

6. heti előadás

1.5.4. SÍKLAPÚ TESTEK

1. Síklapú testek származtatása

Síklapú testnek, poliédernek a tér síkszögekkel körülhatárolt részét nevezzük. A síklapú testet **lapjai**, lapjait **élei**, az éleket pedig a síklapú test **csúcsai** határolják. A lapok sokszögek, melyeknek belső szögei a poliéder **élszögei**. Az egy élben találkozó két lap által bezárt szög a poliéder **lapszöge**. Az egy csúcspontot alkotó lapok **testszögletet** alkotnak. A testszöglet nyitott alakzat.

A síklapú testeket **éleik és csúcspontjaik vetületeivel** ábrázoljuk.

A műszaki gyakorlatban a leggyakrabban előforduló síklapú test a **hasáb** és a **gúla**.

Ha egy sokszög vonal pontjain át egy, a sokszög síkjával nem párhuzamos egyeneseket fektetünk, akkor ezek összessége végtelen hasábfelületet alkot, a felület, pedig végtelen hasábtestet határol. A végtelen hasábtestet a sokszög síkjával és egy, azzal párhuzamos síkkal elmeteszve **hasábot kapunk**, melynek egybevágó alaplapjait a síkok metszik ki a hasábtestből.

A **hasáb** alaplapja és fedlapja egymással párhuzamos és egybevágó. Az **egyenes hasáb** oldalélei merőlegesek az alaplap síkjára. A szabályos egyenes hasáb alaplapja szabályos sokszög. A **ferde hasáb** oldalélei az alaplap síkjával ferde (hegyes) szöget zárnak be.

Ha egy sokszög vonal síkján kívül eső pontból a sokszög vonal pontjaira félegyeneseket illesztünk, akkor azok összessége végtelen gúlafelületet alkot, a felület, pedig végtelen gúlát határol. A végtelen gúlát egy síkkal, pl. a sokszög vonal síkjával elmeteszve kapjuk a gúlát vagy röviden a **gúlát**.

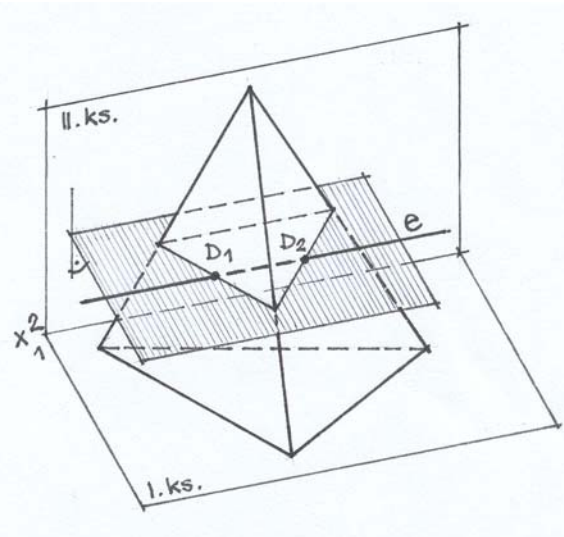
A **gúla** alaplapja (alapsokszöge) oldalegyenesei a gúla **alapélei**. Az alapsokszög csúcspontjaira illeszkedő és a gúla csúcsa közé eső oldalélek a gúla **alkotói**. A **gúla** oldallapjai **háromszögek**. **Szabályos a gúla**, ha alaplapja szabályos sokszög és ennek a sokszögnek a középpontjában emelt merőleges a gúla csúcspontján megy keresztül.

2. Síklapú testek metszése egyenessel

A síklapú testek **egyenessel való dőfése** esetében a szerkesztés elvileg megegyezik a sík és egyenes dőféspontjának szerkesztésével. Az egyenesen ez esetben is valamelyik képsíkra merőleges, azaz különleges helyzetű segédsíkot fektetünk. Megszerkesztjük a segédsík és a síklapú test síkmetszetét. A síkmetszet oldalainak és az egyenesnek a közös pontjai a keresett dőféspontok.

- **Síklapú testek egyenessel való dőfése**

A szerkesztés menete: az egyenesre, egy a II. ks.-ra merőleges segédsíkot illesztünk, a segédsík a test lapjait egyenesekben metszi (a segédsík az egész testet elmetesz, ezért megszerkesztjük a teljes metszetsokszöget), ezek a metszsvonalak kijelölik az egyenesen a dőféspontokat. Egyszerű gúla és hasábok esetében az egyenesek a testet két pontban dőfik. Az egyik síklapon behatol az egyenes a testbe (**D₁**), egy másik síklapján pedig elhagyja azt (**D₂**).



• **Síklapú testek egyenessel való dőfése a két rendezett vetületével**

- Adott az alaplapjával az első képsíkon álló háromszög alapú gúla és egy általános helyzetű egyenes.

