

# 10. heti előadás

## 1.5.7. GÖRBE FELÜLETEK, FORGÁSTESTEK

A görbe felületeket is elsősorban meghatározó adataik vetületeivel ábrázoljuk. A meghatározó adatok mellett ábrázoljuk a felület csúcsait, éleit és minden esetben a felület képét határoló vonalat, a felület vetületének körvonalát, más szóval képhatárát.

Ha egy tetszés szerinti síkidomot valamilyen síkbeli vonal határol, ez a vonal lehet görbe vonal (kör), lehet egyenes szakaszok összessége (sokszög), de lehet egyenes szakaszok és görbe ívek együttese (körcikk), **képhatárnak** nevezzük. A körvonal pontokat a képsíkra merőleges vetítő egyenesek jelölik ki a képsík felületén.

### 1. EGYENESVONALÚ FELÜLETEK:

A görbe felületeket igen sokféle szempont szerint osztályozhatjuk. Az osztályozás alapja lehet a leírógörbe alakja, vagy a mozgás milyensége.

Az **egyenesvonalú felületek**, melyeket egyenes ír le, az alak szerinti osztályozás nagy csoportját képezik. Az egyenesvonalú felületek bármely pontján át legalább egy felületi egyenes fektethető, ezek az egyenesek a felület **alkotói**.

Az egyenesvonalú felület síkba teríthető, ha ugyanazon alkotójának más-más pontjához a felület ugyanazon érintősíkja tartozik. Ellenkező esetben az egyenesvonalú felület torz felület.

Az egyenesvonalú felületek közül csak a kúp-, és a henger felületekkel foglalkozunk.

### 1/1. KÚPFELÜLETEK

Ha egy félegyenes kezdőpontját rögzítjük, és a félegyeneset olyan tetszőleges síkgörbe mentén mozgatjuk, melynek síkja a félegyenes kezdőpontjára nem illeszkedik, **végtelen kúpfelületet** kapunk. Ha ezt a síkgörbe síkjával elmetszük, akkor **kúpfelületet** kapunk. A síkgörbe a kúp vezérgörbéje, az általa határolt síkidom a kúp **vezérgörbéje**, az általa határolt síkidom a kúp **alapja**. A félegyenes kezdőpontja a kúp **csúcspontja**. A felület félegyeneseseinek a csúcspont és a vezérgörbe közé eső szakaszai a kúp alkotói.

Ha a kúpfelület vezérgörbéje kör, **körkúpot** kapunk. A vezérgörbe síkjának középpontjába emelt merőleges a kúp csúcspontján megy át, egyenes körkúpról beszélünk. Egyenes körkúp forgatással is származtatható, részletese a forgáskúp tárgyalásánál.

Ha a vezérgörbe kör, de a kúp csúcspontja és a kör középpontját összekötő középvonal nincs rajta a kör középpontjában a síkjára állított merőleges egyenesen, és nincs benne a kör síkjában, **ferde körkúpról** beszélünk. A ferde körkúp nem forgásfelület (forgatással nem állítható elő), hanem vonalfelület.

#### a.) Egyenes körkúp felületén fekvő pont, érintősík és normális ábrázolása

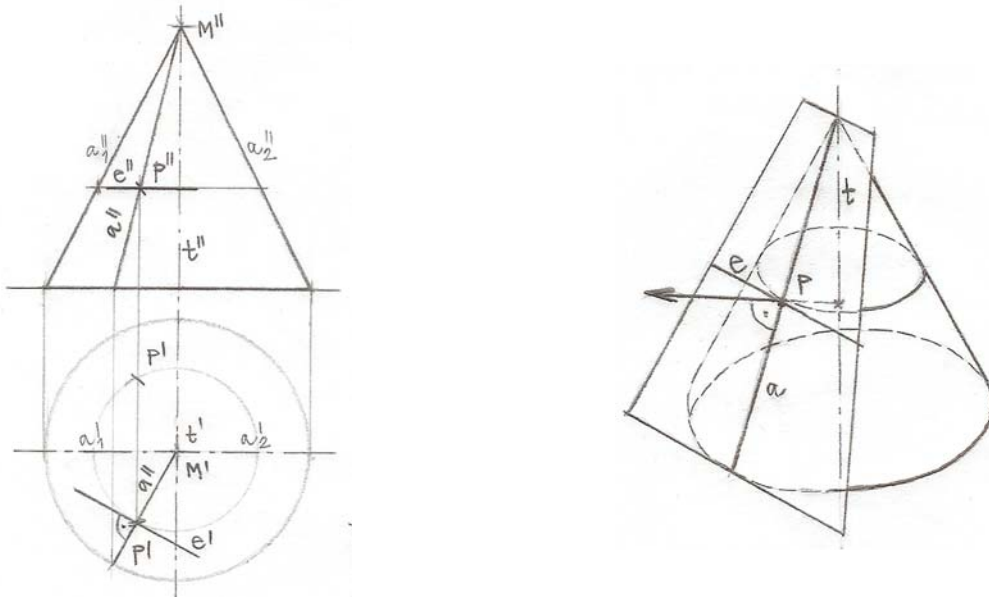
##### a/1. Kúpfelületen fekvő pont.

Ha kúpfelületen fekvő pontot akarunk ábrázolni, csak az egyik képét vehetjük fel szabadon.

Pl.: A kúp **P** pontjának második képét vettük fel. Megrajzoljuk a kúp pályagörbéjének második képét, ez a **t''** tengelyre merőleges egyenes szakasz. A pályagörbe első képe kör, sugarát a második képen mérhetjük le. Megrajzoljuk a kör első képét és a **P** pontot rendezővel kijelöljük rajta. A kör első képét a rendező két pontban metszi, tehát a kúpnek két olyan pontja van, amelynek második képe az adott **P''** pont. Az egyik a kúp felénk eső oldalán a másik a kúp hátsó oldalán van.

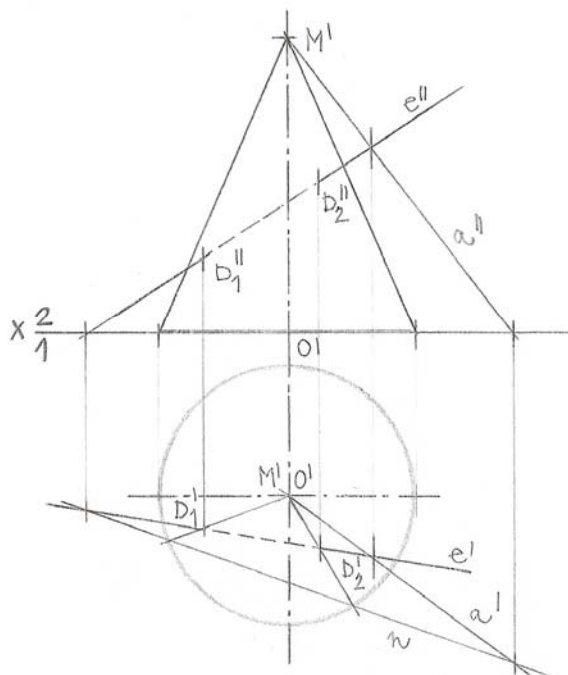
##### a/2. Kúpfelülethez érintősík szerkesztése.

