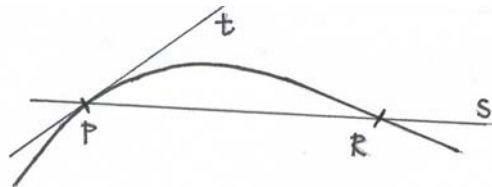


9. heti előadás

1.5.6. GÖRBE VONALAK, KÖR VETÜLETE

A görbe vonal olyan egy dimenziós alakzat, hogy a rajta mozgó pontnak bármely kettő, közvetlenül egymás melletti helyzetében a mozgásiránya különböző. Egy görbe két pontjának pl. P és R összekötő egyenese a *szelő*.



Ha egy görbe minden pontja ugyanarra a síkra illeszkedik, akkor *síkgörbéről*, ezen feltétel hiánya esetén *térgörbéről* beszélünk.

1. Kör ábrázolása, vetülete:

A kör *síkgörbe*. Minden pontja és érintője egy síkban van a görbe síkjában. Ezért a kör pontjainak és érintőinek képeit is megszerkeszthetjük úgy, hogy a kör síkját lefordítjuk, a lefordításban megrajzoljuk a kört, a pontjait és érintőit onnan visszafordítjuk.

A kört a térben három jellemzője határozza meg:

- síkja
- középpontja
- sugara.

A kör *vetülete ellipszis*. A kör középpontjának vetülete a képellipszis középpontja, a kör pontjainak vetületei a képellipszis pontjai, a kör átmérőinek vetületei a képellipszis átmérői lesznek.

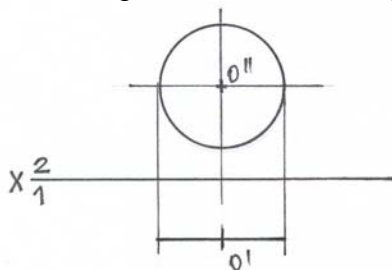
Általános helyzetű síkban fekvő kör átmérői a képsíkhhoz különböző szögben hajolnak, vetületben különböző mértékben rövidülnek. Ha van egy olyan átmérő, amely valamelyik képsíkkal párhuzamos, ez azon vetületben nem rövidül, a vetületátmérők közül a leghosszabb lesz. Ez az átmérővetület lesz az *ellipszis nagytengelye*. Az erre merőleges átmérő rövidül a legnagyobb mértékben, ez lesz az *ellipszis kistengelye*.

Elsősorban a tengelyek megszerkesztésére törekszünk, mert a tengelyek ismeretében síkmértani módszerrel az ellipszispontok sokaságát szerkeszthetjük meg.

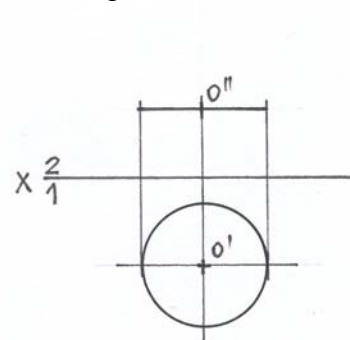
a.) Képsíkkal párhuzamos síkú kör ábrázolása:

Ebben az esetben a legegyszerűbb az ábrázolás

II. ks.-kal párhuzamos a kör síkja



I. ks.-kal párhuzamos a kör síkja



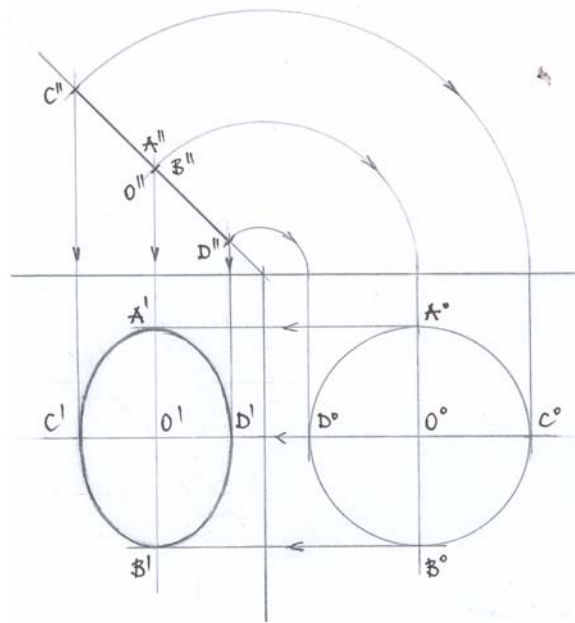
Mindkét esetben azon a képsíkon, amelyikkel párhuzamos a síkja, az eredetivel azonos sugarú kör a vetülete. A másik vetülete egyenes szakasz lesz, melynek hossza a kör átmérőjével megegyező.

