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ kg/dm}^3$).

Megoldás

A tartály alján mérhető hidrosztatikai nyomás $p_2 = p_1 + \rho gh$ alapján a folyadékoszlop magassága $h = (p_2 - p_1)/\rho g = 1,9581 \text{ m}$.

6.8.19. Feladat

Egy zárt tartályban egymással nem keveredő folyadék felett $1,2 \text{ bar}$ nyomás van. Határozza meg a tartály alján a nyomás értékét, ha a felső folyadékréteg magassága $2,2 \text{ m}$, sűrűsége $0,880 \text{ kg/dm}^3$, az alsó réteg magassága $2,8 \text{ m}$, sűrűsége $1,2 \text{ kg/dm}^3$.

Megoldás

A tartály alján a nyomás az egyes hidrosztatikai nyomások összege, azaz $p = p_t + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2 = 1,2 \cdot 10^5 + (0,88 \cdot 10^3 \cdot 2,2 + 1,2 \cdot 10^3 \cdot 2,8) \cdot 9,81 = 1,7195 \text{ bar}$.

6.8.20. Feladat

Határozza meg, mekkora nyomást fejt ki a 280 cm magas, 5 kg/dm^3 sűrűségű folyadék a felül nyitott tartály aljára, ha a külső légnyomás 1 atm .

Megoldás

A tartály alján a nyomás a hidrosztatikai nyomás és a külső légnyomás összege, $p = p_0 + \rho gh = 10^5 + 2,8 \cdot 5 \cdot 10^3 = 114000 \text{ Pa} = 1,14000 \text{ bar}$.

6.8.21. Feladat

Határozza meg, mekkora sebességgel kezd kiáramlani egy $1,2 \text{ m}$ magas, felül nyitott tartály alján a benne lévő folyadék.

Megoldás

A hidrosztatikai nyomásból a sebesség $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,2} = 4,8522 \text{ m/s}$.

6.8.22. Feladat

Határozza meg, hányszorosára változik a 3 m magas tartályból kiáramló folyadék sebessége, ha a folyadékoszlop magassága a felére csökken.

Megoldás

A hidrosztatikai nyomás és sebesség $\rho gh = \rho v^2/2$ kapcsolata alapján a sebességváltozás mértéke $v_{1/2}/v_1 = \sqrt{(2gh/2)/(2gh)} = 1/\sqrt{2} = 0,707$.

6.8.23. Feladat

Határozza meg, hányszorosára változik a 9 m magas tartályból kiáramló folyadék sebessége, ha a folyadékoszlop magassága a harmadára csökken.

Megoldás

A hidrosztatikai nyomás és sebesség $\rho gh = \rho v^2/2$ kapcsolata alapján a sebességváltozás mértéke $v_{1/3}/v_1 = \sqrt{(2gh/3)/(2gh)} = 1/\sqrt{3} = 0,5774$.

6.8.24. Feladat

Egy 25 cm élhosszúságú fa kocka sűrűsége 520 kg/m^3 . Határozza meg, milyen mélyen merül a folyadékba, ha annak sűrűsége 920 kg/m^3 .

Megoldás

A kocka súlyereje egyensúlyt tart a hidrosztatikai felhajtó erővel, $\rho_{kocka} g a^3 = \rho_{foly} g a^2 x$, ahonnan $x = 0,25 \cdot 520/920 = 0,1413 \text{ m} = 14,13 \text{ cm}$.

6.8.25. Feladat

10 km magasságban a légnyomás 210 Hgmm , a repülőgép belsejében a légnyomás 760 Hgmm . Határozza meg, mekkora erő hat a repülőgép $50 \times 50 \text{ cm}^2$ méretű ablakára a légnyomáskülönbség miatt, ha a higany sűrűsége $13,6 \text{ kg/dm}^3$.

Megoldás

A nyomáskülönbség $\Delta p = \rho g \Delta h = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (0,076 - 0,021) = 7,3379 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, az ablakra ható nyomóerő $F = \Delta p \cdot A = 7,3379 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-4} = 1,8345 \cdot 10^3 \text{ N}$.

6.8.26. Feladat

Határozza meg, milyen magasan áll a felül zárt tartályban a $6,4 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű folyadék, ha a folyadék felett 960 Hgmm , míg a tartály alján $2,2 \text{ bar}$ nyomás mérhető (a higany sűrűsége $13,6 \text{ kg/dm}^3$).

Megoldás

A tartály alján mért nyomás a folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása és a felette lévő nyomás összege, $p_2 = \rho g h + p_1$, ahonnan a folyadékoszlop magassága $h = (p_2 - p_1) / \rho g = 1,4641 \text{ m}$.

6.8.27. Feladat

Egy felül zárt tartályban a folyadék felett $1,2 \text{ bar}$ nyomás van. Határozza meg, milyen magasan áll a $6,8 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű folyadék a tartályban, ha a tartály alját négyzetcentiméterenként $34,6 \text{ N}$ erő nyomja.

Megoldás

A tartály alján fellépő $p_2 = F / A = 34,6 \text{ N/cm}^2 = 34,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ nyomást a tartályban lévő folyadék hidrosztatikai nyomása és a felette levő nyomás hozza létre, $p_2 = \rho g h + p_1$, ahonnan a folyadék magassága $h = (p_2 - p_1) / \rho g$, $h = (3,6 - 1,2) \cdot 10^5 / (6,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81) = 3,5978 \text{ m}$.

6.8.28. Feladat

Azonos folyadékot tartalmazó, egy felül nyitott és egy felül zárt tartály alját 1220 Hgmm kitérést mutató higanyos U-csöves manométer köt össze. Határozza meg a két tartályban lévő $3,2 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű folyadékoszlopok magasságkülönbségét, ha a zárt tartályban a nyomás $1,4 \text{ bar}$, és a külső légnyomás 1 atm (a higany sűrűsége $13,6 \text{ kg/dm}^3$).

Megoldás

A zárt és a nyitott tartály nyomáskülönbsége a manométer kitérése, azaz $(p_1 + \rho g h_1) - (p_2 + \rho g h_2) = \rho_{Hg} g h_{Hg}$, ahonnan $\Delta h = [\rho_{Hg} g h_{Hg} - (p_2 - p_1)] / \rho g$, $\Delta h = h_1 - h_2 = (13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1,220 - (1,4 \cdot 10^5 - 10^5)) / (3,2 \cdot 10^3 \cdot 9,81) = 3,9108 \text{ m}$.

6.8.29. Feladat

Egy víztartály oldalán, a víz felszínétől 2,5 m mélyen egy 3 mm átmérőjű lyuk található, amelyen át víz folyik ki a szabadba. Határozza meg, hány m³ víz távozik óránként, a víz sűrűsége 1 kg/dm³.

Megoldás

A távozó folyadék térfogatárama $q_v = Av = d^2\pi/4 \cdot v = 0,003^2 \cdot \pi/4 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,5}$,
 $q_v = 4,9505 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 0,1782 \text{ m}^3/\text{h}$.

6.8.30. Feladat

Egy 4 cm belső átmérőjű csőben víz áramlik. A cső 1,2 cm belső átmérőre szűkül össze, ahol a víz átlagos sebessége 8 m/s. Határozza meg a cső vastagabb részén a vízáram sebességét.

Megoldás

A térfogatáram folytonosságából a keresett sebesség $v_1 = v_2 r_2^2 / r_1^2 = 0,7200 \text{ m/s}$.

6.8.31. Feladat

Egy 20 cm/s sebességgel vért szállító ér átmérője 0,5 cm. Az ér két 0,3 cm átmérőjű érré ágazik szét. Határozza meg, mekkora a véráram sebessége ezekben az erekben.

Megoldás

A 0,5 cm átmérőjű és keresztmetszete $A_1 = r^2\pi = (0,5/2)^2\pi = 0,1963 \text{ cm}^2$, a 0,3 cm átmérőjű ér keresztmetszete $A_2 = (d/2)^2\pi = (0,3/2)^2\pi = 0,0707 \text{ cm}^2$. A térfogatáram folytonosságából $A_1v_1 = 2(A_2v_2)$, ahonnan az ér szétágazása után a véráram sebessége $v_2 = (A_1v_1)/(2A_2) = 27,7778 \text{ cm/s}$.

6.8.32. Feladat

Egy víztartály aljából egy 1 cm² keresztmetszetű résen át folyik ki a víz. Határozza meg, hány liter víz távozik óránként, ha a tartályban 12 m magasan áll a víz. A víz sűrűsége 1 kg/dm³.

Megoldás

A térfogatáram $q_v = A\sqrt{2gh} = 0,0015 \text{ m}^3/\text{s} = 5,5239 \text{ m}^3/\text{h}$.

6.8.33. Feladat

Egy 30 mm átmérőjű csőben 4 m^3 víz áramlik óránként. A csővezeték két 20 mm átmérőjű csőre ágazik szét, amelyből az egyikben a víz sebessége $2,1 \text{ m/s}$. Határozza meg, mekkora a víz sebessége a másik csőben.

Megoldás

A be és kiáramló térfogatáram egyenlőségéből beáramló térfogatáram $q_{vbe} = 4 \text{ m}^3/\text{h} = 4/3600 = 0,0011 \text{ m}^3/\text{s}$, az első csővön kiáramló közeg térfogatárama $q_{vki1} = Av_1 = d^2\pi/4 \cdot v_1 = 0,02^2\pi/4 \cdot 2,1 = 6,5973 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, a második csővön kiáramló folyadék térfogatárama $q_{vki2} = q_{vbe} - q_{vki1} = 0,0011 - 6,5973 \cdot 10^{-4}$, $q_{vki2} = 4,4027 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, ahonnan a folyadék sebessége $v_2 = q_{vki2}/A = 1,4014 \text{ m}^3/\text{s}$.

6.8.34. Feladat

Vízszintes síkban lévő csőrendszer $A_1 = 25 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű darabja $A_2 = 20 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű részhez csatlakozik, amelyből a víz kifolyhat a szabadba, ($p_0 = 1 \text{ atm}$). Határozza meg, mekkora nyomás szükséges az első csőben ahhoz, hogy a víz a második csőből $v_2 = 5 \text{ m/s}$ sebességgel áramoljon ki ($\rho_{\text{víz}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$).

Megoldás

A térfogatáram folytonosságából $A_1v_1 = A_2v_2$ az első csőben a víz sebessége $v_1 = (A_2v_2)/A_1 = (20 \cdot 10^{-4} \cdot 5)/(25 \cdot 10^{-4}) = 4 \text{ m/s}$. Az áramló folyadék mozgási energiájából (Bernoulli egyenlet) $p_1 + (\rho v_1^2)/2 = p_0 + (\rho v_2^2)/2$, a megadott sebességgel való kiáramláshoz az első csőben a nyomás $p_1 = p_0 + \rho(v_2^2 - v_1^2)/2$, $p_1 = 10^5 + 10^3(5^2 - 4^2)/2 = 104500 \text{ Pa} = 1,04500 \text{ atm}$.

6.8.35. Feladat

Határozza meg, mekkora sebességgel kezd kiáramlani a folyadék a felül nyitott 45 cm magas tartályból, ha a kifolyó nyílás a tartály alján helyezkedik el.

Megoldás

A folyadék energiaegyensúlyi egyenletéből (Bernoulli egyenlet) $\rho gh = \rho v^2/2$, a kiáramló folyadék kezdősebessége $v = \sqrt{2gh} = 2,9714 \text{ m/s}$.

6.8.36. Feladat

Egy tartályon lévő nyíláson a víz 8,2 m/s sebességgel áramlik ki. Határozza meg, mekkora lesz a 23 cm -rel magasabban lévő nyíláson a víz áramlási sebessége.

Megoldás

A folyadék energiaegyensúlyi egyenletéből (Bernoulli egyenlet) $\rho gh_1 = \rho v_1^2/2$ az első esetben a vízoszlop magassága $h_1 = v_1^2/2g$, a második nyílásnál a folyadékoszlop magassága $h_2 = h_1 - 0,23$, és sebessége $v_2 = \sqrt{2g(v_1^2/2g - 0,23)} = 7,9201 \text{ m/s}$ lesz.

6.8.37. Feladat

Egy 30 mm belső átmérőjű csőben 0,25 bar nyomás mellett víz áramlik 1,4 m/s sebességgel. Határozza meg, mekkora lesz a víz sebessége és nyomása a csövön lévő 25 mm átmérőjű szűkületben, ha a víz sűrűsége 1 kg/dm^3 .

Megoldás

A térfogatáramból a szűkületben a folyadék sebessége $v_2 = A_1 v_1 / A_2 = 2,0160 \text{ m/s}$. Az energiaegyensúlyi egyenletből a szűkületi nyomás $p_2 = \rho(v_1^2 - v_2^2)/2 + p_1$
 $p_2 = 0,25 \cdot 10^5 + 1000 \cdot (1,4^2 - 2,016^2)/2 = 2,3948 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,23948 \text{ bar}$.

6.8.38. Feladat

Egy vízszintes, 25 mm átmérőjű csővezetékben a víz áramlik 1,3 m/s sebességgel, itt a nyomás 0,2 atm. Határozza meg, mekkora lesz a víz sebessége és a csőben a nyomás, ha a csővezeték 35 mm átmérőjűre bővül. A víz sűrűsége 1 kg/dm^3 .

Megoldás

A térfogatáram folytonosságából $v_1 A_1 = v_2 A_2$ a második csőszakaszban a folyadék sebessége $v_2 = v_1 A_1 / A_2 = 0,6633 \text{ m/s}$. Az áramló folyadék energiaegyensúlyából (Bernoulli egyenlet) $\rho v_1^2/2 + p_1 = \rho v_2^2/2 + p_2$ a nyomás $p_2 = 2,0625 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

6.8.39. Feladat

Egy 30 cm átmérőjű kémény alján 15 m/s sebességgel áramlik a $0,06 \text{ kg/m}^3$ sűrűségű füstgáz. Határozza meg a füst sebességét a 2,8 m magas kémény tetején.

Megoldás

A kémény alján lévő füstgáz mozgási energiája fedezi a kéményben fellépő hidrosztatikai nyomást és a kémény tetején a füstgáz mozgási energiáját, $\rho_1 v_1^2 / 2 = \rho_2 v_2^2 / 2 + \rho_1 g h$. A tömegáram $\rho_1 v_1 A = \rho_2 v_2 A$ folytonosságára vonatkozó összefüggésből a kémény tetején a gáz sűrűségének parametrikus kifejezése $\rho_2 = \rho_1 v_1 / v_2$, amelyet az előző mozgásegyenletbe helyettesítve a kapott $\rho_1 v_1^2 / 2 - \rho_1 g h = \rho_1 v_1 v_2 / 2$ összefüggésből a kémény tetején a gáz sebessége $v_2 = v_1 - 2gh / v_1 = 15 - 2 \cdot 9,81 \cdot 2,8 / 15 = 11,3376 \text{ m/s}$.

6.8.40. Feladat

Egy 45 cm átmérőjű kémény tetején 5,2 m/s sebességgel áramlik ki a $0,08 \text{ kg/m}^3$ sűrűségű füstgáz. Határozza meg, mekkora volt a füst sebessége a 3,2 m magas kémény alján.

Megoldás

A tömegáram folytonosságából a kémény alján a füstgáz sűrűsége $\rho_1 = \rho_2 v_2 / v_1$. A kémény alján a füstgáz mozgási energiája fedezi a kéményben fellépő hidrosztatikai nyomást és a kémény tetején a füstgáz mozgási energiáját, $\rho_1 v_1^2 / 2 = \rho_2 v_2^2 / 2 + \rho_2 g h$, ahonnan a kémény alján a füstgáz sebessége $v_1 = v_2 + 2gh / v_2 = 17,2738 \text{ m/s}$.

7. HŐTAN

A hőtán összefoglaló név a termodinamikai folyamatok és a hőátvitel formáinak elemzését foglalja össze. A termodinamikai folyamatok vizsgálata a műszaki fizika módszereinek megfelelően nem az elemi anyagrészek (molekulák, atomok) viselkedését elemzi, hanem véges nagyságú/térfogatú anyag makroszkopikus jellemzőinek, mint pl. térfogat, hőmérséklet, nyomás, energiaátalakulás hőtani viselkedését vizsgálja.

A hőtán két nagy fejezetre oszlik, az egyik a termodinamika, amely a hőtani folyamatok elemzésével, leírásával foglalkozik, a másik a hőátvitel, amely a hőenergia átadására vonatkozó problémákat, eljárásokat vizsgálja és oldja meg.

7.1. Termodinamikai alapfogalmak

7.1.1. A hőmérséklet és hőmérsékleti skálák

A *hőmérséklet* a hideg meleg érzet fokmérője. A hőmérsékletet hőmérővel szokás mérni. A hőmérők különböző fajtái ismeretesek, a mérendő hőmérséklet nagyságától függően fémek, folyadékok, gázok hőtágulásán, elektromos ellenállás változásán alapuló hőmérőket, infraszugárzó és optikai elven működő hőmérőket szokás alkalmazni. A gyakorlatban háromféle hőmérsékleti skála, a Celsius-skála, a Fahrenheit-skála, valamint a Kelvin-skála van forgalomban, *7.1. ábra*.

Celsius	Fahrenheit	Kelvin
100°C	212°F	373,160 K
0°C	32°F	273,16 K
-32°C	0°F	
-40°C	-40°F	0 K

7.1. ábra. Kapcsolat a Celsius, a Fahrenheit és a Kelvin hőmérsékleti skálák között

A Celsius-skálán mért hőmérséklet ismeretében a hőmérséklet Fahrenheit értéke, és Fahrenheit-skálán mért hőmérséklet Celsius-fokban a következő összefüggés szerint adható meg,

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32, \quad T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32). \quad (7.1)$$

A Celsius-skála és a Kelvin-skála hőmérsékleti értékei között a következő összefüggéssel fejezhető ki,

$$T_K = T_C + 273,16, \quad T_C = T_K - 273,16. \quad (7.2)$$

7.1.2. A hőtágulás

A hőmérséklet változásának hatására a testek mérete megváltozik, lineáris és térfogati hőtágulás jön létre.

(a) *Lineáris hőtágulás* esetén, a T_1 hőmérsékleten l hosszúságú, elhanyagolható keresztmetszetű, $a \ll l^2$ test hossza T_2 hőmérsékleten Δl értékkel megváltozik, 7.2. ábra.



7.2. ábra. Hosszváltozás lineáris hőtágulás esetén

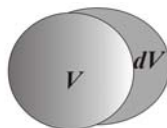
Kis hőmérsékletváltozás esetén $\Delta T = T_2 - T_1 \ll T_1$, a hosszváltozás mértéke Taylor sorral való közelítés alkalmazásával a következő alakban adható meg, $\Delta l = l(T_1) \cdot dl/dT \cdot \Delta T$. Bevezetve a $\alpha = dl/dT$ *lineáris hőtágulási együtthatót*, a test hossza T_2 hőmérsékleten a következő lesz,

$$l(T_2) = l(T_1) + \Delta l = l(T_1) + l(T_1) \frac{dl}{dT} \Delta T = l(T_1)(1 + \alpha \Delta T). \quad (7.3)$$

(b) *Térfogati (köbös) hőtágulásnál* a T_1 hőmérsékletű test $V(T_1)$ térfogata ΔV térfogattal megváltozik, miközben a test hőmérséklete T_2 értékre nő, 7.3. ábra.

Ugyancsak kis hőmérsékletváltozást feltételezve, $\Delta T = T_2 - T_1 \ll T_1$ és a Taylor sorral való közelítést alkalmazva a térfogatváltozás mértéke $\Delta V = V(T_1) \cdot dV/dT \cdot \Delta T$. Bevezetve a $\beta = dV/dT$ *köbös hőtágulási együtthatót*, a test térfogata T_2 hőmérsékleten a következő lesz,

$$V(T_2) = V(T_1) + \Delta V = V(T_1) + V(T_1) \frac{dV}{dT} \Delta T = V(T_1)(1 + \beta \Delta T). \quad (7.4)$$



7.3. ábra. Térfogat változás köbös hőtágulás esetén

(c) Figyelembe véve, hogy a térfogat a hossz harmadik hatványával fejezhető ki, kapcsolatot teremthető a lineáris és a köbös hőtágulási együtthatók között,

$$V(T_2) = l^3(T_2) = l^3(T_1)(1 + \alpha \Delta T)^3 = l^3(T_1)(1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3), \quad (7.5)$$

kis hőmérsékleti változást feltételezve a másodfokú és harmadfokú tagok elhanyagolásával

$$V(T_2) \approx l^3(T_1)(1 + 3\alpha \Delta T) = V(T_1)(1 + \beta \Delta T), \quad (7.6)$$

a köbös hőtágulási együttható közelíthető a lineáris hőtágulási együttható háromszorosával,

$$\beta \approx 3\alpha. \quad (7.7)$$

7.1.3. Fajtérfogat, móltérfogat

(a) Az átlagos fajlagos térfogat a fajtérfogat, amely a V térfogat és az m tömeg aránya, azaz

$$\bar{v} = \frac{V}{m}, \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right], \quad (7.8)$$

az átlagos fajlagos sűrűség pedig az egységnyi térfogatban helyet foglaló tömeg, azaz

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V}, \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]. \quad (7.9)$$

A fenti mennyiségek globális változóként ismeretesek, míg lokális változó a fajlagos térfogat és a fajlagos sűrűség, amely a dV térfogatban elhelyezkedő dm

anyagmennyiséget mutatja, azaz a geometriai tér egy pontjában az dV térfogatban lévő anyagmennyiséget ill. a dm anyagmennyiség térfogatát jellemzi,

$$v = \frac{dV}{dm}, \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right], \quad \rho = \frac{dm}{dV}, \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]. \quad (7.10)$$

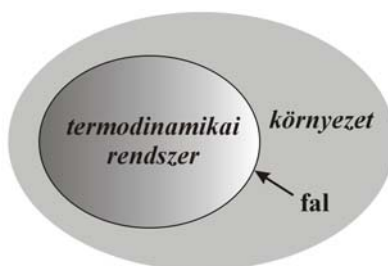
(b) A *móltérfogat* extenzív állapotjelzőként alkalmazott változó, amely az anyag V térfogatában elhelyezkedő molekulák számát jelzi, azaz az m tömegű, M moláris tömegű közegben $N = m/M$ molekula helyezkedik el, ahonnan a móltérfogat

$$V_{mol} = \frac{V}{N} = \frac{V}{m/M}, \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]. \quad (7.11)$$

7.1.4. A termodinamikai rendszer

A termodinamikai rendszert egy makroszkopikus objektumként szokás tekinteni (7.4. ábra), amelyet a vizsgált objektum tömegével, térfogatával, nyomásával, hőmérsékletével, energiájával, energia áramlásával és tömegmozgásával szokás jellemezni.

- *Zárt termodinamikai rendszer* esetén a zárt felülettel határolt, véges mennyiségű anyag/közeg termodinamikai vizsgálatára kerül sor;
- *Nyitott termodinamikai rendszer* esetén véges nagyságú, meghatározott térrész termodinamikai vizsgálata történik;
- A termodinamikai rendszert a környezetétől elválasztó *fal* zárt rendszer esetén a vizsgált anyag számára áthatolhatatlan, míg nyitott termodinamikai rendszer vizsgálata során az anyag számára áthatolható;
- A *termodinamikai rendszer és környezete* között a termodinamikai rendszer falán keresztül hőhatás formájában energiacsere zajlik.



7.4. ábra. A termodinamikai rendszer és környezete közti kapcsolat

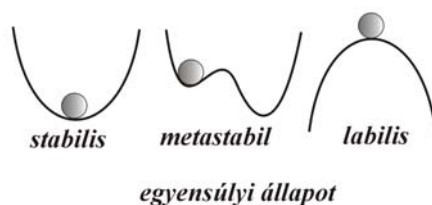
A termodinamikai rendszer állapota a rendszer mérhető paramétereivel azonosítható; ezek a jellemzők a termodinamikai rendszer állapotjelzői, amelyek lehetnek intenzív/belső, ill. extenzív/külső állapotjelzők. Intenzív állapotjelzők, pl. a p nyomás és a T hőmérséklet, míg extenzív állapotjelzők, pl. az m tömeg, a V térfogat, a rendszer U belső energiája, H entalpiája és S entrópiája.

A termodinamikai rendszer állapotváltozásai létrejöhetnek:

- Állandó térfogat mellett, ($V = \text{áll}$), ekkor *izochor* folyamat zajlik le;
- Állandó nyomás mellett, ($p = \text{áll}$), ekkor *izobár* a lezajló folyamat;
- Állandó hőmérsékleten, ($T = \text{áll}$), ekkor *izotermikus* a termodinamikai folyamat;
- Ha a termodinamikai rendszer és környezete között nincs hőátadás, ($Q = \text{áll}$), akkor *adiabatikus* a termodinamikai rendszerben lezajló folyamat;
- Ha a termodinamikai rendszer állapotváltozása során a rendszer entrópiája nem változik, $dS = 0$, *izotrópikusnak* tekinthető;
- *Politropikus* a termodinamikai folyamat, ha a termodinamikai rendszer és környezete közötti hőcsere nagyon kicsi, de nem elhanyagolható, azaz a termodinamikai rendszer se nem izotermikus, se nem adiabatikus.

7.1.5. A termodinamikai rendszer egyensúlya

Egy magára hagyott, a külső környezettől elszigetelt zárt rendszerben, mint pl. a mechanikai, kémiai és termodinamikai rendszerekben, többféle egyensúlyi állapot figyelhető meg úgy, mint stabilis, metastabil és labilis egyensúlyi állapotok, 7.5. ábra.



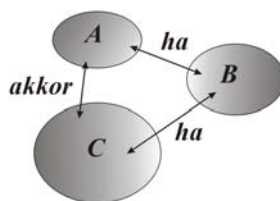
7.5. ábra. Tipikus egyensúlyi állapotok

Stabilis az egyensúlyi állapot, ha a rendszer energiája minimális; metastabil állapotban a rendszer lokálisan minimális energiaszinten helyezkedik el, ez azonban nem az abszolút minimum szintet jelöli; labilis az energiaegyensúlyi állapot ha a rendszer maximális energia-befektetést igényel.

(a) A *termodinamika 'nulladik' főtétele* a termikus egyensúlyra vonatkozik. Ez szerint a magára hagyott, zárt termodinamikai rendszerben a geometriai tér pontjaiban lévő nyomás- és hőmérséklet-különbség lassan kiegyenlítődik, és amikor további nyomás- és hőfokváltozás már nem figyelhető meg, a rendszer termikus egyensúlyba

kerül. Az egyensúlyi állapot kialakulásához a termodinamikai rendszer intenzív állapotjelzői stabilis állapotba kerülnek.

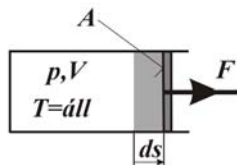
Ha két, az A és a B termodinamikai rendszerek között a termodinamikai kölcsönhatás következtében termodinamikai egyensúly alakul ki, továbbá, ha a B rendszer termodinamikai egyensúlyban van a C rendszerrel, akkor termodinamikai egyensúly van az A és a C rendszer között is, 7.6. ábra.



7.6. ábra. A termodinamikai rendszerek közti egyensúlyra vonatkozó 'nulladik' főtétel

7.1.6. A (fizikai) munka

Ha egy $T = \text{áll}$ hőmérsékletű, p nyomású, V térfogatú hengerben (7.7. ábra) a dugattyú az \vec{F} erő hatására $d\vec{s}$ távolságon elmozdul, munkavégzés jön létre.



7.7. ábra. A fizikai munka

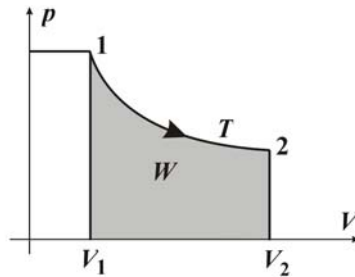
A dugattyú $d\vec{s}$ elmozdulása során létrejött dW munkavégzés, figyelembe véve, hogy az erő az \vec{A} felületre ható p nyomással kifejezhető,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = p\vec{A} \cdot d\vec{s} = pdV, \quad (7.12)$$

miközben dugattyú térfogata V_1 értékről V_2 értékre változik, (7.8. ábra), a teljes munkavégzés, a fizikai munka

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV, \quad (7.13)$$

amely pozitív értékű, ha a rendszer végzi a munkát a környezetén és negatív értékű, ha a rendszeren végez munkát annak környezete. A munka nem állapotjelző.

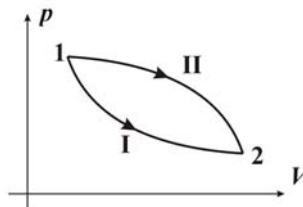


7.8. ábra. A rendszer által végzett (fizikai) munka

A termodinamikai rendszerekben a munkavégzés nem határozható meg a kezdő és végállapotok ismeretében. Feltéve, hogy a termodinamikai rendszer az (1) egyensúlyi állapotból a (2) egyensúlyi állapotba kerül egymástól eltérő folyamat során, a két folyamatot a 7.9. ábrán az I, ill. a II görbe jelzi. A két folyamatgörbe alatti terület, a két folyamat során különböző lesz a munkavégzés,

$$\int_{p_1, V_1}^{p_2, V_2} pdV \neq \int_{p_1, V_1}^{p_2, V_2} pdV. \quad (7.14)$$

(I) (II)



7.9. ábra. A munkavégzés nem határozható meg a kezdő és a végállapot ismeretében

7.1.7. A hőenergia, hőmennyiség

Ha két, egy hidegebb és egy melegebb rendszer érintkezik egymással, a közös felületen hőmennyiség, hőenergia áramlása jön létre a két rendszer között az állandósult állapot beálltáig, azaz a két rendszer között termodinamikai egyensúly alakul ki; a melegebb rendszer lehül, miközben a hidegebb rendszer felmelegszik. A hőenergia áramlása tömegáram nélkül is értelmezett. A közölt vagy elvont hőmennyiség azonban nem állapotjelző, mivel a két egyensúlyi állapot között számtalan úton el lehet jutni.

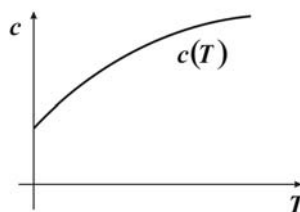
(a) Valamely termodinamikai rendszer m tömegének hőmérsékletének dT értékkel való megváltoztatásához dQ hőmennyiségre van szükség,

$$dQ = c m dT, \quad [\text{J}], \quad [\text{cal}], \quad 1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}, \quad (7.15)$$

ahol c a rendszer átlagos fajhője

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad [\text{J}/\text{kgC}^\circ]. \quad (7.16)$$

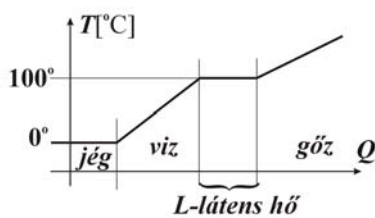
A fajhő hőmérséklet-függését a 7.10. ábra mutatja. A víz fajhője állandónak tekintve $c_{\text{víz}^\circ} = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$.



7.10. ábra. A fajhő hőmérsékletfüggése

(b) Anyagok melegítése során *fázisátalakulások* jönnek létre, pl. a jégből víz, a forrásponton lévő vízből gőz keletkezik. A fázisátmenethez szükséges hőmennyiség az L *látens hő*, (7.11. ábra). Az m tömeg fázisátalakulásához szükséges hőmennyiség

$$Q = mL. \quad (7.17)$$



7.11. ábra. A fázisátmenethez szükséges látens hő fogalma

Víz esetében a 0 C° hőmérsékleten, 10^5 Pa nyomáson a víz olvadási/fagyási látens hője $L_f = 333,6\text{ kJ/kg}$, míg 100 C° hőmérsékleten és 10^5 Pa nyomáson a víz párolgási/lecsapódási látens hője $L_p = 2256\text{ kJ/kg}$.

7.1.8. A belső energia

A termodinamikai rendszerben lévő anyag részecskéinek (atomok, molekulák) rendezetlen mozgásából származó kinetikus és potenciális energia a termodinamikai rendszer egyensúlyi állapotában is megmarad. Ezt az energiát a rendszer U , [J], [cal], *belső energiájaként* vezetve be, extenzív állapotjelzőként szolgál.

Az állapotjelző csak állapotjelzőtől függhet, így a termodinamikai rendszer U belső energiája a rendszer T hőmérsékletétől, a p nyomásától és a vizsgált V térfogattól, mint állapotjelzőktől függhet,

$$U(p, V, T). \quad (7.18)$$

7.1.9. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok

Ha a termodinamikai rendszer két állapota között a befektetett energia visszanyerhető, az előző állapot visszaállítható, az állapotváltozási folyamat *reverzibilisnek* (termodinamikai folyamat megfordíthatónak) tekinthető, ha azonban a termodinamikai rendszer két állapota között befektetett energia nem nyerhető vissza, az előző állapot visszaállításához további energia-befektetés szükséges, az állapotváltozási folyamat *irreverzibilis* (a termodinamikai folyamat megfordíthatatlan).

7.2. A termodinamika I. főtétele

A termodinamika I. főtétele az általános energiamegmaradási törvénynek a termodinamikai rendszerekre való alkalmazásával kimondja, hogy a rendszerrel közölt Q hőenergia fedezi, egyrészt a rendszer dU belső energiájának megváltozását, másrészt a rendszer által a környezeten végzett W (fizikai) munkát, (7.12. ábra),

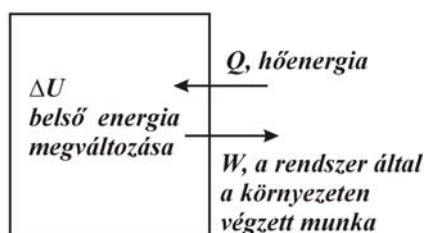
$$\Delta U = Q - W. \quad (7.19)$$

Meg kell jegyezni, hogy a termodinamikai rendszerben felhalmozott *belső energia* ΔU *megváltozása* határozható meg, nem pedig a rendszerben felhalmozott teljes belső energia nagysága.

Az energiaáramlás irányának megfelelően:

- a Q hőenergia pozitív, ha a rendszerrel hőközlés történik és negatív, ha hőelvonásra kerül sor;

- a W (fizikai) munka pozitív, ha a rendszer végez munkát a környezetén és negatív, ha a környezet végez munkát a rendszeren;
- a ΔU belső energia növekedése pozitív ($\Delta U = U_2 - U_1 > 0$, azaz $U_2 > U_1$), csökkenése negatív.



7.12. ábra. A termodinamika I. főtétele

(a) Zárt termodinamikai rendszerben a rendszer (1) és (2) állapota közötti energiaegyensúlyra vonatkozó összefüggés némi rendezés után a következő alakban adható meg

$$dQ = dU + dW, \quad (7.20)$$

ahol $dQ = Q_2 - Q_1$ a rendszerrel közölt/elvont hőenergia, $dU = U_2 - U_1$ a termodinamikai rendszer belső energia megváltozása, $dW = W_2 - W_1$ a rendszer által a környezetén végzett (fizikai) munka.

A fenti formában megfogalmazott termodinamika I. főtétele m tömegű anyagra vonatkozik. Nagyon gyakran elemi/egységnyi tömegre vonatkozó összefüggésekre van szükség a törvény általános megfogalmazáshoz. Bevezetve az m tömeggel normált (egységnyi tömegre vonatkozó) $dq = dQ/m$ fajlagos hőenergiát, $du = dU/m$ fajlagos belső energia megváltozást, $dw = dW/m = pdV/m = pdv$ fajlagos munkavégzést, a termodinamika I. főtétele zárt, elemi egyensúlyi, súrlódásmentes állapotváltozásra a következő lesz,

$$dq = du + pdv. \quad (7.21)$$

7.2.1. A technikai munka, az entalpia

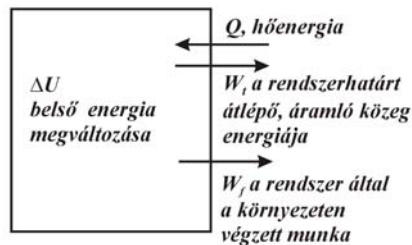
Nyitott termodinamikai rendszerekben a termodinamikai rendszer falán keresztül is történik energiaáramlás, amelyet az érkező, ill. távozó anyagmennyiség visz magával (7.13. ábra). Ez az energia a W_t technikai munka. Ekkor a termodinamikai rendszer energiataralmának megváltozása az energiaáramok és anyagáramok

figyelembevételével fogalmazható meg. Ha a rendszerbe betáplált energia $W_1 = U_1 + p_1V_1$, a rendszerből kivett energia $W_2 = U_2 + p_2V_2$, nem adiabatikus (hőenergiával táplált) nyitott rendszerből kivethető energia a W_t technikai munka,

$$W_t = Q - (W_2 - W_1) = Q + (U_1 + p_1V_1) - (U_2 + p_2V_2), \quad (7.22)$$

ahonnan az energiaegyensúlyi mérleg

$$Q - W_t = U + pV. \quad (7.23)$$



7.13. ábra. A technikai munka fogalma, nyitott rendszerben

Bevezetve a H entalpiát, mint állapotjelzőt

$$H = U + pV, \quad (7.24)$$

és az egységnyi tömegre normált $h = H/m$ fajlagos entalpiát,

$$h = u + pv, \quad (7.25)$$

a fajlagos entalpia megváltozása az energiaegyensúlyi egyenlet egy másik alakját adja,

$$dh = du + d(pv) = du + pdv + vdp, \quad (7.26)$$

ahol a jobb oldali első két tag a fajlagos hőenergiát jelöli,

$$dq = du + pdv, \quad (7.27)$$

míg az utolsó tag (7.23) alapján

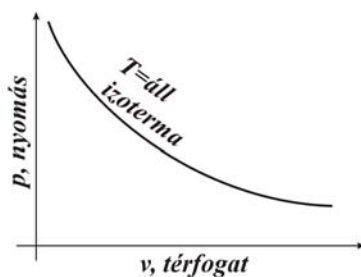
$$dh = dq - dw_t, \quad (7.28)$$

a fajlagos technikai munka mínusz egyszerűsége, $dw_t = -vdp$, azaz a nyitott rendszerbe betáplált hőenergia fedezi a rendszer belső energiájának megváltozását, a termodinamikai rendszernek a környezetén végzett (fizikai) munkáját és a rendszer falán a tömegárammal elvont energiát (7.26),

$$dq = dh + dw_t = du + pdv. \quad (7.29)$$

A fizikai munka ugyanúgy, mint a technikai munka kifejezhető állapotjelzőkkel, és ábrázolható a $p-v$ diagramon.

A 7.14. ábrán a $p-v-T$ állapotjelzők kapcsolata látható.