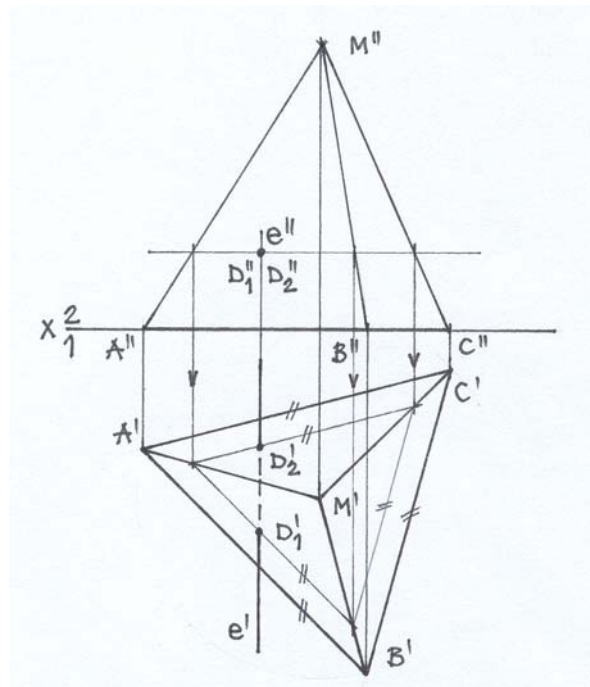
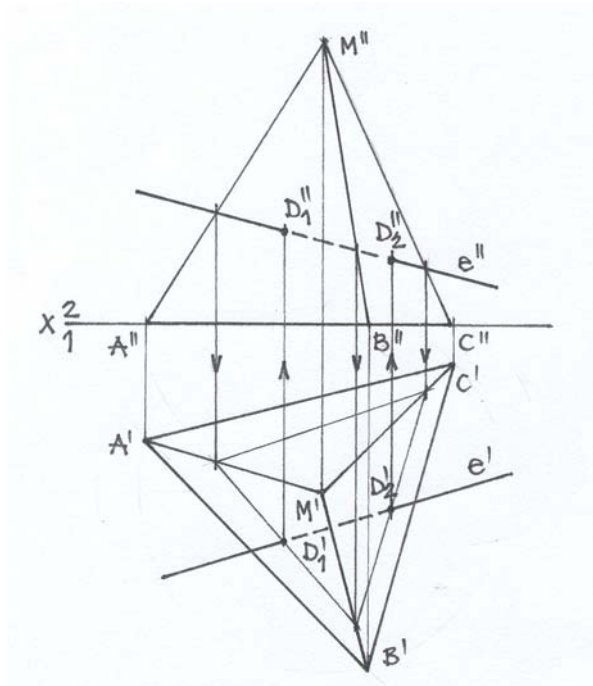
- Adott az alaplapjával az első képsíkon álló háromszög alapú gúla és egy a II. ks.-ra merőleges egyenes.

Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.

1. Az általános helyzetű egyenesre egy a második képsíkra merőleges segédsíkot fektetünk. Ha a II. ks.-ra merőleges a segédsík, akkor itt egy egyenes lesz a képe (sík élben látszó képe) és illeszkedik az egyenesre (e'').
2. Az I. ks.-ban ez a segédsík a gúlát háromszögben metszi. Tehát megszerkesztjük a gúla síkmetszetét.
3. A síkmetszet első képe kijelöli az egyenesen (e') a dőféspontokat (D_1' ; D_2').
4. Az I. ks.-ból visszavetítjük a II. ks.-ra a dőféspontokat (D_1'' ; D_2'').

Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.

1. Az egyenesre most egy az I. ks.-kal párhuzamos síkot fektetünk, ennek a síknak a II. ks.-on a képsíktengellyel párhuzamos egyenes lesz a képe (sík élben látszó képe).
2. Itt is mint az előző feladatban az I. ks.-ban a síkmetszet egy háromszög lesz. Mivel a segédsík párhuzamos az első képsíkkal, így az alaplaphoz hasonló, csak kisebb háromszög lesz a síkmetszet. Elegendő a síkmetszet I. képének egyetlen oldalát megszerkeszteni, a többi megrajzolható, mert oldalai párhuzamosak az alapháromszög oldalával.
3. A síkmetszet első képe kijelöli az egyenesen (e') a dőféspontokat (D_1' ; D_2').
4. Az I. ks.-ból visszavetítjük a II. ks.-ra a dőféspontokat (D_1'' ; D_2'').

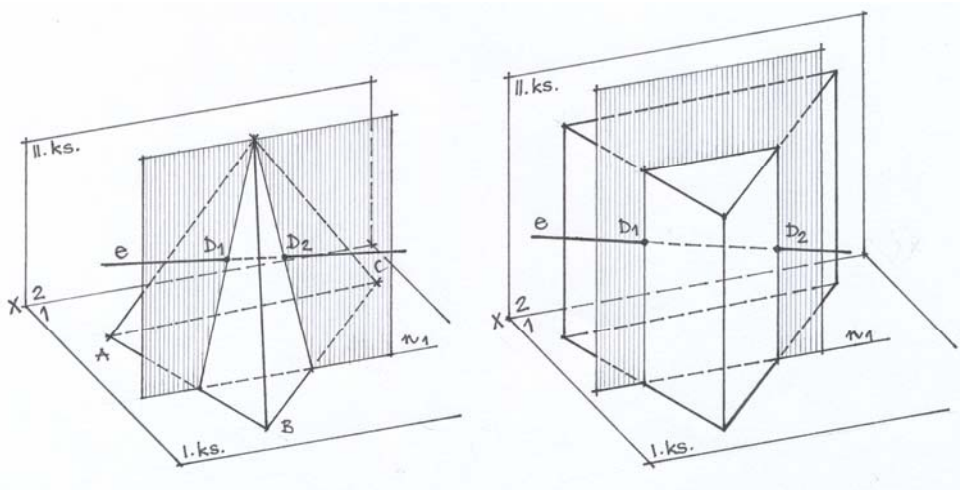


Tehát a szerkesztés egyszerűvé válik, ha *segédsíkként vetítésíkot* alkalmazunk.