b.) Vetítősíkban fekvő kör ábrázolása:**b/1. Forgatással szerkesztve.**

Ez esetben is az egyik vetülete a körátmérő hosszúságú *szakasz*, a másik képe *ellipszis*. A kör középpontjának vetülete a képellipszis középpontja, a kör pontjainak vetületei a képellipszis pontjai. A kör átmérőinek vetületei a képellipszis átmérői lesznek.

Az ábrán egy a II. ks.-ra merőleges síkban fekvő kör képét szerkesztettük meg. A kör II. képe körátmérő hosszúságú egyenes szakasz. A kör középpontjának II. képe a szakaszt felezi. A kör egyikátmérője párhuzamos a II. ks.-kal, képe egybe esik a kör vetületének képével, a rá merőleges átmérő ennek következtében a II. ks.-ra merőleges egyenes lesz, melynek képe az O'' pont.

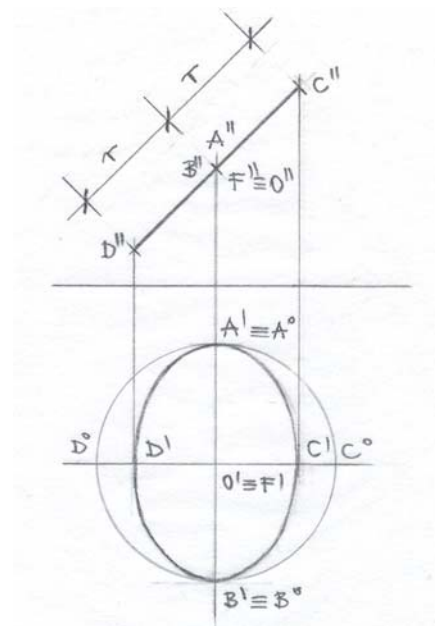
A II. ks.-ra merőleges síkot, a II. ks.-ra merőleges t egyenesre körül az I. képsíkkal párhuzamos helyzetbe fordítjuk. Az O pont lefordítottját az O' -ből a t' forgástengelyre bocsátott merőlegesen találjuk meg. A forgástengelytől olyan messze van, amilyen messze a valóságban is van. Ezt a távolságot a második képen látjuk eredeti nagyságban. A forgatott képen megrajzoljuk a kört. A kör $A'B'$ átmérője párhuzamos a forgástengellyel, eredeti nagyságban látszik, az első képen a *képellipszis nagytenyelyét* szerkesztettük meg. A $C'D'$ átmérő a forgástengelyre merőleges, a II. ks.-kal párhuzamos, ezért a II. képen valódi nagyságban látszik. Első ks.-ban hossza a vetületével azonos, így a $C'D'$ szakasz az I. ks.-ban a *képellipszis kistengelye* lesz.

**b/2. Forgatás nélkül szerkesztve.**

Forgatás nélkül is megszerkeszthető a képellipszis kis-, és nagytenyelye. Az ábrán ilyen szerkesztést láthatunk.

Forgatás segítségével a kör tetszőleges pontjainak vetületét, az ellipszispontokat is megszerkeszthetjük.

Elegendő azonban a kis-, és nagytenyely ismerete, mert ezek ismeretében az ellipszispontokat síkmértani szerkesztéssel meghatározhatjuk.

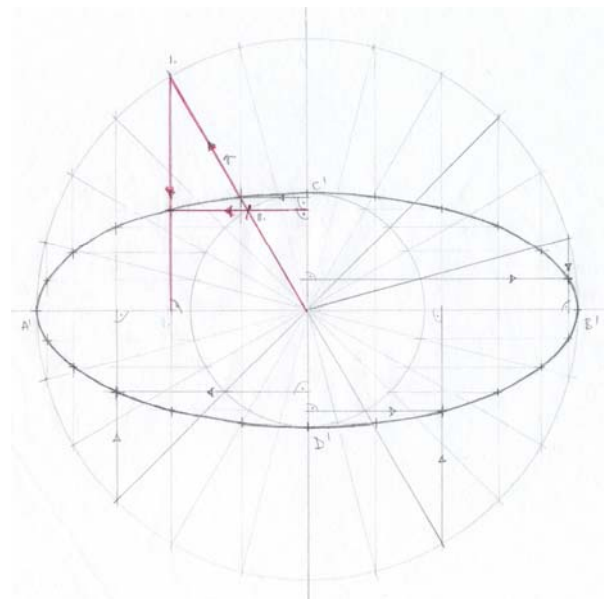


c.) Ellipszis szerkesztése.

