

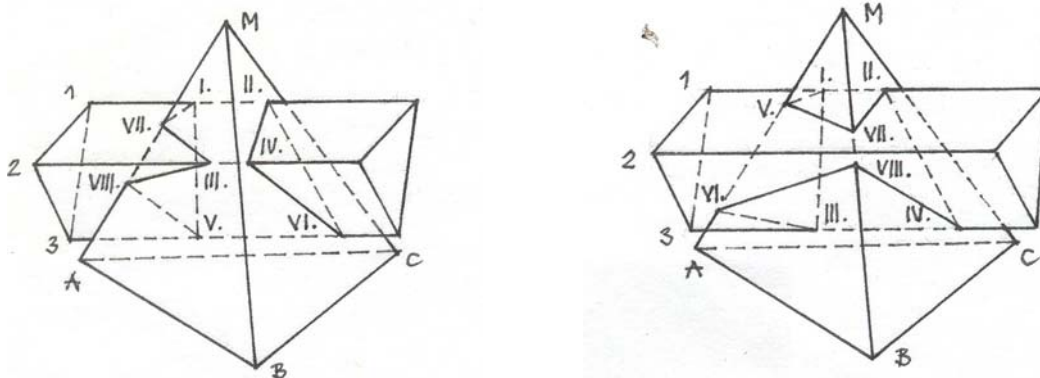
7. heti előadás

4. Síklapú testek áthatása

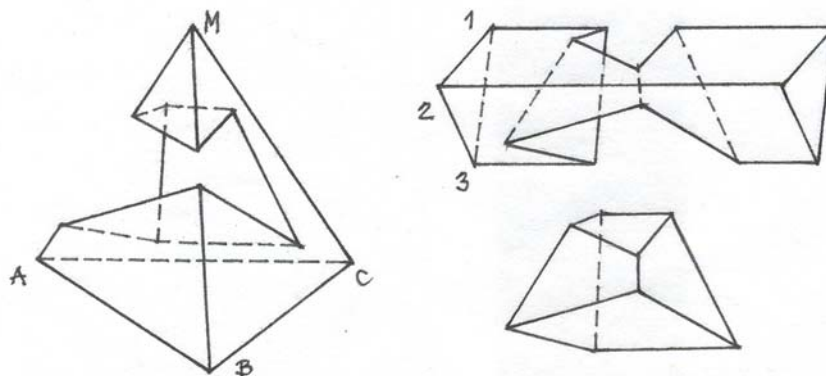
Ha két síklapú test a térben úgy helyezkedik el, hogy *van közös részük, közös pontjaik*, a síklapú testek *áthatásáról* beszélünk.

A testek egyes élei metszik a másik test egyes lapjait. A metszéspontok összekötése a felületek metszévonalai. Általában egyenes szakaszokból álló térbeli sokszöget kapunk, ez a testek *áthatási szöge*.

Az áthatásoknak két jellegzetes típusa van. Egyik esetben az egyik test átlyukasztja a másikat, ez esetben az áthatási sokszög két részből áll. A másik esetben a testek egymásba vágódnak, ekkor egyetlen sokszög keletkezik.



A testek felülete által közrezárt, mindkét test közös pontjait, *közös testnek, közös résznek* is nevezzük. Síklapú testek közös része ugyancsak síklapú test, amelyet síksokszögek határolnak. A síksokszögek oldalai és csúcsai adják az áthatási vonalat, melynek töréspontjai (csúcsai) az áthatásban résztvevő élek és határoló lapok dőléspontjai. Mindkét test ugyanazon határoló lapjára illeszkedő dőléspontok összekötése adja a zárt térsokszög egy-egy oldalát.



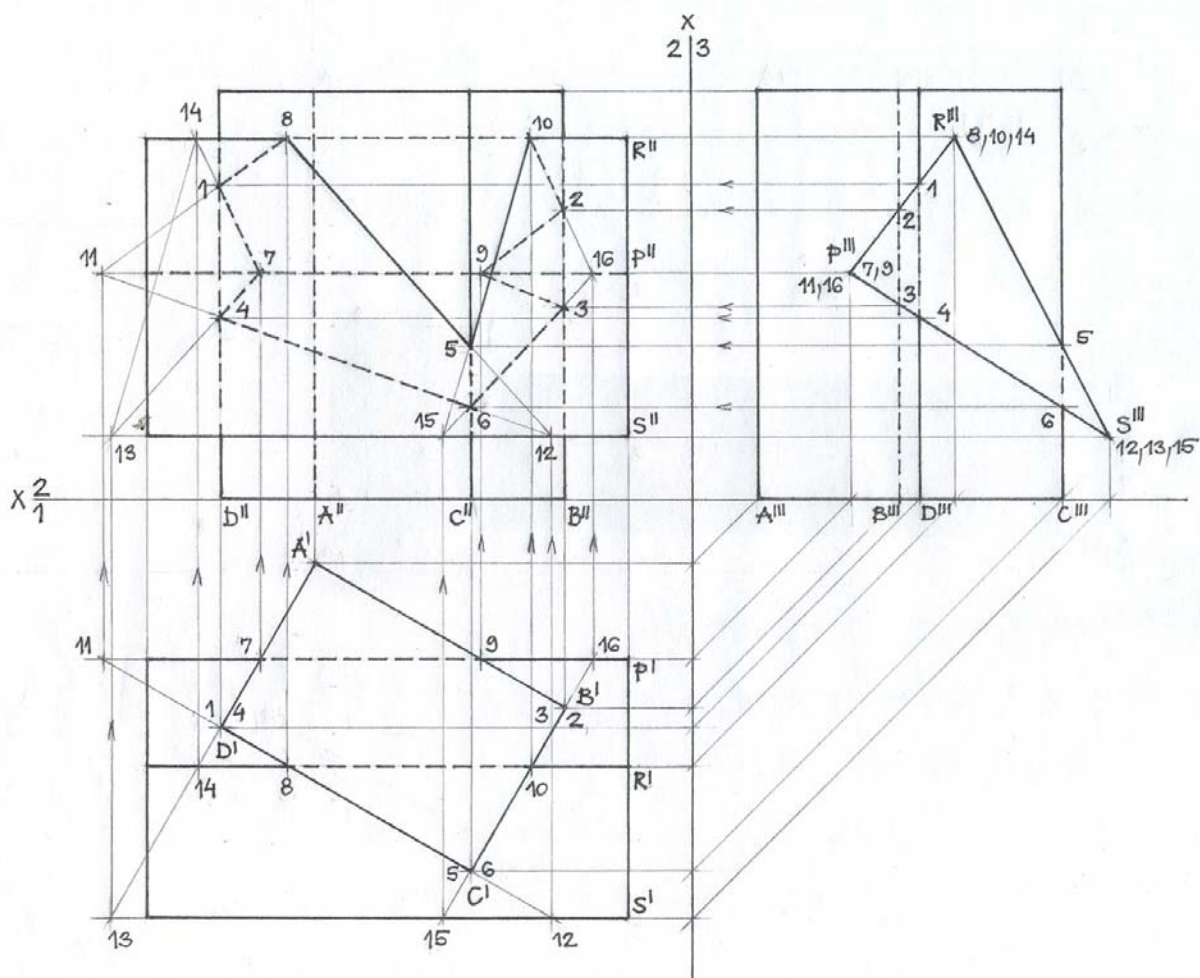
Az áthatási sokszöget úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk mindkét test élének a másik test lapjaival alkotott dőléspontjait, és a dőléspontokat a megfelelő sorrendben összekötjük. Az áthatási sokszög megszerkesztése után feltüntetjük a testek láthatóságát. Az egyes testek láthatósága mellett figyelembe kell venni azt is, hogy a testek részben egymást is eltakarhatják. Az áthatási sokszögből csak az látszik, ami mind a két testnek a látható lapján van.