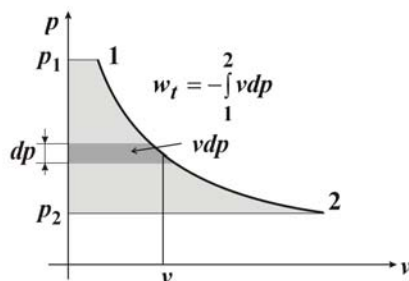


7.14. ábra. A $p-v-T$ állapotjelzők kapcsolata

Miközben a termodinamikai rendszer az (1) állapotból a (2) állapotba kerül, a rendszerből kivehető fajlagos technikai munka

$$w_t = \int_1^2 -vdp, \quad (7.30)$$

ami a $p-v$ diagramon az $p_1-1-2-p_2$ területtel arányos, azaz a technikai munkát az állapotváltozási görbe és a p tengely közti terület adja (7.15. ábra)



7.15. ábra. A technikai munka értelmezése

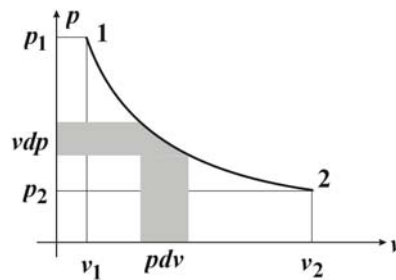
Kapcsolat adható meg a fajlagos technikai munka és a fajlagos (fizikai) munka között a $p-v$ diagramon az állapotváltozási görbe és a vízszintes, ill. a függőleges tengelyek alatti területek alapján (7.16. ábra). A termodinamikai rendszer (1) állapotából a (2) állapotba való átmenete során a fajlagos (fizikai) munka

$$w_f = \int_1^2 p dv, \quad (7.31)$$

amelynek az $v_1-1-2-v_2$ terület felel meg, a fajlagos technikai munka

$$w_t = -\int_1^2 v dp, \quad (7.32)$$

amelyet az $p_1-1-2-p_2$ terület szemléltet.



7.16. ábra. Kapcsolat a fajlagos technikai és fizikai munka között

A 7.16. ábra alapján tehát

$$w_t = w_f + p_1 v_1 - p_2 v_2, \quad (7.33)$$

azaz a technikai munka a fizikai munka és a $p_1 v_1$ belépési és a $p_2 v_2$ kilépési munka megváltozásából számítható.

7.2.2. A termodinamika I. főtétele különböző rendszerekben

Figyelembe véve, hogy a fajlagos entalpia megváltozása a fajlagos hőenergia és a fajlagos technikai munka megváltozásának különbsége,

$$dh = dq - dw_t = du + pdv + vdp, \quad (7.34)$$

továbbá a fajlagos hőenergia megváltozása a fajlagos belső energia és a fajlagos (fizikai) munka összege

$$dq = du + pdv = du + dw_f, \quad (7.35)$$

a különböző állapotjelzőkhöz rögzített rendszerekben a következő energiakapcsolatok adhatók meg:

- adiabatikus, $dq = 0$, zárt rendszernek a környezeten végzett w_f fajlagos (fizikai) munkája (7.35) szerint a fajlagos belső energia rovására történik, $dw_f = -du$;
- adiabatikus, $dq = 0$, nyitott rendszernek a w_t fajlagos technikai munkája (7.34) alapján a fajlagos entalpia rovására történik, $dw_t = -dh$;
- állandó térfogaton, $dv = 0$, közölt dq fajlagos hőenergia (7.35) szerint a termodinamikai rendszer fajlagos belső energiáját növeli, $dq = du$;
- állandó nyomáson, $dp = 0$, közölt dq fajlagos hőenergia (7.34) alapján a rendszer fajlagos entalpiáját növeli, $dq = dh$.

7.2.3. Izochoor és izobár fajhők közti kapcsolat

Mint ismeretes a dq fajlagos hőenergia megváltozása a c átlagos fajhő és a dT hőmérséklet változással adható meg $dq = cdT$. Gázok esetében azonban különbséget kell tenni az állandó térfogaton, ill. az állandó nyomáson történő melegítés között. Ha egységnyi tömegű gázmennyiséggel állandó térfogaton dq hőmennyiség közlésekor hőmérséklete dT értékkel megváltozik, az állandó térfogaton vett fajhő a következő

$$c_v = \left. \frac{dq}{dT} \right|_{v=\text{áll}} = \left. \frac{dq}{dT} \right|_v, \quad (7.36)$$

ugyanakkor ha a fenti folyamat állandó nyomáson zajlik le, az állandó nyomáson vett fajhő kifejezése a következő lesz,

$$c_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_{p=\text{áll}} = \left. \frac{dq}{dT} \right|_p. \quad (7.37)$$

A két fajhő nem azonos értékű, a köztük lévő kapcsolat megállapításához egyrészt a fajlagos hőenergiát a fajlagos belső energia és a fajlagos (fizikai) munka összegeként tekintve

$$dq = du + pdv, \quad (7.38)$$

és alkalmazva az állandó térfogaton vett fajhő (7.36) kifejezését, $dv = 0$ feltétel mellett

$$c_v = \left. \frac{dq}{dT} \right|_v = \left. \frac{du}{dT} \right|_v, \quad du = c_v dT, \quad (7.39)$$

másrészt a fajlagos hőenergiát a fajlagos entalpia és a fajlagos technikai munka összegeként tekintve

$$dq = dh - v dp, \quad (7.40)$$

és alkalmazva az állandó nyomáson vett fajhő (7.37) kifejezését, $dp = 0$ feltétel mellett

$$c_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_p = \left. \frac{dh}{dT} \right|_p, \quad dh = c_p dT, \quad (7.41)$$

az egyes fajhők a fajlagos belső energia és a fajlagos entalpia hőmérséklet szerinti megváltozásához vezetnek.

Feltéve, hogy a fajlagos belső energia a térfogat és a hőmérséklet, a fajlagos entalpia pedig a nyomás és a hőmérséklet függvénye, $u(v, T)$, $h(p, T)$, továbbá a fajlagos belső energia és a fajlagos entalpia teljes differenciálját tekintve,

$$du = \left. \frac{du}{dv} \right|_T dv + \left. \frac{du}{dT} \right|_v dT, \quad dh = \left. \frac{dh}{dp} \right|_T dp + \left. \frac{dh}{dT} \right|_p dT, \quad (7.42)$$

és behelyettesítve a (7.38), (7.40) egyenletekbe,

$$dq = du + p dv = dh - v dp, \quad (7.43)$$

$$c dT = \left. \frac{du}{dv} \right|_T dv + \left. \frac{du}{dT} \right|_v dT + p dv = \left. \frac{dh}{dp} \right|_T dp + \left. \frac{dh}{dT} \right|_p dT - v dp,$$

továbbá a dT hőmérsékletváltozással végigosztva (7.43) második egyenletét,

$$c = \left. \frac{du}{dv} \right|_T \frac{dv}{dT} + \left. \frac{du}{dT} \right|_v + p \frac{dv}{dT} = \left. \frac{dh}{dp} \right|_T \frac{dp}{dT} + \left. \frac{dh}{dT} \right|_p - v \frac{dp}{dT}, \quad (7.44)$$

némi rendezés után figyelembe véve (7.39) és (7.41) összefüggéseket a következő adódik,

$$c = \left(\left. \frac{du}{dv} \right|_T + p \right) \frac{dv}{dT} + c_v = \left(\left. \frac{dh}{dp} \right|_T - v \right) \frac{dp}{dT} + c_p. \quad (7.45)$$

Tehát a fajhők állandó térfogaton, izochor állapotváltozás esetén, mivel $dv/dT = 0$

$$c_v = \left(\frac{dh}{dp} \Big|_T - v \right) \frac{dp}{dT} + c_p, \quad (7.46)$$

ill. állandó nyomáson, izobár állapotváltozás esetén, mivel $dp/dT = 0$

$$c_p = \left(\frac{du}{dv} \Big|_T + p \right) \frac{dv}{dT} + c_v, \quad (7.47)$$

a fenti alakban adhatók meg.

Mint ahogy az ideális gáz termikus állapotegyenlete $pv = RT$, úgy a gáz fajlagos belső energiája, mint a fajlagos entalpiája csak a hőmérséklet függvényei, $u(T)$, $h(T)$, így

$$\frac{dh}{dp} \Big|_T = 0, \quad \frac{du}{dv} \Big|_T = 0, \quad (7.48)$$

ugyanakkor az ideális gáz állapotegyenletéből állandó térfogaton a nyomás, ill. állandó nyomáson a térfogat hőmérséklet függése,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{v}, \quad \frac{dv}{dT} = \frac{R}{p}, \quad (7.49)$$

amely összefüggések figyelembevételével a fajhők közötti (7.46), (7.47) kapcsolatra a következő adódik,

$$c_v = c_p - R, \quad c_p = c_v + R, \quad (7.50)$$

tehát az ideális gáz izochor és izobár fajhője közti különbség éppen a gázállandó,

$$c_p - c_v = R. \quad (7.51)$$

7.2.4. Ideális gázok állapotváltozásai

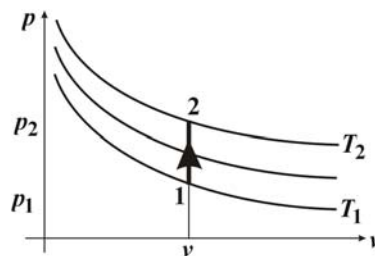
(a) *Állapotváltozás állandó térfogat mellett, izochor folyamat, $dv = 0$*

Ha hőközlés esetén a zárt rendszer térfogata nem változik, $dv = 0$, így izochor állapotváltozás esetén a termodinamikai rendszer nem végez munkát a környezetén (7.17. ábra),

$$w_f = \int_1^2 p dv = 0 . \quad (7.52)$$

A termodinamika I. főtétele alapján a befektetett hőenergia a rendszer belső energiáját növeli, hőelvonás a rendszer belső energiájának rovására történik,

$$dq = c_v dT = c_v(T_2 - T_1) = du . \quad (7.53)$$



7.17. ábra. Izochor folyamat p - v diagramja

Felhasználva az ideális gázok állandó térfogatra vonatkozó állapotegyenletét

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \Big|_v , \quad (7.54)$$

és azt a (7.53) kifejezésébe helyettesítve, a termodinamikai rendszerrel közölt hőmennyiség ($dq > 0$) megnöveli a gáz nyomását ($p_2 > p_1$), míg az elvont hőmennyiség a rendszerben a nyomást csökkenti,

$$dq = c_v T_1 \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right) . \quad (7.55)$$

(b) *Állapotváltozás állandó nyomás mellett, izobár folyamat, $dp = 0$*

Termodinamikai rendszerrel állandó nyomáson közölt hőmennyiség az I. főtétele értelmében egyrészt megnöveli a rendszer belső energiáját, másrészt elősegíti a rendszernek a környezetén végzett munkáját (7.18. ábra),

$$dq = c_p dT = du + p dv . \quad (7.56)$$

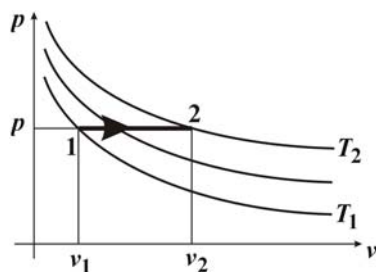
Felhasználva az izobár és izochor fajhők közti kapcsolatot, $c_p = c_v + R$, továbbá figyelembe véve állandó nyomáson az ideális gáz állapotegyenlete alapján a két

egyensúlyi állapotra vonatkozó különbséget $R(T_2 - T_1) = p(v_2 - v_1)$, a közölt hőmennyiség

$$dq = c_p(T_2 - T_1) = (c_v + R)(T_2 - T_1), \quad (7.57)$$

amely a fenti (7.39) és (7.56) összefüggésekkel összhangban

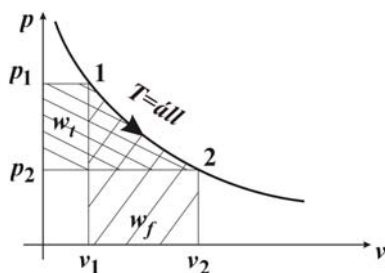
$$dq = c_v(T_2 - T_1) + p(v_2 - v_1). \quad (7.58)$$



7.18. ábra. Izobár folyamat p - v diagramja

(c) *Állapotváltozás állandó hőmérsékleten, izoterm folyamat, $dT = 0$*

Izotermikus folyamat során a rendszerben lejátszódó termikus folyamat elég lassú ahhoz, hogy a rendszer és környezete közti hőmérséklet különbség a folyamat során mindvégig kiegyenlítődjön. A termodinamikai folyamat p - v diagramja (7.19. ábra) egy izotermán való mozgást ábrázol.



7.19. ábra. Izotermikus folyamat p - v diagramja

Mivel a rendszer hőmérséklete állandónak tekinthető, így nem változik a rendszer belső energiája $du(T) = 0$, a termodinamika I. főtétele értelmében a közölt, ill. elvont hőenergia a rendszernek a környezetén végzett, ill. a rendszeren végzett munkával lesz egyenlő

$$dq = dw_f = pdv. \quad (7.59)$$

Figyelembe véve azonban az ideális gáz állandó hőmérsékletéhez tartozó állapotegyenletét,

$$p_1v_1 = p_2v_2 = RT, \quad (7.60)$$

a termodinamikai rendszer által a környezetén végzett munka

$$w = \int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{RT}{v} dv = RT \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad (7.61)$$

összhangban van azzal a ténnyel, hogy állandó hőmérsékleten nem változik a rendszer entalpiája sem $dh(T) = 0$, a rendszernek a környezetén végzett munkája megegyezik a rendszerből kivethető technikai munkával ($dq = dh + dw_t$),

$$q = w = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = p_1v_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = w_t, \quad (7.62)$$

amely a 7.19. ábrán látható módon az izotermának a függőleges tengely alatti területe, a technikai munka megegyezik az izotermának a vízszintes tengely alatti területével, a fizikai munkával.

(d) *Adiabatikus állapotváltozás, nincs hőközlés, $dq = 0$*

Hőtani szempontból gyorsan lejátszódó termodinamikai folyamatok, ill. hőtlenül elszigetelt rendszerek modellje az adiabatikus állapotváltozás. Ekkor a termodinamika I. főtétele értelmében, mivel nincs hőátadás, a rendszer a belső energiája rovására végez munkát,

$$dq = du + dw_f = 0, \quad dw_f = -du \quad (7.63)$$

A belső energia megváltozását az állandó térfogaton mért fajhővel, $du = c_v dT$, a hőmérséklet megváltozását az általános gáztörvény kis megváltozásokra vonatkozó alakjából kifejezve, $pdv + vdp = RdT$ a termodinamika I. főtétele adiabatikus állapotváltozásra a következő alakra hozható,

$$dq = 0 = c_v dT + pdv, \quad c_v(pdv + vdp) + Rpdv = 0. \quad (7.64)$$

Figyelembe véve az állandó térfogaton és az állandó nyomáson mért fajhők közötti $c_v + R = c_p$ kapcsolatot, némi rendezés után a fenti kifejezés a következő lesz

$$c_p p dv + c_v v dp = 0, \quad (7.65)$$

ahonnan a differenciálisan kis változók szeparálása a következő differenciálegyenletre vezet

$$\frac{c_p}{c_v} \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p}. \quad (7.66)$$

Bevezetve az állandó nyomáson és az állandó térfogaton mért fajhők hányadosának jelölésére a $\kappa = c_p/c_v$ adiabatikus kitevőt, és mindkét oldalt az (1) és (2) állapot p_1, v_1 és p_2, v_2 értékeire integrálva

$$\kappa \ln \frac{v_2}{v_1} = - \ln \frac{p_2}{p_1} = \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (7.67)$$

majd rendezve

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2} = \frac{RT_1}{v_1} \frac{v_2}{RT_2} = \text{áll.}, \quad (7.68)$$

a térfogatok és nyomások közötti kapcsolatra

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa, \quad p v^\kappa = \text{áll.}, \quad (7.69)$$

ill. a hőmérsékletek és a térfogatok közötti kapcsolatra

$$T_1 v_1^{\kappa-1} = T_2 v_2^{\kappa-1}, \quad T v^{\kappa-1} = \text{áll.}, \quad (7.70)$$

valamint a nyomás és a hőmérséklet közti kapcsolatra

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad \frac{T}{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \text{áll.}, \quad (7.71)$$

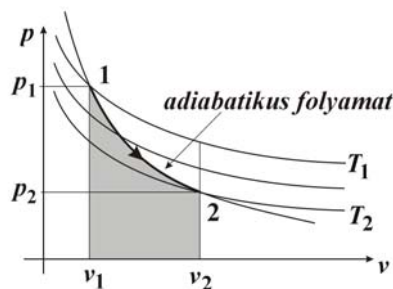
összefüggés adódik.

Az adiabatikus állapotváltozás p - v diagramját a 7.20. ábrán felrajzolva, és figyelembe véve, hogy $c_p > c_v$ ($c_p = c_v + R$), a κ adiabatikus kitevő mindig nagyobb, mint egy, $\kappa > 1$, azaz adiabatikus állapotváltozás állapotgörbéje gyorsabban csökken, mint az izoterma görbe.

Az adiabatikus állapotváltozás során a termodinamikai rendszer munkája (7.63) második kifejezését felhasználva $dw_f = -du$, továbbá figyelembe véve hogy a belső energia az állandó térfogaton mért fajhővel arányos, $du = c_v dT = c_v(T_2 - T_1)$, az adiabatikus kitevő ismeretében $\kappa = c_p/c_v = (c_v + R)/c_v$, az állandó térfogaton mért fajhő $c_v = R/(\kappa - 1)$, valamint az ideális gáz állapotegyenletéből a $T = pv/R$ hőmérséklet kifejezését felhasználva a termodinamikai rendszer munkája

$$dw_f = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2), \quad (7.72)$$

amelyről a 7.20. ábra alapján megállapítható, hogy kisebb, mint az izotermikus állapotváltozás munkája.



7.20. ábra. Adiabatikus állapotváltozás p - v diagramja

Adiabatikus állapotváltozás esetére az egyes állapotjelzők közötti (7.69)-(7.71) összefüggések felhasználásával a termodinamikai rendszer munkája

$$dw_f = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} \right), \quad (7.73)$$

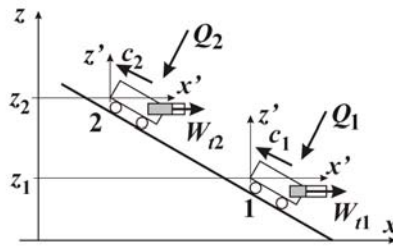
$$dw_f = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right), \quad (7.74)$$

$$dw_f = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (7.75)$$

7.3. A termodinamika I. főtétele mozgó rendszerekben

7.3.1. A termodinamika I. főtétele mozgó, zárt rendszerben

Termodinamikailag zárt, mozgó rendszer energia megváltozása a termodinamika I. főtétele alapján a rendszer U belső energiájának, az $mc^2/2$ mozgási és az mgz helyzeti energia megváltozása, amelyet a rendszerrel közölt Q hőmennyiség és a rendszerből kivett W_t technikai munka különbözete fedez az $z-x$ álló koordináta-rendszerben (7.21. ábra), ahol a mozgó tömeg sebessége c ,



7.21. ábra. Mozgó, zárt termodinamikai rendszer energiaviszonyai az $z-x$ álló koordináta-rendszerben

$$(U_2 - U_1) + \frac{1}{2}m(c_2^2 - c_1^2) + mg(z_2 - z_1) = (Q_2 - Q_1) - (W_{t2} - W_{t1}), \quad (7.76)$$

azaz, az energiaegyensúlyi egyenlet tömören a következő alakú,

$$dU + dW_m + dW_h = dQ - dW_t. \quad (7.77)$$

A termodinamikai mozgó rendszerhez rögzített $z'-x'$ koordináta-rendszert alkalmazva, a termodinamika I. főtétele értelmében a rendszer dU belső energiájának megváltozását és a rendszer által végzett dW_f (fizikai) munkát a rendszerrel közölt dQ hőenergia fedezi, azaz

$$dU + dW_f = dQ, \quad (7.78)$$

részletesen kifejtve

$$U_2 - U_1 + \int_1^2 p dV = Q_2 - Q_1. \quad (7.79)$$

A két koordináta-rendszerben felírt energiaegyenletek különbségéből

$$dW_m + dW_h = -dW_t + dW_f \quad (7.80)$$

a mozgó rendszer mozgási és helyzeti energiáját a termodinamikai rendszer munkavégző képessége növeli, míg a rendszerből kivett technikai munka csökkenti. Részletesen kifejtve

$$\frac{1}{2}m(c_2^2 - c_1^2) + mg(z_2 - z_1) = \int_1^2 p dV + \int_1^2 V dp. \quad (7.81)$$

7.3.2. A termodinamika I. főtétele nyitott stacionárius rendszerben

Stacionáriusnak tekinthető egy termodinamikai rendszer, ha az időbeli folyamatok lassúsága miatt a hőmérséklet változása figyelmen kívül hagyható, a rendszerbe belépő m tömeg és a vele érkező Q hőenergia el is távozik a folyamat végén. A 7.22. ábrán látható nyitott, stacionáriusnak tekinthető rendszer (1) állapota a rendszerbe belépő anyag és energiaáram állapotjellemzői, p_1 nyomás, T_1 hőmérséklet, v_1 fajlagos térfogat, u_1 belső energia, c_1 a belépő közeg sebessége, z_1 a belépés helyének függőleges koordinátája. A (2) állapot esetén a rendszerből kilépő anyag és energiaáram állapotjellemzői p_2 nyomás, T_2 hőmérséklet, v_2 fajlagos térfogat, u_2 belső energia, c_2 a kilépő közeg sebessége, z_2 a kilépés helyének függőleges koordinátája.

A termodinamikai nyitott rendszerbe dt idő alatt a beáramló dm tömeggel érkező energia

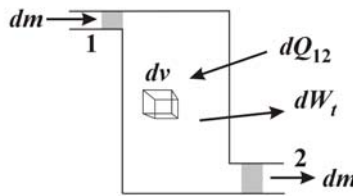
$$\left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{c_1^2}{2} + z_1 g \right) dm, \quad (7.82)$$

és ugyanennyi tömeggel az energia el is távozik,

$$\left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{c_2^2}{2} + z_2 g \right) dm, \quad (7.83)$$

miközben a rendszerrel dQ_{12} hőközlés történik és a rendszerből dW_t munka kivételére kerül sor. A termodinamika rendszer stacionárius volta miatt a rendszerbe belépő és az onnan távozó energiák energiamérlege nulla, azaz

$$\left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{c_2^2}{2} + z_2 g \right) - \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{c_1^2}{2} + z_1 g \right) = \frac{dQ_{12}}{dm} - \frac{dW_t}{dm}. \quad (7.84)$$



7.22. ábra. Nyitott, stacionárius termodinamikai rendszer

Figyelembe véve az egységnyi közeggel közölt fajlagos hőenergia $dq_{12} = dQ_{12}/dm$, és a fajlagos technikai munka $dw_t = dW_t/dm$ kifejezéseit, továbbá alkalmazva a fajlagos entalpia $h = u + pv$ alakját, a stacionárius termodinamikai rendszer dt idő alatti energiaegyensúlyi egyenlete a következő,

$$\left(h_2 + \frac{c_2^2}{2} + z_2 g \right) - \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2} + z_1 g \right) = dq_{12} - dw_t. \quad (7.85)$$

7.3.3. A termodinamika I. főtétele nyitott nem-stacionárius rendszerben

Nyitott, nem-stacionárius termodinamikai rendszer esetén valamely térfogatban lévő anyagmennyiség energiamérlege az időbeli megváltozásokra is fennáll, azaz a térfogatban lévő anyag energiájának időegység alatti megváltozása

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(u + pv + \frac{c^2}{2} + gz \right) \rho dV = \frac{dQ_{12}}{dt} - \frac{dW_t}{dt}. \quad (7.86)$$

Az egységnyi idő alatt a térfogatba beáramló dm_1/dt tömegárammal érkező energia

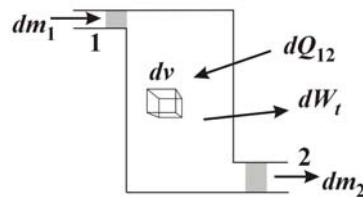
$$\frac{dW_{be}}{dt} = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) \frac{dm_1}{dt}, \quad (7.87)$$

az egységnyi idő alatt a kiáramló dm_2/dt tömegárammal távozó energia

$$\frac{dW_{ki}}{dt} = \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) \frac{dm_2}{dt}. \quad (7.88)$$

A termodinamika I. főtétele értelmében a tömegárammal távozó és érkező energiák különbsége egyensúlyt tart az időegység alatt a rendszerrel közölt hőmennyiséggel és a rendszerből kivett technikai munka különbségével (7.23. ábra),

$$\left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) \frac{dm_2}{dt} - \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) \frac{dm_1}{dt} = \frac{dQ_{12}}{dt} - \frac{dW_t}{dt}. \quad (7.89)$$



7.23. ábra. A termodinamika I. főtétele nyitott nem-stacionárius rendszerben

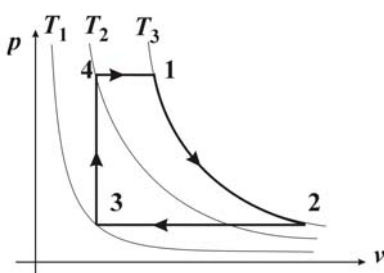
7.4. A termodinamika II. főtétele

A termodinamika I. főtétele a rendszer energiaegyensúlyára vonatkozó összefüggést tartalmazza. Az I. főtétel értelmében az energiaátalakulások nyomon követhetők, ellenőrizhetők. Az termodinamika I. főtétele azonban ellentmondást tartalmaz abban az értelemben, hogy nem jelöli meg a hőenergia áramlásának irányát. Ezt az ellentmondást küszöböli ki a termodinamika II. főtétele, amely szerint a hidegebb helyről a hőenergia nem áramlik a melegebb helyre.

7.4.1. Termodinamikai körfolyamatok

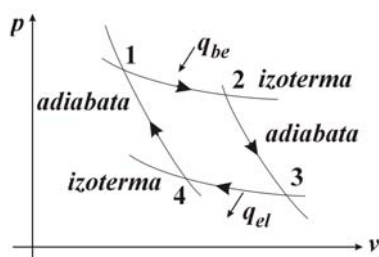
Termodinamikai körfolyamat során, a rendszerekben végbemenő állapotváltozások sorozata után a rendszer visszakerül a kiindulási állapotába. Pl. a 7.24. ábrán látható p - v diagram szerint

- az (1) állapotból a (2) állapotba a rendszer állandó hőmérsékleten, izotermikus állapotváltozással kerül;
- a (2) állapotból a (3) állapotba állandó nyomáson csökken a rendszer térfogata, izobár állapotváltozás jön létre;
- a (3) állapotból a (4) állapotba állandó térfogaton nő a rendszerben a nyomás, izochor folyamat játszódik le;
- míg végül a (4) állapotból az (1) állapotba ugyancsak izobár állapotváltozás során kerül vissza a rendszer.

7.24. ábra. Termodinamikai körfolyamat p - v diagramja

(a) A Carnot körfolyamat

A körfolyamatok között speciális helyet foglal el a Carnot körfolyamat (7.25. ábra), amely négy szakaszból, két adiabatikus és két izotermikus szakaszból áll. Az (1)-(2) szakasz egy izotermikus expanzió, a (2)-(3) szakasz egy adiabatikus expanzió, a (3)-(4) szakasz egy izotermikus, míg a (4)-(1) szakasz egy adiabatikus kompresszióknak felel meg. Az (1)-(2) szakasz alatt végbemenő változáshoz q_{be} hőmennyiséget kell a rendszerrel közölni, míg a (3)-(4) szakaszon végbemenő állapotváltozás során q_{el} hőmennyiség visszanyerhető. A két hőmennyiség, a bevezetett és az elvont hőmennyiségek közti különbség a körfolyamat állapotváltozási görbéi alatti területtel, a körfolyamat során kinyerhető munkával egyezik meg.

7.25. ábra. Carnot körfolyamat p - v diagramja

(b) *Körfolyamat zárt rendszerekben*

A termodinamikai körfolyamat minden szakaszára, felírva az I. főtételt, az i -edik és az $i+1$ -edik pontok közti szakaszra

$$U_{i,i+1} + W_{i,i+1} = Q_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.90)$$

az energiaegyensúlyi egyenlet a következő lesz,

$$\sum_{i=1}^n U_{i,i+1} + \sum_{i=1}^n W_{i,i+1} = \sum_{i=1}^n Q_{i,i+1}, \quad (7.91)$$

ahol az $(n+1)$ indexű állapot megegyezik az (1) állapottal. Figyelembe véve azonban, hogy zárt termodinamikai körfolyamat során a rendszer belső energiájának összege nem változik,

$$\sum_{i=1}^n U_{i,i+1} = 0, \quad (7.92)$$

a munkavégzést a betáplált hőenergia fedezi,

$$\sum_{i=1}^n W_{i,i+1} = \sum_{i=1}^n Q_{i,i+1}. \quad (7.93)$$

Részletesen kiértékelve, az elvezetett és betáplált hőmennyiség különbsége a rendszer által végzett (fizikai) munka fedezete, amely a p - v diagramon a körfolyamat állapotgörbéje és a vízszintes tengely által bezárt területet adja,

$$|Q_{el}| - |Q_{be}| = \oint_V p dV = W. \quad (7.94)$$

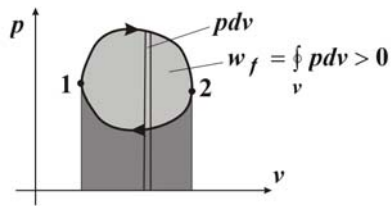
Zárt rendszer esetén a 7.26. ábrán látható termodinamikai körfolyamat az (1)-(2) állapotváltozása során energiát táplál be a rendszerbe

$$Q_{12} = \int_1^2 p dV, \quad (7.95)$$

a rendszerből a (2)-(1) állapotváltozás során a kinyert hőenergia,

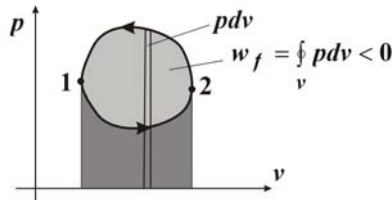
$$Q_{21} = \int_2^1 p dV, \quad (7.96)$$

a teljes körfolyamatra az (1)-(2)-(1) körfolyamat állapotgörbéje által bezárt terület pozitív, így a zárt termodinamikai körfolyamat során munka nyerhető, a rendszer munkát végez a környezetén.



7.26. ábra. Zárt termodinamikai rendszer az (1)-(2)-(1) körfolyamat során munkát végez a környezetén

Hasonlóan a 7.27. ábrán látható zárt termodinamikai rendszerben az (1)-(2)-(1) körfolyamat során a bezárt görbe alatti terület negatív, így a rendszeren végez munkát a környezete.



7.27. ábra. A zárt termodinamikai rendszer az (1)-(2)-(1) körfolyamata során a környezete végez munkát a rendszeren

(c) *Körfolyamat nyitott rendszerekben*

Termodinamikailag nyitott rendszer minden szakaszára felírva az I. főtélt, az i -edik, és az $i+1$ -edik pontok közti szakaszra,

$$\left(h_{i,i+1} + \frac{c_{i,i+1}^2}{2} + g z_{i,i+1} \right) = q_{i,i+1} - w_{t,i,i+1}, \quad (7.97)$$

az energiaegyensúlyi egyenlet a következő alakú lesz,

$$\sum_{i=1}^n h_{i,i+1} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{i,i+1}^2}{2} + \sum_{i=1}^n gz_{i,i+1} = \sum_{i=1}^n q_{i,i+1} - \sum_{i=1}^n w_{t,i,i+1} . \quad (7.98)$$

A körfolyamatra összegezve a nyitott termodinamikai rendszerben az entalpia, a mozgási és helyzeti energiák összege nulla,

$$\sum_{i=1}^n h_{i,i+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{c_{i,i+1}^2}{2} = 0, \quad \sum_{i=1}^n gz_{i,i+1} = 0, \quad (7.99)$$

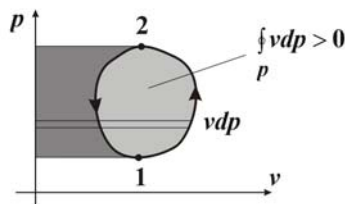
ahonnan az adódik, hogy a nyitott rendszerben a technikai munkavégzést a hőenergia fedezi,

$$0 = \sum_{i=1}^n q_{i,i+1} - \sum_{i=1}^n w_{t,i,i+1}, \quad \oint_q dq = \oint_{w_t} dw_t = - \oint_p v dp, \quad (7.100)$$

azaz

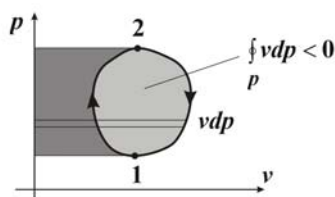
$$|Q_{el}| - |Q_{be}| = W_t = - \oint_p v dp . \quad (7.101)$$

A nyitott rendszer 7.28. ábrán látható termodinamikai körfolyamata során az (1)-(2) állapotváltozás állapotgörbéje és a függőleges tengely alatti terület a rendszerbe betáplált hőenergia. A (2)-(1) állapotváltozás során az állapotgörbe és a függőleges tengely alatti terület a rendszerből kinyert hőenergia; a teljes körfolyamat során a körfolyamat állapotgörbéje által bezárt terület, a technikai munka pozitív.



7.28. ábra. Nyitott termodinamikai rendszer az (1)-(2)-(1) körfolyamata során a hőenergiából technikai munka nyerhető

A nyitott termodinamikai rendszerben a körfolyamat irányát ellenkezőre változtatva, (7.29. ábra) kevés hőenergiát táplálva a rendszerbe és sok hőelvonást alkalmazva a körfolyamat fenntartásához technikai munkát kell befektetni.



7.29. ábra. Nyitott termodinamikai rendszer (1)-(2)-(1) körfolyamata fenntartásához technikai munkát kell a rendszerbe befektetni

(d) A termodinamikai körfolyamatok hatásfoka

Akár zárt, akár nyitott a termodinamikai rendszer, a termikus hatásfokát a körfolyamatból nyert munka és a bevezetett hőmennyiség aránya adja meg,

$$\eta = \frac{|w|}{|q_{be}|} = \frac{|q_{be}| - |q_{el}|}{|q_{be}|}. \quad (7.102)$$

Meg kell jegyezni, hogy termikus folyamatoknál a hatásfok a rendszer járulékos hővesztése (hőelvonása) miatt nem közelíti meg a 100% értéket.

7.5. Az entrópia

Az entrópia a zárt vagy nyitott termodinamikai rendszerek között átvitt, az elemi hőmérsékletváltozáshoz szükséges energia,

$$dQ = TdS, \quad (7.103)$$

ahol az S entrópia extenzív állapotjelző, és mint ilyen további állapotjelzőtől függ,

$$S = S(p, T, V). \quad (7.104)$$

Tehát egy termodinamikai rendszer entrópiájának megváltozása

$$dS = dQ/T. \quad (7.105)$$

Zárt, reverzibilis termodinamikai körfolyamatra az entrópia összege mindig nulla,

$$\oint dS = 0, \quad (7.106)$$

míg irreverzibilis termodinamikai körfolyamat esetén az entrópia mindig nő,

$$\oint dS > 0. \quad (7.107)$$

Bevezetve az egységnyi tömegrre vonatkoztatott fajlagos entrópia fogalmát

$$s = \frac{dS}{m} = \frac{dQ}{mT}, \quad (7.108)$$

és figyelembe véve a hőenergiának a belső energiával, $dq = du + pdv$, ill. az entalpiával való kifejezését, $dq = dh - vdp$, a fajlagos entrópia a következő alakra hozható,

$$ds = \frac{du + pdv}{T}, \quad ds = \frac{dh - vdp}{T}. \quad (7.109)$$

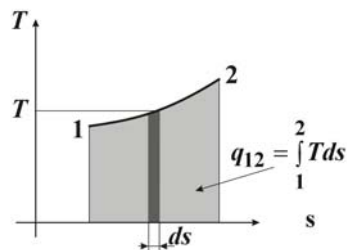
7.5.1. A termodinamika folyamatban részt vevő hőmennyiség T - s diagramja

A termodinamikai folyamatban részt vevő dq fajlagos hőmennyiség megváltozása arányos a T hőmérséklettel és a fajlagos entrópia megváltozásával,

$$dq = Tds, \quad (7.110)$$

ahonnan a 7.30. ábrán látható T - s diagram alapján a rendszer hőmennyiségének megváltozása arányos a hőmérséklet állapotgörbéje és a vízszintes tengelyen ábrázolt s fajlagos entrópia alatti területtel,

$$q_{1,2} = \int_1^2 dq = \int_1^2 Tds. \quad (7.111)$$



7.30. ábra. A termodinamikai rendszerrel közölt hőmennyiség T - s diagramja

Ha a termodinamikai rendszer hőt vesz fel az (1)-(2) állapotváltozás során az entrópiája nő, $s_2 > s_1$, hőelvonás esetén a rendszer entrópiája csökken, $s_2 < s_1$.

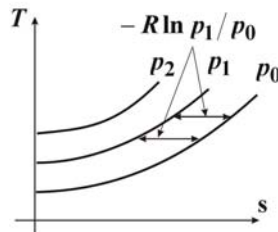
(a) *Állandó nyomáson* létrejövő állapotváltozás során, figyelembe véve, hogy az entalpia az állandó nyomáson mért fajhő és a hőmérséklet megváltozásával kifejezhető, $dh = c_p dT$, továbbá az ideális gáz állapotegyenletéből $v/T = R/p$, a fajlagos entrópia (7.109) második kifejezése átalakítható,

$$ds = \frac{dh - vdp}{T}, \quad ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}. \quad (7.112)$$

Mindkét oldalt integrálva az állapotváltozás kiindulási és végső állapota közti szakaszra,

$$s - s_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0}, \quad (7.113)$$

ahol s_0 , T_0 és p_0 az állapotjelzők kiindulási értékei. Tehát a T - s diagramon a $p = \text{áll}$ vonalak egymással kongruens (egybevágó) logaritmikus görbék (7.31. ábra), ahol két nyomásgörbe közti metszések a hőmérséklettől függetlenül állandók.



7.31. ábra. Izobár állapotváltozás görbéi a T - s diagramon

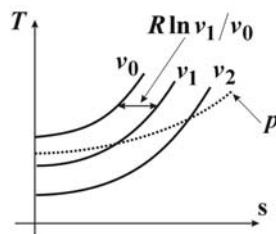
(b) *Állandó térfogaton* létrejövő állapotváltozás során figyelembe véve, hogy a rendszer belső energiája az állandó térfogaton mért fajhővel, és a hőmérsékletváltozással fejezhető ki, $du = c_v dT$, továbbá, az ideális gáz állapotegyenletéből $p/T = R/v$, és így a fajlagos entrópia (7.109) kifejezésében a baloldali alakból

$$ds = \frac{du + pdv}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}, \quad (7.114)$$

a kiindulási és végállapot közti szakaszra integrálva a fajlagos entrópia a következő,

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{v}{v_0}. \quad (7.115)$$

Tehát az izobár állapotváltozáshoz tartozó, $v = \text{áll}$ vonalak hasonlóak a $p = \text{áll}$ vonalak T - s diagramjához, mivel azonban $c_v < c_p$ ($c_p = c_v + R$), a $v = \text{áll}$ vonalak meredekebbek, mint a $p = \text{áll}$ vonalak, ahogy az a 7.32. ábrán látható.