A nagy- és a kistengely fölé, mint átmérők fölé rajzolt körök segítségével szerkesztünk ellipszispontokat.

A körben tetszőleges sugarakat rajzolunk, ez metszi a nagy és a kis kört. A nagykörrrel alkotott metszéspontokon át a nagytenyelyre, a kis körrel alkotott metszéspontokon át a kistengelyre merőleges egyeneseket rajzolunk, ezek metszéspontjai az ellipszis pontjai. Ha ezeket összekötjük megkapjuk az ellipszist.

Minél több sugarat rajzolunk annál jobban kirajzolódik az ellipszis.

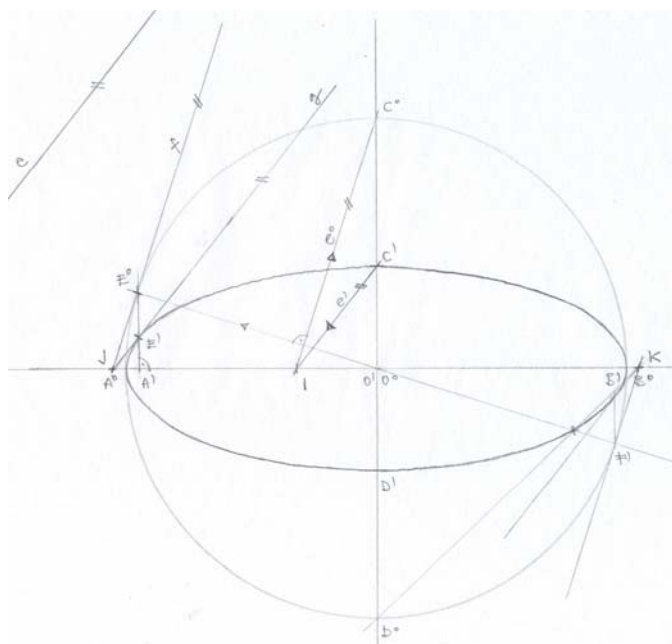


c/1. Ellipszishez adott egyenessel párhuzamos érintők szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytenyelyével és egy általános helyzetű e egyenes.

Szerkesztés menete:

- A kistengely C' végpontján át rajzolunk az e egyenessel párhuzamos egyenest (i'). Ez az egyenes a forgástengelyt H' pontban metszi. Az egyenes forgatottja $H'\Xi H^0$ és a C^0 pontokat összekötő egyenes (i^0).
- Ezzel (i^0) az iránnyal párhuzamosan megszerkesztjük a körérintőket, és visszaforgatjuk.
- Az i^0 -al párhuzamosan megszerkesztett érintő metszi a forgástengelyt H_1' és H_2' pontokban.
- A $H_1'T_1'$ és $H_2'T_2'$ pontok által meghatározott egyenesek az ellipszishez húzott érintők, melyek az adott e egyenessel párhuzamosak.