Szerkesszünk a kúphoz az adott  $P$  pontban érintősíkot. Az érintősíkot a  $P$  ponton áthaladó leírógörbe érintője és a  $P$  pont pályagörbéjének érintője határozza meg. A  $P$  ponton átmenő leírógörbe egyenes, az egyenes érintője önmagának. Tehát az érintősík egyik egyenese a kúpnak a  $P$  ponton átmenő alkotója. Az érintősíkot meghatározó másik egyenes a  $P$  pont pályagörbéjének  $P$  pontbeli érintője. A kúp  $P$  ponthoz tartozó érintősíkja a  $P$  ponton áthaladó alkotó mentén végig érinti a kúpot. A kúpot minden érintősíkja egy alkotó mentén érinti. Az ábrán megrajzoltuk a  $P$  ponthoz tartozó felületi merőlegest, illetve a sík normálisát is.

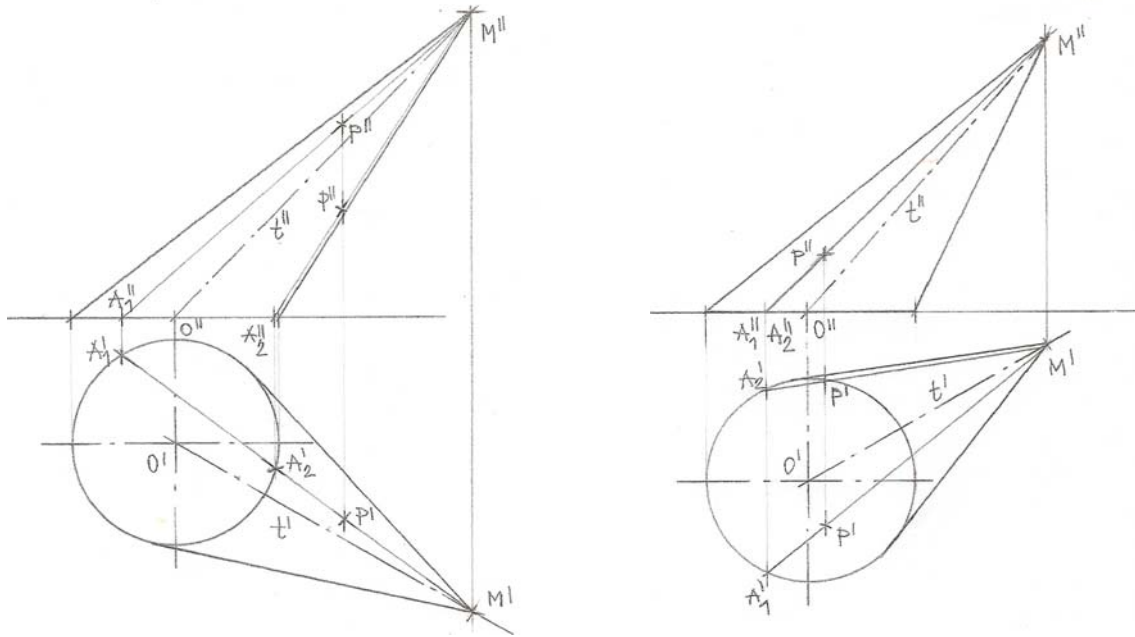


### a/3. Kúpfelület és egyenes metszéspontjainak szerkesztése:

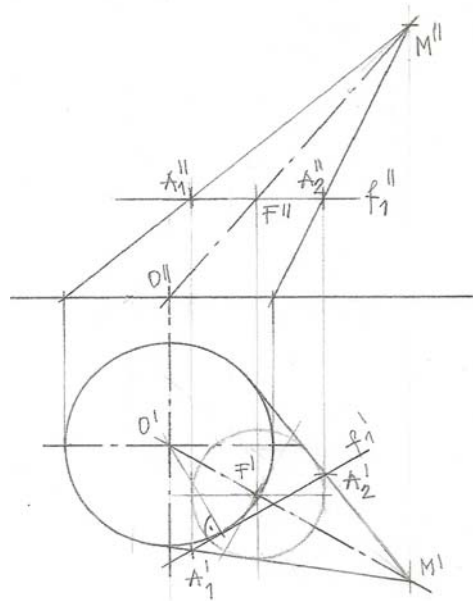
A szerkesztéshez olyan segédsíkot használunk, amely átmegy az egyenesen és a kúp csúcspontjára is illeszkedik. Ez a sík a felületet két alkotóban metszi, melyeknek az egyenessel közös pontjai a keresett dőfspontok. A feladat elvi megoldása a gúlánál bemutatott feladathoz hasonlóan történik.



**b.) Ferde körkúp felületén fekvő pont szerkesztése:**



b/1. *Ferde körkúp alapjával párhuzamos síkkal (vetítősíkkal) való metszetének szerkesztése.*



**1/2. HENGERFELÜLETEK**

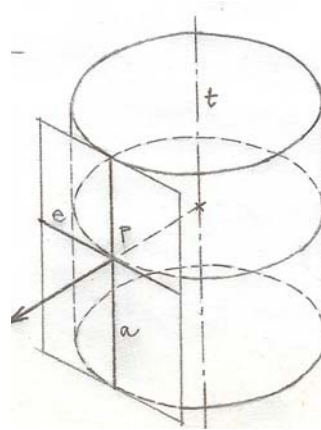
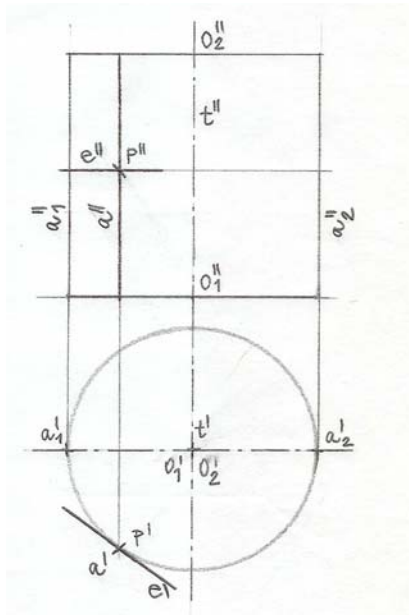
Ha egy egyenest úgy mozgatunk egy tetszőleges síkgörbe mentén, hogy mozgás közben mindig párhuzamos legyen egy, a síkgörbe síkjával nem párhuzamos egyenessel, **végtelen hengerfelületet** kapunk. Ezt a végtelen hengerfelületet elmetszve két olyan párhuzamos síkkal mely a síkgörbe síkjával párhuzamos, hengerfelületet kapunk.