- **Egy másik szerkesztési módszer**

Ha a metszősíkot úgy vesszük fel az egyenesen keresztül, gúla esetében, a gúla csúcspontján keresztül, hasáb esetében, a hasáb oldalélével párhuzamosan, akkor az így felvett segédsík mind a gúla felületéből, mind a hasáb felületéből két alkotót metsz ki. Az alkotók és az egyenes közös pontjai a keresett dőféspontok.

A segédsík a gúlából háromszöget, a hasábból paralelogrammát metsz ki. Ezeket az adott egyenes a keresett dőféspontokban metszi.



Szerkesztése rendezett vetületekkel

Adott: alaplapjával az I.ks.-ra illeszkedő háromszög alapú gúla, és az általános helyzetű egyenes I. és II. vetülete.

Szerkesztendő: a gúla és az egyenes dőféspontja.

1. *A segédsík nyomvonalának megszerkesztése:*

A segédsíkot tartóegyeneseivel határozzuk meg. Egyik tartóegyenese legyen az adott egyenes, másik tartóegyenese ez esetben a gúla csúcspontjára illeszkedő és az adott egyenest metsző f_1'' fővonal. A segédsík és a gúla alaplapjának metszéspontja a segédsík első nyomvonal (n_1). Ennek egy pontja az e egyenes első nyompontja (N_1'), iránya pedig az f_1' fővonallal megegyezik (párhuzamosak egymással !!!)

2. *Megszerkesztjük a segédsík és a gúla oldallapjának metszéspontját,* ami nem más, mint az oldallap alkotója. Az n_1 nyomvonal metszi a gúla alaplapjának $A'B'$ és $B'C'$ élét. Vagyis a gúla alaplapjának $A'B'$ oldaléle és az n_1 nyomvonal metszéspontját összekötjük a gúla csúcsával. Megkaptuk a segédsík és a gúla egyik oldallapjának a metszéspontját. A metszéspont és az adott egyenes közös pontja az egyenes és a gúla egyik (D_1') dőféspontja. A másik alkotó megszerkesztésével megkapjuk a másik (D_2') dőféspontot.

3. *A II. ks.-on is megszerkesztjük az alkotókat.* Az alapél és a nyomvonal metszéspontjait felvetítjük a II. ks.-ba (gúla alaplapjának egyik pontja, rajta van az $x_{1,2}$ tengelyen!), a gúla csúcsával összekötjük. Az adott egyenessel metsződve, itt is megkapjuk a dőféspontokat (D_1'' , D_2'').

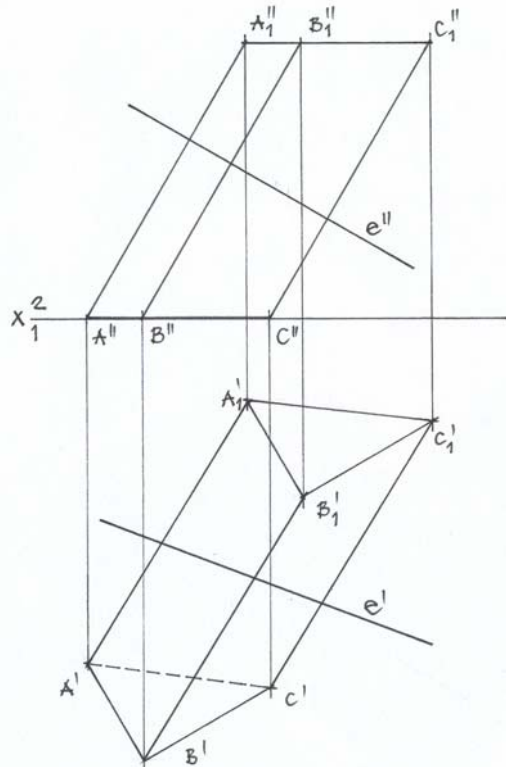
4. *Ellenőrzés:* ha pontosan szerkesztettünk, akkor a két ks.-on a dőféspontok egy rendezőre esnek.

Hasáb és egyenes dőféspontjának szerkesztése rendezett vetületeivel, fázisonként.

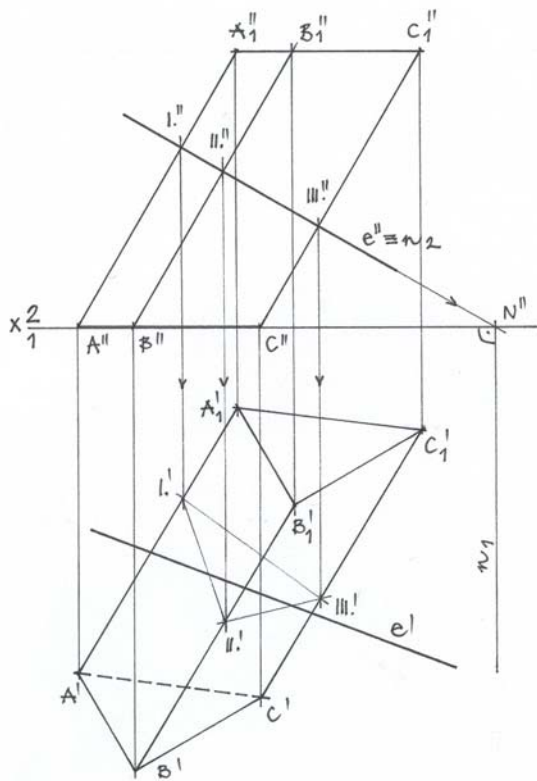
Adott: alaplapjával az I.ks.-ra illeszkedő háromszög alapú ferde hasáb, és az általános helyzetű egyenes I. és II. vetülete.