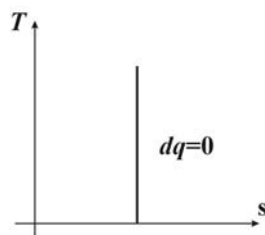


7.32. ábra. Izochor állapotváltozás görbéi a T - s diagramon

(c) *Adiabatikus állapotváltozás* esetén a rendszerrel közölt hő nulla, ezért az állapotváltozás entrópiája is nulla,

$$dq = 0, \quad ds = 0, \quad (7.116)$$

azaz a T - s diagramon az állapotváltozást egy függőleges vonal jelzi, ahogy az a 7.33. ábrán látható.

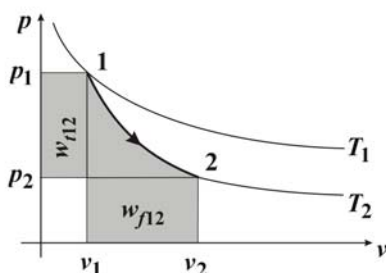


7.33. ábra. Adiabatikus állapotváltozás a T - s diagramon

7.5.2. Reverzibilis állapotváltozások p - v és T - s diagramja

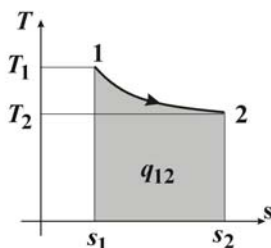
A termodinamikai rendszer vizsgálata során a p - v diagram az állapotváltozás munkáját, a T - s diagram az állapotváltozásban részt vett hőmennyiséget szemlélteti.

Reverzibilis folyamatok esetén a munka és a hőmennyiség az egyes diagramokon területekkel szemléltethetők. Az állapotváltozás során a rendszernek a környezetén végzett $w_f = \int p dv$ fizikai munkája az p - v diagram állapotgörbéje és a vízszintes tengely közti területtel, a rendszerből kivehető, $w_t = -\int v dp$ technikai munka az állapotgörbe és a függőleges tengely közti területtel szemléltethető (7.34. ábra).



7.34. ábra. A fizikai és a technikai munka szemléltetése a p - v diagramon

Az állapotváltozásban résztvevő hőmennyiség a T - s diagram állapotgörbéje és a vízszintes tengely közti területtel adható meg (7.35. ábra).



7.35. ábra. Az állapotváltozásban résztvevő hőmennyiség szemléltetése a T - s diagramon

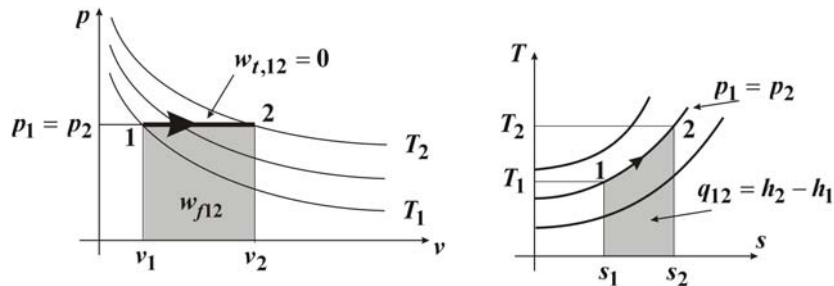
(a) Izobár állapotváltozás esetén, $dp = 0$, a rendszerrel közölt hőmennyiség

$$dq = h - vdp = Tds \quad (7.117)$$

kifejezése alapján a p - v , és a T - s diagramokon (7.36. ábra) az energiaátalakulási folyamatok a következők:

Minthogy a termodinamikai rendszerben állandó nyomáson, $p_1 = p_2$ jön létre az expanzió, a p - v diagram alapján a technikai munka nulla $w_{t,12} = 0$; ha a rendszer fajlagos térfogata nő, $v_2 > v_1$, a rendszer fizikai munkát végez a környezetén, $w_{f,12} > 0$; ha azonban az állapotváltozás során a fajlagos térfogat csökken, $v_2 < v_1$, a

termodinamikai környezet végez munkát a rendszeren, azaz $w_{f,12} < 0$. A T - s diagram alapján a rendszerrel hőközlés történik, $q_{12} > 0$, ha a fajlagos entrópia nő $s_2 > s_1$; és hőelvonásra kerül sor, $q_{12} < 0$, ha a fajlagos entrópia csökken $s_2 < s_1$.

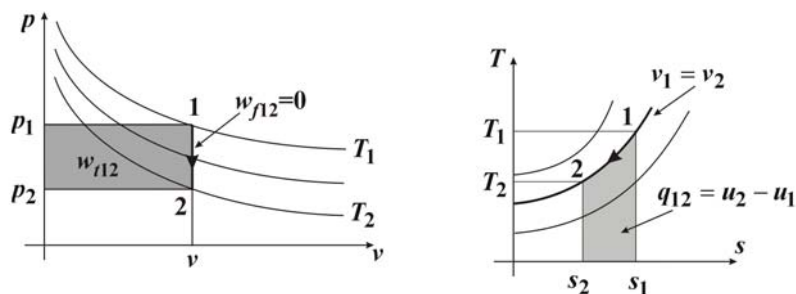


7.36. ábra. Izobár folyamat p - v és T - s diagramja

(b) *Izochor állapotváltozás* esetén, $dv = 0$, a rendszerrel közölt hőmennyiség

$$dq = du + pdv = Tds \quad (7.118)$$

kifejezése alapján a p - v és a T - s diagramokon (7.37. ábra) az energiaátalakulási folyamatok a következők:



7.37. ábra. Izobár folyamat p - v és T - s diagramja

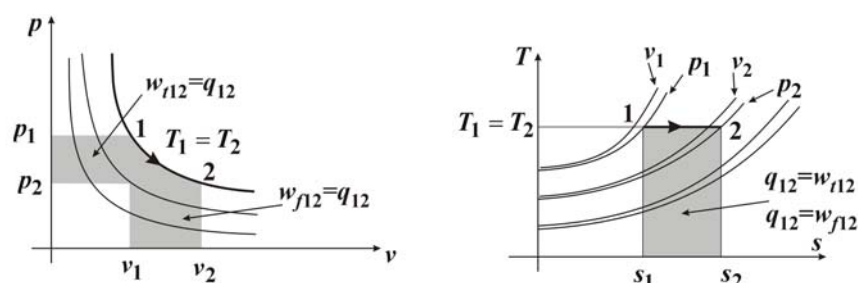
Míthogy állandó térfogaton jön létre az állapotváltozás, $v_2 = v_1$, a p - v diagram alapján a rendszer a környezetén nem végez munkát, $w_{f12} = 0$; ha a termodinamikai rendszerben csökken a nyomás, $p_2 < p_1$, a rendszerből technikai munka nyerhető, $w_{t,12} > 0$; a rendszerben a nyomás növeléséhez, $p_2 > p_1$ technikai munka befektetésre van szükség, $w_{t,12} < 0$. A T - s diagram alapján a rendszerben a fajlagos entrópia

csökken $s_2 < s_1$, a közegből hőelvonásra kerül sor, $q_{12} < 0$; ha azonban a fajlagos entrópia nő, $s_2 > s_1$ a termodinamikai közeggel hőközlés történik, $q_{12} > 0$.

(c) *Izoterm állapotváltozás* esetén, $dT = 0$, minthogy sem a belső energia, sem az entalpia nem változik, $du = 0$, $dh = 0$, a rendszerrel közölt hőmennyiség

$$dq = pdv = -vdp = Tds \quad (7.119)$$

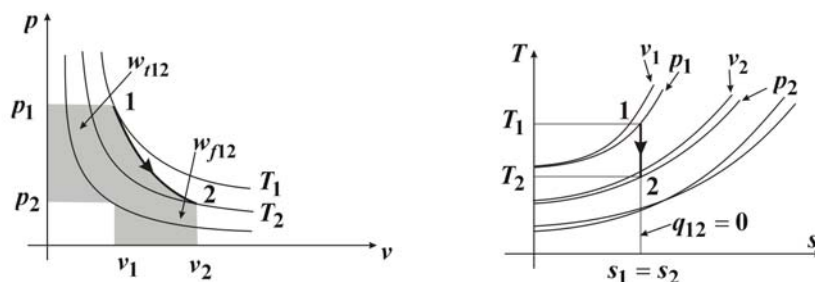
kifejezése alapján a 7.38. ábrán látható p - v és T - s diagramokon az energiaátalakulási folyamat a következő lesz:



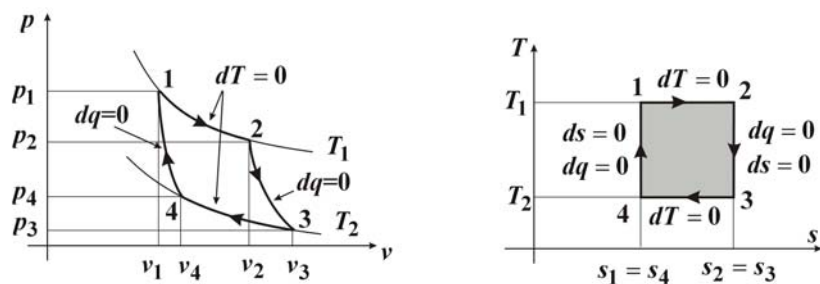
7.38. ábra. Izoterm folyamat p - v és T - s diagramja

A $T_2 = T_1$, állandó hőmérsékleten történő állapotváltozás p - v diagramja alapján a rendszer térfogata nő, $v_2 > v_1$, a rendszer fizikai munkát végez a környezetén $w_{f12} > 0$, és mivel a nyomás csökken, $p_2 < p_1$, technikai munka nyerhető ki a rendszerből, $w_{t12} > 0$; ha azonban a térfogat csökken $v_2 < v_1$, a rendszeren végez munkát a környezete, $w_{f12} < 0$, ekkor a nyomás nő $p_2 > p_1$, a rendszerbe technikai munkát kell bevinni, $w_{t12} < 0$. A T - s diagram alapján az azonos hőmérsékleten bevitt hőenergia megegyezik mind a fizikai, mind a technikai munkavégző képességgel, $q_{12} = w_{f12} = w_{t12}$.

(d) *Adiabatikus állapotváltozás*, $dq = 0$, esetén a 7.39. ábrán látható p - v és T - s diagramok alapján, ha a rendszerben csökken a nyomás $p_2 < p_1$, a rendszerből technikai munka nyerhető, $w_{t12} > 0$, és ugyanakkor a térfogat növekedése miatt, $v_2 > v_1$, a rendszer munkavégzésre alkalmas $w_{f12} > 0$, mivel azonban a rendszer hőenergiája nem változik, $dq = 0$, hőátvitel nem történik, a rendszer entrópiája állandó marad, $s_2 = s_1$.

7.39. ábra. Adiabaticus állapotváltozás p - v és T - s diagramja

(e) Végül a két adiabaticus és két izoterm szakaszból állót *Carnot körfolyamat* p - v és T - s diagramját megvizsgálva (7.40. ábra) az (1)-(2) izoterm szakaszon, $dT = 0$, a térfogati expanzió során, $v_2 > v_1$, a rendszerrel közölt hő fizikai munkavégzést tesz lehetővé. A (2)-(3) adiabaticus szakaszon, $dq = 0$, a rendszer entrópiája nem változik, miközben további expanzió jön létre. A (3)-(4) izoterm szakaszon, $dT = 0$, a hőelvonás térfogatcsökkenést eredményez, $v_4 < v_3$, amely a kompresszió során a rendszerbe betáplált munkát igényel. Végül a (4)-(1) adiabaticus állapotváltozás, $dq = 0$, alatt nem változik a rendszer entrópiája, miközben további kompresszió fedezi a kiindulási ponthoz való visszaérkezéshez szükséges munkát.

7.40. ábra. Carnot körfolyamat p - v és T - s diagramja

7.6. Hővezetés

A különböző hőmérsékletű közegek között a hőmérséklet kiegyenlítődésnek három formája ismert, úgy mint a hővezetés, a hőátadás vagy konvekció és a hősugárzás.

(a) A *hővezetés* szilárd, cseppfolyós és légnemű közegekben jön létre, miközben az anyag makroszkopikusan nyugalomban van, ekkor a részecskék ütközése, diffúziója

révén áramlik a hő. Az egységnyi idő alatt az egységnyi felületen átáramló hőenergia a *hőáram-sűrűség*,

$$\dot{\vec{q}} = \frac{dQ/dt}{dA}, \quad [\dot{\vec{q}}] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s m}^2}. \quad (7.120)$$

A hőáram-sűrűség a melegebb helyről a hidegebb helyre való hőenergia áramlásnak felel meg,

$$\dot{\vec{q}} = -\lambda \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right), \quad (7.121)$$

ahol λ a hővezetési együttható, $[\lambda] = 1 \text{ W/m K}$.

(b) A *hőátadás*, vagy *konvekció* esetén az áramló közeg és a fal között a hőterjedést a tömeg, a térfogat elemek egymáshoz képesti elmozdulása, a magukkal vitt energiaszállítás okozza. Az egységnyi felület egységnyi idő alatt leadott hőenergiája a Newton-féle lehülési törvény szerint

$$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty), \quad (7.122)$$

ahol α a hőátadási tényező, $[\alpha] = 1 \text{ W/m}^2\text{K}$, T_w a fal hőmérséklete, T_∞ a közeg hőmérséklete a faltól távol.

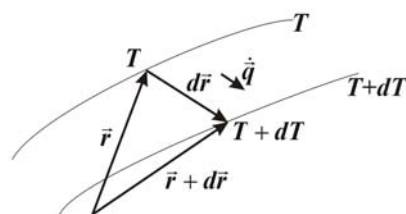
(c) *Hősugárzás* esetén a közeg fala, hőmérsékletétől függően, a tér minden irányába hőenergiát sugároz. Az egységnyi felületen, egységnyi idő alatt sugárzással átlépett hőenergiát a Stefan-Boltzmann törvény írja le,

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (7.123)$$

ahol σ_0 az abszolút fekete test sugárzási együtthatója $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}$, ε a test feketeségi foka.

7.6.1. A hővezetés differenciálegyenlete

A hőmérséklet a geometriai tér pontjaiban az idő múlásával változik, $T = T(\vec{r}, t) = T(x, y, z, t)$. A tér pontjai között a hőmérsékletváltozást a 7.41. ábrán látható módon a hőmérséklet hely szerinti megváltozása, gradiense adja meg,



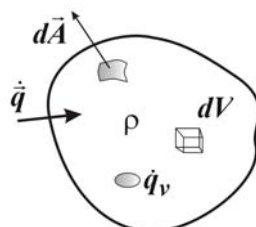
7.41. ábra. A hőmérséklet hely szerinti változása, a gradiense

$$\lim_{d\vec{r} \rightarrow 0} \frac{T(\vec{r} + d\vec{r}, t) - T(\vec{r}, t)}{d\vec{r}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{r}}, \quad (7.124)$$

amelyet részletesen kifejtve

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial z} \vec{e}_z = \mathbf{grad} T(\vec{r}, t). \quad (7.125)$$

A hővezetés differenciálegyenlete a 7.42. ábrán látható hővezető közeg V térfogatának energiamérlegéből származtatható.

7.42. ábra. A hővezető közeg V térfogatának energiamérlege

A V térfogatban lévő, ρ sűrűségű anyag tömege,

$$m = \int_V \rho dV. \quad (7.126)$$

A térfogatban lévő m tömeg hőmérsékletének dt idő alatti dT értékkel való megváltozásához

$$dT = \frac{dT(\vec{r}, t)}{dt} dt, \quad (7.127)$$

dQ hőmennyiség szükséges

$$dQ = cmdT = \int_V c\rho \frac{dT}{dt} dt dV, \quad (7.128)$$

amely hőenergiát dt idő alatt kell a rendszerbe juttatni,

$$dQ = dt \int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV. \quad (7.129)$$

A hőmérséklet változáshoz szükséges hőenergia fedezete a dt idő alatt a V térfogatban lévő hőforrás termelte hőmennyiség,

$$dQ_1 = dt \int_V \dot{q}_V dV, \quad (7.130)$$

ahol \dot{q}_V a térfogategységben, időegység alatt keletkezett hőmennyiség, a térfogati hőforrás-sűrűség $[\dot{q}_V] = 1 \text{ W/m}^3 = 1 \text{ J/s m}^3$, és a térfogatot határoló felületen dt idő alatt átáramló hőmennyiség,

$$dQ_2 = -dt \oint_A \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{A}, \quad (7.131)$$

ahol a negatív előjel azt jelzi, hogy a felület \vec{n} normálisa és a hőáram-sűrűség vektorok ellenkező irányúak.

A hővezető közeg V térfogatának energiaegyensúlya

$$dQ = dQ_1 + dQ_2, \quad (7.132)$$

amely összefüggést (7.129)-(7.131) összefüggések figyelembevételével részletesen kifejtve az energiaegyensúly a következő alakban fogalmazható meg,

$$dt \int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV = dt \int_V \dot{q}_V dV - dt \oint_A \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{A}. \quad (7.133)$$

Figyelembe véve azonban, hogy a fenti egyenlet utolsó tagjában a hőáram-sűrűség vektor mennyiség (7.125)

$$\dot{\vec{q}} = \dot{q}_x \vec{e}_x + \dot{q}_y \vec{e}_y + \dot{q}_z \vec{e}_z = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \right), \quad (7.134)$$

továbbá, hogy a zárt felületre vett integrálja (összege) egyenlő a felület által határolt térfogatra vett koordináta komponensek deriváltjával,

$$\oint_A \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \dot{q}_x + \frac{\partial}{\partial y} \dot{q}_y + \frac{\partial}{\partial z} \dot{q}_z \right) dV, \quad (7.135)$$

amelyet a (7.133) energiaegyensúlyi egyenletbe helyettesítve, hővezetés energiaegyensúlyi egyenletére a következő adódik,

$$\begin{aligned} dt \int_V c\rho \frac{dT}{dt} dV &= dt \int_V \dot{q}_V dV \\ &+ dt \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) dV. \end{aligned} \quad (7.136)$$

Mínt hogy az egyenlet mindkét oldala ugyanarra a V térfogatra a dt idő alatti energiamegváltozásra vonatkozik, az egyenlőség akkor áll fenn, ha az integranduszokra is fennáll, amely a *hővezetés differenciálegyenletét* eredményezi,

$$c\rho \frac{dT}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \dot{q}_V. \quad (7.137)$$

Ha a közeg λ hővezetési tényezője a geometriai tér pontjaiban nem állandó, a fenti kifejezés bal oldalán a második tag átalakítható,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \\ &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (7.138)$$

Ha azonban a közeg λ hővezetési tényezője a geometriai tér pontjaiban állandó, (7.138) jobb oldalán az első zárójeles kifejezés nulla,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (7.139)$$

Bevezetve a jól ismert Laplace-operátort,

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (7.140)$$

a hővezetés (7.137) differenciálegyenlete a következő lesz,

$$c\rho \frac{dT}{dt} - \lambda \Delta T = \dot{q}_V. \quad (7.141)$$

7.6.2. Határfeltételek

Lineáris anyagjellemzők esetén, ($c = \text{áll.}$, $\rho = \text{áll.}$, $\lambda = \text{áll.}$) valamely A felülettel határolt V térfogat energiaegyensúlyára vonatkozó (7.136) egyenlet integrális alakja,

$$\int_V \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T - \dot{q}_V \right) dV = 0, \quad (7.142)$$

a geometriai tér egyes pontjaira vonatkoztatva pedig (7.141) alapján a hővezetés energiaegyensúlyi egyenletének a differenciális alakja a $c\rho$ anyagállandóval való osztás után a

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\lambda}{c\rho} \Delta T = \frac{\dot{q}_V}{c\rho} \quad (7.143)$$

formulával adott alak. A műszaki életben leggyakrabban a fenti (7.143) differenciális alakot szokás alkalmazni. A lineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet egy parabolikus típusú parciális differenciálegyenlet, egy *diffúziós egyenlet*.

A hővezetés differenciálegyenlete derékszögű koordináta-rendszerben a következő alakú

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\dot{q}_V}{c\rho}, \quad (7.144)$$

ahol $\dot{q}_V = \dot{q}_V(x, y, z, t)$ a térfogati hőforrás-sűrűség a hely és az idő függvénye lehet.

Hőforrás mentes, $\dot{q}_V = 0$, nem-stacionárius (instacionárius), $\partial/\partial t \neq 0$ hővezetés esetén a hőmérséklet $T = T(\vec{r}, t)$ hely- és idő szerinti eloszlását meghatározó differenciálegyenlet az ún. *Fourier differenciálegyenlet*

$$\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \Delta T(\vec{r}, t) = 0. \quad (7.145)$$

Az időbeli folyamatok lecsengése után, $\partial/\partial t \equiv 0$, stacionárius hőforrás esetén, $\dot{q}_v = \dot{q}_v(\vec{r})$, az ún. *Poisson egyenlet* megoldása adja a hőmérséklet hely szerinti eloszlását,

$$-\frac{\lambda}{c\rho} \Delta T(\vec{r}) = \frac{\dot{q}_v(\vec{r})}{c\rho}. \quad (7.146)$$

Ha azonban a vizsgált térben nincsen hőforrás, $\dot{q}_v = 0$, a hőmérséklet hely szerinti eloszlását a

$$-\Delta T(\vec{r}) = 0 \quad (7.147)$$

homogén differenciálegyenlet, a *Laplace egyenlet* megoldása adja.

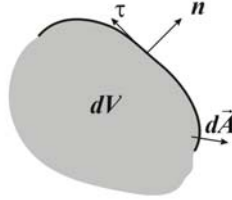
A hővezetés differenciálegyenletének megoldása, annak a $T = T(\vec{r}, t)$ térbeli és időbeli hőmérséklet eloszlás meghatározását jelenti, amely egyrészt kielégíti a feladat megfogalmazásához tartozó differenciálegyenletet (energiaegyensúlyi egyenletet) és eleget tesz a feladathoz tartozó *határfeltételeknek*. A határfeltételek két csoportra oszthatók, a kiindulási vagy kezdeti feltételeket és a peremfeltételeket foglalják magukban.

- A hővezetés differenciálegyenletének megoldásához egyrészt ismerni kell a vizsgálat kezdetén, a $t = 0$ pillanatban a geometriai tér minden pontjában a hőmérséklet értékeket, a *kiindulási, kezdeti hőmérsékleteket*, amelyhez képest a hőmérsékletváltozások létrejönnek,

$$T = T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r}); \quad (7.148)$$

- Másrészt, ismerni kell a vizsgált térrész határfelületén (peremén) a környezet hőmérsékletének, hőforrásainak hatásából származó hőmérsékletet, valamint a felületen átáramló hőáram-sűrűség értékét, azaz a környezettel való kapcsolatot kifejező *peremfeltételeket*.

A peremfeltételek elsőfajú, Dirichlet típusú; másodfajú, Neumann típusú; ill. harmadfajú, Robin típusú feltételek lehetnek. A 7.43. ábrán látható természetes koordináta-rendszerben a hőmérséklet a felülettel párhuzamos síkban, ill. a felületre merőleges irányban változik, $T = T(\tau, n, t)$. Ekkor a felületen átáramló hőáram-sűrűség érintő és normális irányú komponenseit tekintve



7.43. ábra. Természetes koordináta-rendszer a V térfogatot határoló A felületen

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau, n, t) = -\lambda \frac{\partial T(\tau, n, t)}{\partial \vec{r}} = -\lambda \left(\frac{\partial T(\tau, n, t)}{\partial \tau} \vec{e}_\tau + \frac{\partial T(\tau, n, t)}{\partial n} \vec{e}_n \right), \quad (7.149)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau, n, t) = \dot{\mathbf{q}}_\tau(\tau, n, t) + \dot{\mathbf{q}}_n(\tau, n, t),$$

a peremfeltételek a következő módon fogalmazhatók meg.

(a) *Elsőfajú, Dirichlet típusú a peremfeltétel*, ha a fal felületén a hőmérséklet hely és idő szerinti eloszlása előírt, azaz

$$T(\tau, n, t)|_w = T_w(\tau, t), \quad (7.150)$$

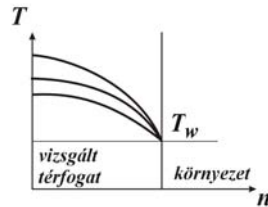
ahol a w index a fal pontjait jelenti. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált térrész határfelületén előírt értékű, érintő irányú hőáramlás jön létre,

$$\dot{\mathbf{q}}_\tau(\tau, t)|_w = -\lambda \frac{\partial T_w(\tau, t)}{\partial \tau} \vec{e}_\tau. \quad (7.151)$$

Ha a fal mentén nincs hőáramlás, $\dot{\mathbf{q}}_\tau(\tau, t)|_w = -\lambda \frac{\partial T_w(\tau, t)}{\partial \tau} \vec{e}_\tau = \mathbf{0}$, azaz a térfogatot határoló felület hőmérséklete a fal mentén a hely szerint nem változik, $T(\tau, t)|_w = T_w(t)$, az időbeli folyamatok lezajlása után ($t \rightarrow \infty$), stacionárius esetben, a felületen állandó hőmérséklet áll be, ahogy az a 7.44. ábrán látható.

(b) *Másodfajú, Neumann típusú peremfeltétel* esetén, a falon átáramló hőáram értéke, a hőáramsűrűség normális komponense előírt,

$$\dot{\mathbf{q}}_n(\tau, n, t)|_w = \dot{q}_w(\tau, t). \quad (7.152)$$



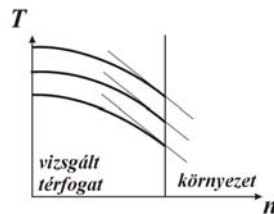
7.44. ábra. Az elsőfajú, Dirichlet peremfeltétel értelmezése

Figyelembe véve, hogy a hőáram-sűrűség normális komponense

$$\vec{q}(\tau, n, t) \cdot \vec{n} = \dot{q}_n(\tau, n, t) = -\lambda \frac{\partial T(\tau, n, t)}{\partial n}, \quad (7.153)$$

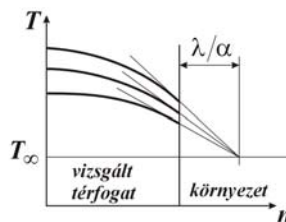
az előírt másodfajú peremfeltétellel a hőmérséklet felületre merőleges irányú megváltozása van előírva, ahogy az a 7.45. ábrán látható,

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau, n, t)}{\partial n} \Big|_w = \dot{q}_w(\tau, t). \quad (7.154)$$



7.45. ábra. A másodfajú, Neumann típusú peremfeltétel értelmezése

(c) Harmadfajú, Robin típusú peremfeltétel esetén a vizsgált térfogat felületére hővezetéssel érkező hőáram-sűrűség hőátadással távozik a környezetbe, ahogy az a 7.46. ábrán látható,



7.46. ábra. A harmadfajú, Robin típusú peremfeltétel értelmezése

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w = \alpha(T_w - T_\infty). \quad (7.155)$$

7.7. A hővezetés differenciálegyenletének analitikus megoldása

7.7.1. Állandósult állapot vizsgálata

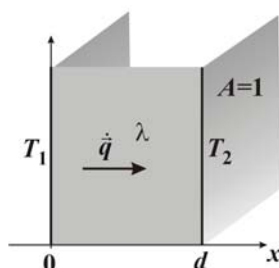
A hővezetés stacionárius állapotához tartozó hőmérséklet eloszlást vizsgálva az időbeli változás figyelmen kívül hagyható ($\partial/\partial t = 0$).

7.7.2. A Laplace egyenlet direkt megoldása

A 7.47. ábrán látható egydimenziós esetet vizsgálva a T_1 és T_2 hőmérsékletű síkfalak közötti, λ hővezető képességgel rendelkező közegben a hőmérséklet eloszlásának meghatározása a feladat.

A forrásmentes, egydimenziós feladat hőmérséklet eloszlása csak az x helykoordinátától függ, $T = T(x)$, a Laplace egyenlet megoldását előírt elsőfajú, Dirichlet peremfeltételek mellett kell meghatározni

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0, \quad T(x=0) = T_1, \quad T(x=d) = T_2. \quad (7.156)$$



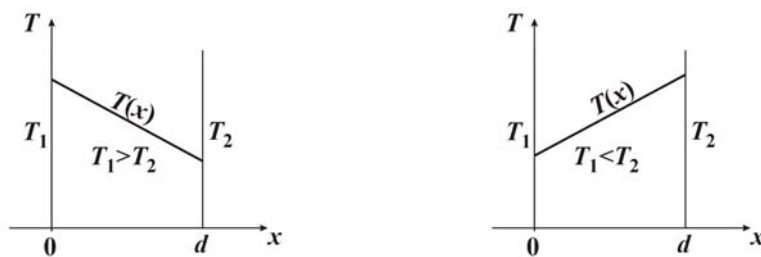
7.47. ábra. Síkfal hővezetése

A fenti differenciálegyenletet egyszer integrálva $\partial T(x)/\partial x = C_1$, majd még egyszer integrálva $T(x) = C_1 x + C_2$, ahol C_1 , C_2 integrálási állandók, amelyek a megoldásnak a peremfeltételekhez való illesztéséből határozhatók meg

$$T(x=0) = T_1 = C_2, \quad T(x=d) = T_2 = C_1 d + C_2, \quad (7.157)$$

ahonnan az állandók ismeretében $C_2 = T_1$ és $C_1 = (T_2 - T_1)/d$ a két fal között a hőmérséklet eloszlás a 7.48. ábrán látható módon, T_1 , T_2 értékétől függően lineáris lesz,

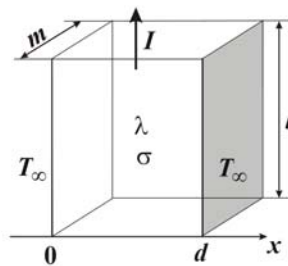
$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d}x + T_1. \quad (7.158)$$



7.48. ábra. A hőmérséklet eloszlás két síkfal között

7.7.3. A Laplace-Poisson egyenlet direkt megoldása

Legyen a feladat egy, a 7.49. ábrán látható σ villamos-, λ hő-vezetőképességű, I áramvezető belsejében a hőmérséklet eloszlás meghatározása, ha az áramvezető felületének hőmérséklete megegyezik a környezet T_∞ hőmérsékletével.



7.49. ábra. Időben állandósult hővezetés hőforrással

Feltételezve, hogy az áramvezető m mélysége sokkal nagyobb, mint a d szélessége, $m \gg d$, így a mélység irányú változás figyelmen kívül hagyható, a feladat egydimenziós esetnek tekinthető. A σ villamos vezetőképességű közegben az I áram hatására keletkezett Joule hő szolgáltatja az egyenletes eloszlású térfogati hőforrást,

$$P = RI^2 = \frac{l}{\sigma md} I^2 = \dot{Q}_v, \quad (7.159)$$

ahonnan a térfogati hőforrás-sűrűség a geometriai tér minden pontjában állandó,

$$\dot{q}_{v0} = \frac{\dot{Q}_v}{mdl} = \frac{I^2}{\sigma} \frac{1}{(mdl)^2}. \quad (7.160)$$

A hőmérséklet eloszlás az előírt elsőfajú, Dirichlet peremfeltétel mellett a

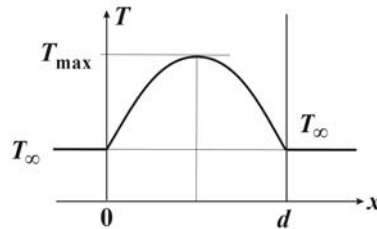
$$-\lambda \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \dot{q}_{v0}, \quad T(x=0) = T_\infty, \quad T(x=d) = T_\infty \quad (7.161)$$

Laplace-Poisson egyenlet megoldásával határozható meg.

A direkt megoldást alkalmazva a második integrálás után a hőmérséklet eloszlás a differenciálegyenlet $-\lambda T(x) = \dot{q}_{v0} x^2/2 + C_1 x + C_2$ megoldásának a peremfeltételekhez való illesztésével,

$$\begin{aligned} -\lambda T(x=0) &= C_2 = -\lambda T_\infty, \\ -\lambda T(x=d) &= \dot{q}_{v0} d^2/2 + C_1 d + C_2 = -\lambda T_\infty, \end{aligned} \quad (7.162)$$

az integrálási konstansok meghatározásával, $C_1 = -\dot{q}_{v0} d/2$, $C_2 = -\lambda T_\infty$ a hőmérséklet eloszlás az áramvezető belsejében a közepe felé a 7.50. ábrán látható módon parabolikusan nő,



7.50. ábra. Hőmérséklet eloszlás áramvezetőben

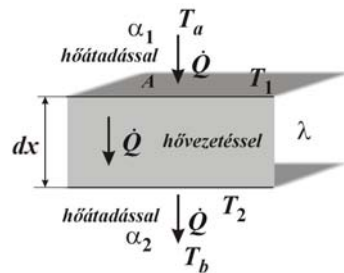
$$T(x) = -\frac{\dot{q}_{v0}}{\lambda} \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{q}_{v0}d}{2\lambda} x + T_\infty = \frac{\dot{q}_{v0}}{2\lambda} (d-x)x + T_\infty. \quad (7.163)$$

A hőmérséklet maximális értékét éppen a vezető közepén, az $x = d/2$ helyen éri el,

$$T_{\max} = T\left(x = \frac{d}{2}\right) = \frac{\dot{q}_{v0}}{2\lambda} \left(\frac{d}{2}\right)^2. \quad (7.164)$$

7.7.4. A hőellenállás, hőátviteli tényező

Hőátvitel esetén a hőáram $\dot{Q} = dQ/dt = \vec{q} \cdot \vec{A}$. Figyelembe véve, hogy a 7.51. ábrán látható hővezetés és hőátadás esetén ez a hőáram



7.51. ábra. A hőellenállás fogalma

$$\dot{Q} = -\lambda \frac{dT}{dx} A, \quad \dot{Q} = \alpha dT A \quad (7.165)$$

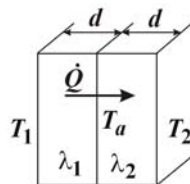
arányos a hőmérséklet különbséggel, ahol az arányossági tényező reciproka az $R_{h\ddot{o}}$ hőellenállás

$$\dot{Q} = \frac{dT}{R_{h\ddot{o}}}. \quad (7.166)$$

A fentieknek megfelelően hővezetésnél és hőátadásnál a hőellenállás

$$R_{h\ddot{o},\text{vezetés}} = \frac{d}{\lambda A}, \quad R_{h\ddot{o},\text{átadás}} = \frac{1}{\alpha A}. \quad (7.167)$$

A hőellenállás fogalmának felhasználásával egyszerű problémává válik a 7.52. ábrán látható, homogén, kétrétegű síkfal hővezetésének meghatározása.



7.52. ábra. Kétrétegű fal hővezetése

Feltéve, hogy a rétegek vastagsága rendre d_1, d_2 , hővezetési tényezőjük λ_1, λ_2 , a rétegeket határoló síkok hőmérséklete T_1, T_a, T_2 . Minthogy az egyes rétegekben a hőáram azonos, a rétegekben a hőmérséklet különbségek pedig arányosak a hőáram és a hőellenállás szorzatával $T_1 - T_a = R_1 \dot{Q}$, $T_a - T_2 = R_2 \dot{Q}$, a rétegek hőmérséklet különbségeinek összege a kétrétegű síkfal két oldala közti hőmérséklet különbséggel, $T_1 - T_2 = (T_1 - T_a) + (T_a - T_2) = (R_1 + R_2) \dot{Q}$, ahonnan a rétegezett síkok között átáramló hőáram $\dot{Q} = (T_1 - T_2) / (R_1 + R_2)$.

A 7.51. ábrán látható különböző rétegeken átáramló hőáram megadható a T_a , T_b hőmérsékletek különbsége és a hőellenállások ismeretében

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R_{a1} + R_v + R_{a2}} = kA(T_a - T_b), \quad (7.168)$$

ahol némi rendezés után

$$k = \frac{1}{A(R_{a1} + R_v + R_{a2})} = \frac{1}{A\left(\frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{dx}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{dx}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (7.169)$$

a hőátviteli, hőátbocsátási tényező.

7.7.5. Az időbeli változások vizsgálata

A hővezetés folyamatának időbeli vizsgálatához a hőmérséklet hely és időbeli változásának meghatározása a cél, $T = T(\vec{r}, t)$.

Ekkor egydimenziós feladatot tekintve a hővezetés (7.145) Fourier-féle differenciálegyenletének

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.170)$$

a $t = 0$ pillanatbeli hőmérséklet hely szerinti eloszlásának, $T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r})$, valamint az előírt első-, másod-, ill. harmadfajú peremfeltételek (7.150), (7.154), (7.155) ismeretében, a T hely- és időbeli változásának meghatározása a feladat $T = T(\vec{r}, t)$.

A megoldás a Fourier-féle szorzat-szeparációs módszerrel állítható elő, ahol a hőmérséklet változását egy helyfüggő $f(x)$ és egy időfüggő $g(t)$ függvény szorzata adja,

$$T(x, t) = f(x) \cdot g(t). \quad (7.171)$$

A feltételezett megoldást a (7.170) egyenletbe helyettesítve

$$f(x) \frac{\partial g(t)}{\partial t} - g(t) \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (7.172)$$

majd mindkét oldalt elosztva az $f(x) \cdot g(t)$ szorzattal és bevezetve a $\lambda/c\rho = a$ jelölést,

$$\frac{1}{g(t)} \frac{\partial g(t)}{\partial t} - \frac{1}{f(x)} a \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.173)$$

a parciális differenciálegyenlet szeparálható két közönséges, egy helytől függő másodrendű és egy időfüggő, elsőrendű differenciálegyenletté

$$\frac{1}{g(t)} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = m^2 = \frac{1}{f(x)} a \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \quad (7.174)$$

azaz

$$\frac{dg(t)}{dt} - m^2 g(t) = 0, \quad a \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - m^2 f(x) = 0. \quad (7.175)$$

Az egyes differenciálegyenletek megoldását exponenciális alakban keressük

$$g(t) = Ge^{\gamma t}, \quad f(x) = Fe^{\varphi x}, \quad (7.177)$$

az m^2 értékétől függően más-más megoldásra vezet.