A síkgörbe a henger **vezérgörbéje**. A párhuzamos síkokban lévő lapok a henger **alaplappjai**. A két párhuzamos sík közé eső hengerfelület a **henger palástja**, a palást egyenesei a **henger alkotói**, melyek egymással párhuzamosak.

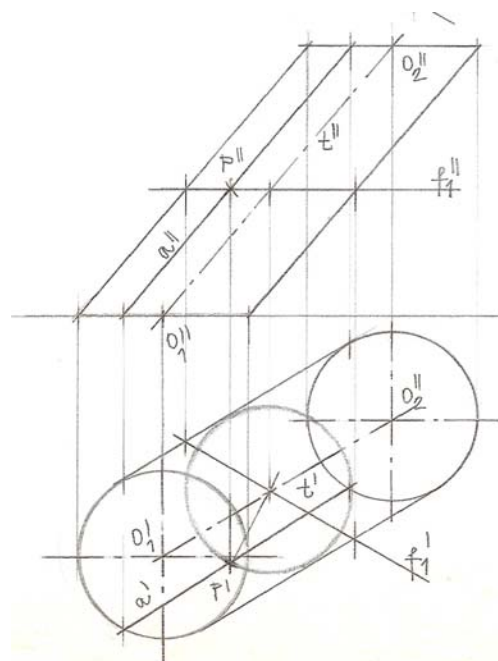
Ha a vezérgörbe kör és ennek a görbének a síkjára merőlegesek az alkotók egyenes körhengerről beszélünk. A körhenger is származtatható forgatással, részletesen ott ismertetjük.

Ferde körhengerről akkor beszélünk, ha a vezérgörbe síkjára az alkotók nem merőlegesek. A vezérgörbe síkjával párhuzamos síkok azonos sugarú köröket metszenek ki a henger palástjából.

**a.) Egyenes körhenger felületén fekvő pont, érintősík és normális ábrázolása**



**b.) Ferde körhenger felületén fekvő pont, érintősík ábrázolása**



Ha a ferde körhengert az alapjával párhuzamos síkkal metszük el, kör lesz a síkmetszet.

Ha a ferde körhengert az alkotókra merőleges síkkal metszük el, ellipszis lesz a síkmetszet.

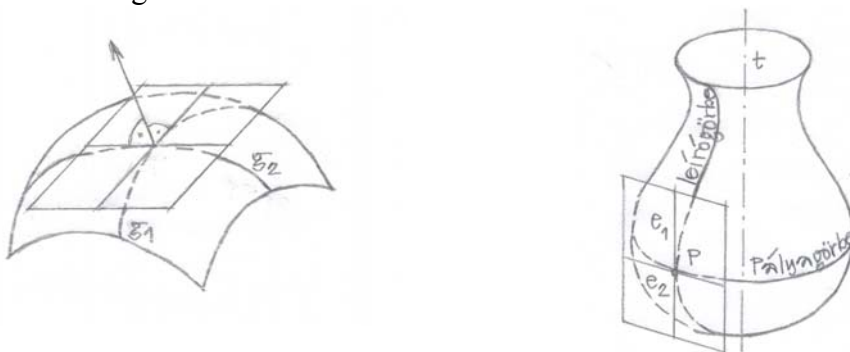


egyenlő. Ez a kör az I. ks.-kal párhuzamos síkban van, felülnézte kör. A  $P$  pont ennek a körnek a „szélső pontja”, így a II. ks.-ra vetítő  $e$  egyenes a kört érinti, így a felületet is érinti. A II. ks.-ra merőleges vetítő egyenes  $P$  érintési pontja a felület II. ks.-hoz tartozó körvonalának egy pontja, a  $P''$  a felület második képhatárán van. Ez az adott görbe vonal minden pontjára igaz, az adott görbe valóban a felület második képhatára, vagy másképpen kontúrja.

A görbe felület valamely  $P$  pontján átmenő összes felületi görbe (pl:  $g_1$  és  $g_2$ )  $P$  pontbeli érintői érintik a felületet is, és egyetlen síkra illeszkednek. Ez a síkfelület a  $P$  ponthoz tartozó **érintősíkja**, melyet az érintők közül bármely kettő meghatároz.

Forgásfelület érintősíkját legegyszerűbben úgy szerkeszthetjük meg, hogy a kiválasztott pontban nem két tetszés szerinti felületi görbét veszünk fel, hanem a ponton átmenő leírógörbéjével és a ponthoz tartozó pályagörbéjével határozzuk meg az érintősíkot.

A  $P$  érintési pontban síkra emelt merőleges a görbe felület normálisa, vagy másképpen a  $P$  pont felületi merőlegesének is nevezzük.



Görbe felület síkmetszete általában görbe vonal. A síkmetszetgörbe pontjai a felületnek és a metszősíkknak közös pontjai. A síkmetszet pontjait segédsíkok alkalmazásával szerkesztjük meg. A segédsíkot célszerűen úgy választjuk meg, hogy a felületet egyszerűen szerkeszthető vonalban metsze. Ilyenek a forgástengelyre merőleges segédsíkok, mert ezek a felületet paralelkörökben metszik.

Ez a szerkesztési eljárás a „**szeletelő módszer**”.

Ezzel a szerkesztési eljárással a ferde kőrkúp és a ferde kőrhenger síkmetszete is megszerkeszthető. Ugyanis a vezérkör síkjával párhuzamos segédsíkok mindkét felületből köröket metsz ki, melyek a metszetgörbe szerkesztését könnyen elvégezhetővé teszi.

