

Matematika B/1

Biró Zsolt

Tartalomjegyzék

1. Célkitűzések	1
2. Általános követelmények	1
3. Rövid leírás	2
4. Oktatási módszer	2
5. Követelmények, pótlások	2
6. Tematika	2
6.1. Alapfogalmak, matematikai jelölések, bizonyítási módszerek	2
6.2. Halmazok	3
6.3. A függvény általános naív fogalma	3
6.4. A lineáris algebra alapjai	3
6.5. A csoport fogalma	4
6.6. Vektorok (sík, tér)	4
6.7. Geometriák	5
6.8. Topológiai alapfogalmak	5
6.9. Alapfogalmak \mathbb{R} -ben	5
6.10. Számsorozatok és határértékek	5
6.11. Valós egyváltozós függvények	6
6.12. Differenciálszámítás	7
6.13. Görbék érintkezése, Taylor-polinom	8

1. Célkitűzések

A hallgatók megismerkednek a mérnöki tudományok megértéséhez és elsajátításához szükséges matematikai alapismeretekkel, és feladatok megoldásával segítik az alapvető fogalmak elmélyítését

2. Általános követelmények

A foglalkozásokon minimum 70%-os részvétel, zárthelyi dolgozatok, beadandó feladatok teljesítése.

3. Rövid leírás

A matematikai logika alapjai. Halmazok, műveletek halmazokkal. Számhalmazok. Descartes szorzat. Bináris relációk, rendezési és ekvivalencia relációk. A függvény fogalma. A vektoralgebra elemei. A valós számokkal kapcsolatos alapfogalmak. Számsorozatok, numerikus sorok. Valós egyváltozós függvények tulajdonságai, a határérték és folytonosság fogalma. Elemi függvények. Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása, függvényvizsgálat.

4. Oktatási módszer

Az előadás anyagát a hallgatók önállóan dolgozzák fel, a mintafeladatokat átismétlik. A gyakorlatokon csoportosan oldanak meg feladatokat, amelyekhez kapcsolódó házi feladatokat otthon készítik el.

5. Követelmények, pótlások

Követelmények a szorgalmi időszakban (az aláírás megszerzésének feltételei): A gyakorlatokon és az előadásokon a TVSZ előírása szerinti részvétel kötelező. 3 zárthelyi dolgozat megírása (5. hét, 9. hét, 14. hét), melyek össz %-os teljesítménye több mint 40%.

Ha az össz %-os teljesítmény kevesebb 40%-nál, de a 3 zárthelyi dolgozat közül legalább az egyik minimum 40%, akkor a rosszabbul sikerült a vizsgaidőszak első hetében javítható. Amennyiben még így sem sikerül a megkövetelt 40%-os teljesítés, a vizsgaidőszak második hetében lehetőség van a három zárthelyi anyagából egy összevont javító dolgozat írására. Ennek százalékos eredménye adja a a félévközi össz-százalékos teljesítményt.

Követelmények a vizsgaidőszakban (a vizsgajegy megszerzésének feltételei): Csak aláírással rendelkező hallgató vizsgázhat. A vizsga formája: írásbeli dolgozat és szóbeli vizsga. A vizsga sikeres, ha a vizsgadolgozat és a szóbeli felelet egyenkénti teljesítménye több mint 40%. A vizsgajegy megállapításához a félévközi számonkérések össz %-os teljesítményének és a sikeres vizsga %-os teljesítményének átlagát vesszük.

Átlag: Vizsgajegy:

40% felett elégséges(2)

56%-tól közepes(3)

71%-tól jó(4)

86%-tól jeles(5)

6. Tematika

6.1. Alapfogalmak, matematikai jelölések, bizonyítási módszerek

1. Kvantorok: létezik \exists , létezik egyetlen $\exists!$, minden \forall , és \wedge , vagy \vee .
2. Implikáció, ekvivalencia, szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel ($A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$). Sok példával.
3. Definíció, állítás, tétel, bizonyítás fogalma.
4. Alapvető bizonyítási módszerek, direkt, indirekt, teljes indukció.