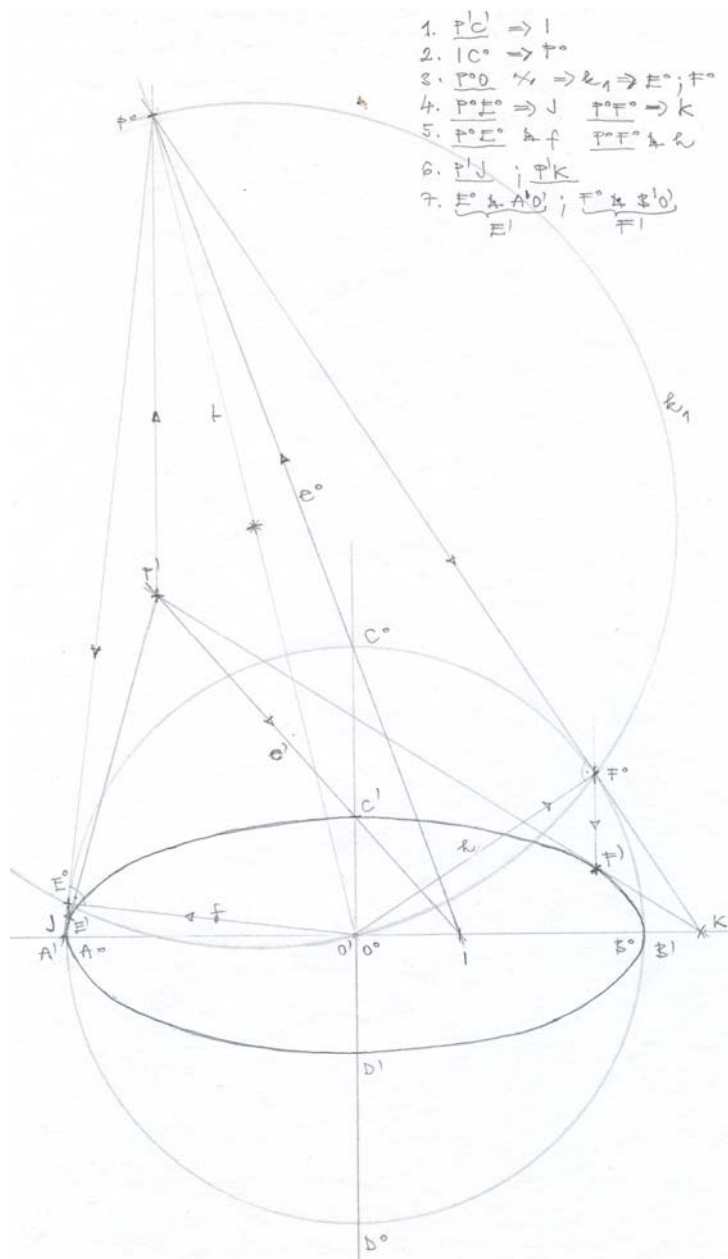


c/2. Ellipszishez rajta kívül eső pontból érintők szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytengelyével és a P pont képe.

Szerkesztés menete:

- A kistengely C' pontjának megszerkesztjük a forgatott képét C^0 ($A'O'$ sugarú körív).
- P' pontot összekötjük a C' ponttal. Az összekötő egyenes H' pontban metszi a forgástengelyt, forgatott képe a $H' \equiv H^0$ és a C^0 pont összekötése adja. Ezen az egyenesen lesz a P^0 pont.
- A P^0 pontból a körhöz húzott két érintő t_1^0 és t_2^0 kimetszi a forgástengelyen a H_1 és a H_2 pontokat.
- A $H_1' P'$ illetve a $H_2' P'$ egyenes lesz az adott ellipszishez a P' pontból húzott két érintő képe.