Ha egy látható él a másik test nem látható lapját dőfi, akkor nem a dőféspontig látszik, hanem csak az őt eltakaró lapot határoló élen kívül.

Próbáljuk a láthatóságot először szemlélet alapján eldönteni, ha nem sikerül, használjuk a fedőpontokat.

A gúlak és hasábok áthatásának szerkesztését célszerűen megválasztott segédsíkok használatával egyszerűsíthetjük. Egy-egy segédsíkot úgy választunk meg, hogy illeszkedjen az áthatásban részt vevő testek egyikének valamelyik oldalélére, és ha a másik testet metszi, akkor abból alkotókat metsz ki. A segédsíkra illeszkedő oldalél és a kimetszett alkotók metszéspontja adja az áthatási sokszögvonal egy-egy csúcspontját. Ha a segédsík oldalélen vagy alkotón megy keresztül, gúla esetén tartalmazza a gúla csúcspontját, hasáb esetén a hasáb oldaléléivel párhuzamos.

4/1. Hasáb – hasáb áthatása I.



Adott: a két egymást metsző hasáb I., II., III. képe rendezett vetületeivel. A téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai első vetítősíkok (alaplappja illeszkedik az I. ks.-ra, oldallapjai merőlegesek az I. ks.-ra). Az öt metsző háromoldalú hasáb oldalélei merőlegesek a III. ks.-ra.

A (60; 90; 100)

B (100; 67; 100)

C (85; 41; 100)

A₁ (60; 90; 165)

P (110; 75; 136)

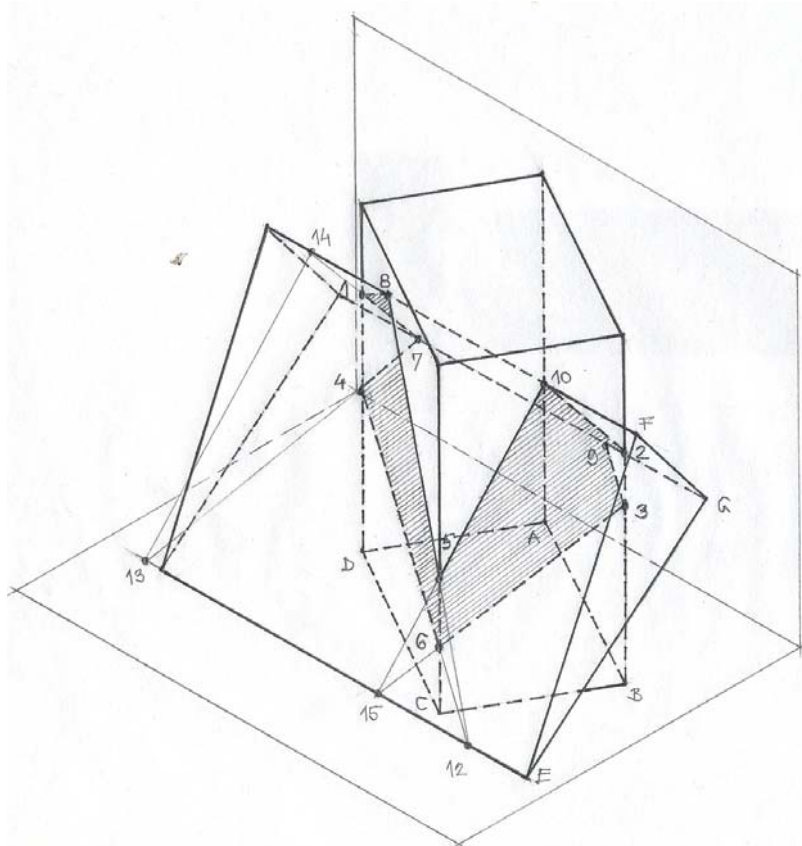
R (110; 58; 158)

S (110; 34; 110)