Szerkesztendő: a hasáb és az egyenes dőféspontja.

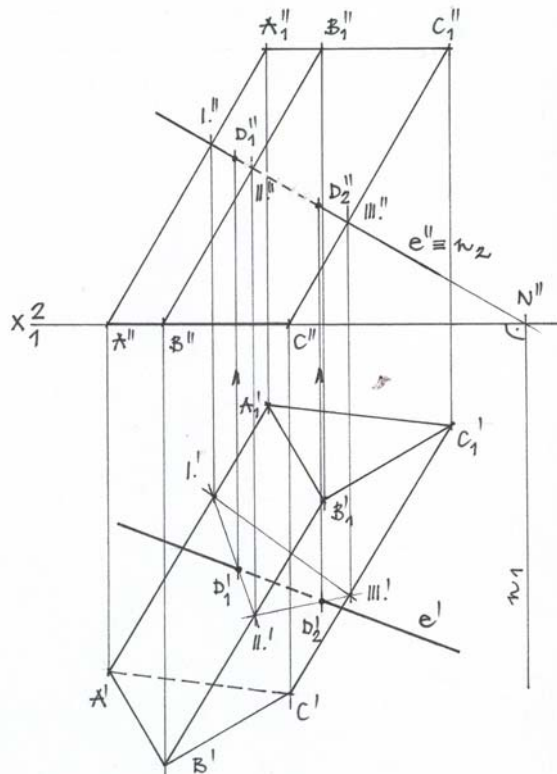
Kiinduló adatok:



1. fázisrajz: metszésvonal szerkesztése



2. fázisrajz: dőféspontok szerkesztése, láthatóság



3. Síklapú testek metszése síkkal.

A síklapú test felületét a metszősík sokszögvonalaiban, a testet sokszögben metszi. A sokszögnek annyi csúcspontja és oldala van, ahány él, illetve lapot metsz a metszősík.

A sokszögmetszet, röviden *síkmetszet* megszerkesztéséhez a:

- a.) ÉLMÓDSZERT, és a
- b.) LAPMÓDSZERT használjuk.

a.) ÉLMÓDSZER:

Az élmódszer alkalmazásakor a *metszősík és az élek metszéspontjait (döféspontjait)* szerkesztjük meg. (**Sík és egyenes döféspontjára vezetjük vissza a szerkesztést! Lásd: Metszési feladatok 1.5.3. G jelű fejezetét!**)

A metszéspontok (döféspontok) a *síkmetszet csúcspontjait* adják. A csúcspontokat összekötő szakaszok adják a síkmetszet oldaléleit.

b.) LAPMÓDSZER:

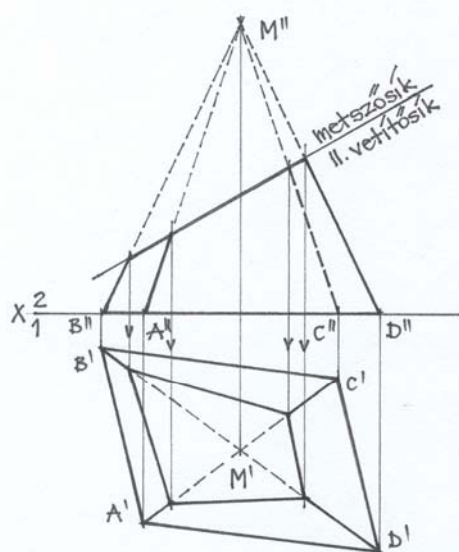
A lapmódszer alkalmazásakor a metszősík és a lapok metszéspontjait szerkesztjük meg. (**Azaz két sík metszéspontját szerkesztjük!**). A metszéspontok adják a síkmetszet oldalait.

• **Gúla ill. hasáb síkmetszete:**

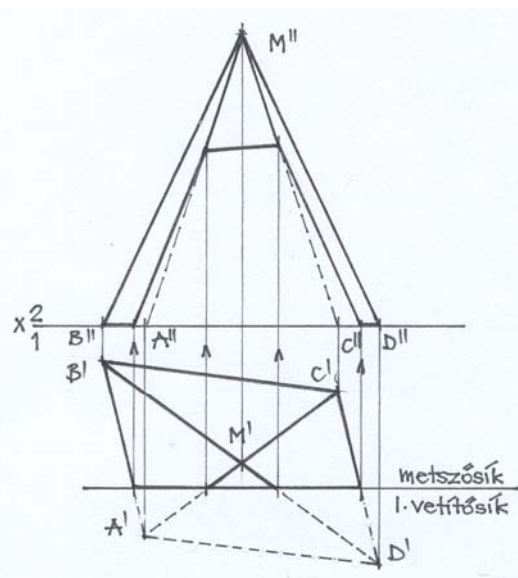
1. A metszősík vetítősík:

Ebben az esetben a szerkesztés a legegyszerűbb, ugyanis az élrk és a sík döféspontjainak egyik képe közvetlenül adódik, a másik képe rendező egyenesek segítségével megszerkeszthető.