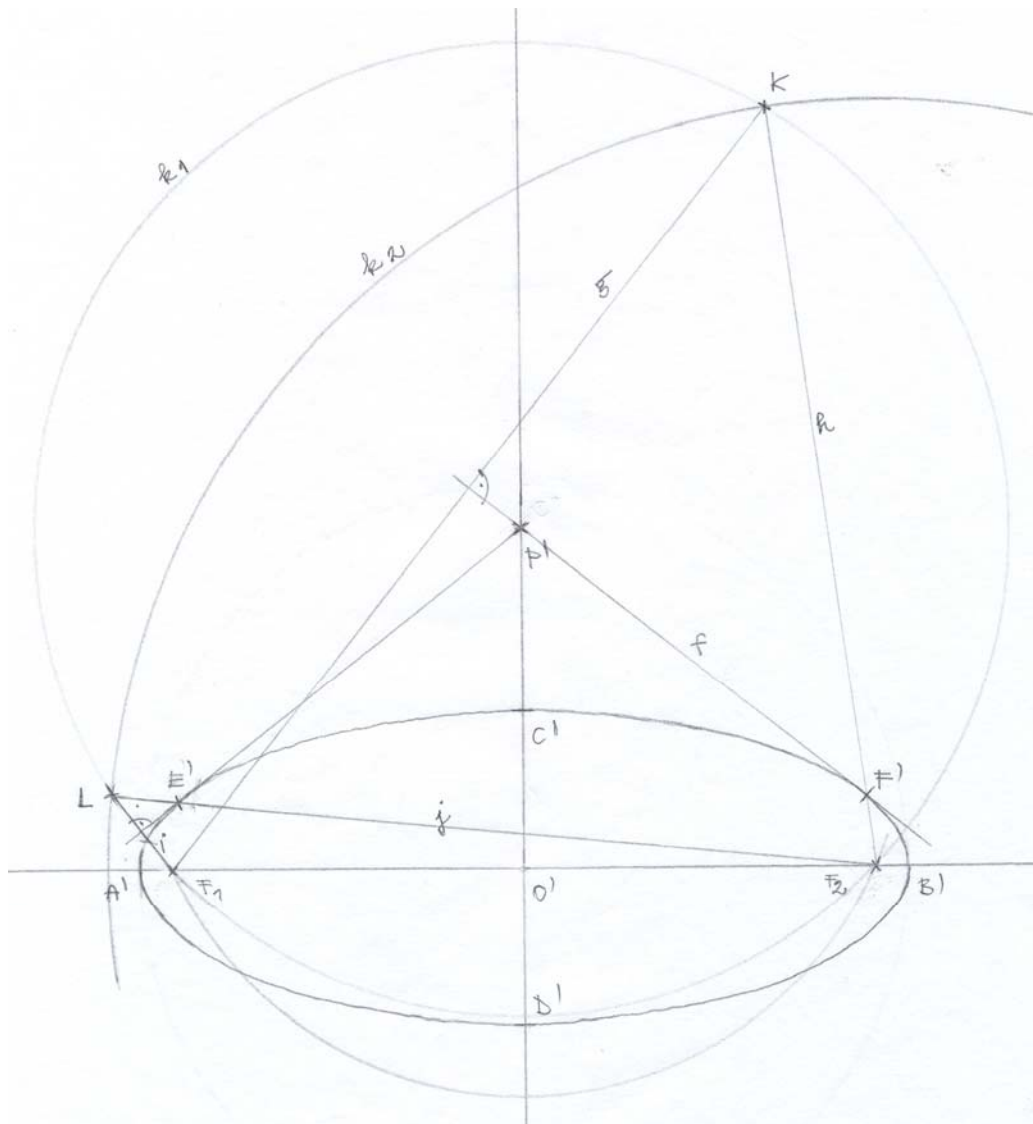


c/3. Ellipszishez kistengelyén lévő pontból érintők szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytengelyével és a **P** pont képe.

Szerkesztés menete:

- $A'O' \equiv B'O'$ sugárral a kistengely C' pontjából körívet rajzolunk, ez metszi az $A'B'$ ellipszis nagytengelyét F_1 és F_2 pontokban.
- A $P'F_1 \equiv P'F_2$ sugárral (k_1 körív) a P' pontból szintén kört rajzolunk.
- F_2 pontból $A'B'$ sugárral rajzolt körív (k_2), metszi a k_1 kört L és K pontokban.
- A K pontot F_1 -gyel összekötve megkapjuk a g egyenest, K pontot F_2 -vel összekötve a h egyenest.
- Az L pont és F_1 összekötésével az i egyenest, az L és F_2 összekötésével a j egyenest kapjuk meg.
- A P' pontból merőlegest húzunk g egyenesre, illetve az i egyenesre. Ez a két merőleges metszi j egyenest E' , illetve a h egyenest F' pontokban. Ez a két pont E' és F' az ellipszis érintőpontjai, a két egyenes e' és f' pedig a P' pontból az ellipszishez húzott érintők.