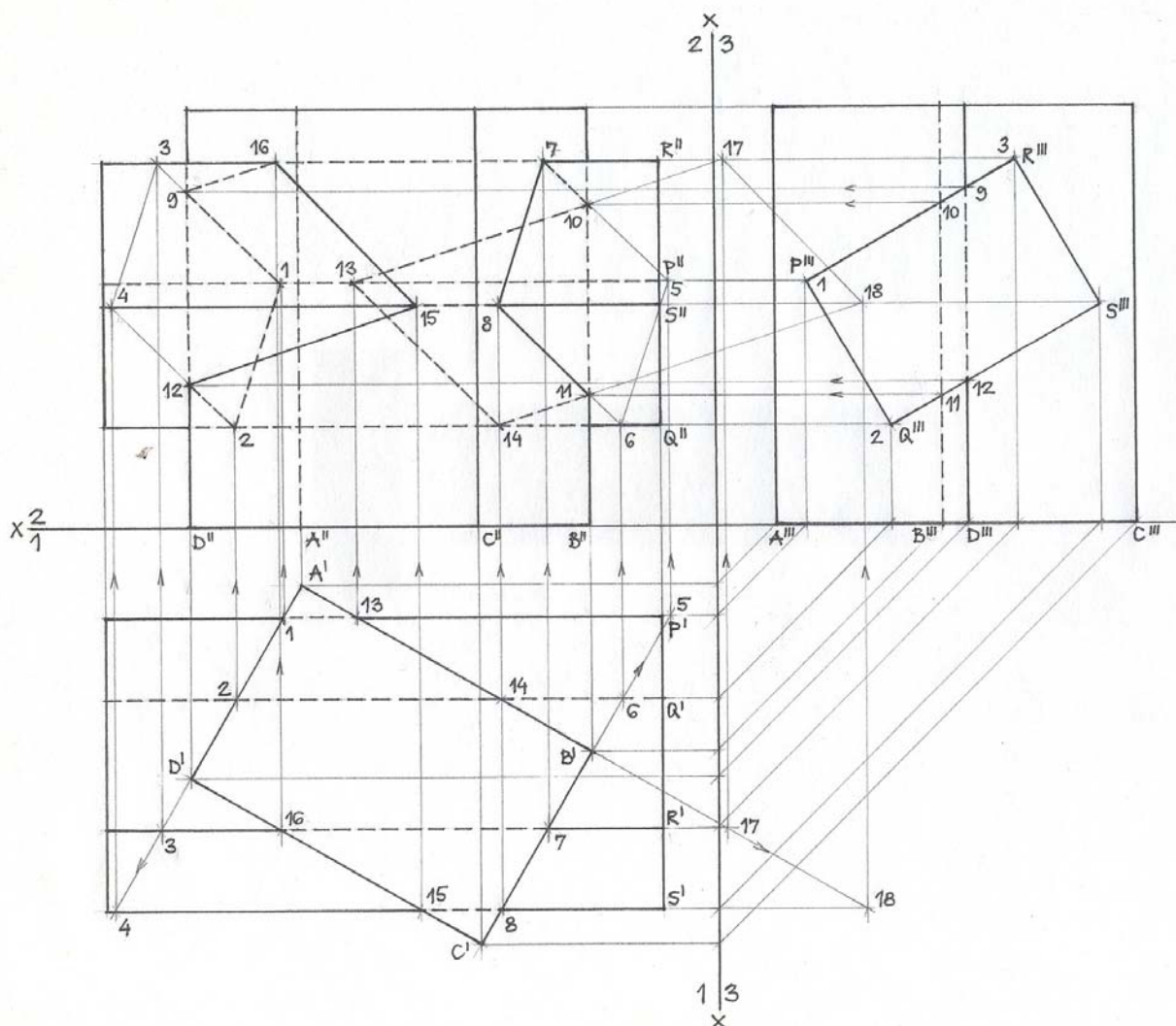
Szerkesztendő: a két hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

- A harmadik képen adva van a négyoldalú hasáb három függőleges oldalának dőléspontja a háromoldalú hasáb felületén. Ezekből a pontokból (1 – 4; 2 – 3; 5 – 6) a második képre bocsátott rendezők kitűzik a metszetek csúcsait adó pontok egy részét.
- A négyoldalú hasáb oldallapjai első vetítősíkok. Az első képen adva vannak a háromoldalú hasáb oldaléleinek a be-, és kilépő pontjai (7 – 9; 8 – 10). Rendezőkkel ezeket a pontokat is kitűzzük a második képen.
- Az egy felületre eső áthatási pontokat össze lehet kötni. Ez természetesen nem egyszerű feladat. A pontok összekötését nagy odafigyeléssel kell végezni. A metszéspontokat összekötése után meghatározzuk a láthatóságot.
- Ellenőrzés: Az első képen a négyoldalú hasáb oldallapjait mindkét irányban meghosszabbítjuk (rövidebb, hosszabb oldaléleket). A két keskenyebb oldallapnak a meghosszabbított felületét a háromoldalú hasáb minden oldaléle dőfi (7 – 14 – 13; 16 – 10 – 15). A dőléspontok az első képen adottak. A második képen a dőléspontok összekötése két egybevágó háromszöget eredményez. Ezeknek a háromszögoldaloknak fedni kell a már kihúzott metszévonalakat. Hosszabbítsuk meg a felénk forduló hosszabb oldallapot is két irányban. A háromoldalú hasáb ezt a síkot is három pontban (11 – 8 – 12) metszi, dőfi. Az első képen ez a három pont adott. Rendezőkkel a második képen kitűzve ezeket a pontokat, egy széles háromszög képét kapjuk. Ennek a háromszögnek az oldalélei is illeszkednek a hasábfelület metszévonalaira. A második képen kapott háromszögek oldalait a négyoldalú hasáb oldalélei metszik.



Az áthatás axonometrikus képe.

4/2. Hasáb – hasáb áthatása 2.

Adott: a két egymást metsző hasáb I., II., III. képe rendezett vetületeivel. Az egyik téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai első vetítősíkok (alaplappja illeszkedik az I. ks.-ra, oldallapjai merőlegesek az I. ks.-ra). Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai harmadik vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a III. ks.-ra).

Álló hasáb pontjai

A (55; 194; 198)

B (115; 158; 198)

C (92; 118; 198)

A₁ (55; 194; 295)

Fekvő hasáb pontjai

P (125; 185; 256)

R (125; 144; 280)

S (125; 128; 250)