A metszősík II. vetítősík

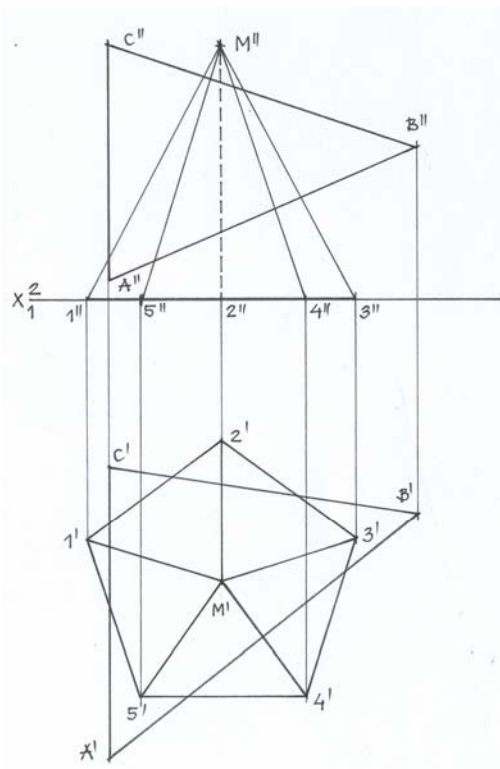


A metszősík I. vetítősík



2. A metszősík általános helyzetű (három illetve 4 pontjával megadva)

Ha általános helyzetű a metszősík, akkor transzformáció segítségével végezhetjük el a szerkesztést. Ebben az esetben úgy vesszük fel az új (segéd) ks.-ot, hogy a metszősíkra merőleges legyen (sík élben látszó képe!!!). Így a legegyszerűbb szerkesztési módhoz, az előzőekben ismertetett szerkesztéssel tudunk eljutni a megoldáshoz.