6.2. Halmazok

1. Halmaz fogalma, az üreshalmaz fogalma és jele : \emptyset . Részhalmaz fogalma, definíciója, valódi részhalmaz, jelölések.
2. Halmazok egyenlősége, ennek jellemzése:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B) \quad \wedge \quad (B \subset A).$$

3. Halmazok megadása.
4. Halmazműveletek és tulajdonságaik, definíciók, unió, metszet, különbség komplementer. A hatványhalmaz definíciója.
5. Számhalmazok.
 - (a) A természetes számok halmaza, jele: \mathbb{N} .
 - (b) Az egész számok halmaza, jele: \mathbb{Z} , a természetes számokból a kivonás műveletével származtatható.
 - (c) A racionális számok halmaza, jele: \mathbb{Q} , az egész számokból az osztás műveletével származtatható.
 - (d) A valós számok halmaza, jele: \mathbb{R} , a racionális számokból egy ún. "teljessé tételi" eljárással származtatható.
 - (e) Az irracionális számok halmaza, jele: \mathbb{Q}^* , minden olyan valós szám, amely nem racionális. Nyilván $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$ és $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$.
6. Két halmaz Descartes szorzata $A \times B$

6.3. A függvény általános naív fogalma

1. A függvény fogalma, mint egyértelmű hozzárendelés $f : A \rightarrow B$, $f(a) = b$
2. Értelemezési tartomány, értékkészlet fogalma, példák
3. A hozzárendelés megfordíthatósága, kölcsönösen egyértelmű függvény fogalma, az inverz függvény
4. Valós–valós függvények ábrázolása, grafikonja
5. Az összetett függvény fogalma, ÉT., ÉK., példák
6. Lineáris valós–valós függvény $f(x) = ax$

6.4. A lineáris algebra alapjai

1. Lineáris leképezés fogalma
2. A vektor általános fogalma (rendezett szám n -es), a vektortér fogalma
3. Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függőség, függetlenség, a bázis fogalma
4. Mátrixok
5. Lineáris egyenletrendszer

6. Az invertálhatóság fogalma
7. A skaláris szorzat (v_1, v_2)
8. A determináns fogalma, jelentése, invertálható mátrixok $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
9. Lineáris transzformációk egymásutánja

6.5. A csoport fogalma

1. Általános definíció (G, \star) csoport
2. Példák csoportokra
3. Szimmetriacsoportok.
4. A háromszögek szimmetriái.
5. A diédercsoport. A szabályos n -szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.
6. A kör szimmetriacsoportja.

6.6. Vektorok (sík, tér)

1. Az általános vektor fogalom síkban, illetve térben, a vektorok ábrázolása, a vektor mint irányított szakasz. Vektorok egyenlősége, állása, iránya, hossza, a nullvektor fogalma
2. Vektorműveletek (összeadás, kivonás, számmal szorzás) értelmezése, szemléltetése.
3. Vektorok megadása koordinátákkal, a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer fogalma, a kanonikus bázis fogalma:
Az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ páronként merőleges jobbsodrású rendszert alkotó egységvektorokkal való felírás, a vektor koordinátáinak definíciója.
4. Vektorműveletek a koordinátákkal, ez már korábban szerepelt az általános tárgyalásnál
5. A helyvektor fogalma, adott pont koordinátáinak a helyvektora általi definíciója.
6. A skaláris szorzat definíciója (már szerepelt, most a klasszikus tárgyalás jön) és tulajdonságai, kiszámítása. A vektor hossza vagy másnéven abszolútértéke és egy vektor önmagával vett skaláris szorzatának kapcsolata.
7. A vektoriális szorzat definíciója, tulajdonságai, kiszámítása (determináns), geometriai jelentése.
8. A vegyesszorzat definíciója, tulajdonságai, kiszámítása (determináns), geometriai jelentése.

6.7. Geometriák

1. Síkbeli pont homogén koordinátája a végtelen távoli pont definíciója, koordinátái.
2. A sík lineáris transzformációi a homogén koordináták bevezetésével.
3. A transzformációs mátrix és a lineáris leképezések (transzformációk) kapcsolata, feltétel a mátrixra.

4. A kollineáció fogalma.
5. A projektív leképezés fogalma.
6. A projektív geometria fogalma.
7. A projektív, affin, hasonlósági és egybevágósági leképezések analitikus alakjai.
8. A leképezések mátrixai (eltolás, origó körüli forgatás, kicsinyítés, nagyítás, tengelyes tükrözés).