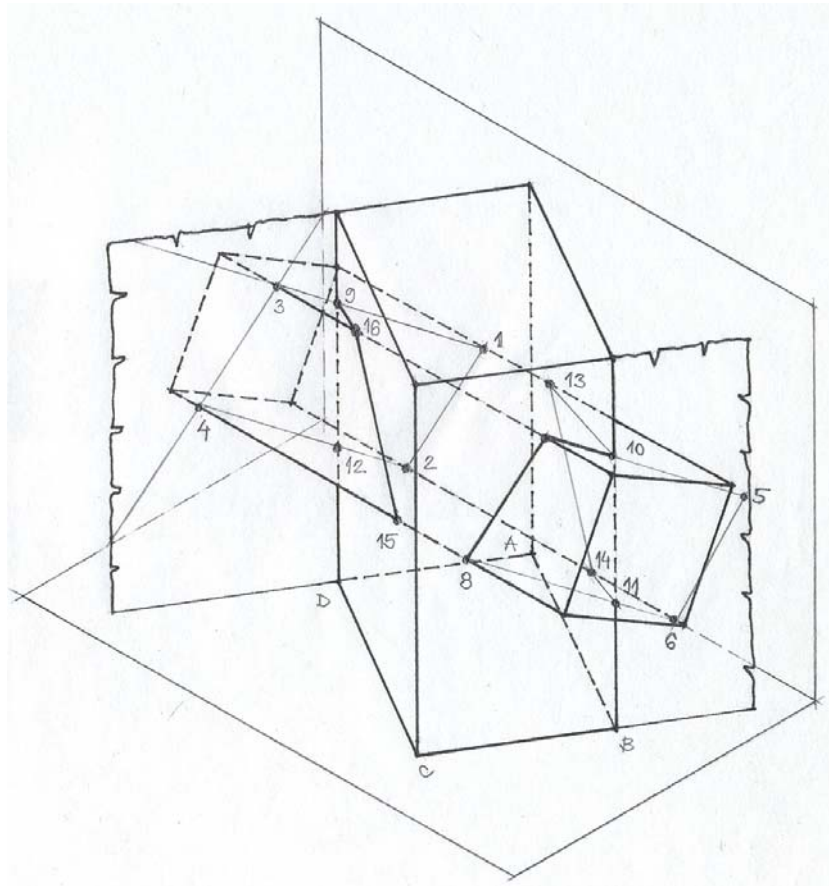
fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a két hasáb áthatása.

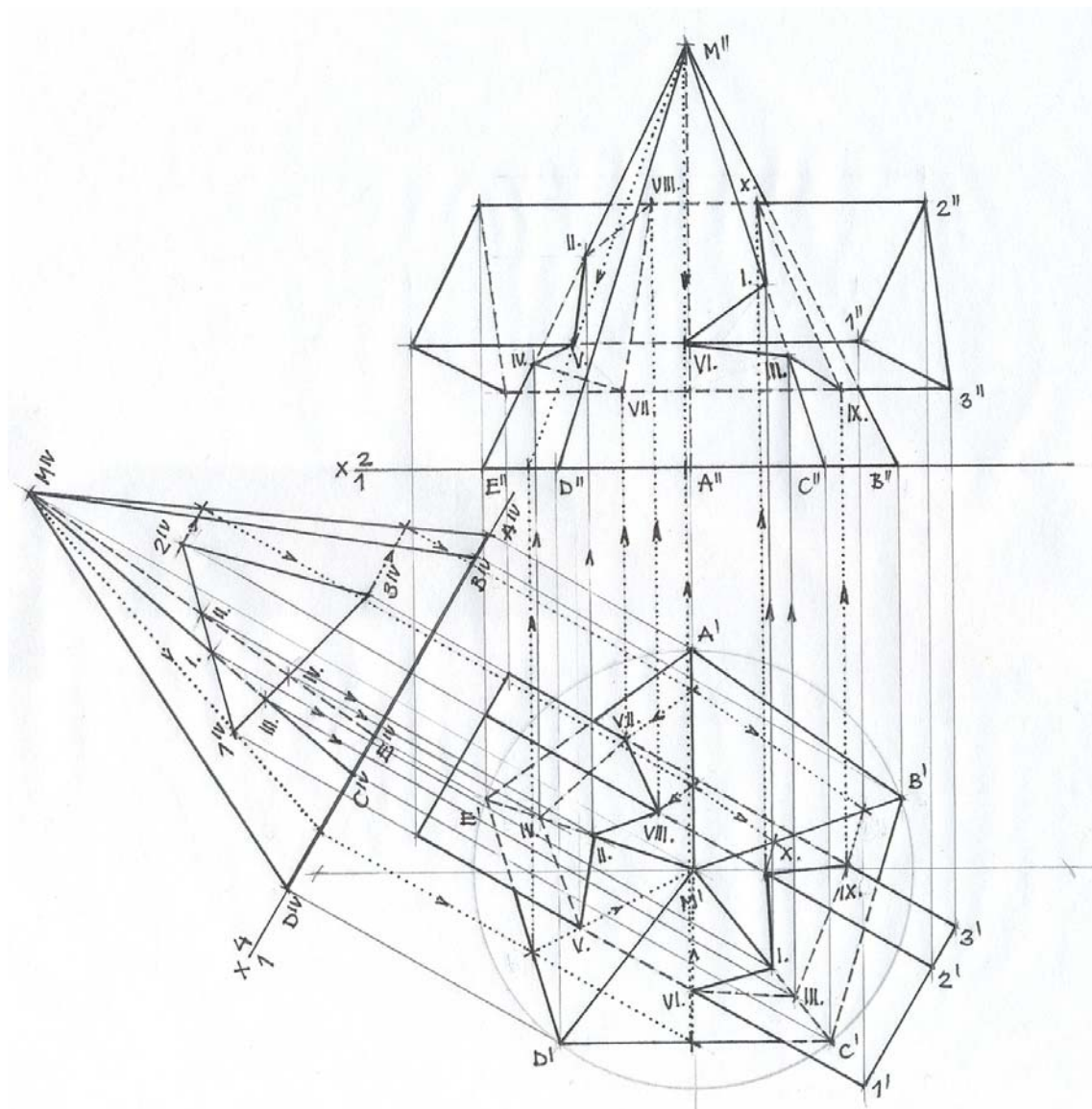
Szerkesztés menete:

- Az álló hasáb (mely alaplapjával az I. ks.-ra illeszkedik) két függőleges éle behatol a fekvő hasáb felületeibe. A fekvő hasáb harmadik képén, az oldallapok egyenes vetületein ez a négy pont adott (9; 10; 11; 12). Rendezőkkel ezek a pontok a második képen kitzúzhatók, A B' és D' pontokra állított függőleges éleken. A másik két függőleges él nem metszi a hasábot.