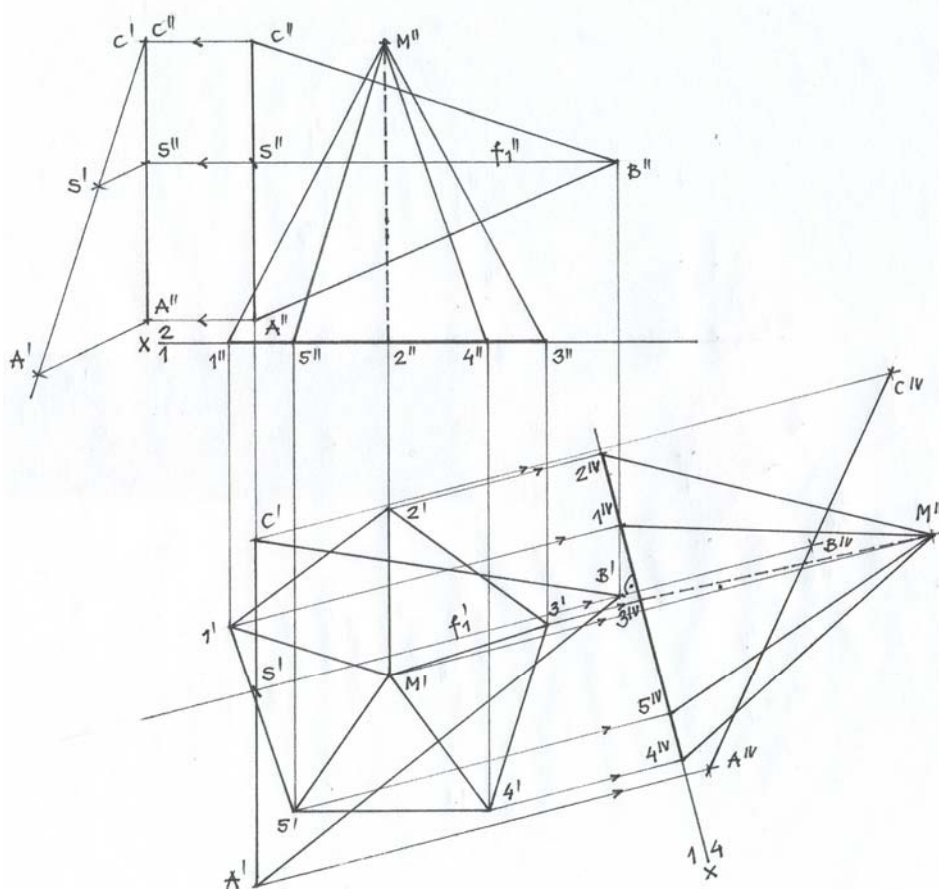


Gúla

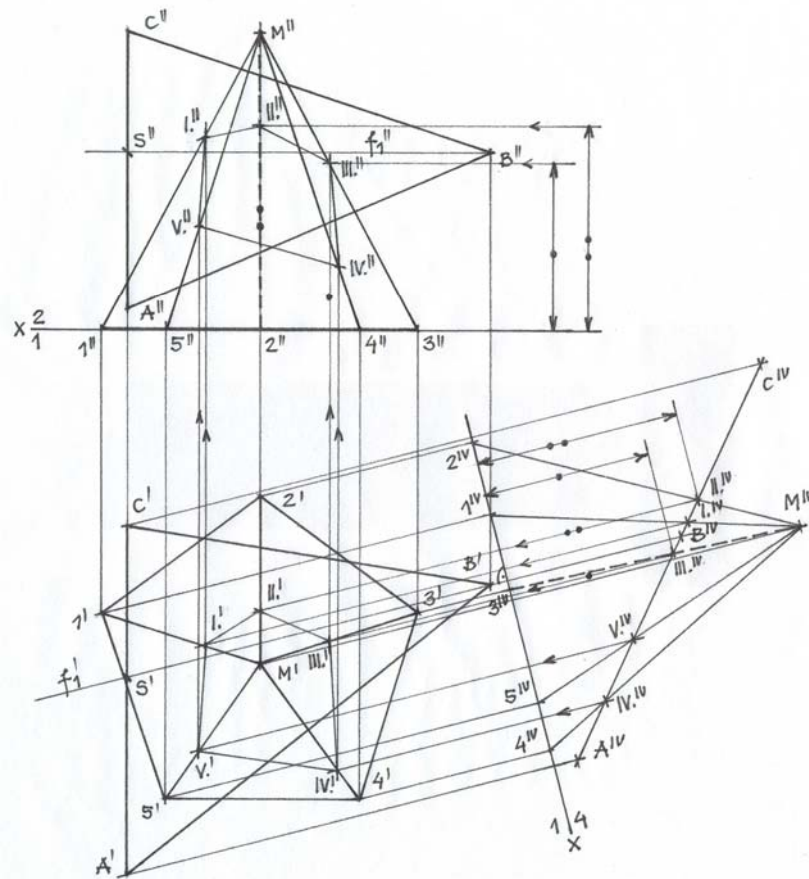
Kiinduló adatok:

alaplapijával az I. ks.-on álló, szabályos ötszög alapú gúla, három pontjával adott általános helyzetű metszősík.