(a) Az m^2 állandó pozitív valós, $m^2 > 0$, ekkor az egyes differenciálegyenletek alakja

$$\frac{dg(t)}{dt} - m^2 g(t) = 0, \quad a \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - m^2 f(x) = 0. \quad (7.178)$$

Az egyes differenciálegyenletek megoldásának feltételezett (7.177) alakját alkalmazva, és a differenciálegyenletbe helyettesítve

$$\gamma = m^2, \quad \varphi = \mp m/\sqrt{a}, \quad (7.179)$$

ahonnan az egyes részmegoldások ismeretében

$$g(t) = Ge^{m^2 t}, \quad f(x) = F_1 e^{-\frac{m}{\sqrt{a}} x} + F_2 e^{+\frac{m}{\sqrt{a}} x}, \quad (7.180)$$

a hőmérséklet hely - időszerinti eloszlása a következő,

$$\begin{aligned} T(x,t) &= Ge^{m^2 t} \left[F_1 e^{-\frac{m}{\sqrt{a}} x} + F_2 e^{+\frac{m}{\sqrt{a}} x} \right] = \\ &= \left[C_1 e^{\frac{m^2}{a} \left(t - \frac{\sqrt{a}}{m} x \right)} + C_2 e^{\frac{m^2}{a} \left(t + \frac{\sqrt{a}}{m} x \right)} \right], \end{aligned} \quad (7.181)$$

ahol $C_1 = GF_1$ és $C_2 = GF_2$. A kapott megoldás egy *retardált*, késleltetett hőterjedést ír le, azaz a hő terjedéséhez időre van szükség, ahol a hőterjedés sebessége a $t \mp x/v$ figyelembevételével $v = m/\sqrt{a}$. A zárójeles kifejezés első tagja a $+x$ irányba terjedő, a második tagja a $-x$ irányba terjedő hőhullámot jelenti. Az m állandó és a C_1, C_2 együtthatók a határfeltételekhez való illesztés során határozhatók meg.

(b) Az m^2 állandó negatív valós, $m^2 < 0$, ekkor az egyes differenciálegyenletek alakja

$$\frac{dg(t)}{dt} + m^2 g(t) = 0, \quad a \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + m^2 f(x) = 0, \quad (7.182)$$

a részmegoldások exponens kitevői

$$\gamma = -m^2, \quad \varphi = \mp j \frac{m}{\sqrt{a}}, \quad (7.183)$$

ahonnan a hőmérséklet eloszlása

$$T(x,t) = Ge^{-m^2 t} \left[F_1 e^{-j \frac{m}{\sqrt{a}} x} + F_2 e^{+j \frac{m}{\sqrt{a}} x} \right], \quad (7.184)$$

ahol \bar{F}_1 és \bar{F}_2 együtthatók komplex konjugált párt alkotnak, $\bar{F}_1 = F_1 e^{j\rho}$,
 $\bar{F}_2 = \bar{F}_1^* = F_1 e^{-j\rho}$ és így a hőmérséklet eloszlás a következő alakú lesz

$$\begin{aligned} T(x,t) &= Ge^{-m^2 t} \left[\bar{F}_1 e^{-j\frac{m}{\sqrt{a}}x} + \bar{F}_2 e^{+j\frac{m}{\sqrt{a}}x} \right] = \\ &= Ge^{-m^2 t} F_1 \left(e^{-j\left(\frac{m}{\sqrt{a}}x - \rho\right)} + e^{+j\left(\frac{m}{\sqrt{a}}x + \rho\right)} \right) \\ &= e^{-m^2 t} 2GF_1 \cos\left(\frac{m}{\sqrt{a}}x - \rho\right). \end{aligned} \quad (7.185)$$

A kapott megoldás állóhullámok kialakulását jelenti, amely állóhullámok amplitúdója az idő múlásával exponenciálisan csökken, azaz térben periodikusan változó, időben exponenciálisan csökkenő lesz a hőhullám eloszlása. Az m^2 állandó, valamint a GF_1 amplitúdó és a ρ kezdőfázis értékek a határfeltételekből határozhatók meg.

(c) Az m^2 állandó képzetes, $m^2 = j\kappa$, ekkor a differenciálegyenletek alakja

$$\frac{dg(t)}{dt} - j\kappa \frac{1}{g(t)} = 0, \quad a \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - j\kappa f(x) = 0, \quad (7.186)$$

a rész megoldások kitevői

$$\gamma = j\kappa, \quad \varphi = \mp(1+j)\sqrt{\frac{\kappa}{2a}}, \quad (7.187)$$

és így a hőmérséklet eloszlás a következő lesz,

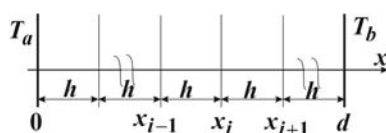
$$\begin{aligned} T(x,t) &= Ge^{j\kappa t} \left[F e^{\mp(1+j)\sqrt{\frac{\kappa}{2a}}x} \right] = \\ &= e^{\mp\sqrt{\frac{\kappa}{2a}}x} GF \left[\cos\left(\kappa \mp \sqrt{\frac{\kappa}{2a}}x\right) + j \sin\left(\kappa \mp \sqrt{\frac{\kappa}{2a}}x\right) \right], \end{aligned} \quad (7.188)$$

azaz a retardált, késleltetett hőhullám a megtett távolsággal exponenciálisan csökken. A ‘-’ előjel a $+x$ irányba haladó hullámot, míg a ‘+’ előjel a $-x$ irányba haladó hullámot jelöli.

7.8. A hővezetés differenciálegyenletének numerikus megoldása, a véges differenciák módszere

7.8.1. A Laplace-Poisson egyenlet numerikus közelítése

Legyen a feladat egy d szélességű, λ vezetőképességű közegben a hőmérséklet állandósult állapotbeli eloszlás meghatározása, (7.53. ábra), azaz a



7.53. ábra. Rácsosztás és rácspontok

$$-\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \frac{\dot{q}_V(x)}{\rho c} = g(x), \quad (7.189)$$

Laplace-Poisson egyenlet numerikus megoldása legyen a feladat.

A vizsgált tartományt n egyenlő részre osztva, az egyenletes rácsoztás mérete $h = d/n$, az i -edik rácspont helye $x_i = i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. A hőmérséklet értéke az i -edik rácspontban T_i . A feladat a Laplace-Poisson egyenletet a rácspontokban kielégítő hőmérséklet eloszlás meghatározása, azaz a következő parciális differenciálegyenlet megoldása

$$-a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i = g_i, \quad (7.190)$$

ahol $a = \lambda/\rho c$ és $g_i = (\dot{q}_V/c\rho)_i$ az i -edik rácspontbeli hőáram-sűrűséggel arányos gerjesztés.

Taylor sorral közelítve az i -edik pont környezetében lévő $i-1$ -edik és az $i+1$ -edik rácspontok hőmérsékletét,

$$T_{i-1} \approx T_i - h \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \dots, \quad (7.191)$$

$$T_{i+1} \approx T_i + h \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \dots,$$

majd a két hőmérsékletet összeadva és a magasabb deriváltakat elhanyagolva,

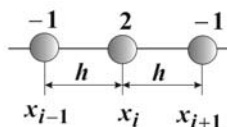
$$T_{i-1} + T_{i+1} \approx 2T_i + h^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i, \quad (7.192)$$

a hőmérséklet az i -edik rácspontbeli második deriváltját a Laplace-Poisson egyenlet i -edik pontbeli kifejezésébe helyettesítve

$$-a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i = a \frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = g_i, \quad (7.193)$$

ahonnan a 7.54. ábrán látható iterációs séma adódik az i -edik rácspont és a szomszédos rácspontok közti hőmérsékletek kapcsolatára a $h^2/a \cdot g_i = \tilde{g}_i$ jelölés bevezetésével

$$(-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}) = \tilde{g}_i. \quad (7.194)$$



7.54. ábra. A szomszédos rácspontok hőmérsékletei közti kapcsolatot meghatározó iterációs séma

7.8.2. A peremfeltételek figyelembevétele

(a) Elsőfajú, Dirichlet típusú peremfeltétel kielégítése

Feltételezve, hogy a vizsgált tartomány peremén, az $i=0$ és az $i=n$ rácspontokban, a vizsgált közeg határán ismert a falak hőmérséklete, mégpedig az $i=0$

rácspontban a hőmérséklet $T_{i=0} = T_a$, és az n -edik rácspontban a hőmérséklet értéke $T_{i=n} = T_b$, ahogy az a 7.53. ábrán látható.

Felírva a kapott (7.194) egyenletet az $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ rácspontokra

$$\begin{aligned}
 i=1, \quad & -T_a + 2T_1 - T_2 = \tilde{g}_1 h^2, \\
 i=2, \quad & -T_1 + 2T_2 - T_3 = \tilde{g}_2 h^2, \\
 & \dots \\
 i, \quad & -T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = \tilde{g}_i h^2, \\
 & \dots \\
 n-1, \quad & -T_{n-2} + 2T_{n-1} - T_b = \tilde{g}_{n-1} h^2,
 \end{aligned} \tag{7.195}$$

majd az ismert hőmérsékleteket a jobb oldalra rendezve, egy lineáris egyenletrendszer adódik. Az egyenlet baloldalán álló együttható mátrix hiányos, sávmátrix lesz,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \\ \tilde{g}_3 \\ \dots \\ \tilde{g}_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ T_b \end{bmatrix}. \tag{7.196}$$

A fenti egyenletrendszert megoldva, a rácspontok hőmérsékletei kiadódnak.

(b) *Másodfajú, Neumann típusú peremfeltétel kielégítése*

Másodfajú peremfeltétel esetén pl. az n -edik rácspont hőmérséklete nem ismert, adott azonban a hőmérséklet normális irányú, jelen esetben az x -irányú deriváltja, a felületen átáramló hőáram-sűrűség,

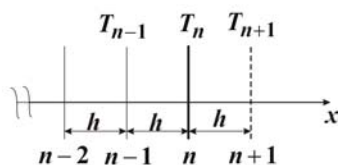
$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{i=n} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i=n} = \dot{q}_n. \tag{7.197}$$

Bevezetve a 7.55. ábrán látható fiktív, $n+1$ -edik rácspontot, ahhoz, hogy a normális irányú derivált megszerkeszthető legyen, az n -edik pontbeli derivált előállítható a fiktív, $n+1$ -edik és az $n-1$ -edik pontbeli hőmérsékletek különbségével és a köztük lévő rácstávolsággal

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i=n} = -\lambda \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2h} = \dot{q}_n, \quad (7.198)$$

ahonnan a fiktív rácspont hőmérséklete megadható a valóságos geometriához tartozó rácspontok hőmérsékleteivel és az előírt másodfajú, Neumann típusú peremfeltétellel,

$$T_{n+1} = T_{n-1} - \frac{2h}{\lambda} \dot{q}_n. \quad (7.199)$$



7.55. ábra. Fiktív rácspont a másodfajú peremfeltétel kielégítéséhez

Ekkor már az n -edik rácspontra is felírható az iterációs séma. Figyelembe kell azonban venni, hogy a peremfelületen nem szokott térfogati hőforrás elhelyezkedni, így az egyenlet baloldala nulla lesz,

$$a(-T_{n-1} + 2T_n - T_{n+1}) = 0. \quad (7.200)$$

Behelyettesítés után az n -edik rácspontra felírt egyenlet a következő,

$$-T_{n-1} + 2T_n - \left(T_{n-1} - \frac{2h}{\lambda} \dot{q}_n \right) = 0, \quad (7.201)$$

amely némi rendezés után a következő alakban adható meg,

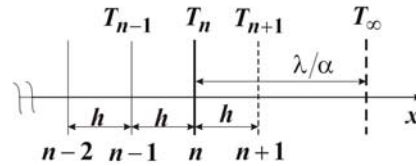
$$-2T_{n-1} + 2T_n + \frac{2h}{\lambda} \dot{q}_n = 0. \quad (7.202)$$

(c) *Harmadfajú, Robin típusú peremfeltétel kielégítése*

Harmadfajú peremfeltétel esetén az n -edik rácspontban a felületen átáramló, normális irányú hőáram-sűrűség, a fal hőmérséklete és a környezet hőmérséklete közti

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i=n} = \alpha(T_n - T_\infty) \quad (7.203)$$

kapcsolatot kell kielégíteni. Ebben az esetben ugyancsak felvéve a 7.56. ábrán látható fiktív rácspontot a hőáram-sűrűségnek a felület normálisa irányú komponensének meghatározásához.



7.56. ábra. Fiktív rácspont a harmadfajú peremfeltétel kielégítéséhez

Az n -edik rácspontra felírva a felületi normális irányú deriváltat

$$-\lambda \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2h} = \alpha(T_n - T_\infty), \quad (7.204)$$

ahonnan a fiktív rácspont hőmérséklete a következő alakban fejezhető ki

$$T_{n+1} = T_{n-1} - \frac{2h\alpha}{\lambda}(T_n - T_\infty). \quad (7.205)$$

A fiktív rácspont hőmérsékletét az n -edik rácspontra vonatkozó iterációs egyenletbe helyettesítve,

$$-T_{n-1} + 2T_n - T_{n+1} = 0, \quad (7.206)$$

és figyelembe véve, hogy a peremfelületen nincsen térfogati hőáram-forrás az n -edik rácspontra felírt egyenlet a következő alakra hozható

$$-T_{n-1} + 2T_n - \left(T_{n-1} - \frac{2h\alpha}{\lambda}(T_n - T_\infty) \right) = 0, \quad (7.207)$$

amely némi rendezés után a következő lesz,

$$-T_{n-1} + \left(1 + \frac{h\alpha}{\lambda} \right) T_n = \frac{h\alpha}{\lambda} T_\infty. \quad (7.208)$$

7.8.3. Az időbeli változás figyelembevétele, a diffúziós egyenlet numerikus közelítése

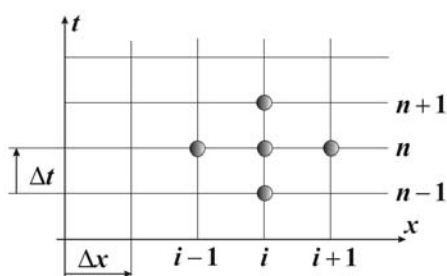
A hőmérséklet mező térbeli eloszlása mellett az időbeli változást is figyelembe vevő közelítések esetén a feladat a

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c\rho} \dot{q}_v(x,t) \quad (7.209)$$

diffúziós egyenlet megoldása, az előírt kezdeti

$$T(x, t = 0) = T_0(x), \quad (7.210)$$

és elsőfajú, Dirichlet típusú, másodfajú, Neumann típusú és harmadfajú, Robin típusú peremfeltételek (határfeltételek) mellett. A diffúziós egyenlet közelítő megoldásánál a diszkrétizálást a 7.57. ábrán látható módon térben és időben szokás alkalmazni.



7.57. ábra. Diszkrétizálás térben és időben

Az i -edik rácspont helykoordinátája $x_i = i \cdot \Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$, az n -edik időpillanat $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, N_t$. Az i -edik rácspontban, az n -edik időpillanatban a hőmérséklet értéke $T(x_i, t_n) = T_i^n$.

A térbeli iterációhoz hasonlóan az időbeli iteráció is a Taylor sorral való közelítés alkalmazásával oldható meg.

(a) Előrelépő Euler, explicit differencia séma

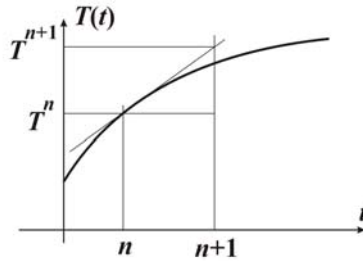
Az előrelépő differencia séma esetén a (7.209) diffúziós egyenlet i -edik rácspontához tartozó, n -edik időpillanatbeli alakjából lehet kiindulni,

$$\frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{c\rho} \dot{q}_v(x_i, t_n) = g_i^n. \quad (7.211)$$

ahol továbbra is bevezetve a $a = \lambda/c\rho$ valamint az $\dot{q}_v(x_i, t_n)/c\rho = g(x_i, t_n) = g_i^n$ jelölést. A hely szerinti második derivált a jól ismert közelítéssel kifejezhető,

$$\frac{\partial^2 T(x_i, t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (7.212)$$

az időbeli derivált pedig az i -edik rácspontbeli n -edik időpillanatbeli hőmérséklet értékéből az $n+1$ -edik időpillanatbeli hőmérséklet értékét a 7.58. ábrán látható előrelépő Taylor sorral közelítve a következő alakban adható meg



7.58. ábra. Taylor sor az előrelépő Euler differencia sémához

$$\frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}, \quad (7.213)$$

és ezzel a (7.211) egyenlet a következő alakban közelíthető

$$a \frac{-T_{i-1}^n + 2T_i^n - T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = g_i^n. \quad (7.214)$$

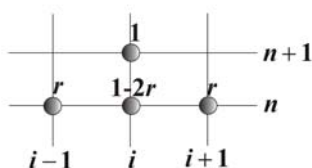
Az egyenlet mindkét oldalát az időlépés hosszával, Δt értékével megszorozva és bevezetve az $r = a \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$, valamint a $\Delta t \cdot g_i^n = \tilde{g}_i^n$ jelölést a következő egyenlet adódik

$$r(-T_{i-1}^n + 2T_i^n - T_{i+1}^n) + (T_i^{n+1} - T_i^n) = \tilde{g}_i^n. \quad (7.215)$$

A fenti egyenlet rendezésével az i -edik rácspontbeli hőmérsékletek ismeretében az $n+1$ -edik időpillanatbeli hőmérséklet előállítható

$$T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1-2r)2T_i^n + rT_{i+1}^n + \tilde{g}_i^n, \quad (7.216)$$

amely a 7.59. ábrán látható, előrelépő iterációs sémát eredményez.



7.59. ábra. Az előrelépő, Euler iterációs séma

Az egyes rácspontokra felírva az egyenleteket, a geometriai tér rácspontjaiban a hőmérséklet és a gerjesztés n -edik időpillanatbeli értékéből az $n+1$ -edik időpillanatbeli hőmérséklet eloszlás meghatározható,

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{T}^n + \tilde{\mathbf{G}}^n \quad (7.217)$$

ahol \mathbf{T}^n és $\tilde{\mathbf{G}}^n$ a rácspontokhoz tartozó hőmérsékletek és gerjesztések oszlopvektora,

$$\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ T_2^n \\ \dots \\ T_{N_x}^n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^n = \begin{bmatrix} \tilde{g}_0^n \\ \tilde{g}_1^n \\ \tilde{g}_2^n \\ \dots \\ \tilde{g}_{N_x}^n \end{bmatrix} \Delta t. \quad (7.218)$$

Meg kell jegyezni, hogy elsőfajú, Dirichlet típusú peremfeltétel esetén a perempont hőmérséklete ismert, és ugyanakkor a peremen a térfogati hőáram-forrás sűrűsége nulla. A fenti, (7.217) egyenletben az \mathbf{A} és \mathbf{B} kvadratus mátrixok tartalmazzák az egyes időpillanatokhoz és rácspontokhoz tartozó hőmérsékletek együtthatóit, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots \\ r & 1-2r & r & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (7.218)$$

(b) *Hátralépő Euler, implicit differencia séma*

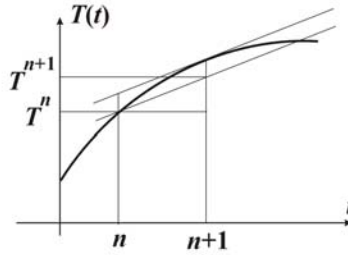
Hátralépő Euler differencia séma esetén a diffúziós egyenlet i -edik rácsponthoz tartozó, $n+1$ -edik időpillanatbeli megoldásának közelítésére kerül sor

$$\frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x_i, t_{n+1})}{\partial x^2} = g(x_i, t_{n+1}). \quad (7.219)$$

A másodrendű térbeli differenciálegyenletet továbbra is a korábban alkalmazott centrális differenciasémával közelítve

$$\frac{\partial^2 T(x_i, t_{n+1})}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (7.220)$$

az $n+1$ -edik időpillanatbeli időszerinti deriváltat pedig a 7.60. ábrán látható, az $n+1$ -edik időpillanatbeli érintővel közelítve,



7.60. ábra. Az $n+1$ -edik időpillanatbeli érintő a hátralépő differencia sémához

$$\frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}, \quad (7.221)$$

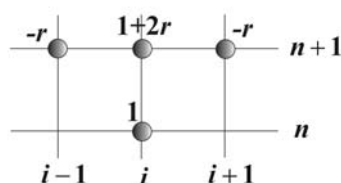
a (7.219) egyenletet közelítő differenciaséma a következő lesz

$$a \frac{-T_{i-1}^{n+1} + 2T_i^{n+1} - T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = g_i^{n+1}. \quad (7.222)$$

Az egyenlet mindkét oldalát az időlépés hosszával, Δt értékével megszorozva és továbbra is bevezetve az $r = a \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$, valamint a $\Delta t \cdot g_i^{n+1} = \tilde{g}_i^{n+1}$ jelölést a következő egyenlet adódik,

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (1+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = T_i^n + \tilde{g}_i^{n+1}. \quad (7.223)$$

A kiadódó iterációs séma a 7.61. ábrán látható.



7.61. ábra. A hátralépő Euler, az implicit iterációs séma

Alkalmazva a geometriai tér rácspontjaihoz tartozó hőmérsékletekre a feni iterációs egyenletet, a kapott egyenletrendszer a következő lesz

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{T}^n + \tilde{\mathbf{G}}^{n+1}, \quad (7.224)$$

ahol az $n+1$ -edik időpillanatbeli, az egyes rácspontokhoz tartozó hőmérsékletek és gerjesztések \mathbf{T}^{n+1} és $\tilde{\mathbf{G}}^{n+1}$ oszlopvektorai a következők,

$$\mathbf{T}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N_x}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_0^{n+1} \\ \tilde{g}_1^{n+1} \\ \tilde{g}_2^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N_x}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (7.225)$$

míg az \mathbf{A} , \mathbf{B} együttható mátrixok a következők,

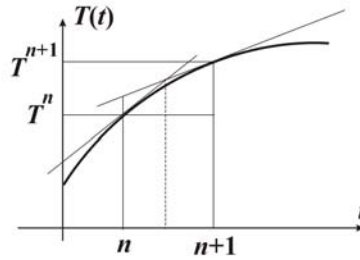
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \vdots \\ -r & 1+2r & -r & \vdots \\ 0 & -r & 1+2r & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (7.226)$$

(c) *Súlyozott differencia sémája, Crank-Nicolson differencia séma*

A súlyozott differencia séma alkalmazásakor a hőmérséklet $n+1$ -edik időpillanatbeli értékét az n -edik időpillanatbeli értékből, valamint az $n+1$ -edik időpillanatbeli derivált

Θ -szorososa és az n -edik időpillanatbeli derivált $1 - \Theta$ -szorososa által a Δt időintervallum alatt létrehozott növekménnyel adható meg, ahogy az a 7.62. ábrán látható,

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(\Theta \frac{\partial T_i^{n+1}}{\partial t} + (1 - \Theta) \frac{\partial T_i^n}{\partial t} \right) \Delta t. \quad (7.227)$$



7.62. ábra. A súlyozott differenciaséma

Képezve a diffúziós egyenlet $n+1$ -edik időpillanatbeli értékének $\Theta \Delta t$ -szeresét, és az n -edik időpillanatbeli értékének $(1 - \Theta) \Delta t$ -szeresét,

$$\Theta \Delta t \frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial t} - a \Theta \Delta t \frac{\partial^2 T(x_i, t_{n+1})}{\partial x^2} = \Theta \Delta t \cdot g(x_i, t_{n+1}), \quad (7.228)$$

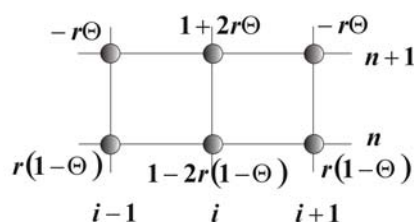
$$(1 - \Theta) \Delta t \frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial t} - a(1 - \Theta) \Delta t \frac{\partial^2 T(x_i, t_n)}{\partial x^2} = (1 - \Theta) \Delta t \cdot g(x_i, t_n),$$

majd összeadva, a baloldali első tagok összege (7.227) szerint éppen a hőmérséklet $n+1$ -edik és n -edik időpillanatbeli értékeinek különbsége, a második tagokat pedig a centrális differenciasémával közelítve és bevezetve a jól ismert $r = a \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$, valamint a $\Delta t \cdot g_i^n = \tilde{g}_i^n$ jelöléseket a fenti egyenletek összege a következő alakra hozható,

$$\begin{aligned} T_i^{n+1} - T_i^n - r \Theta (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) - (1 - \Theta) (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \\ = \Theta \tilde{g}_i^{n+1} + (1 - \Theta) \tilde{g}_i^n, \end{aligned} \quad (7.229)$$

ahonnan az $n+1$ -edik időpillanatbeli, az $i-1$, i , $i+1$ -edik rácspontokhoz tartozó hőmérséklet értékek ugyanezen rácspontok n -edik időpillanatbeli értékeivel, és az i -edik rácspontbeli $n+1$ -edik, és az n -edik időpillanatokhoz tartozó gerjesztéseivel kifejezhetők, ahogy azt a 7.63. ábrán látható differenciaséma mutatja

$$\begin{aligned}
-r\Theta T_{i-1}^{n+1} + (1+2r\Theta)T_i^{n+1} - r\Theta T_{i+1}^{n+1} &= \Theta \tilde{g}_i^{n+1} + (1-\Theta)\tilde{g}_i^n \\
+r(1-\Theta)T_{i-1}^n + (1-2r(1-\Theta))T_i^n + r(1-\Theta)T_{i+1}^n.
\end{aligned}
\tag{7.230}$$



7.63. ábra. A súlyozott deriváltak differencia sémája

A geometriai tér rácspontjaira felírva a fenti iterációs egyenletet, az a következő lineáris egyenletrendszerre vezet

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{T}^n + \tilde{\mathbf{G}}^{n,n+1}, \tag{7.231}$$

ahol \mathbf{T}^{n+1} és \mathbf{T}^n oszlopvektorok a rácspontokhoz tartozó hőmérsékletek $n+1$ -edik, ill. n -edik pillanatbeli értékeit tartalmazza, $\tilde{\mathbf{G}}^{n,n+1}$ az n -edik és az $n+1$ -edik időpillanatokhoz tartozó gerjesztések oszlopvektora

$$\tilde{\mathbf{G}}^{n,n+1} = \Theta \tilde{\mathbf{G}}^{n+1} + (1-\Theta)\tilde{\mathbf{G}}^n, \tag{7.232}$$

az együtttható mátrixok pedig a következő alakúak lesznek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2r\Theta & -r\Theta & 0 & \vdots \\ -r\Theta & 1+2r\Theta & -r\Theta & \vdots \\ 0 & -r\Theta & 1+2r\Theta & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \tag{7.233}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-2r(1-\Theta) & r(1-\Theta) & 0 & \vdots \\ r(1-\Theta) & 1-2r(1-\Theta) & r(1-\Theta) & \vdots \\ 0 & r(1-\Theta) & 1-2r(1-\Theta) & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{7.224}$$

(d) A differencia sémák stabilitása

Az előrelépő és a hátralépő Euler differencia sémák besorolhatók a súlyozott differencia sémák közé $\Theta = 0$, ill. $\Theta = 1$ választás mellett. Az előrelépő Euler, az explicit differencia séma a Δt időlépés nagyságától függően a 7.58. ábra alapján az új időpillanatbeli értékre a valóságos érték fölötti értéket ad a közelítés eredményeként, míg a hátralépő Euler, az implicit differencia séma a 7.60. ábra alapján a nem ismert új értékhez tartozó differenciálhányados feltételezésével a valóságos érték alatti közelítő eredményt ad. A $\Theta = 1/2$ értékhez tartozó súlyozott differencia sémát Crank-Nicolson differencia sémának nevezik. Ebben az esetben a 7.62. ábrán látható módon a régi, n -edik és az új, $n+1$ -edik időpillanatbeli deriváltak egyforma súllyal vesznek részt a hőmérséklet $n+1$ -edik időpillanatbeli közelítő értékének meghatározásában. A Crank-Nicolson iterációs séma egy prediktor-korrektor típusú iterációs sémának is tekinthető abban az értelemben, hogy először a régi időpillanatbeli derivált közelítéssel feltételez egy megoldást, majd az így kapott $n+1$ -edik időpillanatbeli deriválttal korrigálja az új értéket.

Meg kell jegyezni, hogy az egyes iterációs sémák stabilitása erősen függ az $r = a\Delta t / (\Delta x)^2$ változó, az időlépés és a rácsosztás arányától. Matematikai és numerikus közelítés eszközeivel igazolható, hogy a $\Theta = 0$ értékhez tartozó, előrelépő, explicit és a $\Theta = 1$ értékhez tartozó hátralépő, implicit Euler féle differencia sémák csak feltételesen stabilis közelítést eredményeznek, míg a $\Theta = 1/2$ értékhez tartozó Crank-Nicolson, ill. a $\Theta = 2/3$ értékhez tartozó Galjerkin iterációs sémák feltétel nélkül stabilis megoldáshoz konvergálnak.

7.9. Hőátadás, konvekció

Hőátadás, vagy konvekció akkor jön létre, ha a hő két közeg között egy határfelületen áramlik át. A falon átlépő hőáram-sűrűség

$$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty), \quad (7.225)$$

ahol α a hőátadási tényező, $[\alpha] = 1 \text{ W/m}^2\text{K}$. Áramló közegek esetében a hőátadás jellemzésére egy egyenértékű hővezetési tényezőt szokás bevezetni, amely azonos hőáram-sűrűséget eredményez,

$$\dot{q} = \alpha(T_w - T_\infty) = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial \vec{r}}. \quad (7.226)$$

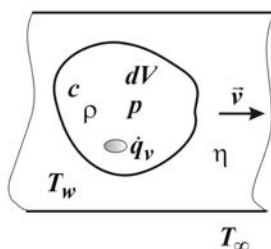
Ekkor az egyenértékű hővezetési tényező

$$\lambda_e = - \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\left(\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{n} \right)_w}. \quad (7.227)$$

Az egyenértékű hővezetési tényező bevezetésével az áramló közeg által szállított hőmennyiségre vonatkozó összefüggések a hővezetéshez hasonlóan meghatározhatók.

7.9.1. Hőterjedés áramló közegekben

A 7.64. ábrán látható, V térfogatú, egy nem összenyomható közeg mozgásegyenletét vizsgálva



7.64. ábra. Hőterjedés áramló közegekben

a hőmérséklet hely és időbeli változását is figyelembe véve $T = T(\vec{r}, t)$, a hőmérséklet dt idő alatti teljes megváltozása az áramló közegeknél már bevezetett, az időbeli megváltozásból származó hőmérséklet lokális változása mellett, a mozgó közeg sebességéből származó konvektív hőmérséklet-változást is figyelembe kell venni, azaz

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{r}}, \quad (7.228)$$

amelyet részletesen kifejtve a következőt jelenti,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (7.229)$$

Ezzel a hővezetés differenciálegyenlete az időbeli teljes megváltozás és az egyenértékű hővezetési tényező figyelembevételével a következő lesz,

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) - \lambda_e \Delta T = \dot{q}_V, \quad (7.230)$$

amely az egységnyi térfogat időegységre vonatkozó hő-energiaegyensúlyi egyenlete.

Mint hogy áramló közegről van szó, figyelembe kell venni az áramló közeg anyagmegmaradási törvényét, a folytonossági egyenletet is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial \vec{r}} = 0, \quad (7.231)$$

valamint az áramló közeg impulzus-megmaradására vonatkozó Navier-Stokes egyenletet is,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad (7.232)$$

ahol \vec{v} az áramló közeg sebessége, ρ a sűrűsége, p a nyomása, η a közeg viszkozitása.

A fenti (7.230)-(7.232) egyenletek szimultán megoldása során még figyelembe kell venni

- az áramló közeg határretegére vonatkozó összefüggéseket;
- a halmazállapot változából származó összefüggéseket;
- az áramló közeg kényszerített, ill. szabad áramlására vonatkozó feltételeket.

7.10. Hősugárzás

A tapasztalatok azt mutatják, hogy a testek, folyadékok és a gázok egy része a tér minden irányába, hőmérsékletétől és anyagától függően energiát sugároz. A sugárzással történő hőcsere eltér az eddigi hőterjedés (hővezetés, hőátadás/konvekció) tulajdonságaitól. Valamely anyag egységnyi felülete, egységnyi idő alatt kisugárzott hőenergiája a Stefan-Boltzmann törvény szerint

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (7.233)$$

ahol ε az anyag feketeségi foka, $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ az abszolút fekete test sugárzása.

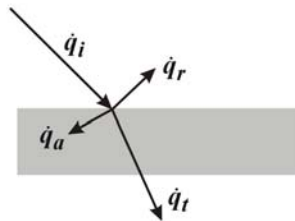
7.10.1. A hősugárzás alapfogalmai

Az anyagok λ hullámhosszú, T hőmérsékletű sugárzása az egységnyi felületre egységnyi idő alatt érkezett energia nagyságát, a felületre beérkező teljesítményt jelöli. Ez a sugárzás elektromágneses jellegű, elektromágneses tereknél a Poynting vektorral jellemzik.

A felületre beérkező sugárzás intenzitása a \dot{q}_i *beérkező/incident hőáram-sűrűség*, a test felületéről *reflektált/visszavert sugárzás hőáram-sűrűsége* \dot{q}_r , a test által elnyelt/abszorbeált sugárzás hőáram-sűrűsége \dot{q}_a , a testen *átengedett/traszmittált sugárzás hőáram-sűrűsége* \dot{q}_t ahogy az a 7.65. ábrán látható.

A fenti jelölésekkel az anyag felületének energiamérlege a következő

$$\dot{q}_i = \dot{q}_r + \dot{q}_a + \dot{q}_t. \quad (7.234)$$



7.65. ábra. A hőszugárzás fajtái

Bevezetve az egyes sugárzásoknak a beeső/incident sugárzáshoz való arányát

$$1 = \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_i} + \frac{\dot{q}_a}{\dot{q}_i} + \frac{\dot{q}_t}{\dot{q}_i}, \quad (7.235)$$

- a visszavert/reflektált hőáram-sűrűség és a beeső/incident hőáram-sűrűség aránya a test reflexiós tényezője, $r = \dot{q}_r / \dot{q}_i$;
- az elnyelt/abszorbeált hőáram-sűrűség és a beeső/incident hőáram-sűrűség aránya a test abszorpciós tényezője $a = \dot{q}_a / \dot{q}_i$;
- az átengedett/traszmittált hőáram-sűrűség és a beeső/incident hőáram-sűrűség aránya a test transzmissziós tényezője $t = \dot{q}_t / \dot{q}_i$.

A fenti összefüggéseket figyelembe véve (7.235) egyenletnek megfelelően a reflexiós, az abszorpciós és a transzmissziós tényezők összege egyet ad,

$$1 = r + a + t. \quad (7.239)$$

7.10.2. A hőszugárzás speciális esetei

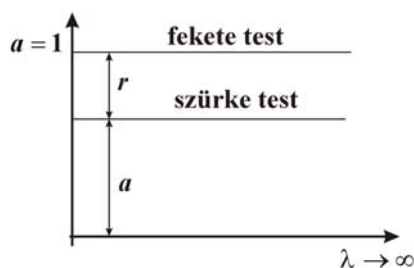
Az *abszolút fekete test* (7.66. ábra) minden hullámhosszú sugárzást elnyel, abszorpciós tényezője egy, $a = 1$, nem reflektál, és nem enged át semmilyen sugárzást, $r = 0$, $t = 0$.

A *fehér test* minden hullámhosszú sugárzást visszaver, reflexiós tényezője egy, $r = 1$, semmit nem abszorbeál, és semmit nem enged át, $a = 0$, $t = 0$.

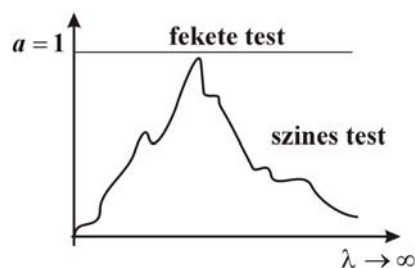
Az *átlátszó test* minden hullámhosszú sugárzást át ereszt, transzmissziós tényezője egy, $t = 1$, semmit nem reflektál, és semmit nem abszorbeál $r = 0$, $a = 0$.

A *szürke test* abszorpciós együtthatója kisebb, mint a fekete testté, $a < 1$, kevesebb hőáram-sűrűséget nyel el, mint a fekete test. A nem átlátszó szürke testekre $t = 0$, fennáll a reflexió és az abszorpció jelensége, $a + r = 1$.

A *színes testek* csak bizonyos hullámhosszú sugárzást, hőáram-sűrűséget nyelnek el, ahogy az a 7.67. ábrán látható, ezek a testek szelektív sugárzóknak tekinthetők.

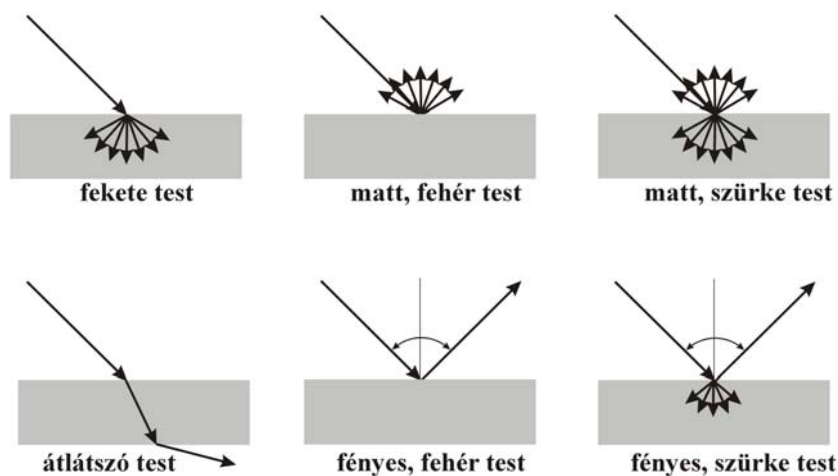


7.66. ábra. A fekete és a szürke test abszorpciója



7.67. ábra. A színes testek szelektív sugárzóak

A felület minősége szempontjából a visszaverő felület lehet fényes és matt, ahogy az a 7.68. ábrán látható.



7.68. ábra. A visszaverő felület minősége lehet fényes és matt

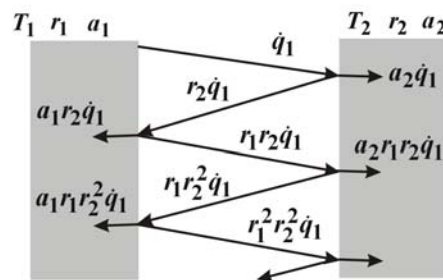
7.10.3. A hősugárzás Kirchhoff törvénye

A Kirchhoff törvény a termodinamika I. és II. főtételein alapszik, a testek emissziós és abszorpciós képessége között állapít meg összefüggést. A Kirchhoff törvény minden hősugárzó testre érvényes.