- Az álló hasáb oldallapjai első vetítősíkok. Képük az első képen egyenes, ott kapjuk közvetlenül a fekvő hasáb oldaléleinek be-, és kilépő pontjait (1 – 13; 2 – 14; 16 – 7; 15 – 8). A második képüket e pontokra állított rendezőkkel kapjuk.
- Az egy felületre eső áthatási pontokat össze lehet kötni. A pontok összekötését nagy odafigyeléssel kell végezni, majd a láthatóságot meg kell határozni.
- Ellenőrzés: Ellenőrizzük a kialakuló éleken megtörő metszésvonalakat. Terjesszük ki az álló hasáb felületeit az I. ks.-on olyan nagyra, hogy törésmentes szelvényeket kapjunk. A jobboldali keskenyebb oldallapba befűrődik az R', S' pontra illeszkedő hasáb oldalél. Az áthatási pontokat 7-es, 8-as szám jelöli. A másik két él csak a kiterjesztett oldalfelületen hatol át. A pontok szám jele 5 és 6. Ha a kapott pontokat összekötjük egy paralelogramma szelvény második képét kapjuk (5; 6; 7; 8), mely illeszkedik a jól rajzolt metszésvonalakra. Ugyanígy megrajzolhatjuk a szemben lévő függőleges felületen az előbbivel egybevágó paralelogramma szelvényt is. Ennek csúcsait 1-es; 2-es; 3-as; 4-es számok jelölik. Kiterjeszthető a két szélesebb hasábfelület is. Újabb paralelogramma szelvényeket kapunk, melyek az előbbieket a függőleges oldalélekben metszik.



Az áthatás axonometrikus képe.

4/3. Gúla– hasáb áthatása.

Adott: a szabályos ötszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. Az ötszögalapú gúla alaplappal az I. ks.-on áll, az egyenlő oldalú háromszög alapú, egyenes hasáb oldalélei az első képsíkkal párhuzamosak.

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

- A hasáb az I. és II. ks.-on is általános helyzetű, ezért IV. ks. segítségével szerkesztjük meg az áthatást.
- A IV. ks. tengelyét úgy választjuk meg, hogy a hasáb oldalélei merőlegesek legyenek rá, vagyis oldallapjai negyedik vetítő helyzetű síkok legyenek.. Itt a hasáb képe egy egyenlő oldalú háromszög lesz.
- A gúla C^{IV} oldaléle metszi, dőfi a hasáb 1 – 2 alapélére illeszkedő oldallapját (I.-es pontban) és az 1 – 3 alapélre illeszkedő oldallapját is (III.-as pontban).

- A gúla E^{IV} oldalélei is metszi az előző két oldallapot (II.-es és IV.-es pontok).
- Ezeket a metszéspontokat (döféspontokat) megszerkesztjük az I. ks.-ban a C' és E' gúla oldalélekre, illetve a II. ks.-ban is meg tudjuk határozni.
- A hasáb 1^{IV} -es oldaléle viszont metszi (döfi) a gúla $D^{IV}C^{IV}M^{IV}$ és $D^{IV}E^{IV}M^{IV}$ oldallapját. Ezeket a döféspontokat alkotó segítségével szerkesztjük meg. Az M^{IV} és 1^{IV} pontok összekötése megadja az alkotót, mely metszi a gúla $D^{IV}C^{IV}$ és $E^{IV}D^{IV}$ alapélét. Megszerkesztjük az alkotók I. ks.-beli nézetét. Itt az alkotók és a hasáb $1'$ -es élének metszéspontjai (V.-ös és VI.-os pontok) megadják a hasáb $1'$ -es oldalélének a gúla oldallapjain be-, és kilépő pontjait. II. ks.-on is megszerkesztjük az alkotók nézetét, itt is a hasáb $1''$ -es oldalélével való metszéspont megadja a két döféspontot.
- A hasáb 2^{IV} -es és 3^{IV} -as oldalélének döféspontjait a gúla oldallapjain az I. ks.-kal párhuzamos segédsíkok alkalmazásával szerkesztjük meg. Ha a hasáb 2^{IV} -es és 3^{IV} -as oldalélén keresztül fektetünk egy-egy metszősíkot, akkor a gúla A^{IV} -es oldalélét egy-egy pontban metszi. Az első képsíkban tudjuk ennek a két élnek a gúlával alkotott döféspontját megszerkeszteni. Rendezőkkel kitűzzük az A' oldalélen ezt a két metszéspontot. Ha képzeletben a gúlát ebben a két magasságban elmetszenénk, akkor az első képsíkban a metszetük szabályos ötszöget adna, csak az alaplapoz képest arányaiban kisebbet, vagyis az alaplap oldaléleivel párhuzamosak lennének. Az A' -től az $A'E'$ alapéllal párhuzamosan megrajzoljuk a vetítő egyeneseket a $2'$ és $3'$ oldalélekig (VII.-es és VIII.-as pontok). Ugyanígy az $A'B'$ alapéllal párhuzamosan is megrajzoljuk a vetítő egyeneseket, de a B' oldalél nem metszi a hasábot, ezért a vetítő egyeneseket tovább kell rajzolni a $B'C'$ alapéllal párhuzamosan itt is a $2'$ -es és $3'$ -as oldalélekig (IX.-es és X.-es pontok). Ezután megszerkesztjük a II. ks.-ban is ezeket a pontokat.
- Mindkét képsíkon, I. és II. ks.-on a pontok összekötésével megkapjuk a két test áthatási sokszögét, láthatóságot is eldöntve kihúzzuk és megoldott a feladat.

4/4. Gúla- hasáb áthatása.

Adott: a szabályos háromszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. A gúla alaplapjával az I. ks.-on áll. Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai második vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a II. ks.-ra).

Gúla pontjai

A (19; 115; 154)

B (145; 138; 154)

M (- ; - ; 264)

Fekvő hasáb pontjai

1 (53; - ; 227)

2 (119; - ; 244)