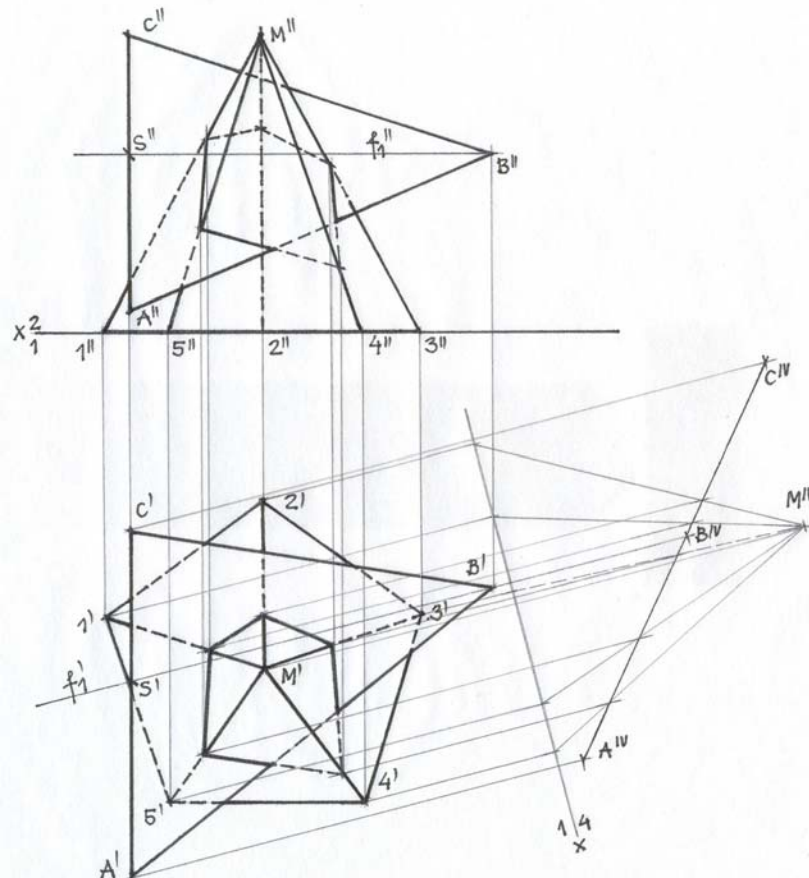
1. fázisrajz



2. fázisrajz



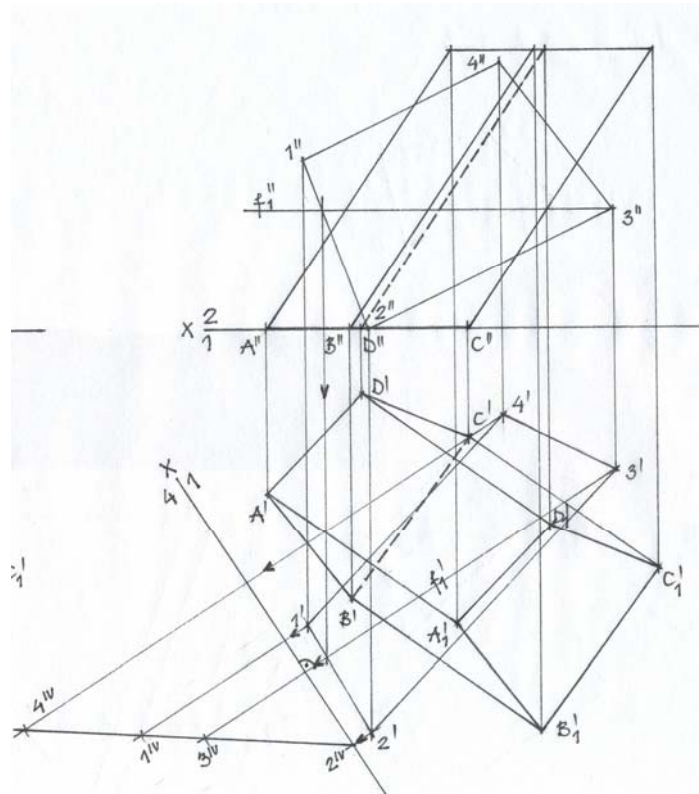
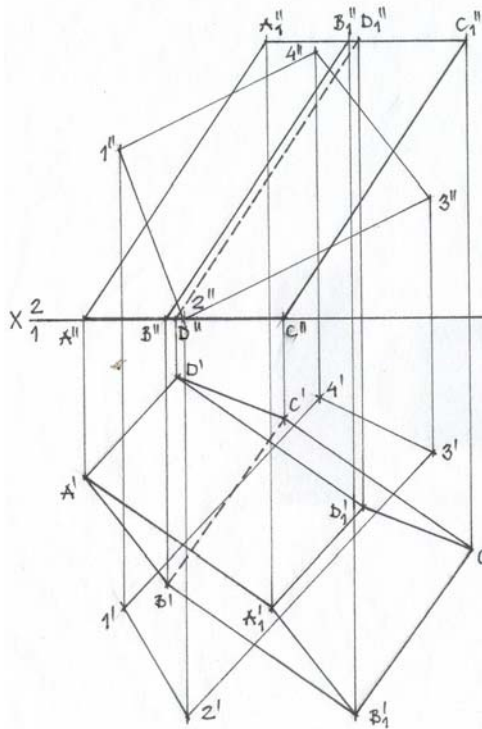
3. fázisrajz



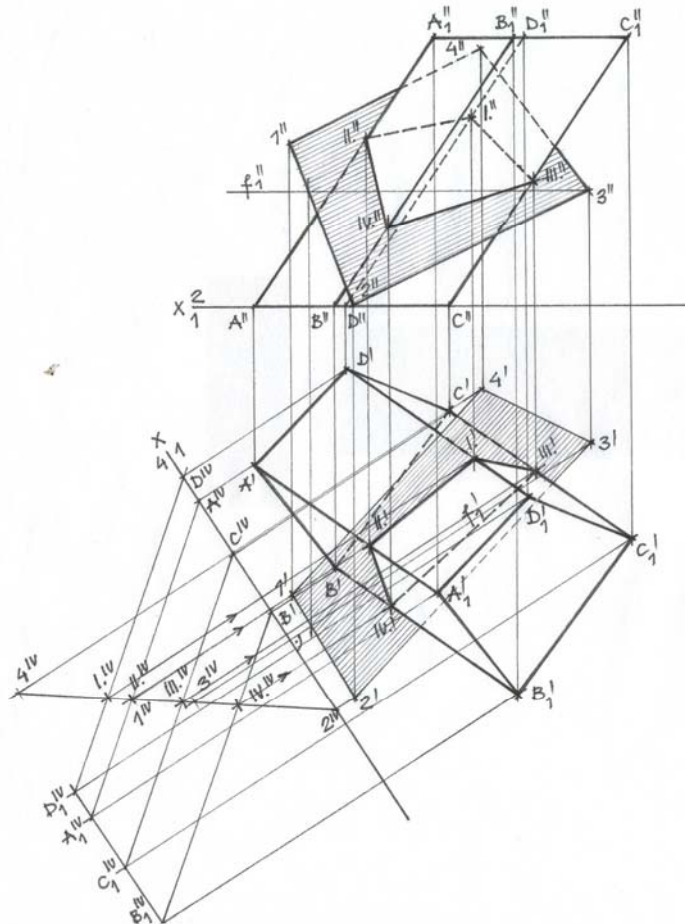
Hasáb

Kiinduló adatok: alaplapjával az I. ks.-on álló, ferde hasáb, négy pontjával adott általános helyzetű metszősík.

1. fázisrajz: főgyenessel IV. ks.-ban a metszősík élben látszó képének megszerkesztés



2. fázisrajz: hasáb IV. ks.-beli nézete, síkmetszet I. és II. ks.-beli megszerkesztése, láthatóság