A 7.69. ábrán két, termikus egyensúlyban lévő sugárzó test, két egymással párhuzamos, végtelen kiterjedésű, átlátszatlan $t_1 = 0$, ill. $t_2 = 0$, síkfal látható. A felületek hőmérséklete T_1 , ill. T_2 . A két fal abszorpciós és reflexiós tényezője a_1, r_1 , ill. a_2, r_2 . A sugárzott hőenergia, ill. hőáram-sűrűsége az energiaegyensúlyi egyenlet alapján a beérkezett/incident sugárzás intenzitása, hőáram-sűrűsége meg kell hogy egyezzen a reflektált/visszavert hőáram-sűrűség és az elnyelt/abszorbeált hőáram-sűrűség összegével, azaz

$$\dot{q}_i = \dot{q}_r + \dot{q}_a, \quad 1 = r + a. \quad (7.240)$$

Az 1. felületen kilépő hőáram-sűrűség \dot{q}_1 , a 2. felületen ebből elnyelt rész $a_2\dot{q}_1$, a 2. felületről az 1. felületre visszavert/reflektált rész $r_2\dot{q}_1 = \dot{q}_1(1 - a_2)$. Az 1. felületre megérkező hőáram-sűrűség $r_2\dot{q}_1$, amely egy része elnyelődik/abszorbeálódik, $a_1r_2\dot{q}_1$, más része reflektálódik, $r_1r_2\dot{q}_1 = \dot{q}_1(1 - a_2)(1 - a_1)$, és a 2. felületre sugárzódik. A 2. felületre megérkező hőáram-sűrűség $r_1r_2\dot{q}_1$, amelyből elnyelődik/abszorbeálódik $r_1r_2\dot{q}_1a_2$, és $r_1r_2^2\dot{q}_1$ intenzitású hőáram-sűrűség reflektálódik az 1. felületre, és ez a folyamat folytatódik a falak között.



7.69. ábra. A két síkfal sugárzása

Az 1. felületen kisugárzott összes hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \dot{q}_1 + r_1 r_2 \dot{q}_1 + (r_1 r_2)^2 \dot{q}_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (r_1 r_2)^i \dot{q}_1, \quad (7.241)$$

amely egy mértani sorozatot reprezentál, ahol a sorozat első tagja \dot{q}_1 , két egymás utáni tag hányadosa pedig ηr_2 . Mivel az egyes falak reflexiós tényezője 1-nél kisebb, a mértani sorozat összege

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\dot{q}_1}{1 - \eta r_2} = \frac{\dot{q}_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)}. \quad (7.242)$$

A 2. felületről az 1. felületre kisugárzott hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{2 \rightarrow 1} = r_2 \dot{q}_1 + \eta r_2^2 \dot{q}_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (\eta r_2)^i r_2 \dot{q}_1, \quad (7.243)$$

amely szintén egy mértani sor, az első tagja $r_2 \dot{q}_1$, és két egymás utáni tag hányadosa ηr_2 , ahonnan a mértani sor összege

$$\dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{r_2 \dot{q}_1}{1 - \eta r_2} = \frac{(1 - a_2) \dot{q}_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)}. \quad (7.244)$$

A két felület közötti hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{12} = \dot{q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\dot{q}_1}{1 - \eta r_2} - \frac{r_2 \dot{q}_1}{1 - \eta r_2} = \frac{(1 - r_2) \dot{q}_1}{1 - \eta r_2} = \frac{a_2 \dot{q}_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)}. \quad (7.245)$$

Figyelembe véve, hogy az 1. felület által kisugárzott összes hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\dot{q}_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)} = \varepsilon_1 \sigma_0 T_1^4, \quad (7.246)$$

a 2. felület által kisugárzott összes hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{(1 - a_2) \dot{q}_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)} = \varepsilon_2 \sigma_0 T_2^4, \quad (7.247)$$

a két felület közti hőáram-sűrűség

$$\dot{q}_{12} = \dot{q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \sigma_0 (\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon_2 T_2^4). \quad (7.248)$$

Feltéve, hogy a két felület azonos anyagból készült, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, és azonos hőmérsékletűek, $T_1 = T_2$, akkor a fenti összefüggés szerint a hőáram-sűrűség áramlása nulla lesz, $\dot{q}_{12} = 0$.

7.11. Feladatok

7.11.1. Feladat

Határozza meg az 50 m hosszú rézdrót megnyúlását, ha hőmérséklete 12 C° -ról 32 C° -ra emelkedik, ha a réz lineáris hőtágulási együtthatója $1,67 \cdot 10^{-5} 1/\text{C}^\circ$.

Megoldás

A rézdrót megnyúlása $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 0,0167\text{ m} = 16,7\text{ mm}$.

7.11.2. Feladat

A 3 m hosszú rúd hossza $0,091\text{ cm}$ értékkel nő meg, miközben hőmérséklete 60 C° értékkel nőtt. Határozza meg, milyen anyagból van a rúd.

Megoldás

A rúd megnyúlása alapján anyagának lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = \Delta l / (l_0 \Delta T) = 9,1091 \cdot 10^{-7} 1/\text{K}$.

7.11.3. Feladat

Határozza meg, milyen hőmérsékleten lesz azonos a Celsius és a Fahrenheit sálán leolvasott érték.

Megoldás

A két hőmérsékleti skála közti $T_F = 9T_C / 5 + 32$ kapcsolat alapján, a $T = 9T / 5 + 32$ kapcsolatból a kétféle hőmérsékleti skála azonos értéket mutat $T = -40\text{ C}^\circ$ értéknél.

7.11.4. Feladat

Egy 5 cm átmérőjű vasgolyó $0,01\text{ mm}$ -rel nagyobb, mint a sárgaréz lemezen vágott lyuk, ha mindkettő 30 C° hőmérsékletű. Határozza meg, mekkora közös hőmérséklet szükséges ahhoz, hogy a golyó éppen átférjen a lyukon, ha a hőtágulási együtthatók $\alpha_{\text{vas}} = 1,2 \cdot 10^{-5} 1/\text{C}^\circ$, $\alpha_{\text{réz}} = 1,93 \cdot 10^{-5} 1/\text{C}^\circ$. Adja meg, hogy melegíteni vagy hűteni kell őket.

Megoldás

A hőmérséklet változással a két anyag lineáris hőtágulásának különbsége a méretdifferenciával egyezik meg, $\Delta l_{\text{rész}} - \Delta l_{\text{vas}} = (\alpha_{\text{rész}} - \alpha_{\text{vas}})d_0\Delta T = 0,00001$, ahonnan a szükséges hőmérséklet változás $\Delta T = \frac{0,00001}{(\alpha_{\text{rész}} - \alpha_{\text{vas}})0,05} = 27,3973 \text{ C}^\circ$, a közös hőmérséklet pedig $T_k = T_0 + \Delta T = 57,3973 \text{ C}^\circ$.

7.11.5. Feladat

Egy 150 dm^3 vizet tartalmazó akváriumban még 40 dm^3 hely van. Határozza meg, mekkora lesz az üres hely, ha az akvárium és a víz hőmérséklete is 10 C° értékkel nő. ($\alpha_{\text{üveg}} = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ$, $\beta_{\text{víz}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/C}^\circ$)

Megoldás

Az akvárium és a víz térfogata is nő, a kettő térfogatváltozásának különbsége, $\Delta V = V_{0\text{akv}}3\alpha_{\text{üveg}}\Delta T - V_{0\text{víz}}\beta_{\text{víz}}\Delta T = -0,4027 \text{ dm}^3$, A hőmérséklet változás után az akváriumban az üres hely $V_1 = V_0 - \Delta V = 40 - 0,4283 = 39,5973 \text{ dm}^3$ lesz.

7.11.6. Feladat

Egy részből készült lemeztábla területe $0,63 \text{ m}^2$, hőmérséklete 6 C° . Határozza meg, mekkora lesz a lemez területe 65 C° hőmérsékleten, ha $\alpha_{\text{rész}} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ 1/C}^\circ$.

Megoldás

A rézlemez területe 65 C° hőmérsékleten $A = A_0(1 + 2\alpha_{\text{rész}}\Delta T) = 0,6313 \text{ m}^2$.

7.11.7. Feladat

Egy $5,2$ literes edény színültig meg van töltve 18 C° hőmérsékletű vízzel. Melegítéskor 86 cm^3 víz kifolyt az edényből. Határozza meg, mekkora hőmérsékletre melegedett a víz, ha $\beta_{\text{víz}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/C}^\circ$.

Megoldás

A kifolyt víz mennyiségéből az állapotváltozás során a hőmérsékletváltozás $\Delta T = \Delta V / (\beta_{\text{víz}}V_0) = 86 \cdot 10^{-3} / (3 \cdot 10^{-4} \cdot 5,2) = 55,1282 \text{ C}^\circ$, tehát felmelegítés után a víz hőmérséklete $T_2 = 18 + 55,1282 = 73,1282 \text{ C}^\circ$.

7.11.8. Feladat

Egy 2,2 kg tömegű lövedék 150 m/s sebességgel hatol be a homokzsákba. Feltételezve, hogy fékezéskor az összes súrlódási munka a lövedék termikus energiáját növeli, határozza meg, mennyit emelkedik a lövedék hőmérséklete megállásig, ha az ólom fajhője $130 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A lövedék mozgási energiája hőenergiává alakul, $mv^2/2 = cm\Delta T$, ahonnan a lövedék hőmérséklete $\Delta T = v^2/2c = 86,5385 \text{ K}$ értékkel nő.

7.11.9. Feladat

Határozza meg, milyen magasra lehet emelni egy $2t$ tömegű testet azon az energián, amely 5 dm^3 térfogatú, 100 C° hőmérsékletű víz, 30 C° hőmérsékletre való lehűlésekor felszabadul, ha $c_{\text{víz}} = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A felszabaduló hőenergiával egyenértékű helyzeti energia $cm(T_1 - T_2) = mgh$, ahonnan $h = c(T_1 - T_2)/g = 4,2 \cdot 70/9,81 = 29,9694 \text{ m}$ magasra emelhető a tömeg.

7.11.10. Feladat

Egy átlagos fogyókúra alatt egy 60 kg tömegű személy naponta 8400 kJ energiataralmú ételt fogyaszthat. Ha ez az energia kizárólag a személy testét melegítené, határozza meg, mennyit emelkedne a test hőmérséklete egy nap alatt, ha az emberi test átlagos fajhője $3,5 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ)$.

Megoldás

A test hőmérséklete egy nap alatt $\Delta T = Q/(mc) = 40 \text{ C}^\circ$ értékkel növekedne.

7.11.11. Feladat

Összeöntve 20 kg, 40 C° hőmérsékletű, és 40 kg, 95 C° hőmérsékletű vizet, határozza meg az egyensúly beállta után a közös hőmérsékletüket.

Megoldás

A melegebb közeg által leadott hőmennyiséget a hidegebb közeg veszi fel mindaddig, amíg hőmérsékletük közös nem lesz, $Q_{le} = Q_{fel}$,

$cm_1(T_k - T_1) = cm_2(T_2 - T_k)$. Behelyettesítve a számadatokat,
 $20(T_k - 313) = 40(368 - T_k)$, a közös hőmérséklet $T_k = 349,6667 \text{ K} = 76,6667 \text{ C}^\circ$ lesz.

7.11.12. Feladat

Összeöntve 10 kg tömegű, 20 C° hőmérsékletű és 50 kg tömegű, 90 C° hőmérsékletű vizet, határozza meg az egyensúly beállta után a közös hőmérsékletüket.

Megoldás

A termikus egyensúly beálltához a leadott hőmennyiség megegyezik a felvett hőmennyiséggel, $cm_1(T_k - T_1) = cm_2(T_2 - T_k)$, ahonnan a közös hőmérséklet $T_k = 351,3333 \text{ K} = 78,3333 \text{ C}^\circ$.

7.11.13. Feladat

Határozza meg, hogy 45 dm^3 82 C° -os vízhez mennyi 20 C° -os vizet kell hozzáönteni, hogy keveredés után a hőmérséklet 40 C° legyen. A víz fajhője $4,2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, sűrűsége pedig $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Megoldás

Figyelembe véve, hogy a víz tömege $m = \rho V$, a leadott hőmennyiség felmelegíti a hidegebb komponenst, $c\rho V_1(T_1 - T_k) = c\rho V_2(T_k - T_2)$, ahonnan a 20 C° -os víz térfogata $V_2 = V_1(T_1 - T_k)/(T_k - T_2) = 45 \cdot (82 - 40)/(40 - 20) = 94,5000 \text{ dm}^3$.

7.11.14. Feladat

Határozza meg, mennyi hőt kell közölni a 3 dm^3 térfogatú, 40 C° hőmérsékletű, $4 \text{ kg}/\text{dm}^3$ fajsúlyú közeggel, miközben 90 C° hőmérsékletre melegszik, ha fajhője $5 \text{ kJ}/(\text{kg K})$.

Megoldás

A közlendő hőmennyiség $Q = cm\Delta T = 5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 50 = 3000 \text{ kJ}$.

7.11.15. Feladat

Gázlángon felmelegített 10 g tömegű acélszeget 100 g, 10 C° hőmérsékletű vízbe helyezve, a közös hőmérséklet 20 C° lesz. Határozza meg, mennyi volt az acélszeg hőmérséklete, ha az acél fajhője 470 J/(kg C°), a vízé pedig 4,2 kJ/(kg C°).

Megoldás

Az acélszeg által leadott hőmennyiség felmelegíti a vizet, $c_a m_a (T_a - T_k) = c_v m_v (T_k - T_v)$, ahonnan az acélszeg állapotváltozás előtti hőmérséklete $T_a = c_a m_a (T_a - T_k) = \frac{c_v m_v}{c_a m_a} (T_k - T_v) + T_k = 913,6170 \text{ C}^\circ$ volt.

7.11.16. Feladat

A 200 g, 75 C° hőmérsékletű kakaót 0,3 kg tömegű, 20 C° hőmérsékletű bögrébe öntve, határozza meg, mekkora lesz a közös hőmérséklet, ha a kakaó fajhője 4,1 kJ/(kg C°), a bögre fajhője pedig 1,4 kJ/(kg C°).

Megoldás

A kakaó által leadott hőmennyiség felmelegíti a bögrét, az állapotváltozás végén a közös hőmérséklet $T_k = (c_k m_k T_k + c_b m_b T_b) / (c_k m_k + c_b m_b) = 56,3710 \text{ C}^\circ$ lesz.

7.11.17. Feladat

96 g oxigén 5 atm nyomáson, 25 C° hőmérsékletéről olyan hőmérsékletre melegedett, amelyen térfogata 20 dm³ lett.

a) Rajzolja fel a folyamat p - v diagramját.

Határozza meg,

b) mekkora volt az oxigén térfogata, ha $M_{\text{oxigén}} = 32 \text{ g/mol}$ és $R = 8314 \text{ J/(kmol} \cdot \text{K)}$,

c) mekkora hőmérsékletre melegedett az oxigén,

d) mennyi termikus energiát kell a rendszerrel közölni, ha $c_{p,\text{oxigén}} = 916,9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$,

e) mekkora munkát végez a gáz,

f) mennyivel változik meg a gáz belső energiája.

Megoldás

a) A melegítés állandó nyomáson történt, $p_1 = p_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, az izobár folyamat p - v diagramja a 7.18 ábrán látható,

- b) Induláskor az oxigén térfogata $V_1 = \frac{m}{M} R \frac{T_1}{p_1} = \frac{96}{32} 8,314 \frac{298}{5 \cdot 10^5} = 0,0149 \text{ m}^3$,
- c) Az állapotváltozás végén a gáz hőmérséklete $T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{20}{14,9} 298 = 400 \text{ K}$,
- d) A melegítéshez szükséges hőmennyiség
 $Q = c_p m (T_2 - T_1) = 916,9 \cdot 0,096 (400 - 298) = 8,9783 \cdot 10^3 \text{ J} = 8,9783 \text{ kJ}$
- e) A gáz által végzett (fizikai) munka
 $W_f = p(V_2 - V_1) = 5 \cdot 10^5 (0,020 - 0,0149) = 2550 \text{ J}$,
- f) a gáz belső energiája $dU = Q - W_f = 8978,3 - 2550 = 6428,3 \text{ J}$ értékkel változik meg.

7.11.18. Feladat

4g normál állapotú (1atm nyomású, 273 K hőmérsékletű) He gáz nyomása változatlan térfogat mellett felére csökken.

- a) Rajzolja fel az állapotváltozás p - v diagramját.
 Határozza meg,
- b) mekkora a gáz térfogata, ha $M_{He} = 4 \text{ g/mól}$ és $R = 8314 \text{ J/(kmól} \cdot \text{K)}$,
- c) mekkora lesz a gáz hőmérséklete az állapotváltozás végén,
- d) mekkora a gáz által végzett (fizikai) munka,
- e) mennyi termikus energia-elvonásra van szükség az állapotváltozás során, ha $c_v = 3,161 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$,
- f) mennyivel változik meg a gáz belső energiája.

Megoldás

- a) Az állapotváltozás állandó térfogaton zajlik le, az izochor állapotváltozás p - v diagramja a 7.17. ábrán látható,
- b) Az állapotváltozás során a gáz térfogata nem változik,
 $V_1 = V_2 = \frac{m}{M} R \frac{T_1}{p_1} = 0,0227 \text{ m}^3$,
- c) Az állapotváltozás végén a gáz hőmérséklete $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 136,5 \text{ K}$,
- d) A gáz által végzett munka nulla, $W_f = p dV = 0$,
- e) A rendszerből elvont termikus energia $Q = c_v m (T_2 - T_1) = -1,7259 \text{ kJ}$,
- f) A rendszer belső energiája csökken $dU = Q - W_f = -1,7259 \text{ kJ}$.

7.11.19. Feladat

64 g oxigén 3 atm nyomáson, 30 C⁰ hőmérsékletről olyan hőmérsékletre melegedett, amelyen térfogata 35 dm³ lett.

a) Rajzolja fel a folyamat p - v diagramját.

Határozza meg,

b) mekkora hőmérsékletre melegszik a gáz az állapotváltozás végére, ha $M_{\text{oxigén}} = 32 \text{ g/mol}$ és $R = 8314 \text{ J/(kmól} \cdot \text{K)}$,

c) mekkora volt az oxigén térfogata az állapotváltozás elején,

d) mennyi termikus energiát kell a rendszerrel közölni, ha $c_{p,\text{oxigén}} = 916,9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$,

e) mekkora munkát végez a gáz,

f) mennyivel változik meg a gáz belső energiája.

Megoldás

a) Állandó nyomás ($p_1 = p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) melletti állapotváltozás p - v diagramja a 7.18. ábrán látható.

b) Az állapotváltozás végén a gáz hőmérséklete $T_2 = \frac{M}{mR} p_2 V_2 = 631,4650 \text{ K}$,

c) A gáz térfogata az állapotváltozás elején $V_1 = V_2 \frac{T_1}{T_2} = 0,0168 \text{ m}^3 = 16,8 \text{ dm}^3$,

d) A rendszerrel közölt hőenergia $Q = c_p m (T_2 - T_1) = 19275 \text{ J} = 19,275 \text{ kJ}$,

e) A gáz expanziós munkája $W_f = p(V_2 - V_1) = 5460,0 \text{ J} = 5,46 \text{ kJ}$,

f) A gáz belső energiájának megváltozása $dU = Q - W_f = 13,815 \text{ kJ}$.

7.11.20. Feladat

A talajban végzett mélyfúrások azt mutatják, hogy a Föld hőmérséklete 30 méterenként 1 C⁰ értékkel melegszik. Határozza meg, mennyi hőt sugároz ki a talaj négyzetméterenként és másodpercenként, ha a hővezetési tényezője 0,8 W/C⁰m.

Megoldás

A kisugárzott hőáram $\dot{Q} = \frac{\lambda \Delta T}{\Delta x} A \Delta t = \frac{0,8 \cdot 1}{30} 1 \cdot 1 = 0,0267 \text{ J}$.

7.11.21. Feladat

Egy 4 cm vastag, 25 cm x 25 cm méretű lemez két oldala között 40 C° a hőmérséklet különbség. Határozza meg, mennyi hőenergia jut át a lemezen óránként, ha a hővezetési tényező $0,0105\text{ W}/(\text{cm} \cdot \text{C}^\circ)$.

Megoldás

A lemezen óránként átáramló hőmennyiség $Q = \lambda A \Delta T t/l = 236,250\text{ kJ}$.

7.11.22. Feladat

Egy $1,2\text{ m}^2$ felületű ablaküvegen keresztül $6,6\text{ kW}$ hőáram jut a házra kívülre. Határozza meg, mekkora az ablaküveg külső hőmérséklete, ha a belső hőmérséklet 20 C° , az ablaküveg vastagsága 5 mm , hővezetési tényezője $1,1\text{ W}/\text{C}^\circ\text{ m}$.

Megoldás

Az ablaküvegen átáramló hőáram $\dot{Q} = A\lambda \Delta T/\Delta x$, ahonnan a hőmérséklet emelkedés $\Delta T = \dot{Q}\Delta x/A\lambda = 25,0000\text{ C}^\circ$, A külső hőmérséklet -5 C° .

7.11.23. Feladat

Egy hűtőszekrény ajtajának méretei $150 \times 80 \times 6\text{ cm}^3$. Határozza meg, mennyi hő jut át percenként a hűtőszekrény ajtaján, ha hővezetési tényezője $0,21\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, a belső és külső oldal közti hőmérséklet különbség pedig 30 C° .

Megoldás

A percenkénti hőáram $\dot{Q} = (\lambda \Delta T/l)At = (0,21 \cdot 30/0,06) \cdot 1,2 \cdot 60 = 7560\text{ J}$.

7.11.24. Feladat

10 cm vastag jég belső oldalán 0 , külső oldalán -5 C° a hőmérséklet. Határozza meg, mekkora a hőáram a jég négyzetmétereként, ha a jég hővezetési tényezője $2,2\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Megoldás

A hőáram $\dot{Q} = (\lambda \Delta T/d) \cdot A = 110\text{ W}$.

7.11.25. Feladat

Határozza meg, mekkora a hővezetési ellenállása egy 5 mm vastag, $1,2 \text{ m}^2$ felületű alumíniumlemeznek, ha hővezetési tényezője $236 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$.

Megoldás

A hővezetési ellenállás $R_T = d/(\lambda A) = 1,7655 \cdot 10^{-5} \text{ C}^\circ/\text{W}$.

7.11.26. Feladat

Egy 2 mm vastag, 200 cm^2 felületű rézlemez egyik oldala 420 C° hőmérsékletű közeggel, másik oldala ugyanekkora felületű 3 mm vastag acéllemezzel érintkezik, amelyet 20 C° -os folyadék hűt. Határozza meg a réz-acél lemezekből álló rendszer hővezetési ellenállását, ha a réz fajlagos hővezetési együtthatója $400 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$, az acélé $200 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$.

Megoldás

A két lemezből álló rendszer hővezetési ellenállása $R_T = d_{Cu}/\lambda_{Cu} A + d_{Fe}/\lambda_{Fe} A = 1,0000 \cdot 10^{-3} \text{ C}^\circ/\text{W}$.

7.11.27. Feladat

Egy 2 mm vastag, nagy kiterjedésű rézlemez egyik oldala 400 C° hőmérsékletű közeggel, a másik oldala 3 mm vastag acéllemezzel érintkezik, amelyet 20 C° -os folyadékkal hűtenek. Határozza meg a réz-acél közös határfelületének hőmérsékletét, ha a réz fajlagos hővezetési tényezője $400 \text{ W}/(\text{C}^\circ\text{m})$, az acélé $200 \text{ W}/(\text{C}^\circ\text{m})$.

Megoldás

A közegeken keresztül azonos a hőáram-sűrűség, $\lambda_{réz} (T_{réz} - T)/\Delta x_{réz} = \lambda_{acél} (T - T_{acél})/\Delta x_{acél}$, ahonnan a réz-acél közös határfelületének hőmérséklete $T = 320 \text{ C}^\circ$.

7.11.28. Feladat

Egy 5 mm vastag, nagy kiterjedésű alumínium lemez egyik oldala 150 C° hőmérsékletű közeggel, a másik oldala 3 mm vastag acéllemezzel érintkezik, amelyet 10 C° hőmérsékletű folyadék hűt. Határozza meg az alumínium-acél lemezek közös

határfelületének hőmérsékletét, ha az alumínium hővezetési tényezője $236 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$, az acélé $300 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$.

Megoldás

A hőáram-sűrűségből $\lambda_{al}A(T_{al} - T)/\Delta x_{al} = \lambda_{ac}A(T - T_{ac})/\Delta x_{ac}$ a közös határfelület hőmérséklete $T = 54,8913 \text{ C}^\circ$.

7.11.29. Feladat

Egy 5 mm vastag, nagy kiterjedésű alumínium lemezből készült tartályban 300 C° hőmérsékletű anyagot tárolnak, míg az edény külső oldalán a $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{C}^\circ)$ hőátadási tényezővel rendelkező közeg hőmérséklete a lemeztől távol 30 C° . Határozza meg az alumínium lemez külső határfelületének hőmérsékletét, ha az alumínium hővezetési tényezője $236 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$.

Megoldás

A hőáram-sűrűségből $\lambda_{al}A(T_{al} - T)/\Delta x_{al} = \alpha A(T - T_\infty)$, a tartály külső falának hőmérséklete $T = 299,4292 \text{ C}^\circ$.

7.11.30. Feladat

Egy vastag, nagy kiterjedésű alumínium lemez hőmérséklete 300 C° , míg a lemezt körülvevő $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{C}^\circ)$ hőátadási tényezővel rendelkező közeg hőmérséklete a lemeztől távol 30 C° . Határozza meg az alumínium lemez határfelületén a hőáram-sűrűség értékét.

Megoldás

Az alumíniumlemez határfelületén a hőáram-sűrűség $\dot{q}_w = \alpha(T_w - T_\infty) = 2700 \text{ W}/\text{m}^2$.

7.11.31. Feladat

Egy 6 mm vastag, nagy kiterjedésű fémből készült tartályban 320 C° hőmérsékletű közeg van, míg az edény külső oldalát 30 C° hőmérsékletű víz hűti. Határozza meg a tartály felületén a hőáram-sűrűség értékét, ha a fém hővezetési tényezője $185 \text{ W}/(\text{mC}^\circ)$.

Megoldás

A hőáram-sűrűség $\dot{q} = \lambda(T_b - T_k)/\Delta x = 8,9417 \cdot 10^6 \text{ W}/\text{m}^2 = 894,17 \text{ W}/\text{cm}^2$.

7.11.32. Feladat

Egy $5 \text{ kJ}/(\text{kgC}^\circ)$ fajhőjű, 2 kg tömegű közeg 150 cm^2 felületére $2500 \text{ W}/\text{cm}^2$ hőáram-sűrűség érkezik, amelynek 20% -a visszaverődik. Határozza meg, hány fokkal növeli meg a test hőmérsékletét az abszorbeált hőmennyiség.

Megoldás

A beérkező hőáram egy része reflektálódik, más része abszorbeálódik, $\dot{q}_A = A\dot{q}_r + A\dot{q}_a$, ahonnan az abszorbeált hőáram $\dot{Q}_a = A\dot{q}_a = A\dot{q}(1-a) = mc\Delta T$ növeli a test hőmérsékletét, $\Delta T = 0,8 \cdot 0,0150 \cdot 2500 \cdot 10^{-4} / (2 \cdot 5 \cdot 10^3) = 30 \text{ C}^\circ$.

7.11.33. Feladat

Határozza meg, mekkora hőáram-sűrűség reflektálódik a $0,4$ abszorpciós tényezőjű egységnyi felületen, ha a beérkező hőáram-sűrűség $5 \text{ W}/\text{cm}^2$.

Megoldás

A beérkező hőáram-sűrűség egy része reflektálódik, más része abszorbeálódik, $\dot{q}_i = (a+r)\dot{q}_i$, ahonnan a reflektált hőáram-sűrűség $\dot{q}_r = (1-a)\dot{q}_i = 3 \text{ W}/\text{cm}^2$.

7.11.34. Feladat

Határozza meg, mekkora hőmennyiség áramlik át a $0,3$ abszorpciós tényezőjű egységnyi felületen, ha a beérkező hőáram-sűrűség $12 \text{ W}/\text{cm}^2$.

Megoldás

A beérkező hőáram-sűrűség egy része abszorbeálódik, a másik része tovább halad. A továbbhaladó hőáram-sűrűség $\dot{q}_t = (1-a)\dot{q}_i = 0,7 \cdot 12 = 8,4 \text{ W}/\text{cm}^2$.

7.11.35. Feladat

Határozza meg, mekkora hőmennyiséget nyel el a $0,6$ reflexiós tényezőjű egységnyi felület, ha a beérkező hőáram-sűrűség $26 \text{ W}/\text{cm}^2$.

Megoldás

A beérkező hőáram-sűrűség egy része reflektálódik, más része abszorbeálódik, így az egységnyi felület által egységnyi idő alatt elnyelt hőmennyiség $\dot{Q}_a = (1-r) \cdot \dot{q}_i A = 10,4000 \text{ W}/\text{cm}^2$.

7.11.36. Feladat

Határozza meg, mekkora hőáram-sűrűség érkezik a 0,42 reflexiós tényezőjű egységnyi felületre, ha az abszorbeált hőáram-sűrűség 46 W/cm^2 .

Megoldás

Az abszorbeált hőáram-sűrűség $\dot{q}_a = (1 - r)\dot{q}_i$, ahonnan a beérkező hőáram-sűrűség $\dot{q}_i = 79,3103 \text{ W/cm}^2$.

8. OPTIKAI HULLÁMVEZETŐK ALAPJAI

Az optikai hullámvezetők valójában üvegszálak, amelyek elektromágneses jelek hullámformában való továbbítására szolgálnak. Ez a fejezet az elektromágneses hullámok és hullámterjedés alapjait a legegyszerűbb esetekre foglalja össze. Ennek megfelelően a 'Műszaki fizika I' c. tárgyban tanultakat felidézve az elektromágneses terek alapaxiómáinak összefoglalása után a szabadon terjedő elektromágneses hullámok egyenletei és azok megoldásai taglalására kerül sor. Két szigetelő határára merőlegesen és ferdén beeső síkhullámok viselkedésének elemzése után a szigetelőrétegben terjedő elektromágneses hullámok elmélete kerül megvitatásra.

8.1. Az elektromágneses tér alapaxiómái, a Maxwell egyenletek

Az elektromágneses terek alapösszefüggéseit a *Maxwell egyenletek* foglalják össze. Az elektromágneses teret jellemző térintenzitásokra, az $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos térerősség és a $\vec{B}(\vec{r}, t)$ mágneses indukció vektorokra vonatkozó alaptörvényeket, valamint a közöttük lévő kapcsolatokat a (8.2) és a (8.3), a második és a harmadik Maxwell egyenletek tartalmazzák. Az elektromágneses tér forrásmennyiségeinek, a $\rho(\vec{r}, t)$ elektromos töltésnek és a $\vec{J}(\vec{r}, t)$ áramsűrűségnek a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősség, valamint a $\vec{D}(\vec{r}, t)$ eltolási vektorokra kifejtett hatását a (8.1) és a (8.4), az első és a negyedik Maxwell egyenletek foglalják össze

$$\oint_l \vec{H}(\vec{r}, t) d\vec{l} = \int_a \left(\vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) d\vec{a}, \quad (8.1)$$

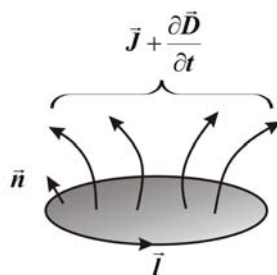
$$\oint_l \vec{E}(\vec{r}, t) d\vec{l} = - \int_a \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} d\vec{a}, \quad (8.2)$$

$$\oint_a \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{a} = 0, \quad (8.3)$$

$$\oint_a \vec{D}(\vec{r}, t) d\vec{a} = \int_v \rho(\vec{r}, t) dv. \quad (8.4)$$

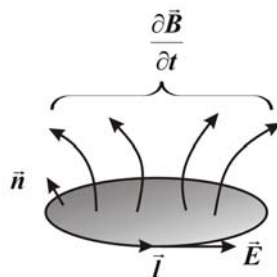
8.1.1. Az elektromos és mágneses tér gerjesztettsége és intenzitása

A (8.1) első Maxwell egyenlet a jól ismert általánosított *gerjesztési törvény*. A jobb oldalon álló első $\vec{J}(\vec{r}, t)$ tag a töltéshordozók mozgásával keltett vezetési áramsűrűség, amely a töltések mozgásából származó konduktív és a $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sebességgel mozgó ρ töltések keltette $\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho \vec{v}(\vec{r}, t)$ konvektív áramot reprezentálja. A második $\partial \vec{D}(\vec{r}, t) / \partial t$ tag az időben változó elektromos tér hatására fellépő eltolási áramsűrűség, amely mágneses teret gerjeszt. Az eltolási áramsűrűséggel jól modellezhető a szigetelő anyagokban megjelenő polarizációs áram. A gerjesztési törvény alapján a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősség vektornak egy zárt \vec{l} görbére vett integrálja megegyezik a görbe által kifeszített \vec{a} felületen átmenő $\vec{J}(\vec{r}, t)$ vezetési és $\partial \vec{D}(\vec{r}, t) / \partial t$ eltolási áramsűrűségek integráljával, ahogy azt a 8.1. ábra mutatja.



8.1. ábra. A gerjesztési törvény értelmezése

A (8.2) második Maxwell egyenlet a *Faraday indukció törvény* leíró összefüggés, amely szerint az időben változó mágneses tér elektromos teret kelt, amely zárt áramkörben áramot hoz létre (8.2. ábra).



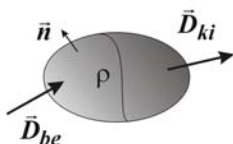
8.2. ábra. A Faraday féle indukció törvény értelmezése

A Faraday féle indukciós törvény alapján az $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos térerősség vektornak egy zárt \vec{l} görbére vett integrálja megegyezik a görbe által kifeszített \vec{a} felületen átmenő $\vec{B}(\vec{r}, t)$ indukció vektor idő szerinti deriváltjának az integráljával, ahogy azt a 8.2. ábrán látható.

Időbeli változások esetén az első két Maxwell egyenlet az elektromos és mágneses terek csatolt rendszerét írja le. Ez azt jelenti, hogy az időben változó $\vec{J}(\vec{r}, t)$ vezetési áram időben változó $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses teret kelt, az időben változó mágneses tér pedig $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos teret gerjeszt, amely elektromos tér időbeli változása $\partial\vec{D}(\vec{r}, t)/\partial t$ visszahat a mágneses térre és módosítja azt.

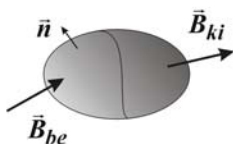
8.1.2. Az elektromos és mágneses tér forrásossága

A (8.3) és a (8.4) egyenletek az elektromágneses tér forrásosságával kapcsolatos összefüggéseket tartalmazzák. Az *elektrosztatika Gauss tételeként* ismert (8.4) egyenlet azt állítja, hogy az elektromos tér forrása az elektromos töltés, azaz az eltolási vektornak egy zárt felületre vett integrálja, megadja a felület által bezárt térfogatban helyet foglaló töltéseket, ahogy az a 8.3. ábrán látható.



8.3. ábra. Az elektrosztatika Gauss tételének értelmezése

A (8.3) egyenlet azt mondja, hogy nincsenek mágneses töltések, és ezért a mágneses indukciónak nincs forrása, azaz a mágneses indukciós vonalak sehol nem kezdődnek és nem végződnek (8.4. ábra).



8.4. ábra. Nincsenek mágneses töltések

Az elektromágneses tér intenzitását az \vec{E} , \vec{B} térjellelmzőkkel, míg a gerjesztettségét \vec{H} , \vec{D} vektorokkal lehet kifejezni.

Az első négy Maxwell egyenlet egy további összefüggést a töltésmegmaradás, vagy az áram folytonosságára vonatkozó *folytonossági egyenletet* is tartalmazza

$$\oint_a \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho(\mathbf{r}, t) dv = 0. \quad (8.5)$$

Ez azt jelenti, hogy az áramok és töltések hely és idő szerinti eloszlása, ill. megváltozása nem tetszőleges, hanem eleget kell tenni a fenti (8.5) folytonossági egyenletnek.

8.1.3. Anyagparaméterek az elektromágneses térben

Az elektromágneses tér \vec{E} , \vec{B} intenzitását és \vec{H} , \vec{D} gerjesztettségét kifejező térjellelmzők és a teret kitöltő anyag közötti kölcsönhatást az anyagjellemzők figyelembevétele teszi lehetővé. Lineáris izotrop anyag esetén az ϵ *permittivitás*, a μ *permeabilitás* és a σ *vezetőképesség* jellemzi a teret kitöltő anyag elektromos, mágneses, ill. áramvezetési tulajdonságait

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i), \quad (8.6)$$

ahol \vec{E}_i a nem-villamos jellegű töltés-szétválasztást reprezentáló erőhatás. Meg kell jegyezni, hogy mind az elektromos permittivitás mind a mágneses permeabilitás két tényező szorzataként kezelendő, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$, ahol ϵ_r , μ_r az anyagra jellemző relatív permittivitás és relatív permeabilitás, míg $\epsilon_0 = 10^{-9}/(4\pi 9)$ As/Vm, [F/m], és $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Vs/Am, [H/m] a vákuum permittivitása, ill. permeabilitása.

Annak alapján, hogy az anyagban a dielektromos polarizáció vagy a mágneses tulajdonságok, ill. az anyag áramvezetési képessége a meghatározó, szigetelő anyagokat, mágneses anyagokat, ill. vezető anyagokat szokás megkülönböztetni. Az elektromágneses tér térjellelmző mennyiségeihez hasonlóan a teret kitöltő anyag jellemzői is változhatnak az idő múlásával, ill. a hely szerinti pozíciójuknak megfelelően. A valóságos anyag lehet lineáris ill. nemlineáris, homogén ill. inhomogén, izotrop ill. anizotrop. Az anyag, amelyek anyagjellemző paramétere független az elektromágneses tér térjellelmzőinek változásától *lineáris*, egyébként *nemlineáris* $\epsilon = \epsilon(\vec{E}, \vec{D})$, $\mu = \mu(\vec{H}, \vec{B})$, $\sigma = \sigma(\vec{E}, \vec{J})$. Ha az anyagjellemző paraméter független az anyagi pontnak a geometriai térben elfoglalt pozíciójától, akkor az anyag *homogénnek* tekinthető, egyébként *inhomogén* $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$, $\mu = \mu(\vec{r})$, $\sigma = \sigma(\vec{r})$. Azokat az anyagokat amelyek anyagjellemzői a frekvencia függvényében változnak $\epsilon = \epsilon(f)$, $\mu = \mu(f)$, $\sigma = \sigma(f)$ *diszperzívnek*, ellenkező esetben *nem-diszperzívnek* nevezzük. Ha valamely

anyag elektromágneses térbeli viselkedését meghatározó paraméter nem függ a geometriai tér irányától, akkor az anyag *izotrop*, ellenkező esetben *anizotrop*.