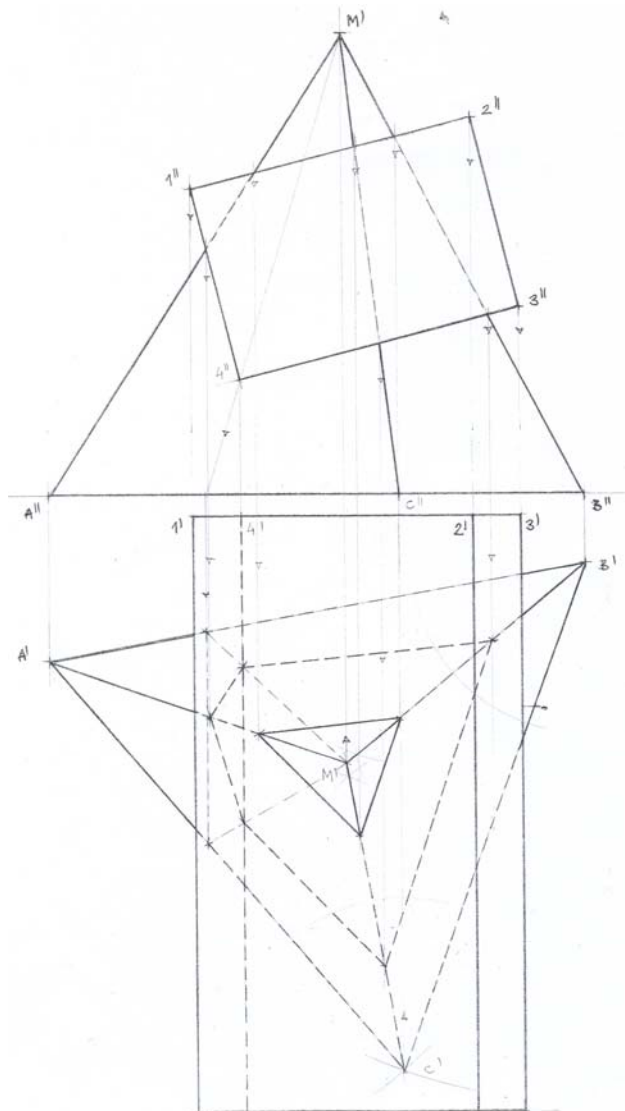
3 (130; - ; 199)

fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete:

Az előző feladatok alapján az ábráról leolvasható.



4/5. Gúla– hasáb áthatása.

Adott: a szabályos ötszög alapú gúlát metsző hasáb I., II., képe rendezett vetületeivel. A gúla alaplapjával az I. ks.-on áll. Az öt metsző téglalap alapú, egyenes hasáb oldallapjai második vetítő helyzetű síkok (oldalélei merőlegesek a II. ks.-ra).

Gúla pontjai

A (169; 141; 166)

M (199; 95; 258)

Fekvő hasáb pontjai

1 (182; 154; 176)

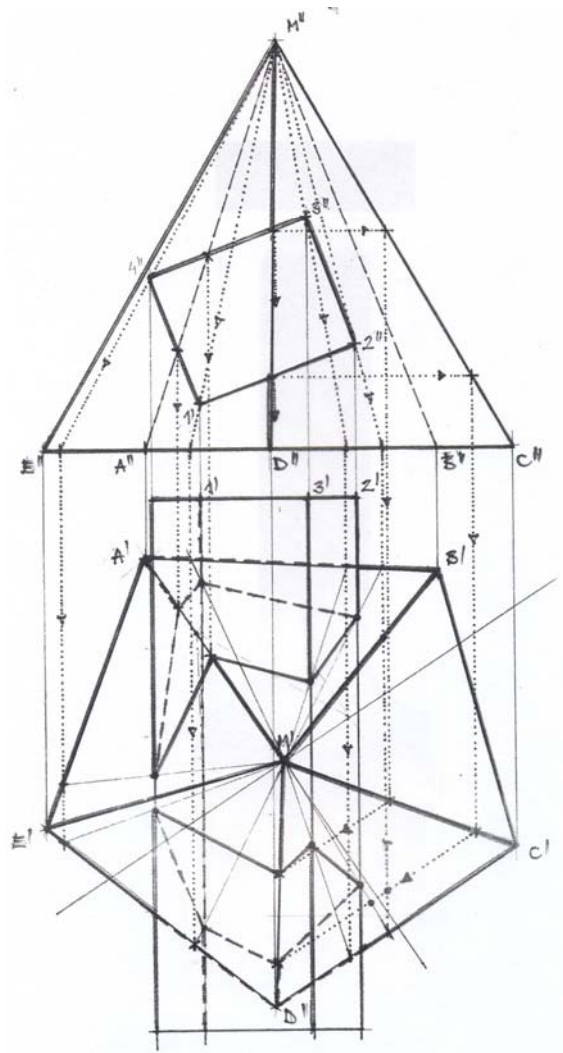
2 (217; 154; 189)

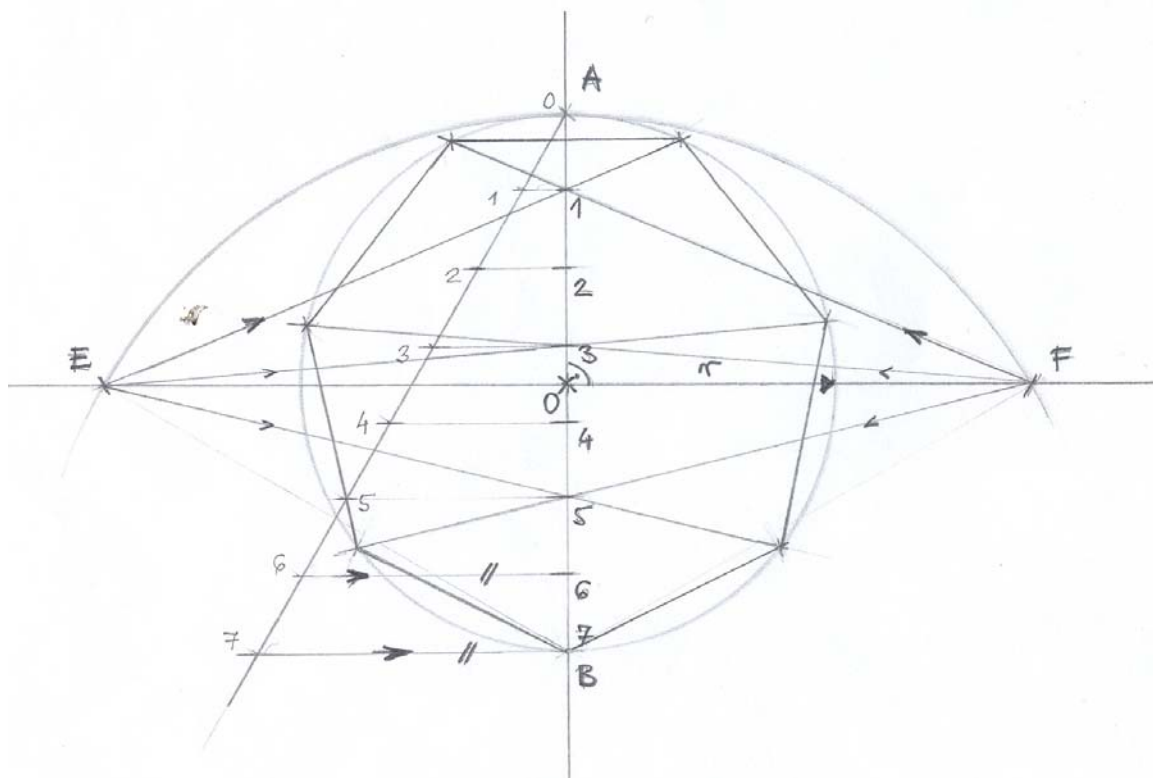
3 (206; 154; 218)

fekvő hasáb hossza nincs megadva

Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása.