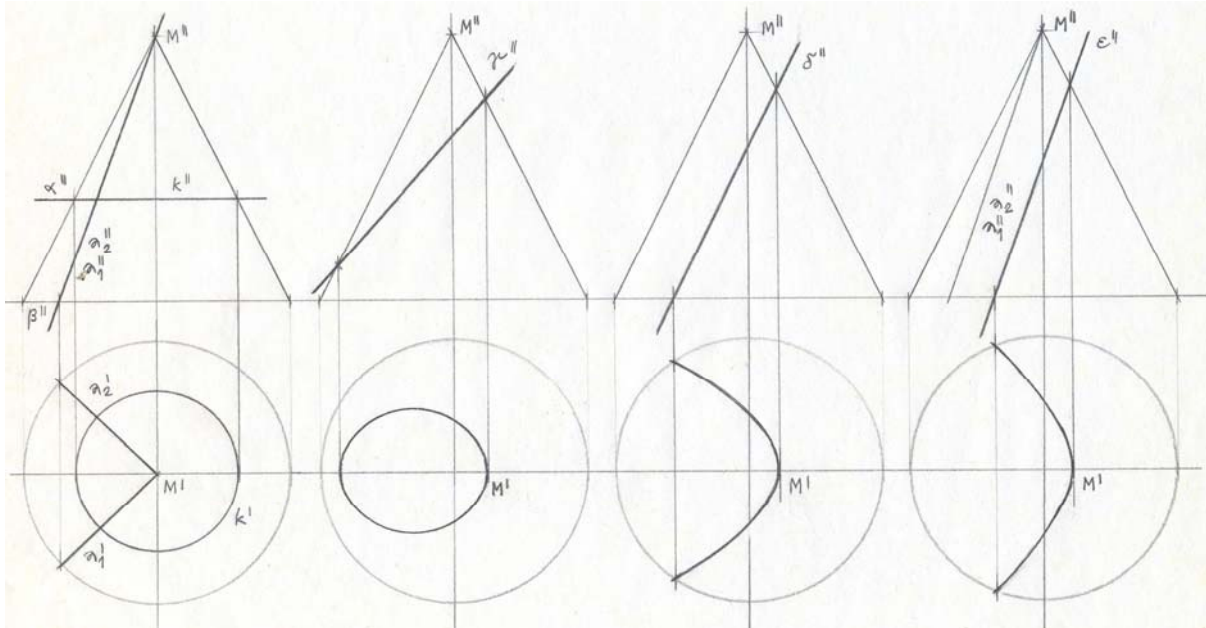
## **2/1. FORGÁSKÚP (EGYENES KÖRKÚP)**

A forgáskúpot egy a forgástengelyt metsző, rá nem merőleges egyenes írja le, tehát leíró vonala egyenes. A forgáskúp minden alkotója a tengellyel ugyanazt a szöget zárja be, ez a szög a kúp félnyílása. Az alkotóknak az alapsíkkal bezárt szögét a kúp dőlésszögének nevezzük, és ez a szög a felnyílás pótszögével megegyező.

### **a.) A kúp metszetgörbéi:**

A forgáskúp síkmetszeteit a metszősíkknak a forgáskúp alkotóihoz, vagy tengelyéhez viszonyított helyzete szerint határozzuk meg.





a/a.)

a/b.)

a/c.)

a/d.)

a/a.) Ha a metszősík a kúp minden alkotóját metszi, és ez a sík merőleges a forgástengelyre, **a síkmetszet kör.**

a/b.) Ha a metszősík a kúp minden alkotóját metszi, de a forgástengelyre nem merőleges, és a kúp félnyílás szögénél nagyobb a metszősík és a forgástengely szöge, **a síkmetszet ellipszis.**

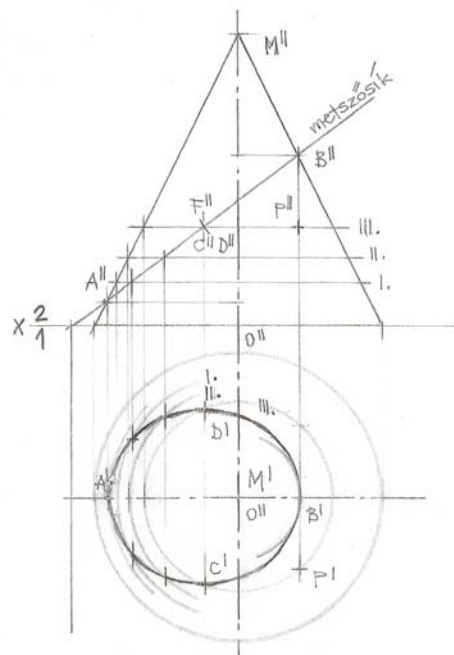
a/c.) Ha a metszősík a kúp egyetlenegy alkotójával párhuzamos, a metszősík és a forgástengely által bezárt szög egyenlő a kúp félnyílás szögével, **a síkmetszet parabola.**

a/d.) Ha a metszősík a kúp két alkotójával párhuzamos, ilyen a kúp csúcsponjtján átmenő metszősík is. Ebben az esetben a metszősík és a forgástengely szöge a kúp félnyílás szögénél kisebb, **a síkmetszet hiperbola.**

A kúp metszetgörbéit (kör, ellipszis, parabola, hiperbola) **kúpszeleteknek** is nevezzük, tulajdonságaikat a síkmértani tanulmányok alapján ismertek.

### b.) A körkúp síkmetszetének szerkesztése

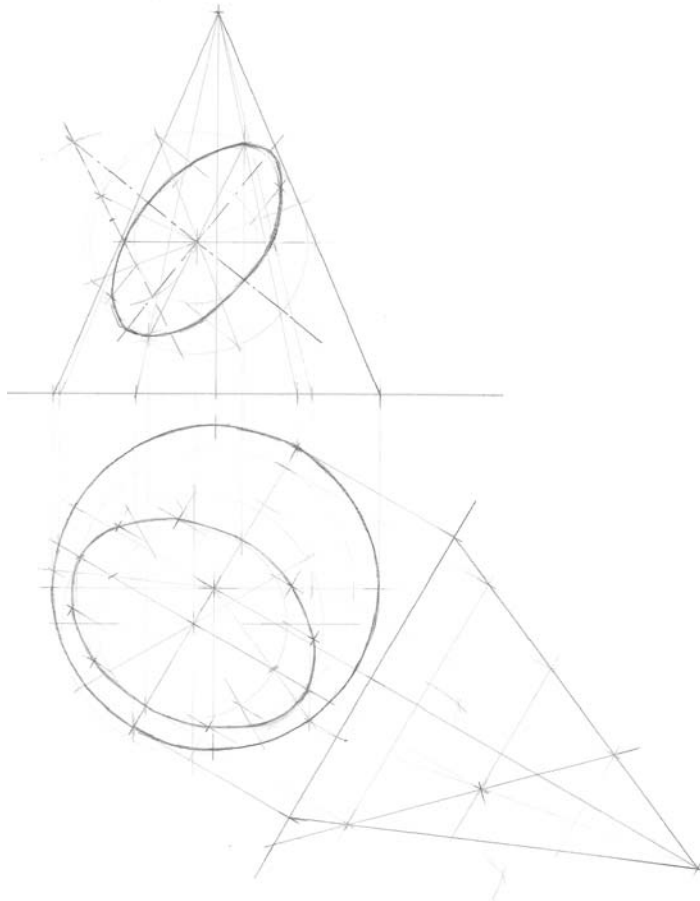
b/1.) Ha a metszősík vetítő helyzetű





b/2.) Ha a metszősík általános helyzetű:

- Új képsík felvétele úgy, hogy a metszősík vetítőhelyzetű legyen (IV. ks.).
- A metszetgörbének a felület képhatárán fekvő pontjainak megszerkesztése (a metszősík és a felület közös szimmetriasíkjában fekvő pontok, a metszetgörbe különleges pontjainak a megszerkesztése).
- A szeletelő módszer alkalmazásával a síkmetszet megszerkesztése I. és II. ks.-ban.



### c.) A körkúp és egyenes dőféspontjának szerkesztése

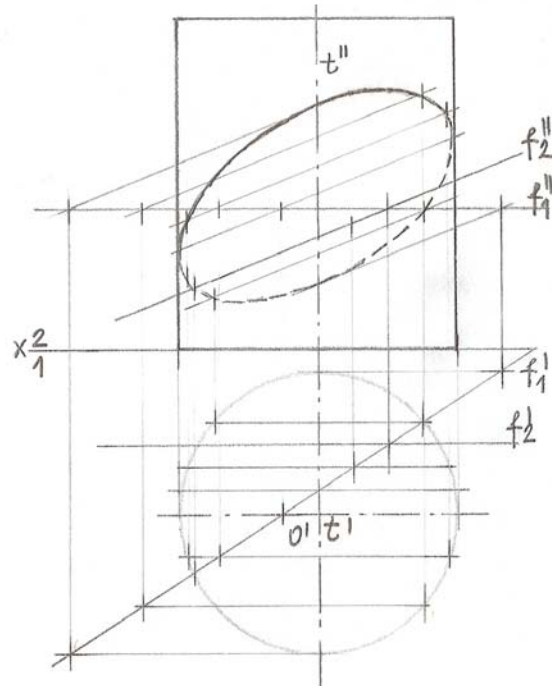
A szerkesztéshez olyan segédsíkot alkalmazunk, mely illeszkedik az adott egyenesre és a kúp csúcsára (lásd gúlánál!). Ez a segédsík alkotókat metsz ki a kúpból. Az adott egyenes és a kimetszett alkotók metszéspontjai a keresett dőféspontok. Ha a segédsík nem metszi a kúpot, az egyenes sem dőfi a kúpot. Ha érinti, akkor az egyenes a kúp érintője. (lásd előző részben: Egyenesvonalú felületek)

## 2/2. FORGÁSHENGER (EGYENES KÖRHENGER)

A forgáshengert egy, a forgástengellyel párhuzamos egyenes írja le, azaz a leírógörbe vonala a forgástengellyel párhuzamos. Ha a forgástengely valamelyik képsíkra merőleges, a forgáshenger ábrázolása ebben az esetben a legegyszerűbb, mert az alkotók első vetítésű sugarak, a henger pedig vetítőhenger. A henger tengelyirányú vetületén a palást körnek látszik, így a paláston fekvő minden pont és vonal tengelyirányú vetülete rajta van ezen a körön. Hiányzó másik képe szerkeszthető rendezővel, vagy vetítésű segítségével. Tehát ebben az esetben a felületi pontok ábrázolása, dőféspontok szerkesztése, valamint a síkmetszetek meghatározása egyszerűvé válik.

a.) *Vetítőhelyzetű henger síkmetszete*

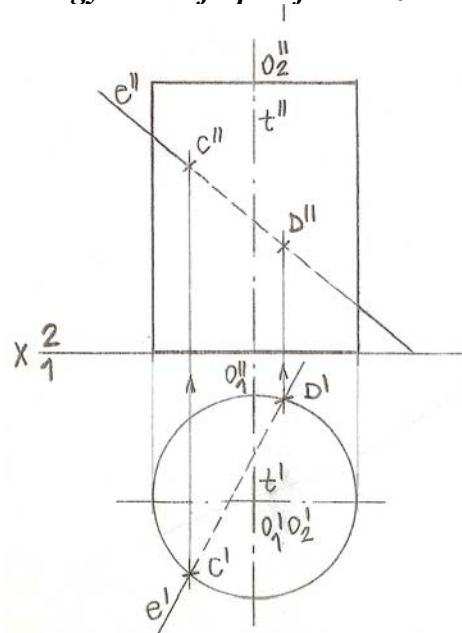
I. ks-ra merőleges egyenes henger



b.) *Általános helyzetű henger síkmetszete*

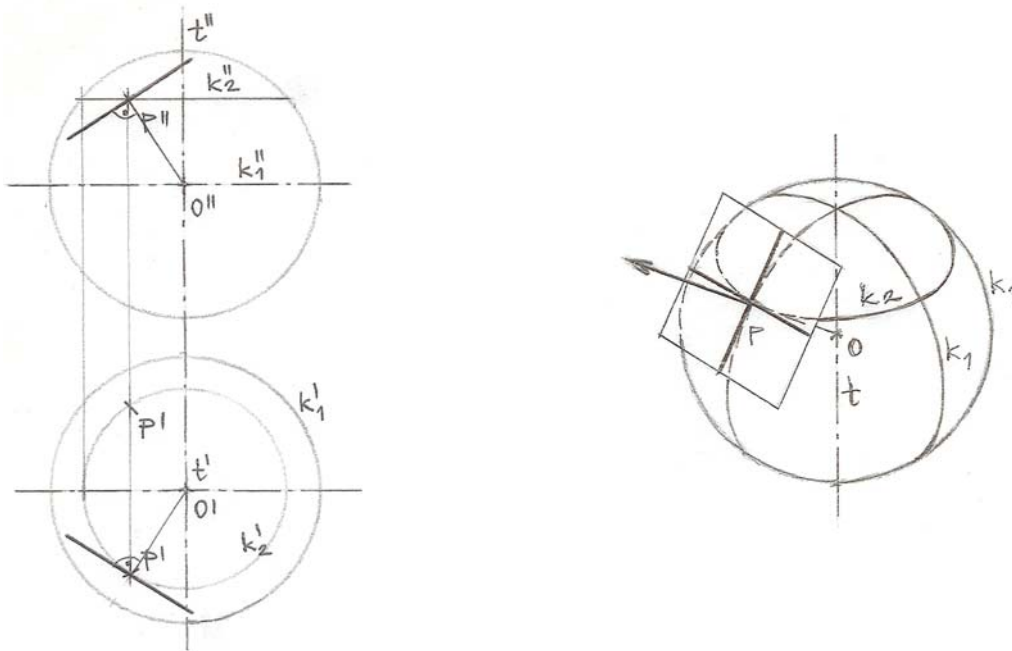
A szerkesztési módszerek a kúpnál ismertetett eljárások a forgáshengerre is alkalmazhatók.