6.8. Topológiai alapfogalmak

1. A számegegyenesen illetve síkbeli halmazokon illusztrálva a nyílt, zárt halmaz fogalmát
2. Határpontok, torlódási pontok
3. Nyílt halmazok végtelen uniója nyílt, zárt halmazok végtelen metszete zárt, fordítva egyik sem igaz
4. A folytonosság szemléletes definiálása, a folytonosság topológiai invariáns, példák
5. Ponthalmazok, konvex halmazok
6. A távolság fogalma, halmazok korlátossága

6.9. Alapfogalmak \mathbb{R} -ben

1. A valós számokkal kapcsolatos alapfogalmak, az abszolútérték függvény és tulajdonságai.
2. Számhalmaz korlátossága, alsó, felső korlát definíciója.
3. Környezet fogalma, egy adott $x_0 \in \mathbb{R}$ pont ε sugarú $K_\varepsilon(x_0)$ környezetének definíciója, szemléltetése a számegegyenesen.
4. Intervallumok (véges, végtelen, nyílt, zárt félig nyílt stb.) definíciója.

6.10. Számsorozatok és határértékeik

1. Számsorozat definíciója, a részsorozat fogalma. Monoton, szigorúan monoton sorozatok definíciója.
2. Számsorozat határértékének definíciója a három esetben, amikor a határérték véges (konvergens sorozatok), illetve plusz vagy mínusz végtelen. A két ekvivalens definíció megfogalmazása, ha a sorozat konvergens, azaz véges a határértéke.
3. Konvergens illetve divergens sorozat fogalma, a nullsorozat definíciója.
4. Tételek
5. Összehasonlító elvek
6. Összefüggés a műveletek és a határérték között
7. Konvergens sorozatok tulajdonságai
8. Nevezetes sorozatok

6.11. Valós egyváltozós függvények

1. ÉT., ÉK., monotonitás, korlátosság, párosság, páratlanság, periodicitás, leszűkítés
2. Korábban már szerepelt fogalmak, kölcsönösen egyértelmű függvények, inverz függvény
3. Függvény határértékének fogalma, definíciója, jobb- és baloldali határérték
4. Függvény adott pontbeli folytonosságának fogalma, definíciója, jobb- és baloldali folytonosság.
5. Halmazon illetve intervallumon való folytonosság fogalma, definíciója.
6. Folytonos függvények tulajdonságai.
7. Elemi függvények és tulajdonságaik (gyakorlat)
8. Exponenciális függvények és inverzeik a logaritmus függvények (gyakorlat)
9. Trigonometrikus függvények és inverzeik az arkusz függvények (gyakorlat)
10. Nevezetes határérték: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (Biz.)

6.12. Differenciálszámítás

1. Egy adott pontbeli differenciálhányados fogalma, definíciója, fizikai jelentése (pillanatnyi sebesség), geometriai jelentése (az $(x_0, f(x_0))$ pontban a függvény grábjához húzott érintő meredeksége). Jobb- illetve baloldali derivált fogalma, definíciója. Egy adott pontbeli differencia- vagy különbségihányados függvény definíciója. Jelölések.
2. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata.
3. A deriváltfüggvény fogalma definíciója, intervallumon differenciálható függvény definíciója. Magasabb rendű differenciálhányados illetve deriváltfüggvény.
4. Műveleti szabályok pontban illetve halmazon.
5. Az elemi függvények deriváltjai
6. A különbségi- vagy differencihányados függvény és a differenciálhányados definíciója, geometriai, fizikai jelentése, adott pontbeli érintő meghatározása, a deriváltfüggvény fogalma.
7. Teljes függvényvizsgálattal kapcsolatos fogalmak, definíciók illetve a vizsgálat menete, úgy mint ÉT., ÉK., párosság, páratlanság, periodicitás, határértékek, ahol értelmes, korlátosság, folytonosság, monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok.
8. A függvény menetének vizsgálata és az első illetve második deriváltakkal való kapcsolat. Az alábbi tételek esetén feltesszük a megfelelő deriváltak létezését.
9. Szöveges szélsőérték feladatok
10. Rolle tétele

6.13. Görbék érintkezése, Taylor-polinom

1. Görbék adott pontbeli n -ed rendbeli érintkezése, görbék által bezárt szög.
2. Taylor-polinom, Lagrange-féle maradéktag.