Szerkesztés menete: Az előző feladatok alapján az ábráról leolvasható.

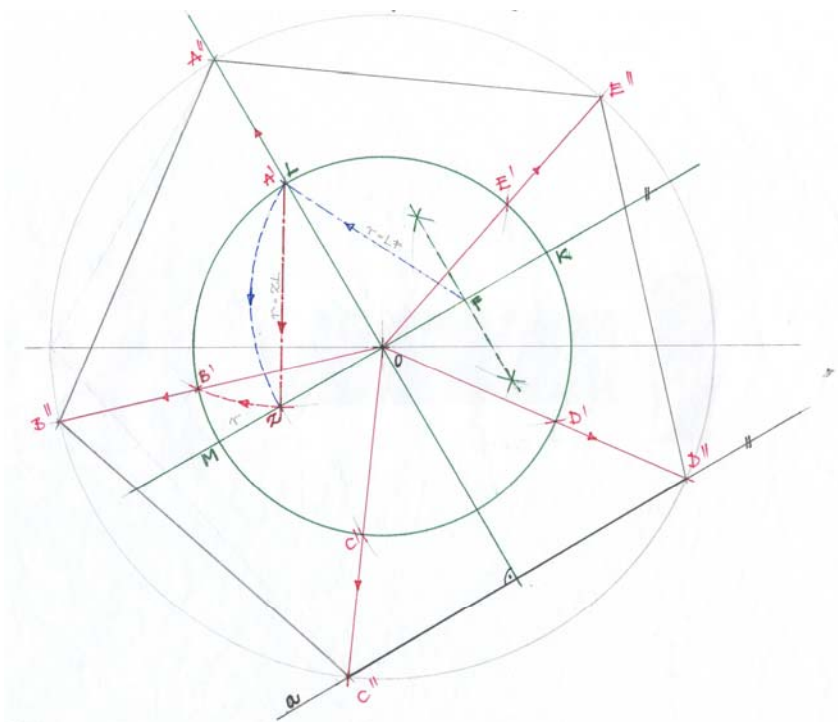


4/6. Páratlan oldalú szabályos sokszög szerkesztése.**Szerkesztés menete:**

- Fekvő A/4-es lap közepére rajzoljunk két egymásra merőleges tengelyt és egy tetszőleges sugarú kört **O** középponttal. Itt most egy **szabályos 7 szög** szerkesztését mutatja be a feladat, de bármilyen páratlan számú (5, 7, 9, 11, 13, stb.) sokszög ugyanígy megszerkeszthető.
- Graduáljuk a függőleges átmérőt. A függőleges átmérő **A** pontjából húzzunk egy tetszőleges egyenest. Erre az egyenesre mérjük fel hét egységet, a hetedik egység végét kössük össze a függőleges átmérő **B** pontjával. Ezzel az egyenessel párhuzamos egyeneseket rajzolunk a tetszőleges egyenesen lévő osztásokból az átmérőre (**A** és **B** szakaszra).
- A **B** pontból körzőnyílásba vesszük **A** szakasz hosszát, ezzel a sugárral körívet rajzolunk, a vízszintes átmérő meghosszabbított egyenesén kapunk két metszéspontot **E** és **F** pontokat.
- Az **E** pontot kössük össze az átmérő **1** jelű osztásával, a körön a jobboldalon kapunk egy metszéspontot. Kössük össze az **F** pontot is az **1** jelű ponttal, a kör baloldalán is kapunk egy metszéspontot. Minden második osztással (**3**, **5**) végezzük el ugyanezt a lépést.
- A körön kapott metszéspontok összekötésével megkaptuk a kívánt páratlan számú szabályos sokszöget, itt most a szabályos hét szöget.
- Ha a páros számú osztásokat (**2**, **4**, **6**) kötjük össze az **E** és **F** pontokkal, akkor az **A** pont adja a sokszög egyik csúcspontját.

4/7. Szabályos ötszög szerkesztése.

Adott: a szabályos ötszög középpontja és az „a” egyenes, amelyre illeszkedik az ötszög egyik oldalélé.



Szerkesztés menete:

- Rajzoljunk az „a” egyenesre egy merőleges egyenest az **O** pontból, ez lesz az ötszög köré írható kör egyik átmérője. Erre az átmérőre rajzoljuk meg a merőleges másik átmérőt.
- Az **O** középponttal rajzoljunk egy tetszőleges sugarú kört. Az „a” egyenessel párhuzamos átmérőn kaptunk két pontot, **M** és **K** pontokat.
- Az **O** és **K** pontok közötti sugárnak szerkesszük meg a felezőjét, **F** pont. **F** pontból körzőnyílásba vesszük a rá merőleges átmérő **L** pontját, és ezzel a sugárral rajzolunk egy körívet, mely az **MK** átmérőt **z** pontban metszi.
- Az **L** pontból körzőnyílásba vesszük a **z** pontot, és ezzel a sugárral rajzolt körív metszi a kört **B'** pontban. Az **L** és **z** szakasz hossza a tetszőleges körhöz szerkeszthető szabályos ötszög oldalélének hossza.
- Megszerkesztjük a tetszőleges sugarú körhöz a szabályos ötszöget, azaz elég a körön az öt csúcspont kijelölése **A'**; **B'**; **C'**; **D'**; **E'**.
- A **C'** és **D'** ötszög csúcspont meghosszabbítjuk, úgy hogy az adott „a” egyenessel metsződjenek, ezek megadják a **C''** és **D''** pontokat.
- Az **O** és **C''** illetve az **O** és **D''** szakasz hossza a szerkesztendő ötszög köré írható kör sugara. Tehát **O** pontból körzőnyílásba véve a **C''**, vagy **D''** pontot, ezzel a sugárral megrajzoljuk a kört.
- Az **O** és **A'** ponton keresztül húzott egyenes megadja a körön az **A''** pontot, ugyanígy kijelöljük a **B''** és **E''** pontokat. A **C''** és **D''** közötti szakasz az ötszög egyik oldaléle, a többi pontot is összekötve megszerkesztettük a keresett ötszöget.