8.1.4. Az elektromágneses tér energiamérlege

A Maxwell egyenletek alapján az elektromágneses térből származó, az anyag elemi térfogatában tárolt energia a $p = p(\vec{r}, t)$ teljesítmény sűrűséggel, ill. lineáris közeg esetén az egységnyi térfogat $w = w(\vec{r}, t)$ energia sűrűségével jellemezhető

$$p(\vec{r}, t) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (8.7)$$

Valamely v térfogatban a felhalmozott $W(t)$ elektromágneses tér energiája időben megváltozhat a térfogatban fellépő $P(t)$ teljesítményű folyamatok és a térfogatot határoló felületen kisugárzott $P_s(t)$ teljesítmény hatására. Ezek szerint a v térfogat energiamérlege a következő alakban adható meg

$$\frac{dW(t)}{dt} + P(t) + P_s(t) = 0, \quad (8.8)$$

ahol a v térfogat elektromágneses energiája

$$W(t) = \int_v w(\vec{r}, t) dv = \int_v \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv, \quad (8.9)$$

a térfogat teljesítménye a (8.6) kifejezés harmadik tagjának figyelembevételével

$$P(t) = \int_v p(\vec{r}, t) dv = \int_v \frac{1}{2} \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \int_v \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{J}^2}{\sigma} - \vec{J} \cdot \vec{E}_i \right) dv, \quad (8.10)$$

ahol \vec{J}^2/σ az áramvezetés során hővé váló teljesítmény, míg a $\vec{J} \cdot \vec{E}_i$ tag a nem-villamos eredetű energiákat reprezentálja. A felületen kisugárzott teljesítmény pedig

$$P_s(t) = \oint_a \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} = \oint_a \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a}, \quad (8.11)$$

ahol $\vec{S}(\vec{r}, t)$ a Poynting vektor,

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (8.12)$$

Szinuszos változás esetén, amikor a komplex írásmód mellett a $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos és a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses tér valós időfüggvényei a következő alakban adhatók meg

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\}, \quad (8.13)$$

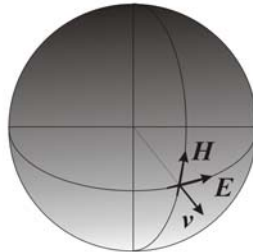
ahol $\vec{E}(\vec{r})$ és $\vec{H}(\vec{r})$ a komplex amplitúdók, a *komplex Poynting vektort* szokás alkalmazni

$$\vec{S}_k(\vec{r}, e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}), \quad (8.14)$$

ahol $\vec{H}^*(\vec{r})$ a mágneses térerősség komplex amplitúdójának konjugáltja.

8.2. Szabadon terjedő elektromágneses hullámok

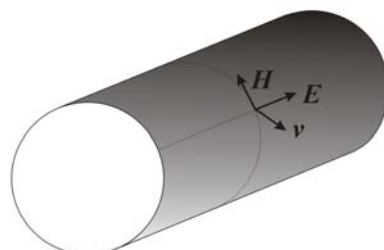
Az elektromágneses teret gerjesztő hullámforrástól távol különböző hullámformák fordulhatnak elő, mint pl. a 8.5. ábrán látható *gömbhullámok*, amelyek terjedési sebessége a gömb sugara irányában van, míg az $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos és a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősség vektorok a gömbfelület érintősíkjában helyezkednek el.



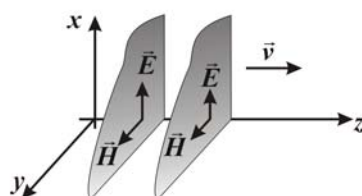
8.5. ábra. Gömbhullámok szemléltetése

A 8.6. ábrán látható *hengerhullámok* esetén a hullámfront terjedési sebessége a henger sugara irányában van, a térerősség vektorok pedig a henger palástjának érintősíkjában fekszenek.

A 8.7. ábrán látható *síkhullámok* esetében a térerősség vektorok hullámfrontja egy sík, ekkor az $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos és a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősség vektorok egymásra merőlegesek, és a terjedés irányára merőleges síkban helyezkednek el.



8.6. ábra. Hengerhullámok szemléltetése



8.7. ábra. Síkhullámok szemléltetése

Legyen a síkhullámok terjedési iránya a z -tengely iránya, ekkor az $\vec{E}(z, t)$ elektromos tér az x -tengely, a $\vec{H}(z, t)$ mágneses tér az y -tengely irányába mutat, és a $z = z_i$ síkban az elektromos és a mágneses térerősség állandó,

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x, \quad \vec{H}(z, t) = H_y(z, t) \vec{e}_y. \quad (8.15)$$

8.2.1. Síkhullámok hullámegyenlete

Lineáris közeget feltételezve a (8.6.) összefüggés szerint a térjellemzők között a szigetelőanyag, a mágneses anyag és az elektromos vezetőképességgel rendelkező anyagok paraméterei teremtenek kapcsolatot.

Alkalmazva a (8.1) gerjesztési törvényt a 8.8. ábrán látható hasáb Δz szélességű, l hosszúságú fedőlapjára, és figyelembe véve az anyagparaméterekre vonatkozó összefüggéseket a következő összefüggés írható fel

$$H_y(z, t)l - H_y(z + \Delta z, t)l = \left(\sigma E_x(z, t) + \varepsilon \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} \right) l \Delta z. \quad (8.16)$$

Mindkét oldalt az l hosszal és a Δz szélességgel elosztva, továbbá a hasáb Δz szélességét minden határon túl csökkentve, a fenti egyenlet az elektromos és a mágneses térerősségek közti parciális differenciálegyenletre vezet

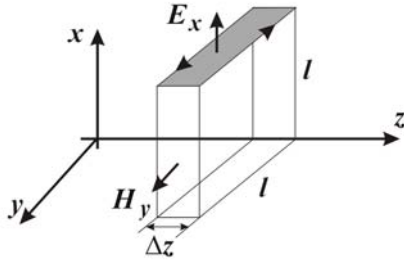
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{H_y(z + \Delta z, t) - H_y(z, t)}{\Delta z} = \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z}, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = - \left(\sigma E_x(z, t) + \varepsilon \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} \right),$$

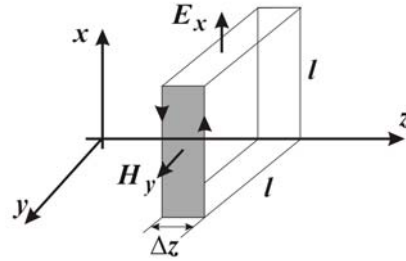
ahol a mágneses térerősség y -irányú komponensének hely szerinti deriváltja arányos az elektromos térerősség x -irányú komponensével és annak idő szerinti deriváltjával.

Alkalmazva a (8.2) indukció törvényt a 8.9. ábra Δz szélességű, l magasságú oldallapjára és figyelembe véve az anyagparaméterekre vonatkozó összefüggéseket a következő összefüggés írható fel,

$$-E_x(z, t)l + E_x(z + \Delta z, t)l = -\mu \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} l \Delta z. \quad (8.18)$$



8.8. ábra. A gerjesztési törvény alkalmazása a Δz szélességű hasábra



8.9. ábra. Az indukció törvény alkalmazása a Δz szélességű hasábra

Mindkét oldalt az l hosszal és a Δz szélességgel elosztva, továbbá a hasáb Δz szélességét minden határon túl csökkentve, a fenti egyenlet ugyancsak az elektromos és a mágneses térerősségek közti parciális differenciálegyenletre vezet

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{E_x(z + \Delta z, t) - E_x(z, t)}{\Delta z} = \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z}, \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t},$$

ahol az elektromos térerősség x -irányú komponensének hely szerinti deriváltja arányos a mágneses térerősség y -irányú komponensének idő szerinti deriváltjával.

A fenti két egyenlet egy csatolt differenciálegyenlet-rendszert alkot. A változók szétválasztásához, mindkét egyenletet z -szerint deriválva, és némi rendezés után az elektromos és a mágneses térerősségekre vonatkozó hullámeqyenlet adódik,

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = - \left(\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} \right), \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z}, \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2},$$

ahol a térjellemező elektromos és mágneses térerősség vektorok hely szerinti második deriváltjai arányosak az idő szerinti első és második deriváltakkal.

Tehát a szabadon terjedő síkhullám hullámeqyenlete *vesztéséges közegben* ($\sigma \neq 0$) a következő alakban adható meg

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (8.23)$$

A szabadon terjedő síkhullám hullámeqyenlete *szigetelő anyagban* ($\sigma = 0$) az un. hullámeqyenletet adja

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (8.25)$$

A szabadon terjedő síkhullám hullámeqyenlete *jó vezető anyagban* ($\varepsilon \ll \sigma$) a jól ismert diffúziós egyenlethez vezet

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} = 0, \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = 0. \quad (8.27)$$

8.2.2. A hullámegyenlet szinuszos időbeli változás esetén

Szinuszos változások esetén a komplex formalizmust alkalmazva az elektromos és mágneses térerősségek valós időfüggvényei a következő alakban adhatók meg

$$E_x(z,t) = \text{Re}(E_x(z)e^{j\omega t}), \quad H_y(z,t) = \text{Re}(H_y(z)e^{j\omega t}), \quad (8.28)$$

ahol $E_x(z)$ és $H_y(z)$ a helyfüggő komplex amplitúdók. Figyelembe véve, hogy a komplex formalizmus alkalmazásakor az időszerinti első derivált $j\omega$ -val való szorzáshoz, az időszerinti második derivált $(j\omega)^2$ -tel való szorzáshoz vezet, továbbá minthogy $e^{j\omega t}$ szorzótényező minden tagban szerepel, azokat figyelmen kívül hagyva, a komplex amplitúdókra a hullámegyenlet már csak helyfüggő differenciálegyenlet lesz,

$$-\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)E_x(z) = 0, \quad (8.29)$$

$$-\frac{\partial^2 H_y(z)}{\partial z^2} + j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)H_y(z) = 0. \quad (8.30)$$

Bevezetve a

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta \quad (8.31)$$

terjedési együtthatót, ahol az α valós rész a csillapítási tényező, a β imaginárius rész a fázistényező, ahogy az később igazolást nyer. A terjedési együtthatók bevezetésével a hullámegyenletek egy közönséges hiányos másodrendű differenciálegyenletté egyszerűsödnek

$$-\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 E_x(z) = 0, \quad -\frac{\partial^2 H_y(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 H_y(z) = 0. \quad (8.32)$$

8.2.3. A hullámegyenlet megoldása

A fenti differenciálegyenletek megoldása az elektromos térerősségre

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z} \quad (8.33)$$

alakú, míg a mágneses térerősségre vonatkozó megoldást a (8.19) összefüggés alapján a szinuszos időbeli változás estére vonatkozó

$$H_y(z) = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad (8.34)$$

egyenletből származtatható

$$H_y(z) = -\frac{1}{j\omega\mu} (-\gamma E^+ e^{-\gamma z} + \gamma E^- e^{\gamma z}), \quad (8.35)$$

amely némi rendezés után, és a $Z_0 = j\omega\mu/\gamma$ jelölés bevezetésével a következő alakban állítható elő

$$H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}, \quad (8.36)$$

ahol a közeg hullámimpedanciája

$$Z_0 = j\omega\mu/\gamma = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}, \quad [Z_0] = \Omega. \quad (8.37)$$

Az elektromos és a mágneses térerősségek hely szerinti eloszlásának ismeretében az elektromágneses síkhullám komponenseinek valós időfüggvénye megadható

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \operatorname{Re}\left\{ \left(E^+ e^{-j\gamma z} + E^- e^{\gamma z} \right) e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{ E^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ E^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \right\}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned} H_y(z, t) &= \operatorname{Re}\left\{ \left(\frac{E^+}{Z_0} e^{-j\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z} \right) e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\} - \operatorname{Re}\left\{ \frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \right\}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

amely egy-egy haladó hullámot reprezentál. A reális részeket kiértékelve

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \operatorname{Re}\left\{E^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} + \operatorname{Re}\left\{E^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\} = \\ &= E^+ e^{-\alpha z} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + E^- e^{\alpha z} \cos \omega\left(t + \frac{z}{v}\right), \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} H_y(z,t) &= \operatorname{Re}\left\{\frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} - \operatorname{Re}\left\{\frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\} = \\ &= \frac{E^+}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{E^-}{Z_0} e^{\alpha z} \cos \omega\left(t + \frac{z}{v}\right), \end{aligned} \quad (8.41)$$

ahol $v = \omega/\beta$ a hullám fázissebessége. A fenti két valós időfüggvény egy-egy retardált, késleltetett haladó hullámnak felel meg.

A síkhullámmal terjedő energia terjedési irányát a Poynting vektor adja meg, ennek megfelelően

$$\vec{S}_k = \frac{1}{2} \vec{E}(z) \times \vec{H}(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ E_x(z) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_y(z) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} E_x(z) \tilde{H}_y(z) \mathbf{e}_z, \quad (8.42)$$

azaz a síkhullámmal terjedő energia a síkhullám haladási irányába, az elektromos és a mágneses térerősségek síkjára merőlegesen terjed.

8.2.4. A megoldás értelmezése

A (8.40) összefüggéssel meghatározott elektromos térerősség első tagja a '+z' irányban terjedő síkhullám, a második tagja a '-z' irányban terjedő síkhullám.

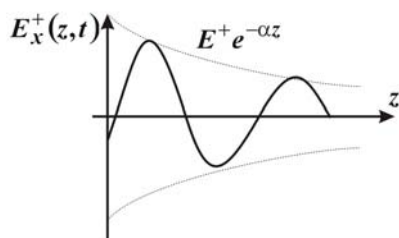
$$E_x(z,t) = \underbrace{E^+ e^{-\alpha z} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}_{E_x^+(z,t)} + \underbrace{E^- e^{\alpha z} \cos \omega\left(t + \frac{z}{v}\right)}_{E_x^-(z,t)}. \quad (8.43)$$

(a) Feltételezve, hogy a -z irányba haladó hullám amplitúdója nulla, $E^- = 0$, és E^+ valós értékű, akkor a +z irányban haladó elektromos térerősség hullám

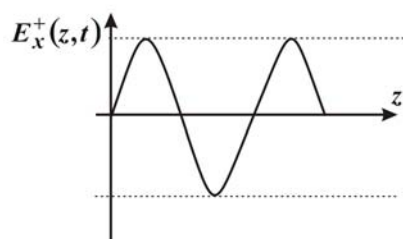
$$E_x^+(z,t) = E^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = E^+ e^{-\alpha z} \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad (8.44)$$

kifejezésében az $e^{-\alpha z}$ tényező azt jelenti, hogy az elektromos térerősség amplitúdója a z függvényében exponenciálisan csökken. A csökkenés mértékét fejezi ki az α csillapítási tényező ahogy az a 8.10. ábrán látható. Ha nincs csillapítás, a csillapítási tényező nulla, $\alpha = 0$, a hullám változatlan amplitúdóval terjed, (8.11. ábra),

$$E_x^+(z,t) = E^+ \cos \omega(t - z/v). \quad (8.45)$$



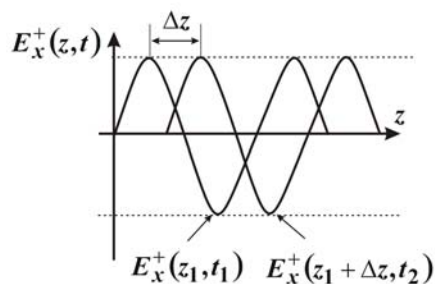
8.10. ábra. A csillapítási tényező értelmezése



8.11. ábra. Csillapítás-mentes hullámterjedés

(b) A $+z$ irányba haladó elektromos térerősség hullám (8.44) kifejezésében látható, hogy a térerősség hullám fázisa z növekedésekor késik a $z = 0$ helyen felvett fázishoz képest, a fáziskülönbség βz , ezért a fáziskésleltetésért felelős változó a β fázistényező.

(c) Csillapítás mentes esetet vizsgálva, a $+z$ irányba haladó hullám (8.45) kifejezésében a 8.12. ábrán látható módon a hullám amplitúdója ugyanakkora lesz a z_1 helyen a t_1 időpillanatban, mint a $z_1 + \Delta z$ helyen t_2 időpillanatban.

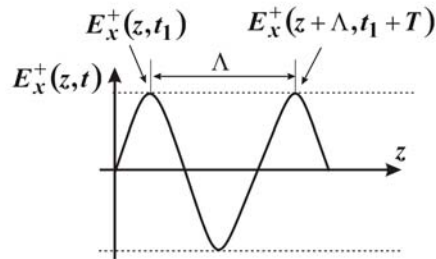


8.12. ábra. A haladó hullám terjedési sebessége v

Mint hogy a hullám amplitúdója nem változik, a cosinusz függvény értéke azonos, $\cos \omega(t_1 - z_1/v) = \cos \omega(t_2 - (z_1 + \Delta z)/v)$, ahonnan $t_1 = t_2 - \Delta z/v$, $t_2 - t_1 = \Delta t = \Delta z/v$, a hullámnak a közegben mért *terjedési sebessége* $v = \Delta z/\Delta t = \omega/\beta$.

(d) Csillapítás mentes esetet tekintve a $+z$ irányba haladó hullám (8.45) kifejezésében a hullám amplitúdója a z helyen a t_1 időpillanatban megegyezik a hullámnak a közegben mért Λ hullámhosszával távolabb, T periódusidővel később mért amplitúdójával, (8.13. ábra), $\cos \omega(t_1 - z/v) = \cos \omega(t_1 + T - (z + \Lambda)/v)$, ahonnan $\Lambda = vT = v/f = \omega T/\beta = 2\pi/\beta$.

A hullámegyenlet megoldásához az E^+ , E^- amplitúdók meghatározása a következő feladat.



8.13. ábra. A hullám közegben mért hullámhossza

8.2.5. Síkhullám ideális szigetelőben

Az ideális szigetelő vezetőképessége nulla, $\sigma = 0$. Ekkor a terjedési együttható kifejezése (8.31) alapján

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega/v = j\beta, \quad (8.46)$$

azaz ideális szigetelőanyagban nincs csillapítás, $\alpha \equiv 0$, a terjedési együttható imaginárius része a β fázistényező. A hullám közegben mért sebessége pedig $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ a *Maxwell relációval* egyezésben. Figyelembe véve, hogy mind a permittivitás, mind a permeabilitás egy ε_0 , μ_0 állandóból és egy ε_r , μ_r relatív permittivitásból és permeabilitásból áll, ahol $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = c$ a fénysebesség vákuumban és levegőben. Bevezetve a szigetelőanyagra jellemző $N = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ változót, és az anyag n törésmutatóját, ha $\mu_r = 1$, $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, az ideális szigetelőanyagban haladó hullám sebessége

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{N}. \quad (8.47)$$

Az ideális szigetelőanyag hullámimpedanciája (8.37) alapján valós,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}. \quad (8.48)$$

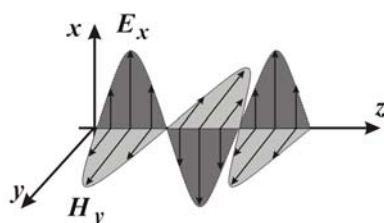
Ideális szigetelőanyagban, ahol a relatív permeabilitás egy, $\mu_r = 1$, a hullámimpedancia $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \sqrt{1/\varepsilon_r}$. Levegőben, ahol a relatív permittivitás és a relatív permeabilitás is egynek tekinthető, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, a hullámimpedancia $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$.

Az ideális szigetelőanyagban a $+z$ irányban terjedő elektromos és mágneses hullámok valós időfüggvénye

$$E_x^+(z, t) = \operatorname{Re}\{E^+ e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = E^+ \cos(\omega t - \beta z) = E^+ \cos \omega(t - z/v), \quad (8.49)$$

$$H_y^+(z, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{E^+}{Z_0} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right\} = \frac{E^+}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z) = \frac{E^+}{Z_0} \cos \omega(t - z/v), \quad (8.50)$$

ahonnan kiderül, hogy az elektromos és a mágneses síkhullám azonos fázisban terjed, azaz *lineárisan polarizált* a hullámterjedés, ahogy az a 8.14. ábrán látható.



8.14. ábra. Lineárisan polarizált elektromos és mágneses síkhullámok

A $+z$ -irányban haladó elektromágneses síkhullámok által szállított energia, a komplex Poynting vektor (8.42) kifejezésébe helyettesítve

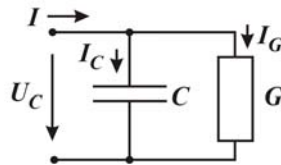
$$\begin{aligned}\vec{S}_k &= \frac{1}{2} \vec{E}(z) \times \vec{H}(z) = \frac{1}{2} E_x(z) \tilde{H}_y(z) \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{1}{2} E^+ e^{-j\beta z} \frac{\tilde{E}^+}{Z_0} e^{+j\beta z} \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} E^+ \frac{\tilde{E}^+}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{|E^+|^2}{Z_0} \mathbf{e}_z,\end{aligned}\quad (8.51)$$

tiszta valós, azaz a z -tengely irányában hatásos teljesítmény áramlik.

Összefoglalva, az elektromágneses síkhullámok elektromos és mágneses térerősség hullámjai egymásra merőlegesek, a terjedés irányára merőleges síkban helyezkednek el, azaz transzverzális síkhullámok, amelyek a hullámterjedés irányába hatásos teljesítményt szállítanak.

8.2.6. Síkhullám veszteséges szigetelőben

Veszteséges szigetelőanyag $\sigma \neq 0$ vezetőképességgel rendelkezik, ez a nemkívánatos szivárgási áram, amely a kondenzátorokban elhelyezett szigetelőanyag vesztesége, konduktanciájaként modellezhető, ahogy az a 8.15. ábrán látható.

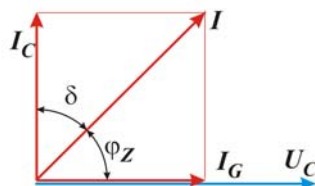


8.15. ábra. A veszteséges szigetelőanyaggal kitöltött kondenzátor hálózati reprezentációja

A komplex írásmódot alkalmazva és felrajzolva a kondenzátor áramai és feszültsége közti fázorábrát (8.16. ábra), a kondenzátor U_C feszültsége és a főág I árama közti fáziseltérés a veszteséges kondenzátor impedanciájának φ_z szöge, a δ pótszög, a kondenzátor I áramának az ideális esethez tartozó I_C értéktől való elhajlását a δ veszteségi szög jellemzi.

A szigetelőanyagok az ideálistól való eltérését, ezen δ veszteségi szög tangensével, a *veszteségi tényezővel* szokás jellemezni. Figyelembe véve a statikus elektromos és stacionárius áramlási tér közötti analógiát, $G/C = \sigma/\varepsilon$, a veszteségi tényező általában sokkal kisebb, mint egy,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_G}{I_C} = \frac{U_C G}{U_C \omega C} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1. \quad (8.52)$$



8.16. ábra. A veszteséges kondenzátor fázorábrája

A veszteséges szigetelőanyagban a síkhullám terjedési együtthatója (8.31) alapján

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j\omega\mu j\omega\varepsilon(1 + \sigma/j\omega\varepsilon)}, \quad (8.53)$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 + \sigma/j\omega\varepsilon},$$

amely a veszteségi tényező figyelembevételével és a $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2+\dots$, $|x \ll 1|$ közelítést alkalmazva

$$\gamma = j\beta\sqrt{1 - j\sigma/\omega\varepsilon} = j\beta\sqrt{1 - j\tg\delta} \approx j\beta\left(1 - j\frac{\tg\delta}{2}\right) = \frac{\tg\delta}{2} + j\beta, \quad (8.54)$$

ahonnan a veszteséges szigetelőanyag csillapítási tényezője $\alpha = \tg\delta/2$, fázistényezője pedig megegyezik az ideális szigetelőanyagban haladó hullám fázistényezőjével $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega/v$.

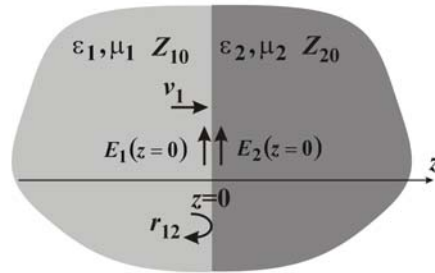
A veszteséges szigetelőanyagban haladó hullám hullámimpedanciája (8.37) szerint, a veszteségi tényezőt is figyelembe véve, valamint az $1/\sqrt{1+x} \approx 1-x/2\pm\dots$, $|x \ll 1|$ közelítést alkalmazva

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \sigma/j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 - j\tg\delta}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{\tg\delta}{2}\right) = R + jX, \end{aligned} \quad (8.55)$$

komplex impedancia lesz, ahol a reaktancia sokkal kisebb a rezisztenciánál, $X \ll R$. Veszteséges szigetelőanyagban a hullámimpedancia valós része megegyezik az ideális szigetelőanyag hullámimpedanciájával $Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

8.2.7. Szigetelőbe merőlegesen beeső síkhullámok reflexiója

Ideális szigetelőanyagot feltételezve a 8.17. ábrán látható két szigetelőanyag anyagparaméterei a következők. Az 1. anyag relatív permittivitása ϵ_{1r} , relatív permeabilitása μ_{1r} , elektromos vezetőképessége nulla, $\sigma_1 = 0$, a 2. anyag relatív permittivitása ϵ_{2r} , relatív permeabilitása μ_{2r} , elektromos vezetőképessége nulla, $\sigma_2 = 0$. Érkezzon az 1. közegből egy x -irányú E_1^+ amplitúdójú elektromos térerősség hullám merőlegesen a $z = 0$ helyen lévő két réteg (1-2 réteg) határfelületére. Ekkor az elektromágneses síkhullámmal érkező Poynting vektor $+z$ -irányban terjedő energiát szállít.



8.17. ábra. Síkhullám merőleges beesése

Az 1. rétegből a beérkező, $+z$ -irányba haladó hullám reflektálódik és $-z$ -irányba haladó komponens is fellép. A 2. közegben csak a $+z$ -irányba haladó hullám jelenik meg. Az egyes rétegekben az elektromágneses síkhullám komponensek (8.33), ill. (8.36) szerint a következő alakban írható,

$$E_{1x}(z) = E_1^+ e^{-j\beta_1 z} + E_1^- e^{j\beta_1 z}, \quad H_{1y}(z) = \frac{E_1^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} e^{j\beta_1 z}, \quad (8.56)$$

$$E_{2x}(z) = E_2^+ e^{-j\beta_2 z}, \quad H_{2y}(z) = \frac{E_2^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 z}. \quad (8.57)$$

Az 1. közegbe beérkező $E_1^+ e^{-j\beta_1 z}$ hullám a $z = 0$ helyen reflektálódik és az $E_1^- e^{j\beta_1 z}$ komponens elindul a $-z$ -irányba. Bevezetve az elektromos térerősség-hullám $z = 0$ helyen fellépő visszavert és beeső amplitúdóinak viszonyára a *reflexió tényező*

$$\eta_{12} = \frac{E_1^-}{E_1^+}, \quad (8.58)$$

és behelyettesítve az $E_1^- = \eta_{12}E_1^+$ alakot a fenti elektromos és mágneses hullámterjedést leíró egyenletekbe, az elektromos és mágneses térerősségek tangenciális komponenseinek folytonosságára vonatkozó feltételből $E_{1x}(z = -0) = E_{2x}(z = +0)$, $H_{1y}(z = -0) = H_{2y}(z = +0)$ a következő összefüggés adódik

$$E_1^+(1 + \eta_{12}) = E_2^+, \quad \frac{E_1^+}{Z_{01}}(1 - \eta_{12}) = \frac{E_2^+}{Z_{02}}. \quad (8.59)$$

A két egyenletet elosztva egymással,

$$Z_{01} \frac{1 + \eta_{12}}{1 - \eta_{12}} = Z_{02}, \quad (8.60)$$

a reflexiós tényező az egyes rétegek hullámimpedanciáinak $Z_{01} = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$, $Z_{02} = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ ismeretében meghatározható

$$\eta_{12} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (8.61)$$

Itt kell megjegyezni, hogy a fenti módon, az elektromos térerősség reflektált és beeső komponenseinek hányadosával bevezetett reflexiós tényező jelölése helyesen r_{12}^E , míg a mágneses térerősség visszavert és beeső komponenseinek viszonya az

$$r_{12}^H = \frac{H^-}{H^+} = -r_{12}^E \quad (8.62)$$

az elektromos térerősség komponensekre vonatkozó reflexiós tényező mínusz egyszerese.

Minthogy az egyes szigetelőanyagok relatív permittivitása és permeabilitása is más, az egyes rétegekben terjedő hullámok fázistényezői is különböznek,

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{v_2}, \quad (8.63)$$

ahol az egyes szigetelőanyagokban terjedő hullámok sebessége a következő

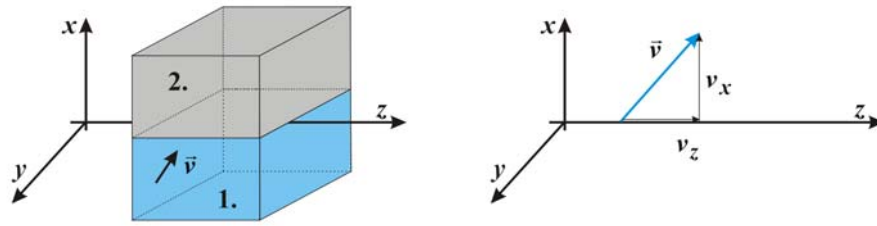
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}. \quad (8.64)$$

8.3. TE és TM típusú síkhullámok

8.3.1. Szigetelőbe ferdén beeső hullámok

A síkhullámok két ideális szigetelő határán történő reflexiójára vonatkozó előző pontbeli tárgyalása csak a felületre merőlegesen érkező síkhullámok esetén igaz.

A következőkben érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor a két, ideális szigetelőanyagot elválasztó felület az $x = 0$ sík, és a terjedő síkhullámnak nemcsak z -irányú, hanem x -irányú sebességkomponense is van, $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z$, miközben az y -irányban nincs változás, ahogy az a 8.18. ábrán látható.



8.18. ábra. Két szigetelő határfelületére ferdén beeső síkhullám

A z -irányban a terjedési együttható továbbra is legyen $\gamma = j\beta$, ekkor a z -irányban terjedő hullám fázissebessége $v_z = \omega/\beta$. Az x -irányban terjedő hullám terjedési együtthatója legyen jk , ahol k a cirkuláris hullámszám, ekkor az x -irányban terjedő hullám fázissebessége $v_x = \omega/k$.

A Fourier féle szorzat-szeparációs eljárást alkalmazva az elektromos és mágneses hullámokat leíró egyenletet az $F(x,z) = X(x)Z(z)$ szorzat alakban keresve az elektromos és mágneses térerősség hullámok komplex amplitúdói a következő alakban adhatók meg

$$\vec{E}(x,z) = \vec{E}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z}, \quad \vec{H}(x,z) = \vec{H}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z}, \quad (8.65)$$

ahol az e^{-jkx} a $+x$ -irányban terjedő, az e^{+jkx} a $-x$ -irányban terjedő hullámkomponenst jelöli. Az elektromágneses hullám térerősségeinek valós időfüggvénye

$$\vec{E}(x, z, t) = \operatorname{Re}\{\vec{E}(x, z)e^{j\omega t}\}, \quad \vec{H}(x, z, t) = \operatorname{Re}\{\vec{H}(x, z)e^{j\omega t}\}. \quad (8.66)$$

Ha k , a cirkuláris hullámszám valós, az x -irányban is haladó hullám alakul ki, $v_x = \omega/k$ fázissebességgel

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, z, t) &= \operatorname{Re}\{\vec{E}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = \vec{E}_1 \cos(\omega t \mp kx - \beta z), \\ \vec{H}(x, z, t) &= \operatorname{Re}\{\vec{H}_1 e^{\mp jkx} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = \vec{H}_1 \cos(\omega t \mp kx - \beta z), \end{aligned} \quad (8.67)$$

ha azonban $k = -j\kappa$, képzetes, ahol κ valós, akkor az x -irányban az elektromágneses tér *eltűnő* lesz. *Eltűnő* tér esetén az elektromos és mágneses térerőségek komplex amplitúdói és valós időfüggvényei a következő alakban adhatók meg

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, z, t) &= \operatorname{Re}\{\vec{E}_1 e^{\mp \kappa x} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = \vec{E}_1 e^{\mp \kappa x} \cos(\omega t - \beta z), \\ \vec{H}(x, z, t) &= \operatorname{Re}\{\vec{H}_1 e^{\mp \kappa x} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = \vec{H}_1 e^{\mp \kappa x} \cos(\omega t - \beta z), \end{aligned} \quad (8.68)$$

ahol a z -irányban haladó elektromágneses hullámban csillapított amplitúdójú lesz x -irányban, nem tartozik hozzá x -irányú fázissebesség és hullámhossz.

Természetesen mind az elektromos, mind a mágneses térerősség vektoroknak a geometriai tér minden irányába eső rendezője van

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z, \quad \vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_y + \vec{H}_z. \quad (8.69)$$

8.3.2. Az elektromágneses tér felbontása TE és TM típusú hullámokra

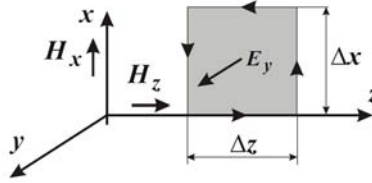
(a) Ideális szigetelőanyagot feltételezve a vezetési áram elhanyagolható, $|\vec{J}| \ll |\partial\vec{D}/\partial t|$. Felírva a (8.1) gerjesztési törvényt a komplex formalizmus alkalmazásával,

$$\oint_l \vec{H}(x, z) \cdot d\vec{l} = \int_a j\omega\epsilon\vec{E}(x, z) \cdot d\vec{a}, \quad (8.70)$$

a 8.19. ábrán látható $\Delta z \cdot \Delta x \vec{e}_y$ felületre és az azt határoló zárt görbére a jobbsodrású referencia irányokkal

$$\begin{aligned} -H_x(x, z)\Delta x + H_z(x, z)\Delta z + H_x(x, z + \Delta z)\Delta x - H_z(x + \Delta x, z)\Delta z = \\ = j\omega\epsilon E_y(x, z)\Delta x \Delta z, \end{aligned} \quad (8.71)$$

majd a $\Delta x \cdot \Delta z$ felülettel az egyenlet mindkét oldalát elosztva,



8.19. ábra. A gerjesztési törvény alkalmazása

$$j\omega\varepsilon E_y(x, z) = \frac{H_x(x, z + \Delta z) - H_x(x, z)}{\Delta z} - \frac{H_z(x + \Delta x, z) - H_z(x, z)}{\Delta x}, \quad (8.72)$$

és Δx , Δz értékét minden határon túl csökkentve

$$j\omega\varepsilon E_y(x, z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{H_x(x, z + \Delta z) - H_x(x, z)}{\Delta z} - \frac{H_z(x + \Delta x, z) - H_z(x, z)}{\Delta x}, \quad (8.73)$$

a gerjesztési törvény kapcsolatát teremt az E_y , H_x és H_z között,

$$j\omega\varepsilon E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (8.74)$$

A műveleteket ciklikusan, indexcserével megismételve az \vec{e}_z és az \vec{e}_x normálissal rendelkező felületekre, kapcsolat teremthető az elektromos tér E_x, E_y, E_z és a mágneses tér H_x, H_y, H_z rendezői között az y -irányú megváltozások elhanyagolásával, $\partial/\partial y \equiv 0$,

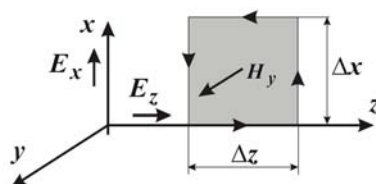
$$j\omega\varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad j\omega\varepsilon E_x = \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (8.75)$$

$$j\omega\varepsilon E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad j\omega\varepsilon E_z = -\frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (8.76)$$

(b) Felírva a (8.2) indukció törvényt a komplex formalizmus alkalmazásával,

$$\oint_l \vec{E}(x, z) \cdot d\vec{l} = -\int_a j\omega\omega\vec{H}(x, z) \cdot d\vec{a}, \quad (8.77)$$

a 8.20. ábrán látható $\Delta z \cdot \Delta x \vec{e}_y$ felületre és az azt határoló zárt görbére a jobbsodrású referencia irányokkal,



8.20. ábra. Az indukció törvény alkalmazása

$$\begin{aligned} -E_x(x, z)\Delta x + E_z(x, z)\Delta z + E_x(x, z + \Delta z)\Delta x - E_z(x + \Delta x, z)\Delta z = \\ = -j\omega\mu H_y(x, z)\Delta x \Delta z, \end{aligned} \quad (8.78)$$

amely egyenletet a $\Delta x \cdot \Delta z$ felülettel elosztva, és a Δx , Δz differenciákat minden határon túl csökkentve,

$$-j\omega\mu H_y(x, z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{E_x(x, z + \Delta z) - E_x(x, z)}{\Delta z} - \frac{E_z(x + \Delta x, z) - E_z(x, z)}{\Delta x}, \quad (8.79)$$

a mágneses tér és az elektromos tér komponensei között a következő kapcsolat írható fel,

$$-j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (8.80)$$

amely ciklikus indexcserével az \vec{e}_z és az \vec{e}_x normálissal rendelkező felületekre a következő kapcsolatokat eredményezi az y -irányú megváltozások elhanyagolásával, $\partial/\partial y \equiv 0$,

$$-j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad -j\omega\mu H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (8.81)$$

$$-j\omega\mu H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad -j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (8.82)$$

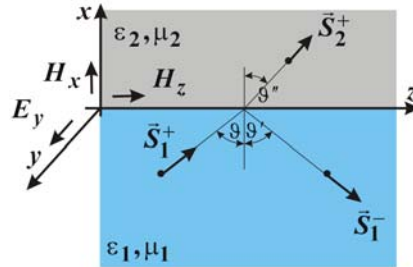
(c) A kapott egyenletek alapján megállapítható, hogy az indukció törvényből származtatott utolsó két (8.81) és (8.82) egyenletbe

$$-j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad -j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (8.83)$$

az elektromos tér (8.65) komplex amplitúdóját behelyettesítve és a kívánt deriválást elvégezve

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y, \quad H_z = \frac{\pm k}{\omega\mu} E_y \quad (8.84)$$

a mágneses tér H_x és H_z komponensei az elektromos tér E_y komponensének ismeretében meghatározható, azaz az elektromos tér E_y komponense a terjedés irányára merőleges lesz, *transzverzális elektromos, TE típusú* lesz a kialakuló tér, míg a mágneses tér komponensei a terjedés síkjában helyezkednek el (8.21. ábra).



8.21. ábra. TE típusú, módusú hullámterjedés

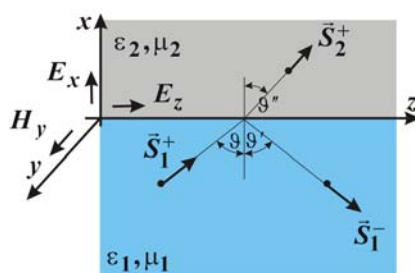
Hasonló módon a gerjesztési törvényből származtatott utolsó két (8.75) és (8.76) egyenletekbe a mágneses tér (8.65) alakú komplex amplitúdóját helyettesítve

$$j\omega\varepsilon E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad j\omega\varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (8.85)$$

és a kívánt deriváltakat képezve a következő adódik

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_y, \quad E_z = \frac{\mp k}{\omega\epsilon} H_y, \quad (8.86)$$

az elektromos tér E_x és E_z komponensei a mágneses tér H_y komponensének ismeretében meghatározható, azaz a mágneses tér H_y komponense a terjedés irányára merőleges síkban van, *transzverzális mágneses, TM típusú lesz* a kialakuló tér, ekkor az elektromos tér komponensei a terjedés síkjában helyezkednek el (8.22. ábra).