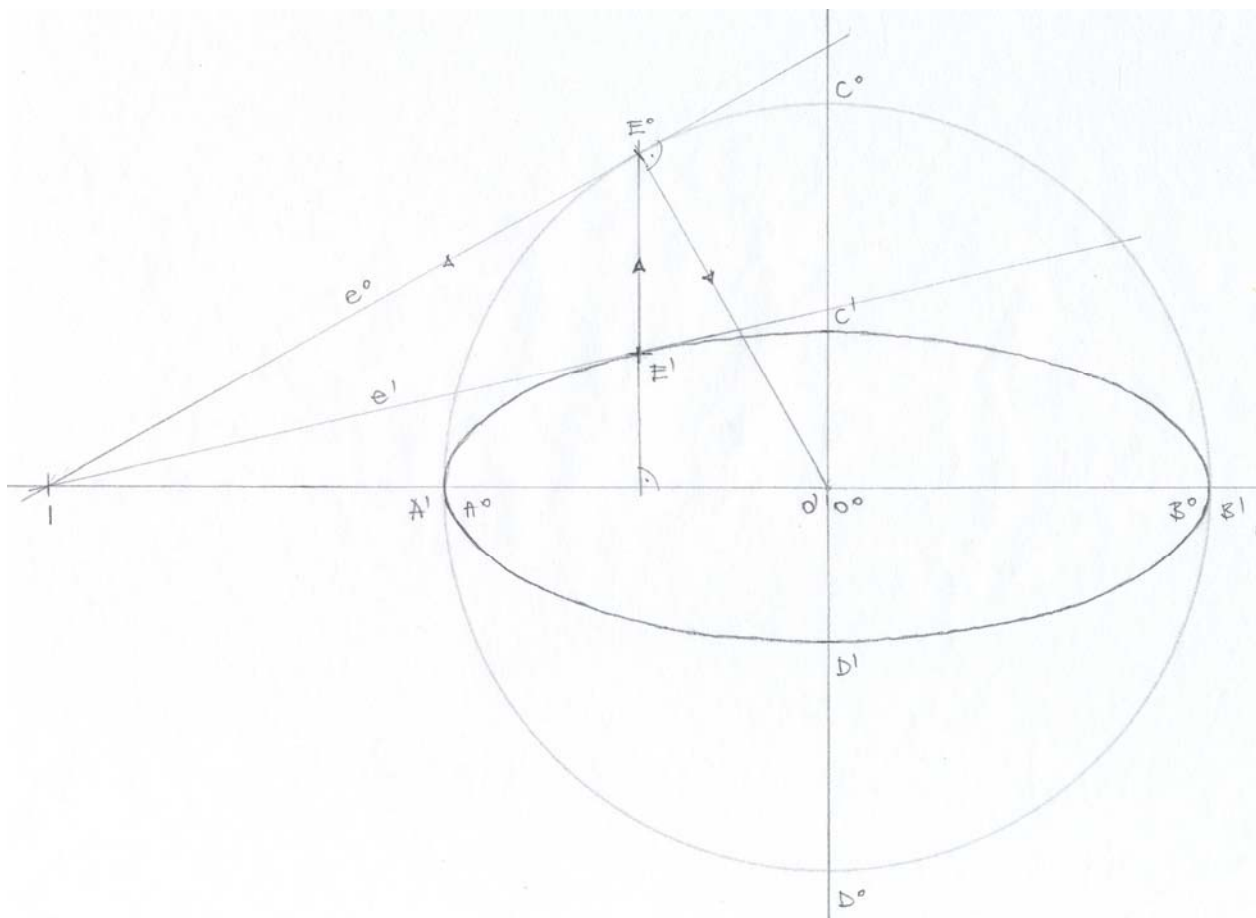


c/4. Ellipszis adott pontjához érintő szerkesztése.

Adott: az ellipszis kis-, és nagytengelyével és a E' pont képe.

Szerkesztés menete:

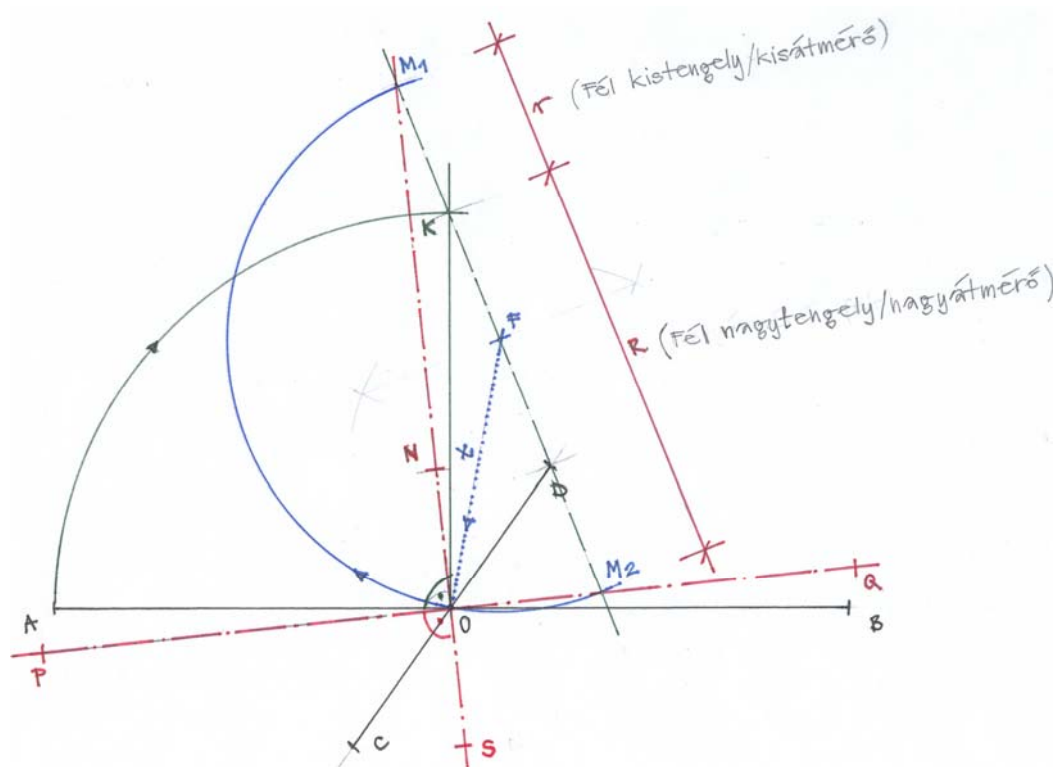
- Megszerkesztjük E' forgatott képét E^0 -t.
- E^0 és O pontokat összekötjük, erre az egyenesre merőlegest rajzolunk az E^0 ponton keresztül (körhöz húzott érintő), ez a merőleges egyenes e^0 az érintő forgatott képe. Ez metszi az ellipszis nagytengelyének egyenesét H^0 pontban.
- $H^0 \equiv H'$ ponttal, összekötve az E' ellipszisponttal, megkapjuk az adott E' ponthoz húzott érintő e' egyenesét.