6. házi feladat: Gúla hasáb áthatása

Adott: szabályos ötszög alapú gúla alaplapjának egyik csúcspontja (A), a gúla magassága (M), és a hasáb alaplap csúcsai (1; 2; 3).

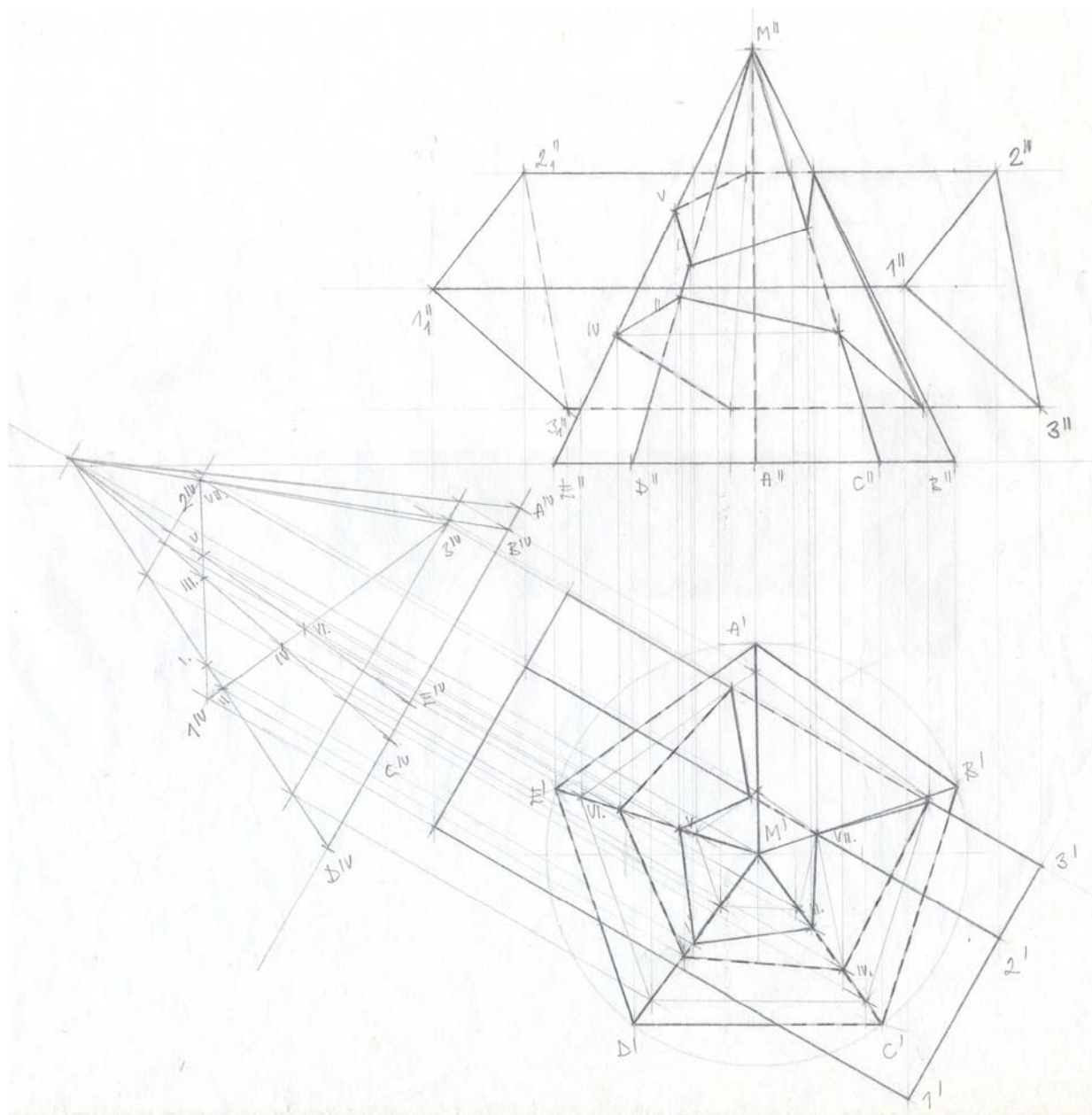
Szerkesztendő: a gúla és a hasáb áthatása, ha a gúla alaplapjával illeszkedik az első képsíkra, a hasáb oldalélei párhuzamosak az I. ks.-kal.

Hasáb

1 (148; 48; 205)
 2 (168; - ; 230)
 3 (175; 94; 183)

Gúla

A (130; 141; 178)
 M (130; 100; 255)



Két gúla esetén tehát minden segédsík illeszkedik a gúlák csúcspontjaira, s így közös egyenesük a két gúla csúcspontot összekötő egyenes, mely sorozván a segédsíkokat *sorozóegyenesnek* nevezzük.

Gúla és hasáb esetén a sorozóegyenes a gúla csúcspontján megy át és a hasáb oldaléleivel párhuzamos.

Két hasáb esetén, a hasábok végtelenben fekvő csúcspontjára illeszkedő, végtelenben fekvő egyenes. A végtelenben fekvő egyenesre illeszkedő segédsíkok egymással és a hasábok oldaléleivel párhuzamosak.

A segédsíkok tartóegyeneseit úgy választjuk meg, hogy az egyik tartóegyenes a sorozóegyenes, a másik tartóegyenes a gúlának, illetve a hasábnak azon oldaléle legyen, melynek a dőféspontjait éppen meg akarjuk szerkeszteni.

A segédsíkok a gúla illetve a hasáb alaplapját olyan egyenesekben metszik, melyeknek van egy közös pontjuk. Ez a pont a sorozóegyenes és az alaplap síkjának dőféspontja (**S**). A metszésvonal másik pontja a testek alapszögének az a csúcspontja, melyre az éppen vizsgált oldalél illeszkedik, itt most az „**A**” pont. Az „**SA**” összekötése