c.) *Henger és általános egyenes dőléspontjának szerkesztése*



**2/3. GÖMB:**

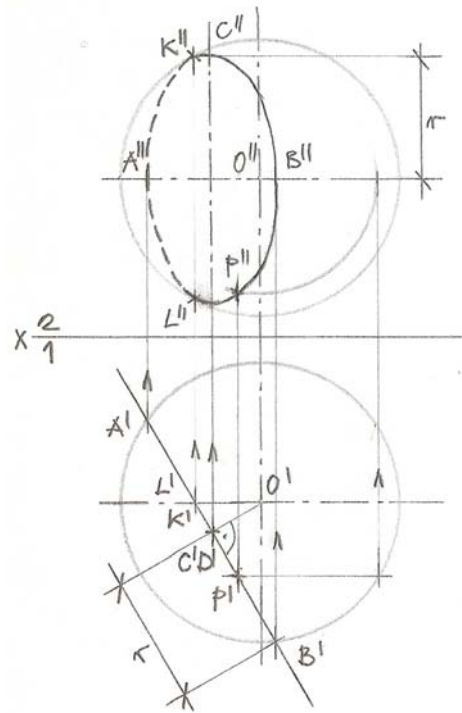
Ha felvesszünk egy forgástengelyt tartalmazó síkot és ebben a síkban egy olyan kört, amelynek középpontja a forgástengelyen van, és a kört a tengely körül forgatjuk **gömböt** ír le. A gömb leírógörbéje olyan kör, melynek síkja és középpontja a forgástengelyre illeszkedik.



A gömböt a sík körben metszi. A gömb középpontján átmenő metszősík a gömböt főkörben metszi, melynek sugara és középpontja a gömb sugarával és középpontjával azonos. A gömb kontúrja, körvonala főkör, melynek síkja a képsíkkal párhuzamos, a főkörrel azonos sugarú.

a.) *Gömb síkmetszete, ha a metszősík vetítőhelyzetű*

Ebben az esetben egyszerű a szerkesztés. A kimetszett kör vetülete egyenes szakasz, másik vetülete ellipszis. (lásd: kör vetületeinél !) Az ellipszis nagytengelye a vetítősugáron van, kistengelyének végpontjait rendezővonalakkal tudjuk kijelölni. Az ellipszis képkontúrúra eső pontjai a metszősík és a képsíkkal párhuzamos síkú főkör metszéspontjai. Az ellipszis többi pontjait szeleteléssel szerkesztjük meg.

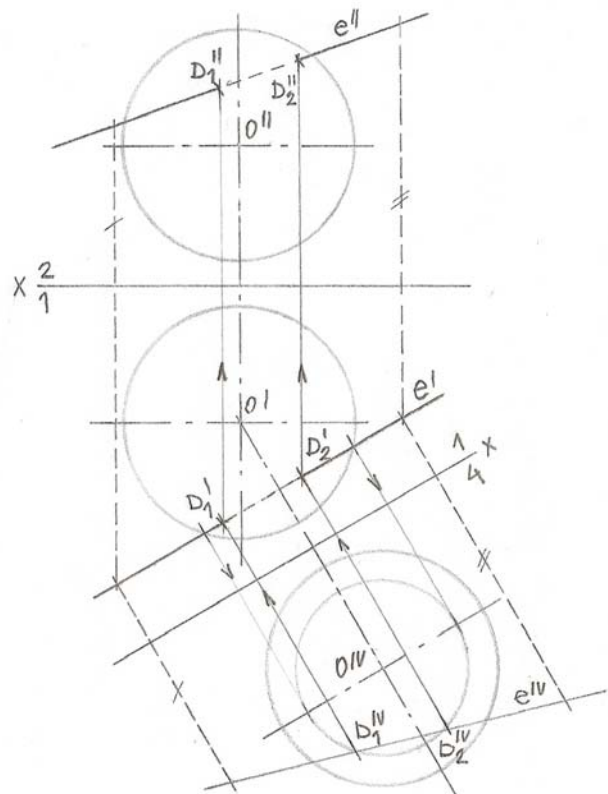


b.) *Gömb síkmetszete, ha a metszősík általános helyzetű*

Ebben az esetben a metszősíkot először vetítősíkká transzformáljuk, a szerkesztés további menete megegyezik az előzőben leírtakkal.

c.) *Gömb és általános helyzetű egyenes dőféspontja*

Legegyszerűbb a szerkesztés, ha az egyenes képsíkkal párhuzamos, azaz főegyenes. A keresett dőféspontok az egyenesen átfektetett főállású sík által a gömbből kimetszett körnek és az egyenesnek a közös pontjai. Ha az egyenes általános helyzetű, akkor főegyenessé transzformáljuk az adott egyenest, innen a szerkesztés megegyezik az előzőben leírtakkal.



### 3. GÖRBE FELÜLETEK ÁTHATÁSA:

Két görbe felület közös pontjai a két felület áthatási görbéje. Az áthatási görbék általában bonyolult térgörbék. A szerkesztés a görbék jellegzetes (kontúr, szimmetria síkba eső, önmagát metsző), illetve néhány általános pontjának, esetleg érintőjének meghatározására terjed ki, a görbe vetületei ezen pontok alapján egyértelműen megrajzolhatók.

Az áthatásban résztvevő felületeket olyan segédsíkokkal szeleteljük, amelyek a felületeket egyszerű görbékben metszik, lehetőleg alkotókban vagy párhuzamos körökben.

Egy-egy segédfelületen fekvő metszenvonalak közös pontjai mindkét felületre illeszkednek, így az áthatási görbe pontjai.

A gyakorlatban forgástestek, forgásfelületek áthatásaival találkozunk.

Az áthatás két alapesete, ha az egyik forgásfelület minden alkotója áthalad, azaz átfúrja a másik felületet, akkor két különálló görbét kapunk. A másik eset, ha az egyik felület alkotóinak csak egy része halad át a másik felületen, akkor csak egy térgörbe az áthatási vonal, ebben az esetben az áthatást bemetszésnek nevezzük.