8.22. ábra. TM típusú, módusú hullámterjedés

A fennmaradó két, (8.74) és (8.80) egyenletet megvizsgálva,

$$j\omega\epsilon E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad -j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (8.87)$$

az első egyenletbe a (8.84), a másodikba a (8.86) alakú komplex amplitúdókat behelyettesítve, és a deriváltakat képezve mindkét egyenlet ugyanarra az azonosságra, a *diszperziós egyenletre* vezet

$$\beta^2 + k^2 = \omega^2 \mu\epsilon = N^2 k_0^2. \quad (8.88)$$

A fenti egyenletben k_0 a hullám frekvenciája által meghatározott szabadtéri fázistényező, vagy más néven a szabadtéri cirkuláris hullámszám

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad N = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}, \quad (8.89)$$

ahol λ a *szabadtéri hullámhossz*.

Összefoglalva, a TE és a TM típusú hullámterjedés egy transzverzális elektromos és egy transzverzális mágneses hullám terjedést ír le. TE típusú/módusú hullámterjedés esetén az elektromos tér a terjedés irányára merőleges, míg a terjedés síkjában

helyezkednek el a mágneses térerősség komponensei. TM típusú/módusú hullámterjedés esetén a mágneses térnek nincs a terjedés irányába eső komponense, az elektromos tér a terjedés síkjában fekszik, 8.1. Táblázat. A fentiek alapján egy háromdimenziós komponensekkel rendelkező elektromágneses hullám a TE és a TM típusú/módusú hullámterjedések összegeként írható fel.

8.1. Táblázat

TE és TM típusú hullámterjedés térjellemezői

TE típusú hullámterjedés	TM típusú hullámterjedés
$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y$ $H_z = \frac{\pm k}{\omega\mu} E_y$	$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} H_y$ $E_z = \frac{\mp k}{\omega\varepsilon} H_y$
$\omega^2 \mu\varepsilon = \beta^2 + k^2$	

8.3.3. A közegekben áramló teljesítmény

A TE és a TM módusú hullámterjedés esetére a komplex Poynting vektor segítségével az energiaáramlás meghatározható.

(a) TE módusú hullámterjedés energiaáramlása a következő módon határozható meg

$$\vec{S}_k^{TE} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ \tilde{H}_x & 0 & \tilde{H}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\vec{e}_x E_y \tilde{H}_z - \vec{e}_z E_y \tilde{H}_x], \quad (8.90)$$

$$S_x^{TE} = \frac{1}{2} E_y \tilde{H}_z = \pm \frac{\tilde{k}}{2\omega\mu} |E_y|^2, \quad S_z^{TE} = -\frac{1}{2} E_y \tilde{H}_x = \frac{\beta}{2\omega\mu} |E_y|^2. \quad (8.91)$$

(b) TM módusú hullámterjedés energiaáramlása a következő módon határozható meg

$$\vec{S}_k^{TM} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & E_z \\ 0 & \tilde{H}_y & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [-\vec{e}_x E_z \tilde{H}_y + \vec{e}_z E_x \tilde{H}_y], \quad (8.92)$$

$$S_x^{TM} = -\frac{1}{2}E_z\tilde{H}_y = \pm\frac{k}{2\omega\varepsilon}|H_y|^2, \quad S_z^{TM} = \frac{1}{2}E_x\tilde{H}_y = \frac{\beta}{2\omega\mu}|H_y|^2. \quad (8.93)$$

A fenti összefüggésekből megállapítható, hogy sem a TE, sem a TM módusú hullámterjedés nem szállít energiát az y -irányban,

$$S_y^{TE} = 0, \quad S_y^{TM} = 0. \quad (8.94)$$

A TE és a TM módusú hullámterjedés során hatásos teljesítmény áramlik a z -tengely irányába.

Az x -tengely irányában, ha k -valós, a csillapítatlan haladó hullám hatásos teljesítményt visz, ha azonban $k = -j\kappa$, az eltűnő elektromágneses tér meddő teljesítmény áramlását eredményezi.

8.3.4. Hullámterjedés az egyes rétegekben

(a) *TE módusú hullámterjedést* vizsgálva, mindkét rétegben haladó hullámot feltételezve az 1. közegben az elektromos térerősség E_1^+ beeső és E_1^- visszavert hullám komponenset tartalmaz,

$$E_{1y}(x, z) = (E_{1y}^+ e^{-jk_1x} + E_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}, \quad (8.95)$$

a mágneses térerősség komponensei pedig (8.84) alapján

$$H_{1x}(x, z) = -\frac{\beta_1}{\omega\mu_1} (E_{1y}^+ e^{-jk_1x} + E_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}, \quad (8.96)$$

$$H_{1z}(x, z) = \frac{k_1}{\omega\mu_1} (E_{1y}^+ e^{-jk_1x} - E_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}. \quad (8.97)$$

A 2. közegben az elektromos tér csak E_2^+ megtört hullámösszetevőt tartalmaz, nincs reflektált komponens, $E_2^- \equiv 0$,

$$E_{2y}(x, z) = E_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}, \quad (8.98)$$

a mágneses tér komponensei pedig a következők,

$$H_{2x}(x, z) = -\frac{\beta_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}, \quad (8.99)$$

$$H_{2z}(x, z) = \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}. \quad (8.100)$$

(b) *TM módusú hullámterjedést vizsgálva, mindkét rétegben haladó hullámot feltételezve az 1. közegben a mágneses térerősség H_1^+ beeső és H_1^- visszavert hullám komponenseit tartalmaz,*

$$H_{1y}(x, z) = (H_{1y}^+ e^{-jk_1x} + H_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}, \quad (8.101)$$

az elektromos térerősség komponensei pedig (8.86) alapján

$$E_{1x}(x, z) = \frac{\beta_1}{\omega\varepsilon_1} (H_{1y}^+ e^{-jk_1x} + H_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}, \quad (8.102)$$

$$E_{1z}(x, z) = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1} (H_{1y}^+ e^{-jk_1x} - H_{1y}^- e^{jk_1x}) e^{-j\beta_1z}. \quad (8.103)$$

A 2. közegben a mágneses térerősség csak H_2^+ megtört hullámösszetevőt tartalmaz, nincs reflektált komponens, $H_2^- \equiv 0$,

$$H_{2y}(x, z) = H_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}, \quad (8.104)$$

az elektromos tér komponensei pedig a következők,

$$E_{2x}(x, z) = \frac{\beta_2}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}, \quad (8.105)$$

$$E_{2z}(x, z) = -\frac{k_2}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^+ e^{-jk_2x} e^{-j\beta_2z}. \quad (8.106)$$

8.3.5. A hullámterjedés paramétereinek meghatározása

Feltételezve, hogy TE módusú hullámterjedés estén az E_1^+ beeső hullám elektromos összetevője, TM módusú hullámterjedés estén a H_1^+ beeső hullám mágneses összetevője valamint a beeső hullám \mathcal{G} beesési szöge ismert, a kérdés az egyes rétegekben az $E_1^-, H_1^-, E_2^+, H_2^+$ térerősség amplitúdók nagysága, az egyes rétegekben a z -irányú hullámterjedés β_1, β_2 és az x -irányú hullámterjedés, k_1, k_2 , fázistényezői, valamint a $\mathcal{G}', \mathcal{G}''$ a hullám reflexiós és törési szögeinek egymáshoz való viszonya.

(a) A fenti paraméterek meghatározásához először érdemes megadni a szigetelőanyag $N_1 = \sqrt{\mu_{1r}\epsilon_{1r}}$, ill. $N_2 = \sqrt{\mu_{2r}\epsilon_{2r}}$ paramétereit. Ha a szigetelőanyagok relatív mágneses permeabilitása $\mu_{1r} = 1$, $\mu_{2r} = 1$, a szigetelő közegek törésmutatói, $n_1 = \sqrt{\epsilon_{1r}}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_{2r}}$.

(b) Az $x = 0$ határfelületen az elektromos és mágneses térerősségek tangenciális komponenseinek folytonosságára vonatkozó feltételek kielégítése a további feladat.

Ez azt jelenti, hogy az E elektromos és a H mágneses térerősségek y -irányú és z -irányú rendezőinek folytonosnak kell lennie,

$$\begin{aligned} E_{1y}(x=0, z) &= E_{2y}(x=0, z), & H_{1y}(x=0, z) &= H_{2y}(x=0, z), \\ E_{1z}(x=0, z) &= E_{2z}(x=0, z), & H_{1z}(x=0, z) &= H_{2z}(x=0, z). \end{aligned} \quad (8.107)$$

Így a két réteg határán a z -irányú terjedésre jellemző β fázistényező nem lehet különböző, azaz fázissebességek z -irányú komponensei azonosak,

$$v_{1z} = \frac{\omega}{\beta_1} = v_{2z} = \frac{\omega}{\beta_2}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta. \quad (8.108)$$

(c) A beeső és a reflektált hullám x -irányú terjedésre jellemző k_1 fázistényezője azonos, ezért a visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel

$$\begin{aligned} k_1(E_1^+) &= k_1(E_1^-), & \mathcal{G}' &= \mathcal{G}, \\ k_1(H_1^+) &= k_1(H_1^-), & \mathcal{G}' &= \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (8.109)$$

(d) Feltételezve, hogy az 1. közegben az x -irányú hullámterjedés *haladó hullám*, ekkor a diszperziós egyenlet alapján az x -irányú terjedés k_1 fázistényezője valós,

$$k_1 = \sqrt{\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 - \beta^2} = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \quad (8.110)$$

$$\beta < \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = N_1 k_0,$$

a 2. közegben legyen *eltűnő az elektromágneses tér*, azaz k_2 képzetes, amely a diszperziós egyenlet alapján azt jelenti, hogy

$$k_2 = \sqrt{\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta^2} = -j \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2} = -j \kappa_2, \quad (8.111)$$

$$N_2 k_0 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} < \beta,$$

azaz az anyagjellemzők és a z -irányú fázistényező kapcsolata a következő,

$$N_2 k_0 < \beta < N_1 k_0. \quad (8.112)$$

8.3.6. Hullámterjedés a 2. rétegben eltűnő térrel

A 2. rétegben eltűnő tér esetén az x -irányú hullámterjedésre jellemző $k_2 = -j \kappa_2$ imaginárius.

(a) A 2. rétegben eltűnő *TE módusú* hullámterjedés esetén az 1. rétegben az elektromágneses térerősségek haladó hullámot alkotnak, azaz a térkomponensek a (8.95)-(8.97) alakjukat megtartják,

$$E_{1y}(x, z) = \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}, \quad (8.113)$$

$$H_{1x}(x, z) = -\frac{\beta}{\omega \mu_1} \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}, \quad (8.114)$$

$$H_{1z}(x, z) = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \left(E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - E_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}. \quad (8.115)$$

a 2. rétegben mivel $k_2 = -j \kappa_2$ imaginárius, a (8.98)-(8.100) hullámkomponensek amplitúdója csillapodó lesz,

$$E_{2y}(x, z) = E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad (8.116)$$

$$H_{2x}(x, z) = -\frac{\beta}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad (8.117)$$

$$H_{2z}(x, z) = \frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_2} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}. \quad (8.118)$$

(b) *TM módusú*, eltűnő hullámterjedés esetén ugyancsak az 1. rétegben a hullámkomponensek rendezői (8.101)-(8.103) változatlanok maradnak,

$$H_{1y}(x, z) = \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + H_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}, \quad (8.119)$$

$$E_{1x}(x, z) = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_1} \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + H_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}, \quad (8.120)$$

$$E_{1z}(x, z) = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1} \left(H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - H_{1y}^- e^{jk_1 x} \right) e^{-j\beta z}. \quad (8.121)$$

a 2. rétegben mivel $k_2 = -j\kappa_2$ imaginárius, a (8.104)-(8.106) hullámkomponensek amplitúdója itt is csillapodó lesz,

$$H_{2y}(x, z) = H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad (8.122)$$

$$E_{2x}(x, z) = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \quad (8.123)$$

$$E_{2z}(x, z) = \frac{j\kappa_2}{\omega\varepsilon_2} H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}. \quad (8.124)$$

8.3.7. A két réteg illesztése, a reflexió tényező

(a) *TE módusú* hullámterjedés illesztése esetén az $x = 0$ helyen az elektromágneses térerősség komponensek tangenciális rendezői folytonosak, azaz az elektromos térerősség y -irányú, valamint a mágneses térerősség z -irányú komponensei folytonosak. A (8.113), (8.116), (8.115) és (8.118) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned}
E_{1y}(x=0, z) &= E_{2y}(x=0, z), & E_{1y}^+ + E_{1y}^- &= E_{2y}^+, \\
H_{1z}(x=0, z) &= H_{2z}(x=0, z), & \frac{k_1}{\mu_1} E_{1y}^+ - \frac{k_1}{\mu_1} E_{1y}^- &= \frac{-j\kappa_2}{\mu_2} E_{2y}^+.
\end{aligned} \tag{8.125}$$

Az első sorban a második egyenletet a második sor második egyenletébe helyettesítve, és a visszavert hullám amplitúdóját osztva a beeső hullám amplitúdójával, kiadódik a TE módusú hullámterjedésre vonatkozó reflexiós tényező,

$$r_{TE} = \frac{E_{1y}^-}{E_{1y}^+} = \frac{\frac{k_1}{\mu_1} - \frac{-j\kappa_2}{\mu_2}}{\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{-j\kappa_2}{\mu_2}}. \tag{8.126}$$

Ezek után TE módusú hullámterjedés estén az elektromos térerősség visszavert hullám és a megtört hullám amplitúdói meghatározhatók,

$$E_{1y}^- = r_{TE} E_{1y}^+, \quad E_{2y}^+ = E_{1y}^+ (1 + r_{TE}). \tag{8.127}$$

(b) *TM módusú* hullámterjedés illesztése esetén az $x=0$ helyen ugyancsak folytonosak az elektromágneses térerősség komponensek tangenciális rendezői, azaz a mágneses térerősség y -irányú, valamint az elektromos térerősség z -irányú komponensei folytonosak. A (8.119), (8.122), (8.121) és (8.124) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned}
H_{1y}(x=0, z) &= H_{2y}(x=0, z), & H_{1y}^+ + H_{1y}^- &= H_{2y}^+, \\
E_{1z}(x=0, z) &= E_{2z}(x=0, z), & -\frac{k_1}{\varepsilon_1} H_{1y}^+ + \frac{k_1}{\varepsilon_1} H_{1y}^- &= \frac{j\kappa_2}{\varepsilon_2} H_{2y}^+.
\end{aligned} \tag{8.128}$$

Az első sorban a második egyenletet a második sor második egyenletébe helyettesítve, és a visszavert hullám amplitúdóját osztva a beeső hullám amplitúdójával, a TM módusú hullámterjedésre vonatkozó reflexiós tényező adódik,

$$r_{TM} = \frac{H_{1y}^-}{H_{1y}^+} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{j\kappa_2}{\varepsilon_2}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{j\kappa_2}{\varepsilon_2}}. \tag{8.129}$$

Ezek után TM módusú hullámterjedés estén az elektromos térerősség visszavert hullám és a megtört hullám amplitúdói meghatározhatók,

$$H_{1y}^- = r_{TM} H_{1y}^+, \quad H_{2y}^+ = H_{1y}^+ (1 + r_{TM}). \quad (8.130)$$

8.3.8. A rétegekben áramló teljesítmény

Az 1. rétegben a TE és TM módusú hullámterjedés energiaáramlása a komplex Poynting vektor segítségével a (8.91) és (8.93) összefüggésből meghatározható. Az 1. rétegben az x -irányban és a z -irányban, ahol k_1 és β valós, hatásos teljesítmény áramlik, az y -irányban nincs teljesítményáramlás,

$$\begin{aligned} S_{1x}^{TE} &= \pm \frac{k_1}{2\omega\mu_1} |E_{1y}|^2, & S_{1x}^{TM} &= \pm \frac{k_1}{2\omega\varepsilon_1} |H_{1y}|^2, \\ S_{1y}^{TE} &= 0, & S_{1y}^{TM} &= 0, \\ S_{1z}^{TE} &= \frac{\beta}{2\omega\mu_1} |E_{1y}|^2 & S_{1z}^{TM} &= \frac{\beta}{2\omega\varepsilon_1} |H_{1y}|^2. \end{aligned} \quad (8.131)$$

A 2. rétegben, ahol β valós és $k_2 = -j\kappa_2$ képzetes, a (8.91) és (8.93) összefüggések felhasználásával a TE és TM módusú hullámterjedés esetén a z -irányba hatásos teljesítmény, az x -irányba k_2 imaginárius volta miatt meddő teljesítmény áramlik, y -irányban itt sincs energiaáramlás.

$$\begin{aligned} S_{2x}^{TE} &= \mp \frac{j\kappa_2}{2\omega\mu_2} |E_{2y}|^2, & S_{2x}^{TM} &= \mp \frac{j\kappa_2}{2\omega\varepsilon_2} |H_{2y}|^2, \\ S_{2y}^{TE} &= 0, & S_{2y}^{TM} &= 0, \\ S_{2z}^{TE} &= \frac{\beta}{2\omega\mu_2} |E_{2y}|^2 & S_{2z}^{TM} &= \frac{\beta}{2\omega\varepsilon_2} |H_{2y}|^2. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Figyelembe véve, hogy a 2. rétegben az erőtér eltűnő, a reflexió tényező számlálója a nevező konjugáltja, azaz mind a TE, mind a TM módusú hullámterjedésre a reflexió tényező abszolút értéke 1, $|r_{TE}|=1$, $|r_{TM}|=1$, amely a réteghatáron teljes visszaverődést okoz, azaz a 2. rétegben x -irányban nem áramlik hatásos teljesítmény.

8.3.9. A teljesítményáramlás iránya

A TE és a TM módusú hullámterjedéseket ábrázoló 8.21. ábrán és 8.22. ábrán a Poynting vektor S_1^+ beeső, S_1^- reflektált és S_2^+ megtört komponenseit felbontva x -irányú és z -irányú rendezőkre, az 1. rétegben a beesési szög szinusza

$$\sin \vartheta = \frac{S_{1z}^+}{\sqrt{(S_{1x}^+)^2 + (S_{1z}^+)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{k_1^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{N_1 k_0}, \quad (8.133)$$

ahonnan a még ismeretlen z -irányú terjedési együttható meghatározható,

$$\beta = N_1 k_0 \sin \vartheta. \quad (8.134)$$

Hasonló módon a 2. rétegre is felírható az összefüggés

$$\beta = N_2 k_0 \sin \vartheta''. \quad (8.135)$$

Az utolsó egyenletet elosztva az előzővel és némi rendezés után a *Snellius-Descartes törvény* adódik, $\mu_{ir} = 1$, $i = 1, 2$ esetén a szigetelőanyagok törésmutatói is alkalmazhatók

$$\frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (8.136)$$

Figyelembe véve, hogy $N_2 k_0 < \beta < N_1 k_0$, a 2. réteg relatív permittivitása kisebb, mint az 1. rétegé, $n_2 < n_1$.

Az 1. rétegben a beesési szög és az anyagállandók ismeretében az adott frekvenciájú hullám z -irányú fázistényezője meghatározható, amely lehetővé teszi az x -irányú terjedési együttható kiszámítását,

$$k_1 = \sqrt{(N_1 k_0)^2 - \beta^2} = N_1 k_0 \cos \vartheta, \quad (8.137)$$

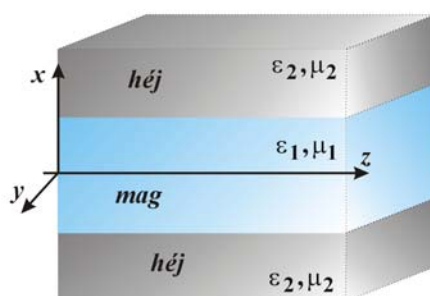
majd a 2. rétegben az eltűnő tér amplitúdójának csillapítását,

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - (N_2 k_0)^2}. \quad (8.138)$$

8.4. Szigetelőréteg hullámvezető

A szigetelőréteg hullámvezetőben tulajdonságainak vizsgálatokor egy y - z irányban végtelen kiterjedésű, x -irányban $x = \pm d$ vastagságú, $\mu_1 = \mu_0$ permeabilitású és $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{1r} = \varepsilon_0 n_1^2$ permittivitású ideális szigetelőanyagot, a *magot*, a magot körülvevő $x > \pm d$ héjban $\mu_2 = \mu_0$ permeabilitású és $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{2r} = \varepsilon_0 n_2^2$ permittivitású a közeget

feltételezve (8.23. ábra) a kérdés az, hogy hogyan terjed a magban az adott frekvenciájú elektromágneses hullám úgy, hogy a héjba nem lép ki hatásos teljesítmény.



8.23. ábra. Szigetelőréteg hullámvezető modellje

Tehát a fenti feladat megoldásához a 8.24. ábrán látható elrendezést célszerű vizsgálni, ahol a mag x -irányban $x = 2d$ vastagságú, y - z -irányban végtelen nagynak tekinthető. A magot körülvevő héj x -irányban $|x| > d$, y - z -irányban végtelen kiterjedésűnek tekinthető. A hullámterjedésről fel kell tételnie, hogy a magban z -irányban a csillapítatlan haladó hullám, β fázistényezővel terjed, az x -irányban csillapítatlan állóhullámok alakulnak ki, (k_1 valós fázistényezővel), míg a héjban x -irányban eltűnő az elektromágneses tér ($k_2 = -j\kappa_2$ képzetes)

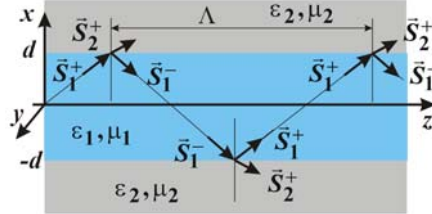
$$k_1 = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \quad (8.139)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2} = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2},$$

azaz a két közegben a közös fázistényezőre fennáll a következő összefüggés,

$$n_1 k_0 > \beta > n_2 k_0. \quad (8.140)$$

A 8.3. pontban tárgyaltak alapján a fenti feltételeknek eleget tevő elektromágneses hullámterjedés kialakulásának az a feltétele, hogy az $x = \pm d$ helyen a mag mindkét határfelületén teljes visszaverődés lépjen fel, azaz az $n_2 < n_1$ feltétel szükséges, továbbá két teljes visszaverődés közti távolság a hullámhossz egész számú többszöröse legyen.



8.24. ábra. Hullámterjedés a magban

8.4.1. A téregyenletek

Figyelembe véve, hogy a magban csillapítatlan haladó hullám, a héjban eltűnő elektromágneses hullám alakul ki, a téregyenletek az előző pontban kapott eredmények alapján a következők lesznek.

(a) *TE módusú* hullámterjedés esetén a magban és a héjban kialakuló elektromágneses hullámegyenletek (8.113)-(8.118) alapján a következők. A magban az elektromos és a mágneses térerősségek a következők

$$\left. \begin{aligned} E_{1y}(x, z) &= (E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \\ H_{1x}(x, z) &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} (E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \\ H_{1z}(x, z) &= \frac{k_1}{\omega\mu_0} (E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - E_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \end{aligned} \right\} |x| \leq d, \quad (8.141)$$

a héjban az elektromos és a mágneses térerősségeket a következő egyenletek írják le,

$$\left. \begin{aligned} E_{2y}(x, z) &= E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \\ H_{2x}(x, z) &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \\ H_{2z}(x, z) &= \frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_0} E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \end{aligned} \right\} |x| > d. \quad (8.142)$$

A mag határfelületén az $x = \pm d$ helyen az elektromos térerősségek azonosak,

$$\begin{aligned} E_{1y}(x = +d, z) &= (E_{1y}^+ e^{-jk_1 d} + E_{1y}^- e^{jk_1 d}) e^{-j\beta z}, \\ E_{1y}(x = -d, z) &= (E_{1y}^+ e^{+jk_1 d} + E_{1y}^- e^{-jk_1 d}) e^{-j\beta z}, \end{aligned} \quad (8.143)$$

ahonnan az adódik, hogy a magban a reflektált hullám amplitúdója megegyezik a beeső hullám amplitúdójával, összhangban a mag határán fellépő teljes reflexióval

$$E_{1y}^- = E_{1y}^+, \quad (8.144)$$

amit figyelembe véve és a (8.141) első egyenletébe helyettesítve, a magban kialakuló elektromos tér változását z -irányban egy haladó hullám, míg x -irányban egy állóhullám írja le

$$E_{1y}(x, z) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z}. \quad (8.145)$$

A mag és a héj határán az elektromos térerősségek tangenciális komponenseinek folytonosságát figyelembe véve

$$\begin{aligned} E_{1y}(x = \pm d, z) &= E_{2y}(x = \pm d, z), \\ 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-j\beta z} &= E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 d} e^{-j\beta z}, \end{aligned} \quad (8.146)$$

ahonnan a megtört hullám elektromos térerősségének amplitúdója

$$E_{2y}^+ = 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d}. \quad (8.147)$$

Meghatározva az elektromos térerősség hullám reflektált komponensének amplitúdóját a magban és a megtört komponensének amplitúdóját a héjban, TE módusú hullámterjedés esetén az elektromos és a mágneses térerősségek a következő összefüggésekkel írhatók le a magban

$$E_{1y}(x, z) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d, \quad (8.148)$$

$$H_{1x}(x, z) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} 2E_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d, \quad (8.149)$$

$$H_{1z}(x, z) = \frac{-jk_1}{\omega\mu_0} 2E_{1y}^+ \sin(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d,$$

és a héjban

$$E_{2y}(x, z) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d, \quad (8.150)$$

$$H_{2x}(x, z) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d, \quad (8.151)$$

$$H_{2z}(x, z) = \frac{-j\kappa_2}{\omega\mu_0} 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d.$$

(b) *TM módusú* hullámterjedés esetén az egyenletek hasonló módon alakulnak (8.119)-(8.124) alapján. A magban a mágneses és az elektromos térerőségek a következők lesznek

$$\left. \begin{aligned} H_{1y}(x, z) &= (H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + H_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \\ E_{1x}(x, z) &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_1} (H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + H_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \\ E_{1z}(x, z) &= -\frac{k_1}{\omega\epsilon_1} (H_{1y}^+ e^{-jk_1 x} - H_{1y}^- e^{jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \end{aligned} \right\} |x| \leq d, \quad (8.152)$$

a héjban a mágneses és az elektromos térerőségek a következő egyenletekkel adhatók meg,

$$\left. \begin{aligned} H_{2y}(x, z) &= H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \\ E_{2x}(x, z) &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_2} H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \\ E_{2z}(x, z) &= \frac{j\kappa_2}{\omega\epsilon_2} H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 x} e^{-j\beta z}, \end{aligned} \right\} |x| > d. \quad (8.153)$$

Figyelembe véve, hogy a magban a határon, az $x = \pm d$ helyen, a mágneses térerősség azonos,

$$\begin{aligned} H_{1y}(x = +d, z) &= H_{1y}(x = -d, z), \\ (H_{1y}^+ e^{-jk_1 d} + H_{1y}^- e^{jk_1 d}) e^{-j\beta z} &= (H_{1y}^+ e^{jk_1 d} + H_{1y}^- e^{-jk_1 d}) e^{-j\beta z}, \end{aligned} \quad (8.154)$$

ahonnan a TE módusú hullámterjedéshez hasonlóan, TM módusú hullámterjedés esetén a mágneses térerősség reflektált hullám amplitúdója megegyezik a beeső hullám amplitúdójával,

$$H_{1y}^- = H_{1y}^+ . \quad (8.155)$$

A kapott eredmény a (8.152) első egyenletébe helyettesítve, a magban kialakuló mágneses tér változását z -irányban egy haladó hullám, míg x -irányban egy állóhullám írja le

$$H_{1y}(x, z) = 2H_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z} . \quad (8.156)$$

A mag és a héj határán a mágneses térerősségek tangenciális komponenseinek folytonosságát figyelembe véve

$$\begin{aligned} H_{1y}(x = \pm d, z) &= H_{2y}(x = \pm d, z), \\ 2H_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-j\beta z} &= H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 d} e^{-j\beta z}, \end{aligned} \quad (8.157)$$

ahonnan a megtört hullám mágneses térerősségének amplitúdója

$$H_{2y}^+ = 2H_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{\kappa_2 d} . \quad (8.158)$$

Meghatározva a mágneses térerősség hullám reflektált komponensének amplitúdóját a magban és a megtört komponensének amplitúdóját a héjban, TM módusú hullámterjedés esetén a mágneses és az elektromos térerősségek a következő összefüggésekkel írhatók le a magban

$$H_{1y}(x, z) = 2H_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d, \quad (8.159)$$

$$E_{1x}(x, z) = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_1} 2H_{1y}^+ \cos(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d, \quad (8.160)$$

$$E_{1z}(x, z) = \frac{jk_1}{\omega \varepsilon_1} 2H_{1y}^+ \sin(k_1 x) e^{-j\beta z}, \quad |x| \leq d,$$

míg a héjban a mágneses és az elektromos térerősségek a következők

$$H_{2y}(x, z) = 2H_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d, \quad (8.161)$$

$$\begin{aligned}
E_{2x}(x, z) &= \frac{\beta}{\omega \varepsilon_2} 2H_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d, \\
E_{2z}(x, z) &= \frac{j\kappa_2}{\omega \varepsilon_2} 2H_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2(x-d)} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d.
\end{aligned} \tag{8.162}$$

8.4.2. A diszperziós egyenlet

A folytonossági feltételből következően a mag és a héj határán, az $x = \pm d$ helyen *TE módusú* hullámterjedés esetén az E_y, H_z térerősség komponensek folytonosak,

$$E_{1y}(x = \pm d, z) = E_{2y}(x = \pm d, z), \quad H_{1z}(x = \pm d, z) = H_{2z}(x = \pm d, z), \tag{8.163}$$

amely összefüggést (8.141), (8.142) alapján kiértékelve a következő adódik,

$$\begin{aligned}
2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) &= E_{2y}^+ e^{-\kappa_2 d}, \\
\frac{-jk_1}{\omega \mu_0} 2E_{1y}^+ \sin(k_1 d) &= \frac{-j\kappa_2}{\omega \mu_0} 2E_{1y}^+ \cos(k_1 d) e^{-\kappa_2 d}.
\end{aligned} \tag{8.164}$$

A második egyenletet elosztva az elsővel

$$\frac{\sin(k_1 d)}{\cos(k_1 d)} = \operatorname{tg}(k_1 d) = \frac{\kappa_2}{k_1}, \tag{8.165}$$

és némi rendezés után, figyelembe véve, hogy

$$k_1 d - m\pi = \arctg\left(\frac{\kappa_2}{k_1}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{8.166}$$

a *diszperziós egyenlet* *TE módusú* hullámterjedésre a következő alakú,

$$k_1 d \operatorname{tg}(k_1 d - m\pi) = \kappa_2 d, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \tag{8.167}$$

Hasonló módon *TM módusú* hullámterjedés esetén az $x = \pm d$ helyen a H_y, E_z térerősség komponensek folytonossága

$$H_{1y}(x = \pm d, z) = H_{2y}(x = \pm d, z), \quad E_{1z}(x = \pm d, z) = E_{2z}(x = \pm d, z), \tag{8.168}$$

a (8.152), (8.153) összefüggések alapján

$$2H_{1y}^+ \cos k_1 d = H_{2y}^+ e^{-\kappa_2 d},$$

$$\frac{jk_1}{\omega \varepsilon_1} 2E_{1y}^+ \sin k_1 d = \frac{j\kappa_2}{\omega \varepsilon_2} 2E_{1y}^+ \cos k_1 d. \quad (8.169)$$

A második egyenletet elosztva az elsővel

$$\frac{\sin(k_1 d)}{\cos(k_1 d)} = \operatorname{tg}(k_1 d) = \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} \frac{\kappa_2}{k_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\kappa_2}{k_1}, \quad (8.170)$$

és némi rendezés után, figyelembe véve, hogy

$$k_1 d - m\pi = \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\kappa_2}{k_1}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.171)$$

a diszperziós egyenlet TM módusú hullámterjedésre a következő alakú,

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1 d \operatorname{tg}(k_1 d - m\pi) = \kappa_2 d, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.172)$$

ahol $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{1r}}$ és $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{2r}}$.

A (8.167), ill. a (8.172) diszperziós egyenletek egy-egy görbe sereget adnak a $k_1 d$ és a $\kappa_2 d$ síkon a 8.25. ábrán látható módon.

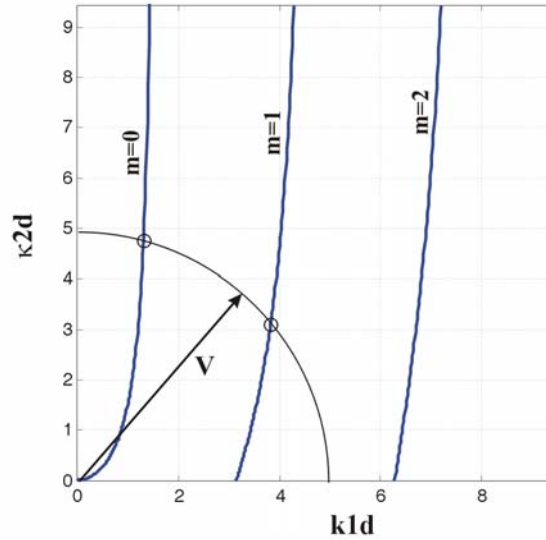
A k_1 és κ_2 változók között még egy összefüggés adható a (8.139) két egyenletének d^2 -tel szorzott négyzetösszegével

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (k_0 d)^2 (n_1^2 - n_2^2) = (k_0 d)^2 (\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}), \quad (8.173)$$

amely egy kör egyenlete. Jelölje a kör sugarát a $V = dk_0 \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}$, ahol $k_0 = 2\pi f/c$.

A kör és a görbesereg metszéspontja adja a $k_1 d$ és a $\kappa_2 d$ értékeket.

Ahhoz, hogy csak az $m = 0$ módusú TE_0 , ill. TM_0 hullámforma terjedhessen, a kör sugarának kisebbnek kell lennie $\pi/2$ -nél. Bevezetve a $V_c = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, az egyes módusokhoz tartozó *határ*, ill. *vágási frekvenciát*, a kör sugara $m\pi < V < \infty$, $m = 0, 1, 2, \dots$, értéket vehet fel, ahogy az a 8.25. ábrán látható.



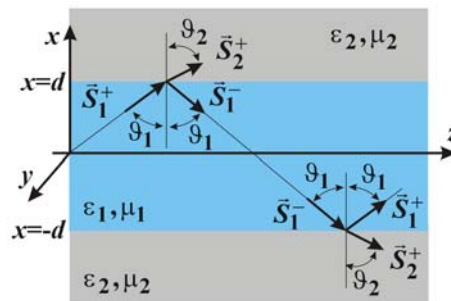
8.25. ábra. A diszperziós egyenlet megoldása

A k_1 és κ_2 változók ismeretében a z -irányú fázistényező (8.139) alapján meghatározható

$$\beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k_1^2}, \quad \beta = \sqrt{n_2^2 k_0^2 + \kappa_2^2}. \quad (8.174)$$

A 8.26. ábrán látható ϑ_1 beesési szög, amely mellett a vizsgált módus terjedése létrejön (8.134) és (8.137) összefüggések felhasználásával meghatározható,

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\beta}{k_1}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k_1} \right). \quad (8.175)$$



8.26. ábra. A beesési szög értelmezése

8.5. Példák a diszperziós egyenlet megoldására

8.5.1. Feladat

Egy szigetelőréteg hullámvezető $2d = 12/\pi$ mm = 3,8197 mm szélességű belső magja $\varepsilon_{1r} = 4$, külső héja $\varepsilon_{1r} = 3,6$ relatív permittivitású szigetelőanyag. A szigetelőréteg hullámvezetőn terjedő jel frekvenciája $f = 50$ GHz = $50 \cdot 10^9$ Hz .

- Határozza meg, melyik TE módus terjedhet,
- Határozza meg a terjedő TE módusú hullámformához tartozó diszperziós egyenlet megoldásával mekkora lesz a magban a cirkuláris hullámszám, és mekkora lesz a héjban az eltűnési együttható,
- Határozza meg a szigetelőréteg hullámvezetőben terjedő TE módusú hullámforma fázistényezője értékét,
- Határozza meg, mekkora beesési szög mellett jön létre a TE módusú hullámterjedés.

Megoldás

a) A diszperziós egyenlet megoldásához tartozó kör sugara a megadott adatokkal

$$V = k_0 d \sqrt{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \frac{6}{\pi} \cdot 10^{-3} \sqrt{4 - 3,6} = 1,2649 . \text{ Minthogy } 0 < V < \pi ,$$

így az $m = 0$ módusú TE hullámforma terjedésére van lehetőség.

b) A nemlineáris diszperziós egyenlet $k_1 d \cdot \operatorname{tg}(k_1 d) = \kappa_2 d$ és a

$$V^2 = (k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 \text{ kör metszéspontja a } 8.27. \text{ ábrán látható, ahonnan } k_1 d = 0,8422 ,$$

$$k_1 = 440,97671/\text{m} \text{ és } \kappa_2 d = 0,9438 , \kappa_2 = 494,15441/\text{m} .$$

c) A fázistényező egyrészt a $\beta d = \sqrt{\varepsilon_{1r}(k_0 d)^2 - (k_1 d)^2} = \sqrt{16 - 0,8422^2}$ összefüggésből $\beta = 2,0474 \cdot 10^3$ 1/m , másrészt a

$$\beta d = \sqrt{\varepsilon_{2r}(k_0 d)^2 + (\kappa_2 d)^2} = \sqrt{3,6 \cdot 4 + 0,9438^2} \text{ összefüggésből } \beta = 2,0474 \cdot 10^3 \text{ 1/m} .$$

d) A TE_0 módusú hullámterjedés

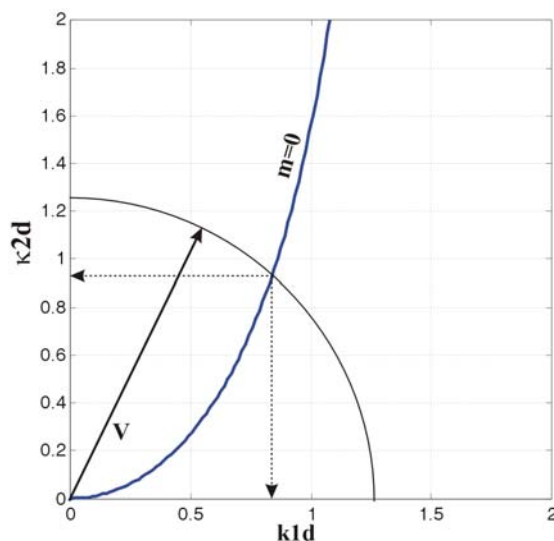
$$\vartheta = \arctg(\beta d / k_1 d) = \arctg(3,9103 / 0,8422) = 77,8453^\circ \text{ beesési szög alatt jön létre.}$$

8.5.2. Feladat

Legyen az előző szigetelőréteg hullámvezetőben a terjedő hullám frekvenciája négyszer nagyobb, azaz 200 GHz frekvenciájú jel érkezzon.