c/5. Kapcsolt átmérők alapján az ellipszis egymásra merőleges kis-, és nagytengelyének szerkesztése. Rytz-féle szerkesztéssel.

Szerkesztéseink során nem mindig az egymásra merőleges két tengelyt, kis-, és nagytengelyt, kapjuk meg az ellipszis vetületein. A kör két merőleges átmérőjének vetületét úgynevezett „kapcsolt átmérőinek” nevezzük, ezek az átmérők az ellipszis különleges átmérői. A kapcsolt átmérők végpontjaihoz húzott érintők egy, a kör köré rajzolt négyzetet alkotnak. Ez a négyszög a kör érintőnégyzetének vetülete: paralelogramma, a két átmérő a paralelogramma két középvonala.

Adott: az ellipszis kapcsolt átmérői **AB** és **CD**.



Szerkesztés menete:

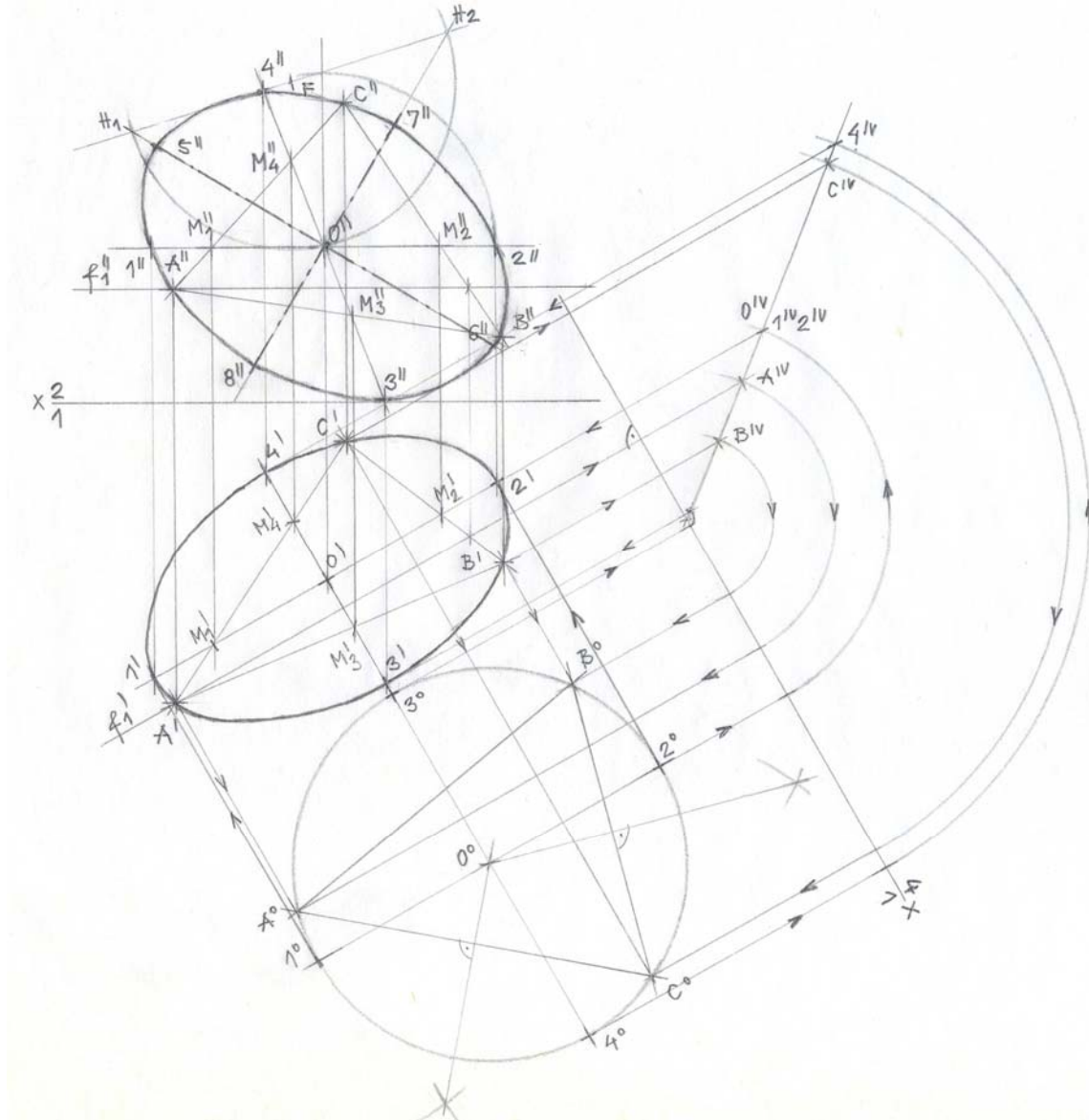
- Az egyik átmérőt, a nagytengely végpontját **A'**-t 90° -kal elforgatjuk, **K** pont szerkesztése.
- Az **K** pontot (**A** forgatott képét) összekötjük a másik tengely, a kistengely, végpontjával **D'**-vel. Szerkesszük meg az **KD'** szakasz felezőpontját **F**-et.
- **FO** (t) sugárral körívet rajzolunk. Ez a körív metszi az **KD'** egyenest **M1** és **M2** pontokban.
- **M1** és **M2** pontokat összekötve az **O** ponttal, a kapott egyenesek merőlegesek egymásra, és ezek az egyenesek az ellipszis kis-, és nagytengelyeinek egyenesei.