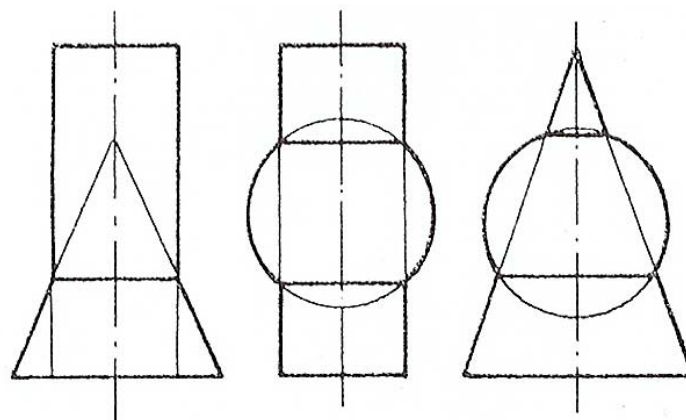
Két forgásfelület áthatásának szerkesztésekor négy esetet különböztetünk meg a forgástengelyek egymáshoz viszonyított kölcsönös helyzete szerint.

- a.) A forgástengelyek egybeesnek.
- b.) A forgástengelyek párhuzamosak.
- c.) A forgástengelyek kitérők.
- d.) A forgástengelyek metsződnek.

Ez azért fontos, mert a forgástengelyek helyzete szerint választjuk meg a szerkesztéshez alkalmas segédsíkot.

**a.) A forgástengelyek egybeesnek**

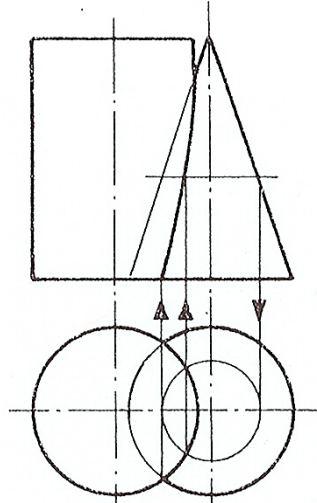
Ha a forgástengelyek egybeesnek a teljes áthatási vonal annyi közös paralelből áll, ahány pontban metszik egymást.



**b.) A forgástengelyek párhuzamosak**

Ebben az esetben a tengelyekre merőleges segédsíkú szeletelő módszert célszerű alkalmazni. Ez a módszer akkor nyújt egyszerű szerkesztési lehetőséget, ha a metszési köröknek a vetülete is kör, vagyis a forgástengelynek valamelyik képsíkra merőlegesnek kell lennie.

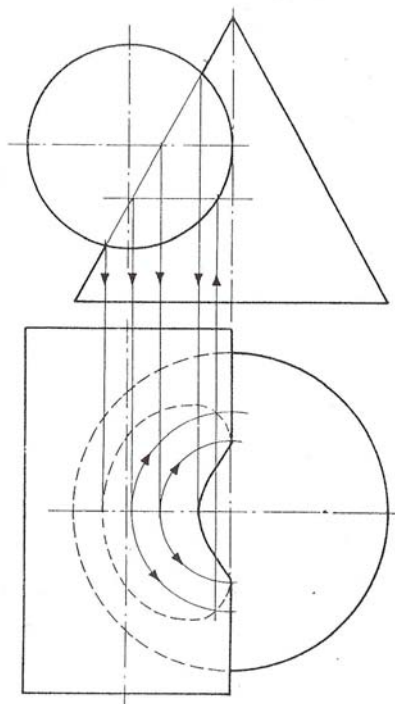
Ha a felületek tengelyei általános helyzetűek, akkor a kedvező helyzetet új képsíkok alkalmazásával állítjuk elő.



*c.) A forgástengelyek kitérők*

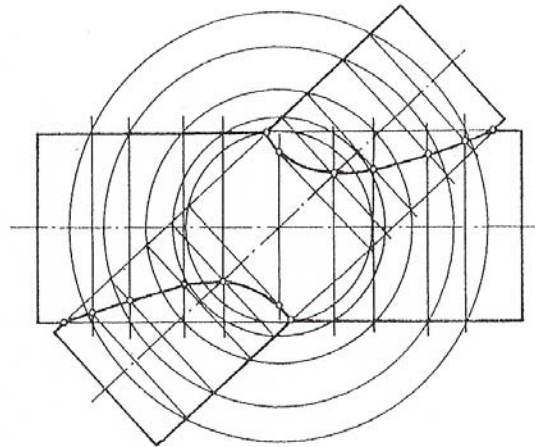
Ez esetben általában nincs olyan eljárást, mely egyszerű szerkesztést tesz lehetővé. Ugyanis a szeletelő síkok csak az egyik felületet metszik körben vagy egyenesben. A másikat általános görbében metszik. így a szerkesztés hosszadalmasabb eljárással adja meg az áthatási pontokat.

Akkor oldható meg könnyen a feladat, ha az egyik felület forgástengelyére merőleges sík a másik felületet egyszerű vonalban metszi. Ilyen az egymásra merőleges és kitérő tengelyű kúpfelület és hengerfelület esete. A kúpfelület tengelyére merőleges metszősíkok a hengerfelületet alkotókban metszik.



*c.) A forgástengelyek metsződnek*

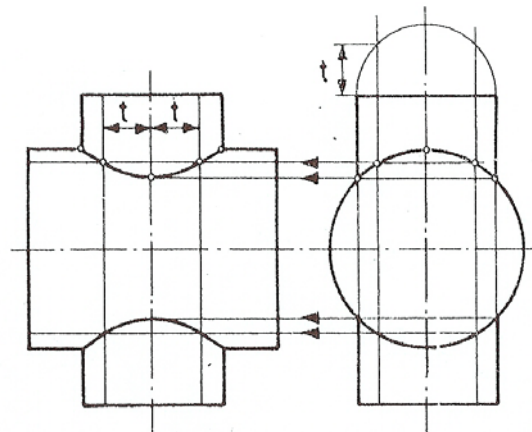
Segédfelületnek gömböket, esetleg síkokat alkalmazunk. A szeletelő gömbfelület középpontja a forgástengelyek metszéspontjai. A segédgömbök a felületeket paralel körökben metszik. Ezzel a szerkesztési módszerrel csak akkor egyszerű a szerkesztés, ha a forgástengelyek síkja képsíkkal párhuzamos, mert ekkor a paralel körök egyik vetülete egyenes szakasz.



Ha a tengelyek síkja általános helyzetű, akkor új képsíkok alkalmazásával állítjuk elő a párhuzamos helyzetet.