- Határozza meg, melyik TE módus terjedhet,
- Határozza meg a terjedő TE módusú hullámformához tartozó diszperziós egyenlet megoldásával mekkora lesz a magban a cirkuláris hullámszám, és mekkora lesz a héjban az eltűnési együttható,

- c) Határozza meg a szigetelőréteg hullámvezetőben terjedő TE módusú hullámforma fázistényezője értékét,
 d) Határozza meg, mekkora beesési szög mellett jön létre a TE módusú hullámterjedés.



8.27. ábra. TE₀ módusú hullámterjedés diszperziós egyenletének megoldása

Megoldás

a) A frekvencia növekedésekor a d értékkel normalizált szabadtéri cirkuláris hullámszám értéke $k_0d = \frac{2\pi f}{c}d = \frac{2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \frac{6}{\pi} 10^{-3} = 8$, a diszperziós egyenlethez tartozó kör sugara $V = k_0d\sqrt{4-3,6} = 5,0596$. Minthogy $0 < V < 2\pi$, így az $m=0$ és az $m=1$ módusú TE hullámterjedésre van lehetőség.

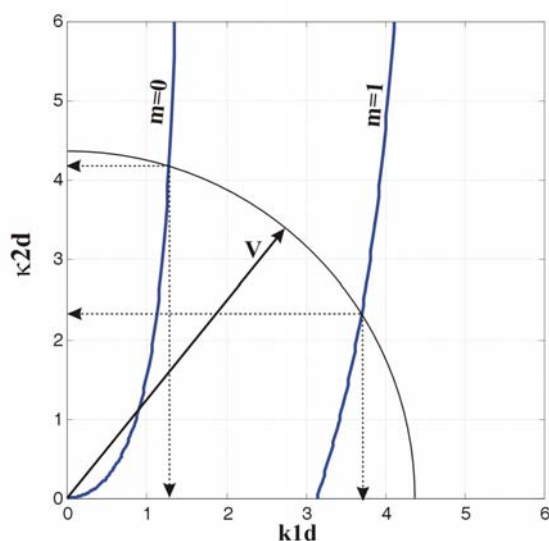
b) $m=0$ módus terjedése esetén a $k_1d \cdot \operatorname{tg}(k_1d) = \kappa_2d$ diszperziós egyenlet és a $V^2 = (k_1d)^2 + (\kappa_2d)^2$ kör metszéspontja a 8.28. ábrán látható, ahonnan $k_1^0d = 1,3091$, $k_1^0 = 685,43631/\text{m}$ és $\kappa_2^0d = 4,8874$, $\kappa_2^0 = 2559,001/\text{m}$.
 $m=1$ módus terjedése esetén a $k_1d \cdot \operatorname{tg}(k_1d) = \kappa_2d$ diszperziós egyenlet és a $V^2 = (k_1d)^2 + (\kappa_2d)^2$ kör 8.28. ábrán látható metszéspontja alapján $k_1^1d = 3,8482$, $k_1^1 = 2014,91/\text{m}$ és $\kappa_2^1d = 3,2850$, $\kappa_2^1 = 1720,01/\text{m}$.

c) A fázistényező $m=0$ módus esetén a $\beta^0d = \sqrt{\varepsilon_{1r}(k_0d)^2 - (k_1^0d)^2}$

összefüggésből $\beta^0 = 8,3495 \cdot 10^3$ 1/m, míg $m=1$ módus terjedése esetén a

$$\beta^1 d = \sqrt{\varepsilon_{1r} (k_0 d)^2 - (k_1^1 d)^2} \quad \text{formulából } \beta^1 = 8,1317 \cdot 10^3 \text{ 1/m adódik.}$$

d) A beesési szög értéke $m=0$ módus esetén $\vartheta^0 = \arctg(\beta^0 d / k_1^0 d) = 85,3069^\circ$,
 $m=1$ módus esetén $\vartheta^1 = \arctg(\beta^1 d / k_1^1 d) = 76,0832^\circ$.



8.28. ábra. $m=0$ és $m=1$ módusú TE hullámterjedés diszperziós egyenletének megoldása

8.6. Az elektromos tér eloszlása a magban

TE módusú hullámterjedést feltételezve az elektromos térerősségnek a magban és a héjban való eloszlását $m=0$ és $m=1$ módusú hullámterjedés esetére az x függvényében érdemes megvizsgálni különböző frekvenciákon (a diszperziós egyenlet különböző sugarú körökhöz tartozó megoldása mellett). A magban a térerősség kifejezése (8.145) szerint

$$E_{1y}^m(x) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1^m x) = 2E_{1y}^+ \cos\left(k_1^m d \frac{x}{d}\right), \quad (8.176)$$

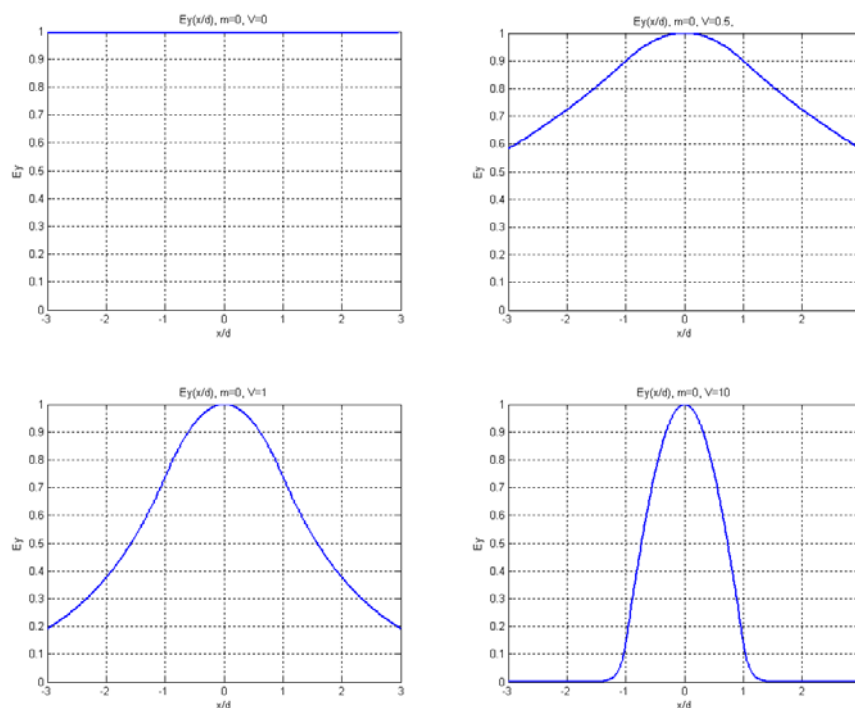
a héjban az elektromos térerősség (8.150) felhasználásával

$$E_{2y}^m(x) = 2E_{1y}^+ \cos(k_1^m d) e^{\kappa_2^m d(1-|x|/d)}. \quad (8.177)$$

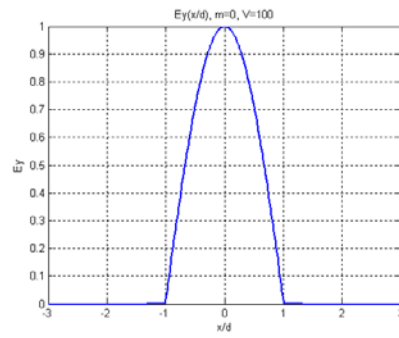
Az $m=0$ és $m=1$ módusokhoz tartozó diszperziós egyenlet megoldását reprezentáló 8.28. ábrán látható, hogy a $m=0$ módus esetén a magban $0 < k_1^0 d < \pi/2$ érték között, a héjban $0 < \kappa_2^0 d < \infty$ érték között mozoghat. A diszperziós egyenlet megoldásához tartozó V sugarú kör sugarát (a jel frekvenciáját) növelve k_1^0 értéke egyre jobban közeledik $\pi/2$ értékhez, míg κ_2^0 értéke egyre nagyobb lesz, azaz egyre nagyobb lesz a héjban az eltűnési együttható értéke, a héjban egyre jobban csökken az elektromos tér amplitúdója.

$m=0$ módusú TE hullámterjedés esetén, néhány frekvencia értékre $V=0; 0,5; 1; 10; 100$ az elektromos tér amplitúdójának a szigetelőréteg hullámvezetőben való alakulása a 8.29.-8.30. ábrán látható.

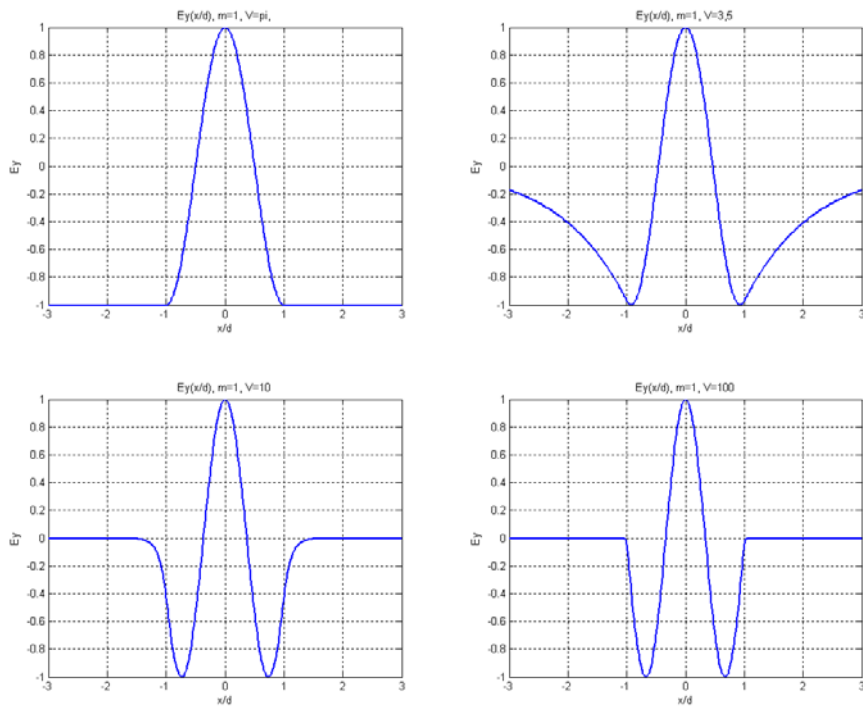
Hasonló jelenség játszódik le $m=1$ módus terjedése esetén is, ahogy az a 8.31. ábrán látható. Ekkor a magban $\pi/2 < k_1^1 d < 3\pi/2$ érték között, míg a héjban $0 < \kappa_2^1 d < \infty$ érték között mozoghat. A jel frekvenciáját növelve (a kör V sugara nő) az eltűnési együttható értéke nő, az elektromos tér amplitúdója a héjban egyre csökken.



8.29. ábra. $m=0$ módusú TE hullámterjedés elektromos terének változása a magban és héjban



8.30. ábra. $m=0$ módusú TE hullámterjedés elektromos tere eltűnik a héjban



8.31. ábra. $m = 1$ módusú TE hullámterjedés elektromos terének változása a magban és héjban

8.7. Feladatok

8.7.1. Feladat

Az $\varepsilon_r = 2,56$, $\mu_r = 1$ közegből 3 mA/cm nagyságú, 120 MHz frekvenciájú mágneses térerősség érkezik merőlegesen a levegő felületére.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullám terjedési sebességét,

Megoldás

Mivel $\varepsilon_{1r} = 2,56$; $\mu_{1r} = 1$; $\varepsilon_{2r} = 1$; $\mu_{2r} = 1$;

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{1r}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,56}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,6} = 1,8750 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v_2 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

b) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám fázistényezőjét,

Megoldás

$$\beta_1 = \frac{2\pi f}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6}{1,8750 \cdot 10^8} = 4,0212 \text{ rad/m}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi f}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 2,5133 \text{ rad/m},$$

c) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám hullámhosszúságát,

Megoldás

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{1,8750 \cdot 10^8}{120 \cdot 10^6} = 1,5625 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{120 \cdot 10^6} = 2,5 \text{ m},$$

d) Határozza meg az egyes közegekben a hullám-impedancia értékét,

Megoldás

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \frac{120\pi}{1,6} = 235,6194 \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = 120\pi = 376,9911 \Omega,$$

e) Határozza meg a két réteg határán a mágneses térerősségre vonatkozó reflexiós tényező értékét,

Megoldás

$$r_{12}^H = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -\frac{1,6 - 1}{1,6 + 1} = -0,2308,$$

f) Határozza meg a határfelületen a mágneses térerősség reflektált komponensét,

Megoldás

$$H_1^- = 3 \text{ mA/cm} = 0,3 \text{ A/m}, \quad H_1^- = r_{12}^H H_1^+ = -0,2308 \cdot 0,3 = -0,6923 \text{ A/m},$$

g) Határozza meg a továbbhaladó mágneses térerősség hullám nagyságát,

Megoldás

$$H_2^+ = H_1^+ + H_1^- = H_1^+ (1 + r_{12}^H) = 3(1 - 0,2308) = 2,3077 \text{ A/m},$$

h) Határozza meg a két réteg határán a szigetelőanyagba az egységnyi felületen beáramló teljesítményt.

Megoldás

$$S_2 = \frac{1}{2} E_2^+ \tilde{H}_2^+ = \frac{1}{2} Z_2 |H_2^+|^2 = \frac{1}{2} 376,991 |2,3077|^2 = 1,0038 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2,$$

8.7.2. Feladat

Levegőből érkező 150 MHz frekvenciájú mágneses térerősség merőlegesen lép át az $\epsilon_r = 5,76$, $\mu_r = 1$ közegbe 4 mA/cm nagyságú amplitúdóval.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullám terjedési sebességét,

Megoldás

Mivel $\epsilon_{1r} = 1$; $\mu_{1r} = 1$; $\epsilon_{2r} = 5,76$; $\mu_{2r} = 1$;

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{2r}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{5,75}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,4} = 1,2500 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad v_1 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

b) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám fázistényezőjét,

Megoldás

$$\beta_1 = \frac{2\pi f}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = \pi = 3,14 \text{ rad/m}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi f}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{1,25 \cdot 10^8} = 7,5398 \text{ rad/m},$$

c) Határozza meg az egyes közegekben a mágneses térerősség hullám hullámhosszát,

Megoldás

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 2 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{1,25 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 0,8333 \text{ m},$$

d) Határozza meg az egyes közegekben a hullámimpedancia értékét,

Megoldás

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{120\pi}{2,4} = 157,0796 \Omega,$$

e) Határozza meg a két réteg határán a mágneses térerősségre vonatkozó reflexió tényező értékét,

Megoldás

$$r_{12}^H = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -\frac{1 - 2,4}{1 + 2,4} = 0,4118,$$

f) Határozza meg a határfelületen a mágneses térerősség reflektált komponensét,

Megoldás

$$H_1^- = r_{12}^H H_1^+ = 0,4118 \cdot 0,2833 = 0,1167 \text{ A/m},$$

g) Határozza meg a beeső mágneses térerősség hullám nagyságát,

Megoldás

$$H_2^+ = 4 \text{ mA/cm} = 0,4 \text{ A/m} = H_1^+ (1 + r_{12}^H), \quad H_1^+ = \frac{H_2^+}{1 + r_{12}^H} = 0,2833 \text{ A/m},$$

h) Határozza meg a két réteg határán az egységnyi felületen a levegőből átáramló teljesítményt.

Megoldás

$$S_2 = \frac{1}{2} E_2^+ \tilde{H}_2^+ = \frac{1}{2} Z_2 |H_2^+|^2 = \frac{1}{2} 157,0796 |0,4|^2 = 12,5664 \text{ W/m}^2$$

8.7.3. Feladat

Egy $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ szigetelőanyagban 32 MHz frekvenciájú síkhullám terjed. Határozza meg a jel hullámhosszát.

Megoldás

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 32 \cdot 10^6} = 4,6875 \text{ m},$$

8.7.4. Feladat

Szigetelő közegből ($\varepsilon_r = 8$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$) a határoló síkfelületre merőlegesen érkező síkhullám levegőben terjed tovább, ahol az elektromos térerősség amplitúdója 8 mV/m. Határozza meg az elválasztó síkon a levegőben a H mágneses térerősség amplitúdóját.

Megoldás

$$H_2^+ = \frac{E_2^+}{Z_{20}} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{120\pi} = 2,1221 \cdot 10^{-5} \text{ A/m} = 21,221 \mu\text{A/m},$$

8.7.5. Feladat

Egy $Z_{01}=250 \Omega$ hullám-ellenállású ideális szigetelőben $f=120$ MHz frekvenciájú síkhullám terjed a szigetelő határfelületére merőlegesen. A sík határfelület túloldalán levegő van. Határozza meg a reflexió tényezőt a határfelületen.

Megoldás

$$r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{120\pi - 250}{120\pi + 250} = 0,2025,$$

8.7.6. Feladat

Levegőből 12 mV/m nagyságú elektromos térerősség érkezik merőlegesen egy szigetelő határfelületére, ahol a reflexió tényező $r^E = 1/3$. Adja meg a szigetelőben a határfelületen a továbbhaladó elektromos térerősség értékét.

Megoldás

$$E_2^+ = E_1^+(1+r) = 12 \cdot 4/3 = 16 \text{ mV/m},$$

8.7.7. Feladat

Levegőből szigetelő határfelületére merőlegesen síkhullám érkezik. Adja meg a beérkező elektromos térerősség amplitúdóját, ha a beérkező mágneses térerősség amplitúdója $6 \mu\text{A/m}$.

Megoldás

$$E_1^+ = Z_{10}H_1^+ = 120\pi \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 0,0023 \text{ V/m} = 2,3 \text{ mV/m},$$

8.7.8. Feladat

Határozza meg az $\epsilon_r = 6$, $\mu_r = 1$ szigetelőanyagban terjedő $f=30$ MHz frekvenciájú síkhullám hullámhosszát.

Megoldás

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{6} \cdot 30 \cdot 10^6} = 4,0825 \text{ m},$$

8.7.9. Feladat

Egy szabad térben terjedő síkhullám frekvenciája 380 MHz. Határozza meg a jel fázistényezőjét.

Megoldás

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot 380 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 7,9587 \text{ rad/s},$$

8.7.10. *Feladat*

Egy $Z_{10} = 120 \Omega$ hullámimpedanciájú szigetelőből 3 mV/m amplitúdójú síkhullám érkezik a $Z_{20} = 180 \Omega$ hullámimpedanciájú szigetelő határfelületére. Határozza meg a határfelületen a 2. közegbe belépő elektromos térerősség amplitúdóját.

Megoldás

$$r = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}} = \frac{180 - 120}{180 + 120} = 0,2, \text{ ahonnan } E_2^+ = E_1^+(1 + r) = 3 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ mV/m},$$

8.7.11. *Feladat*

Levegőből 2 mV/cm nagyságú, 60 MHz frekvenciájú elektromos térerősség érkezik merőlegesen az $\epsilon_r=4, \mu_r=1$ közeg felületére.

a) Határozza meg az egyes közegekben a hullámok terjedési sebességét és fázistényezőjét,

Megoldás

$$\text{A levegőben } v_1 = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \text{ a szigetelőben } v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

b) Határozza meg az egyes közegekben terjedő hullámok hullámhosszát,

Megoldás

$$\text{Levegőben a szabadtéri hullámhossz } \lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 5 \text{ m}, \text{ a szigetelőben}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^6} = 2,5 \text{ m},$$

c) Határozza meg az egyes közegekben a hullámimpedanciák értékét,

Megoldás

$$\text{A levegőben } Z_{01} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \approx 377 \Omega, \text{ a szigetelőben}$$

$$Z_{02} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cdot 1/\sqrt{\epsilon_r} = 120\pi/2 = 60\pi \Omega,$$

d) Határozza meg az 1-2 közeg határán az elektromos térerősségre vonatkozó reflexió tényezőt,

Megoldás

$$r_{12}^E = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}} = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = -\frac{1}{3},$$

e) Határozza meg az 1. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,

Megoldás

A beérkezett hullám reflektálódik, $E_1 = E_1^+ + r_{12}^E E_1^+ = (1 + r_{12}^E) E_1^+ = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ mV/cm}$,

f) Határozza meg az 1. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét,

Megoldás

$$H_1 = \frac{E_1^+}{Z_{10}} - \frac{E_1^-}{Z_{10}} = \frac{E_1^+}{Z_{10}} (1 - r_{12}^E) = \frac{0,2}{120\pi} \cdot \frac{4}{3} = 7,0736 \cdot 10^{-3} \text{ mA/cm},$$

g) Határozza meg a 2. közeg határfelületén az elektromos térerősség értékét,

Megoldás

A folytonossági feltételből $E_2 = E_2^+ = E_1 = E_1^+ + E_1^- = 4/3 \text{ mV/cm}$,

h) Határozza meg a 2. közeg határfelületén a mágneses térerősség értékét,

Megoldás

A folytonossági feltételből $H_2 = H_2^+ = H_1 = H_1^+ + H_1^- = 0,0070 \text{ mA/cm}$,

i) Adja meg az egyes közegekben az elektromos térerősség hely-időfüggvényét,

Megoldás

Ideális mindkét szigetelőanyag, így a terjedési együttható imaginárius, azaz a fázistényező a levegőben $\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 60 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 1,2566 \text{ 1/m}$, a szigetelőben

$\beta_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi \cdot 60 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^8} = 2,5133 \text{ 1/m}$. Az elektromos térerősség hely-időfüggvénye

levegőben $E_1(z, t) = E_1^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) + E_1^- \cos(\omega t + \beta_1 z)$, behelyettesítve

$E_1(z, t) = 2 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 1,2566 z) - 0,66 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t + 1,2566 z) \text{ mV/cm}$, a

szigetelőben csak továbbhaladó hullám lép fel, $E_2(z, t) = E_2^+ \cos(\omega t - \beta_2 z)$, azaz

$E_2(z, t) = 4/3 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 2,5133 z) \text{ mV/cm}$.

j) Határozza meg a közegekben a mágneses térerősségek hely-időfüggvényét,

Megoldás

A levegőben $H_1(z, t) = \frac{E_1^+}{Z_{10}} \cos(\omega t - \beta_1 z) - \frac{E_1^-}{Z_{10}} \cos(\omega t + \beta_1 z)$, behelyettesítés után

$$H_1(z, t) = 0,0053 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 1,2566z) + \\ + 0,0018 \frac{E_1^-}{Z_{10}} \cos(3,7699 \cdot 10^8 t + 1,2566z) \text{ mA/cm,}$$

a szigetelőben $H_2(z, t) = \frac{E_2^+}{Z_{20}} \cos(\omega t - \beta_2 z)$,

$$H_2(z, t) = 0,0071 \cos(3,7699 \cdot 10^8 t - 2,5133z) \text{ mA/cm,}$$

k) Határozza meg az egységnyi határfelületen átáramló teljesítményt,

Megoldás

A Poynting vektor értéke $S_1 = \frac{1}{2} E_1 \tilde{H}_1 = \frac{1}{2} E_2 \tilde{H}_2 = S_2 = \frac{1}{2} E_2 \frac{E_2}{Z_{20}} = \frac{1}{2} \frac{E_2^2}{Z_{20}}$,

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{E_2^2}{Z_{20}} = \frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{1}{60\pi} = 0,0047 \mu\text{W/cm}^2.$$

IRODALOM

- [1] Béda Gy. *Lengésstan*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.
- [2] Béda Gy., Bezák A. *Kinematika és dinamika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [3] Csizmadia B., Nándori E. (Szerk.) *Mozgásstan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [4] Csizmadia B., Nándori E. (Szerk.) *Statika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
- [5] Csizmadia B., Nándori E. (Szerk.) *Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [6] Erostyák J., Litz J. (Szerk.) *Fizika I*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
- [7] Fodor Gy. *Elektromágneses terek*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1993.
- [8] Füredi G., Hegel I., Szlivka F. *Áramlástan mérések*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003.
- [9] Füstös L. *Hőtan feladatok*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2001.
- [10] Garbai L. *Hidraulikai számítások az épületgépészetben és az energetikában*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2007.
- [11] Gáspár Zs., Tarnai T. *Statika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002.
- [12] Györgyi J. *Dinamika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [13] Halász G., Kristóf G., Kullmann L. *Áramlás csőhálózatokban*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002.
- [14] Hudson A., Nelson R. *Útban a modern fizikához*, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.
- [15] Környey T. *Hőátvitel*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1999.
- [16] Környey T. *Hőátvitel példatár*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2001.
- [17] Környey T. *Termodinamika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2005.
- [18] Lajos T. *Az áramlástan alapjai*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004.
- [19] Ludvig Gy. *Dinamika példatár*, II rész, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002.
- [20] Ludvig Gy. *Lengésstan példatár*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002.
- [21] Nagy Károly. *Elméleti mechanika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [22] Papp Zs. *Mechanikai feladatok*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [23] Szabó I. *Áramlástan, műszaki hőtan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [24] Szlivka F. *Áramlástan*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000.
- [25] Szlivka F., Bencze F., Kristóf G. *Áramlástan példatár*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [26] Szőke B. *Hő és áramlástan*, Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar, Internetes jegyzet, <http://e-oktat.pmmf.hu/>, 2004.
- [27] Litz J. (szerk.) *Általános fizika*, I.b. sorozat, benne Tasnádi P., Skrapits L., Bérces Gy. *Mechanika II*, Litz J. Hőtan, Dialóg Campus Kiadó, Pécs, 2001.
- [28] Tichy G., Kojnok J. *Hőtan*, Typotex, Budapest, 2001.
- [29] Veszely Gy. *Hírközlési üvegszálak elmélete*, Műszaki Kiadó, Budapest, 2007.
- [30] Simonyi K., Zombory L. *Elméleti villamosságstan*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.

TÁRGYMUTATÓ

- adiabatikus kitevő 165
- állapotváltozások 164
- állóhullámok 147
- általános gáztörvény 164
- anyag pont 8
- anyag-megmaradási törvény 177
- áramló közeg
 - egyfázisú 175
 - lamináris 194
 - többfázisú 175
 - turbulens 194
- Arkhimédész törvénye 171
- áramlástan 4, 161
- belső energia 65, 223
- Bernoulli egyenlet 186
- binormális 17, 19
- bolygómozgás 53
- Carnot körfolyamat 240
- centripetális gyorsulás 37
- cirkuláris hullámszám 144
- csiga
 - álló 67
 - mozgó 67
- csillapítási tényező 308
- csillapítatlan rezgések
 - szabad rezgés 121
 - gerjesztett rezgés 129, 133
- csillapított rezgések
 - szabad rezgés 123
 - gerjesztett rezgés 131, 137
- csősúrlódási tényező 194
- D’Alambert elv 51
- differencia sémák
 - Crank-Nicolson 277
 - Euler 273, 276
 - – előrelépő 273
 - – hátralépő 276
 - Galjerkin 280
 - stabilitása 280
 - súlyozott 277
- diffúziós egyenlet 272, 338
- dinamika 4
- diszperziós egyenlet 323
- egyenes vonalú mozgás 27
 - egyenletes 27
 - egyenletesen gyorsuló 27
- egyensúly
 - labilis 219
 - metastabil 219
 - rotációs 95
 - stabilis 219
 - transzlációs 94
- elektromágneses hullámterjedés 4
 - eltűnő 328
 - gömbhullámok 304
 - hengerhullámok 304
 - síkhullámok 304
 - TE módusú 318
 - TM módusú 318
 - tér 299
 - – forrásossága 301
 - – intenzitása 300
- elektromos vezetőképesség 302
- emelő 66
- energia
 - belső 223
 - helyzeti 62
 - kinetikus 61
 - megmaradás 70
 - mozgási 61, 98
 - potenciális 62
 - sűrűség 303
- entalpia 224
- entrópia 244
- erők egyensúlya 95
- erőpár 96
- erőrendszer redukciója 96
- Euler egyenlet 182
- Euler differencia séma
 - előrelépő 273
 - explicit 273
 - hátralépő 276
 - implicit 276
 - súlyozott 277

-
- fajhő 222
 - izobár 228
 - izochor 228
 - fajlagos sűrűség 217
 - fajlagos térfogat 217
 - fajsúly 162
 - fajtérfogat 161
 - Faraday indukció törvény 300
 - fázis átalakulás 222
 - fázistényező 308
 - folyadék
 - határréteg 201
 - ideális 163, 175
 - lamináris áramlása 194
 - nem-stacionárius áramlása 179
 - nem-Newtoni 190
 - Newtoni 190
 - összenyomhatatlan 177
 - összenyomható 179
 - stacionárius áramlása 177
 - súrlódásmentes áramlása 182
 - turbulens áramlása 194
 - valóságos 163, 175
 - forgató nyomaték 65, 92
 - foronómiai görbék 24, 25
 - Fourier féle differenciálegyenlet 256
 - megoldása 264
 - főnormális 18
 - Gallilei transzformáció 51
 - gázállandó 164
 - geometriai tér 8
 - gerjesztési törvény 300
 - gerjesztett rezgés
 - csillapítatlan 129, 133
 - csillapított 131, 137
 - gerjesztett válasz 119
 - gyorsulás 22
 - lokális 182
 - konvektív 182
 - normális irányú 23
 - pályamenti 23
 - görbületi sugár 17, 19
 - hajítás 29
 - függőleges 31
 - vízszintes 31
 - ferde 32
 - haladó hullám 143
 - halmazállapot változás 166
 - harmonikus rezgőmozgás 119
 - határfeltételek 256
 - kezdet érték 257
 - peremfeltétel 257
 - határréteg 201
 - helyzetvektor 8, 16
 - hidrosztatika 169
 - hodográf 24, 25
 - hőáram-sűrűség 252
 - átengedett 283
 - beérkezett 283
 - visszavert 283
 - hőátadás 252, 280
 - hőátviteli tényező 263
 - hőellenállás 263
 - hőenergia 221
 - hőmennyiség 221
 - hőmérsékleti skálák 162, 215
 - Celsius skála 162, 215
 - Fahrenheit skála 162, 215
 - Kelvin skála 162, 215
 - hősugárzás 252, 282
 - Kirchhoff törvénye 285
 - hőtan 4, 215
 - hőtágulás 216
 - köbös 216
 - – együttható 21
 - lineáris 216
 - – együtthtó 216
 - hővezetés 251
 - differenciálegyenlete 252
 - – diffúziós egyenlet 256
 - – Fourier féle 256
 - – Laplace egyenlet 257
 - – Laplace-Poisson egyenlet 257
 - hullámeqyenlet
 - elektromágneses síkhullámok 305
 - mechanikai 142
 - hullámimpedancia 309
 - hullámmozgás
 - longitudinális 119
 - transzverzális 141
 - ideális folyadék 163, 175
 - ideális gázok állapotváltozásai 164
 - adiabatikus 165, 233
 - izobár 165, 231
 - izochor 165, 230
 - izotermikus 165, 232
 - politropikus 166
 - idő 8
 - impulzus 49, 57, 86
 - megmaradás 57, 58

- inercia nyomaték 88, 90
 izobár fajhő 228
 izochor fajhő 228
 karakterisztikus polinom 120
 kényszermozgás 108
 kezdeti feltétel 120
 kinematika 4, 8
 kinetika 4
 konvekció 280
 konvektív gyorsulás 182
 konzervatív erőter 69
 köbös hőtágulás 216
 – együttható 216
 körmozgás 34
 – centrifugális erő 52
 – centripetális erő 52
 – kinetikája 51
 – egyenletes 37
 – egyenletesen gyorsuló 37
 – centripetális gyorsulás 37
 – gyorsulás 35
 – sebesség 35
 – szöggyorsulás 36
 – szögsebesség 35
 labilis egyensúlyi állapot 219
 lamináris áramlás 194
 Laplace egyenlet 257
 – direkt megoldása 260
 Laplace-Poisson egyenlet 257
 – direkt megoldása 261
 látens hő 222
 lebegés 137
 lejtő 63
 lineárisan polarizált hullám 313
 lineáris hőtágulás 216
 – együttható 216
 lineáris rendszer 5
 lokális gyorsulás 182
 Mach szám 176
 magára hagyott rendszer 119
 Maxwell egyenletek 299
 – reláció 312
 merev test 8, 83
 – forgó mozgása 84, 88
 – – egyenletes 84
 – – egyenletesen gyorsuló 85
 – haladó mozgása 83
 – impulzusa 86
 – inercia nyomatéka 88, 90
 – mozgási energiája 98
 – perdülete 88, 89
 – statikai nyomatéka 86
 – súlypontja 85
 – teljesítménye 99
 metastabil egyensúlyi állapot 219
 móltérfogat 217
 mozgás térgörbén 38
 munka 59, 60, 62, 220
 – fizikai 220
 – technikai 224
 Navier-Stokes egyenlet 198
 nemlineáris 5
 Newton axiómái 49
 – I. törvénye 49
 – II. törvénye 49
 – III. törvénye 50
 Newtoni folyadék 190
 nyitott termodinamikai rendszer 218
 nyomás 163, 168
 – magasságfüggése 171
 – mérése 173
 összenyomhatatlan folyadék 177
 pályagörbe 16
 – binormálisa 17, 19
 – érintője 18
 – főnormálisa 18
 – görbülete 19
 – görbületi sugara 17, 19
 – simuló síkja 19
 pályasebesség 19, 20
 pálya síkja 17
 Pascal törvénye 171
 perdület 88, 89
 peremfeltételek 257
 – Dirichlet típusú 258, 269
 – elsőfajú 258, 269
 – harmadfajú 259, 271
 – másodfajú 258, 270
 – Neumann típusú 258, 270
 – Robin típusú 259, 271
 permeabilitás 302
 permittivitás 302
 politrópus kitevő 166
 Poynting vektor 303
 – valós 303
 – complex 304
 próbafüggvény 120
 reflexió tényező 145, 283
 – elektromos 317
 – mágneses 317

- hőhullám 283
- mechanikai hullám 146
- rendszer analízis 7
 - szintézis 7
- rendszer-operátor 4
 - akauzális 6
 - invariáns 5
 - kauzális 6
 - lineáris 5
 - nemlineáris 5
 - variáns 5
- Reynolds szám 194
- rezonanciatényező 135
- rugó
 - állandó 57
 - energiája
 - erő 56
 - munkája 64
- sajátérték 120
- saját frekvencia 122
- sebesség 19, 20, 175
- SI egységek 3
- SI mértékegységek prefixumai 3
- simuló sík 19
- Snellius-Descartes törvény 332
- stabilis egyensúlyi állapot 219
- stacionárius folyadékáramlás 177
- statika 8, 94
- statikai nyomaték 86
- Steiner tétel 91
- súlyerő 53
- súlypont 85
- súrlódási erő 54
 - csúszó 54
 - tapadási 55
 - tényező 54
- súrlódási hő 65
- sűrűség 161
- szabad rezgés
 - csillapítatlan 121
 - csillapított 123
- szabadtéri hullámhossz 323
- szabad válasz 119
- szigetelő réteg
 - héj 332
 - hullámvezető 332
 - mag 332
- szöggyorsulás 36
- szögsebesség 35
- szuperpozíció 5
- teljesítmény 69, 99
 - sűrűség 303
- térfogatáram 178
- terjedési
 - együttható 144, 308
 - sebesség 142
- termodinamikai folyamat
 - adiabatikus 165, 233
 - irreverzibilis 223
 - izobár 165, 231
 - izochor 165, 230
 - izotermikus 165, 232
 - politropikus 166
 - reverzibilis 223
- termodinamikai körfolyamatok 239
 - hatásfoka 244
 - nyitott rendszerben 242
 - zárt rendszerben 241
- termodinamikai rendszer 218
 - zárt 218
 - nyitott 218
- tömegáram 177
- tömegpont 8
 - impulzusa 48
 - körmozgása 34
 - mozgása 27
 - egyenes vonalú 27
 - egyenletes 27
 - egyenletesen gyorsuló 27
- transzverzális hullámmozgás 141
- turbulens áramlás 194
- ütközés 108
 - centrikus 110, 111, 112, 113
 - egyenes 110, 112, 113
 - excentrikus 110, 115
 - ferde 110, 111, 114
 - normálisa 108
 - redukált tömeg 116
 - rugalmas 110, 113
 - rugalmatlan 110, 111, 112
 - simuló síkja 108
 - talppont 116
- vágási frekvencia 339
- valóságos folyadék 163, 175, 189
- véges differenciák módszere 268
- Venturi cső 188
- vesztési magasság 193
 - tényező 314
- viszkózitás 189
- zárt termodinamikai rendszer 218

NÉVMUTATÓ

Arkhimédész 171
Bernoulli 186
Boyle-Mariotte 165
Carnot 240
Celsius 162, 215
Crank-Nicolson 277
D’Alambert 51
Dirichlet 258, 269
Euler 182, 273, 276
Fahrenheit 162, 215
Faraday 300
Fourier 256
Galjerkin 280
Gallilei 51
Gay-Lussac 165
Laplace 257
Kelvin 162, 215
Kirchhoff 285
Mach 176
Maxwell 299,312
Navier-Stokes 198
Neumann 258, 270
Newton 49, 50, 190
Pascal 171
Poisson 257
Poynting 303
Reynolds 194
Robin 259, 271
Snellius-Descartes 332
Steiner 91
Venturi 188

A SZERZŐ

Dr.-Habil. Iványi Amália , DSc, PhD (Dr. Iványi Miklósné, szül. Szakács Amália) professor emeritus egyetemi tanulmányait a Budapesti Műszaki Egyetem villamosmérnöki karán végezte, ahol villamosmérnöki oklevelet szerzett 1963-ban.

Tudományos pályafutása során a Budapesti Műszaki Egyetemen műszaki doktor (Dr. Tech.) címet szerzett 1981-ben. A műszaki tudomány kandidátusa címet 1991-ben szerezte meg. PhD fokozatát 1997-ben kapta a Budapesti Műszaki Egyetemen. A Magyar Tudományos Akadémia Doktora címet 1999-ben, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Habilitált Doktora címet 2000-ben szerezte meg. Az Oktatási Minisztérium Széchenyi Professzori Ösztöndíjasa 2000-2003. 2004-től egyetemi tanár.

Mérnöki oklevelének megszerzése óta a Budapesti Műszaki Egyetem, majd a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elméleti Villamosságtan Tanszékén dolgozik. 1963-1981-ig egyetemi tanársegéd, 1981-1992-ig egyetemi adjunktus, 1993-tól egyetemi docens. 2004-től a Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar egyetemi tanára, 2010-ben a professor emeritus címet kapta. Részt vesz a magyar és angol nyelvű villamosmérnök és mérnök informatikus, valamint a PhD képzésben, tankönyvek és példatárak összeállításában.

Kutatási területe az elektromágneses terek numerikus módszerei, az \mathbf{R} -függvények, valamint a nemlineáris rendszerek, köztük a mágneses anyagok hiszterézis karakterisztikájának és a mágneses anyagok elektromágneses térben való viselkedésének szimulációja, a nemlineáris rendszerek stabilitásvizsgálata. Több, mint 300 tudományos konferencia és folyóirat cikk szerzője ill. társszerzője. Az *R-functions in Electromagnetism*, (1993), *Numerikus módszerek a számítógépes mezőszimulációban*, (1994), *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*, (1997), *Magnetic Field Computation with R-functions*, (1998), *Folytonos és Diszkrét Szimulációk az Elektrodinamikában*, (2003), *Preisach Memorial Book, Hysteresis Models in Mathematics, Physics and Engineering*, (Ed.) (2005), *The Finite Element Method in Magnetism* (társszerző) (2008) könyvek szerzője, editorja, ill. társszerzője.