- Az **M1** és **M2** szakaszt a **D'**, **F** és **K** pontok négy részre osztják. Az **M1K** szakasz egyenlő az **M2D'** szakasszal, ennek a szakasznak a hossza a fél kistengely hosszát határozza meg. Az **M1D'** szakasz egyenlő az **M2K** szakasszal, ennek a hossza a fél nagytengely hosszát határozza meg.
- Ezeket a hosszakat rámérve a két, egymásra merőleges tengelyre, megkapjuk a keresett ellipszis kis-, és nagytengelyének hosszát.

A fenti szerkesztések, tételek helyességének bizonyítása más tankönyvekben megtalálható.

d.) Általános síkban fekvő kör ábrázolása:

Adott: három pontjával az általános sík.

Szerkesztendő: a háromszög köré írható kör I., II. ks.-beli nézete.



Szerkesztés menete:

- Megszerkesztjük a három pontjával adott sík élben látszó képét f_1 főegyenessel, forgatással a háromszög valódi méretét (A^0 ; B^0 ; C^0). Megrajzoljuk a háromszög köré írható kört, az oldalfelezők megadják a kör középpontját (O^0). Megrajzoljuk a főegyenessel párhuzamos és a rá merőleges két tengelyt (1^0 ; 2^0 ; 3^0 ; 4^0).
- Visszaforgatással I. ks.-ban megszerkesztjük az ellipszis két tengelyét (1^1 ; 2^1 ; 3^1 ; 4^1) és középpontját (O^1). Megszerkesztjük az ellipszist.
- Vetítéssel a II. ks.-ban is megszerkesztjük az ellipszis két tengelyét (1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2) és középpontját (O^2). A szerkesztés menete leolvasható az ábráról. Itt kapcsolt átmérőként megszerkesztjük az egymásra merőleges kis-, és nagytengelyt, majd itt is megszerkesztjük az ellipszist.