A felületek tulajdonságaitól függ, hogy a szeletelő segédsíkokat a forgástengely síkjával párhuzamosan, vagy egyik forgástengelyre merőlegesen vesszük-e fel.

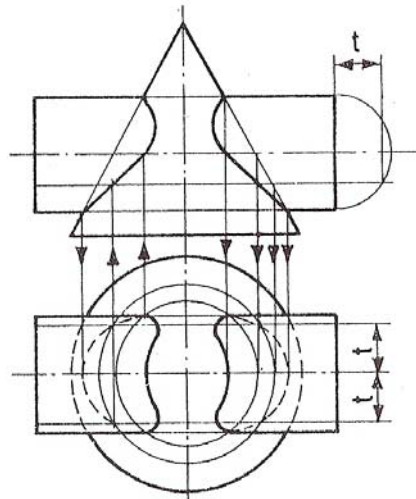
Akkor a legegyszerűbb a szerkesztés, ha a szeletelő síkok főállásúak és a forgástesteket alkotókban, illetve körökben metszi. Ekkor a főállású szeletelő síkokkal párhuzamos képsíkon a szeletelő síkok metszeteinek vetületei egyenes szakaszok, illetve körök. Az ugyanazon szeletelő sík által kimetszett alkotók, illetve kör metszéspontjai az áthatási görbe pontjai.



Ha a tengelyek síkjai általános helyzetű, itt is új képsíkok alkalmazásával állítjuk elő az egyszerű szerkesztéshez szükséges helyzetet.

A forgástengelyek síkjával párhuzamos szeletelő sík alkalmazását mutatja be az ábra. A szeletelő síkok a II. ks.-kal párhuzamosak, a harmadik vetületen jelenik meg a szeletelő síkok által kimetszett körnek, illetve alkotópárnak a kör, illetőleg az egyenes vetülete.



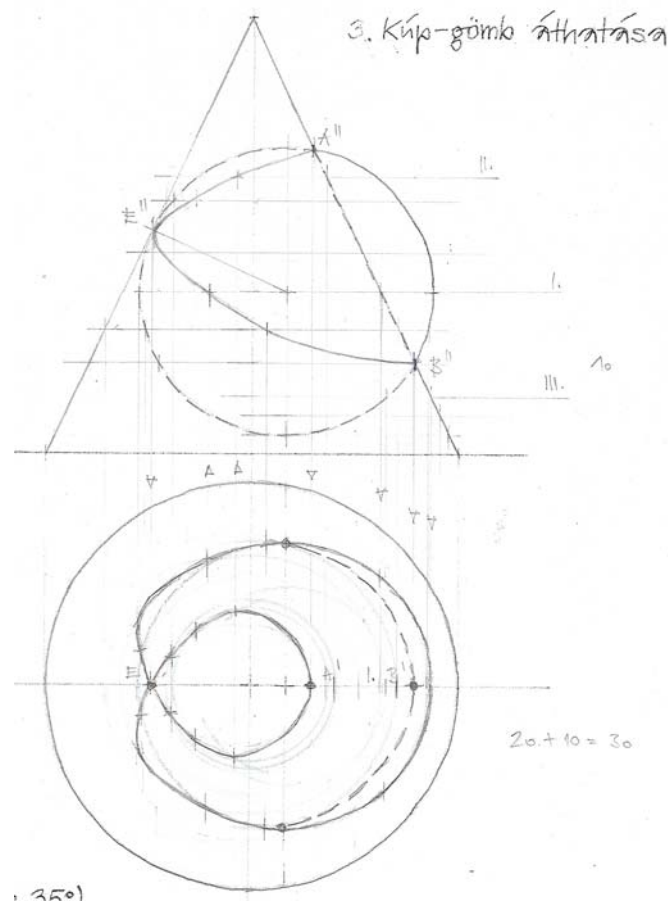


A kúp forgástengelyére merőleges szeletelő sík alkalmazását mutatja be az ábra. A szeletelő síkok az I. ks.-kal párhuzamosak, itt egyenes szakasz a képük. Az első vetületen jelenik meg a szeletelő síkok által kimetszett körnek, illetve alkotópárnak a kör, illetőleg az egyenespár vetülete.

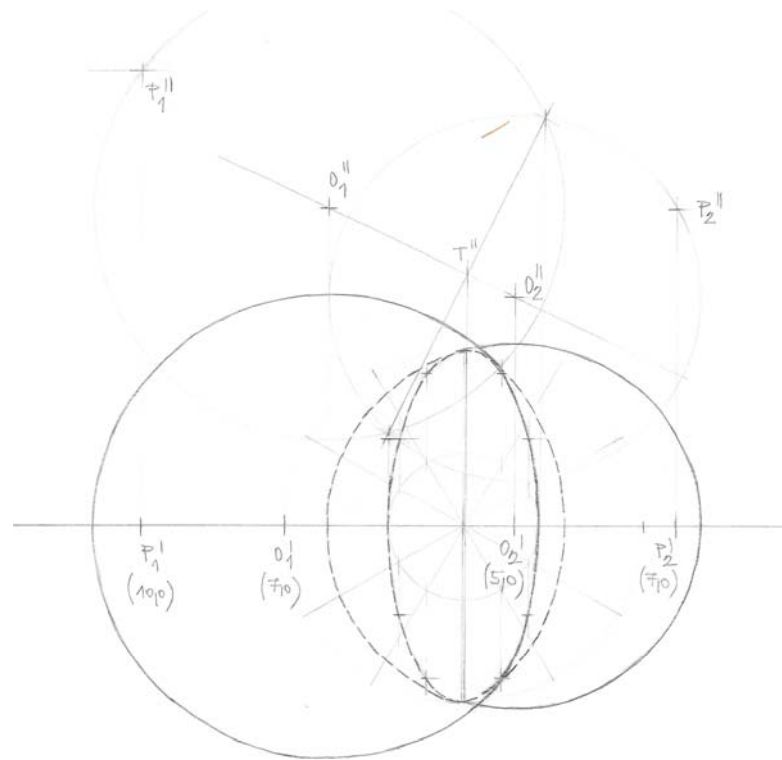
Az áthatási pontok másik képét rendezőkkel tűzzük ki.

Az áthatási görbe két különálló zárt görbéből áll és a második vetületük *kettősvetület*, mert mindegyik második vetületi pont két térbeli pont képe.

Kúp-gömb áthatása:



Gömb-gömb áthatása mérőszámok adatfelvétellel



Félgömb és szabálytalan négyszög alapú hasáb síkmetszete