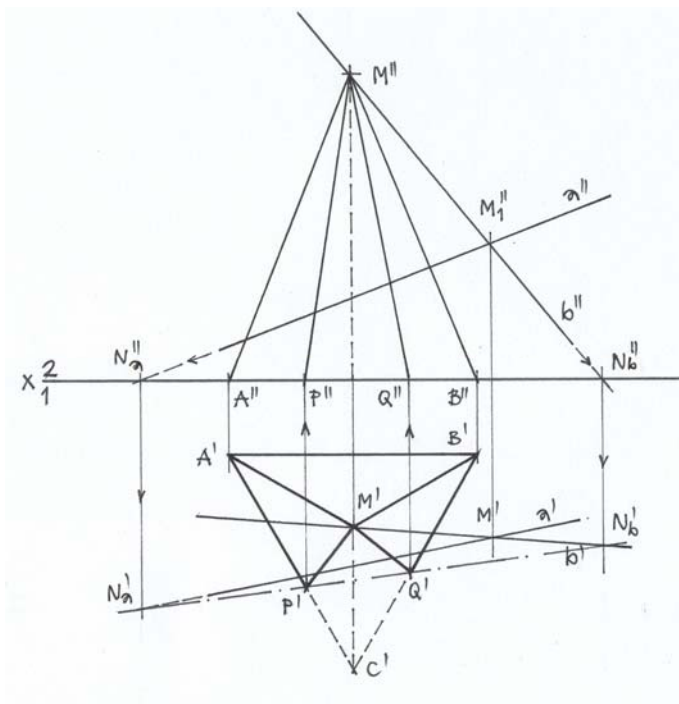
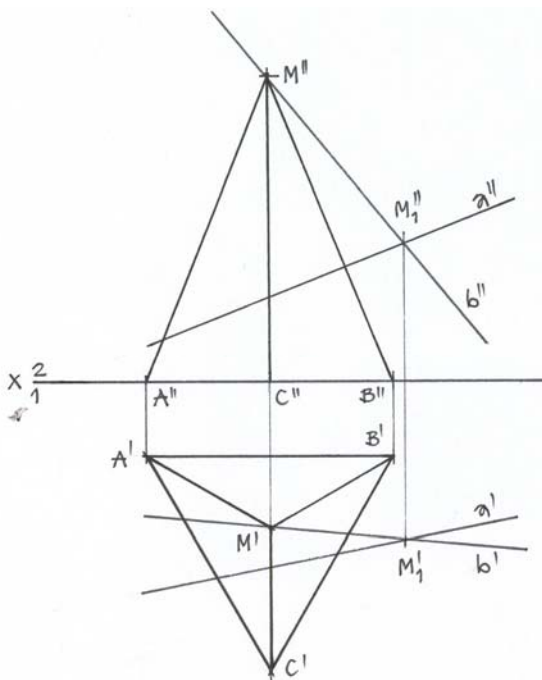


3. A metszősík általános helyzetű, tartóegyeneseivel adott, és a metszősík illeszkedik a gúla csúcsára, (hasáb esetén párhuzamos a hasáb alkotóival).

Ebben az esetben a sík két alkotót metsz ki a gúlából, illetve a hasábból. Képsíkon álló (képsíkra illeszkedő alaplapú) gúla és hasáb esetén a metszősík nyomvonalának segítségével egyszerűen szerkeszthető meg.

Kiinduló adatok:

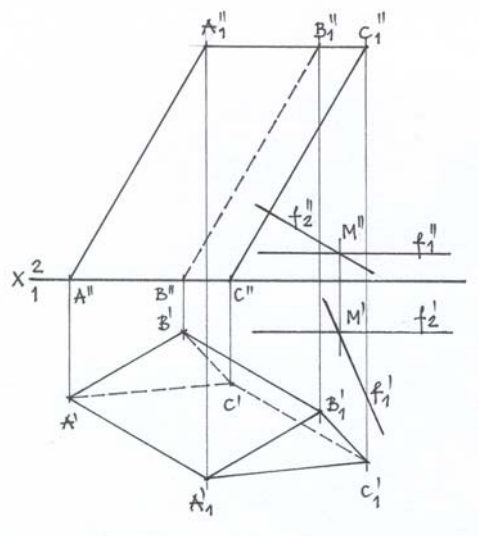
1. fázisrajz



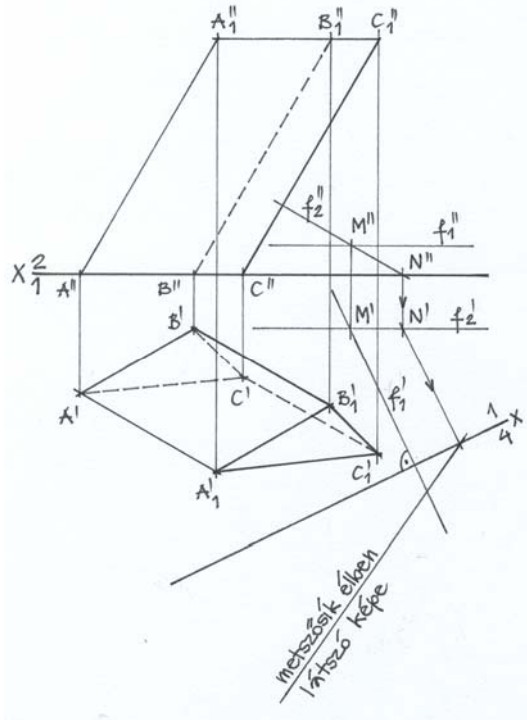
3. Általános helyzetű a metszősík, (főegyeneseivel adott) – szerkesztés IV. ks.-kal.

Kiinduló adatok:

Képsíkon álló (képsíkra illeszkedő alaplapú) ferde hasáb.



2. fázisrajz: metszősík élből látszó képének megszerkesztése



3. fázisrajz: a hasáb IV. képének (különleges nézetének) megszerkesztése

