

# TANTÁRGYI TEMATIKA ÉS TELJESÍTÉSI KÖVETELMÉNYEK

## 2023/2024 ŐSZI FÉLÉV

<i>Cím</i>	Mérnöki Matematika 3.
<i>Tárgykód</i>	MSB595MN
<i>Heti óraszám: ea/gy/lab</i>	2/2/0
<i>Kreditpont</i>	4
<i>Szak(ok)/ típus</i>	Építőmérnök, Gépészmérnök, Környezetmérnök, Mérnökinformatikus, Villamosmérnök
<i>Tagozat</i>	nappali
<i>Követelmény</i>	Félévközi jegy
<i>Meghirdetés féléve</i>	ősz
<i>Előzetes követelmény(ek)</i>	Mérnöki matematika 2.
<i>Oktató tanszék(ek)</i>	Mérnöki Matematika Tanszék
<i>Tárgyfelelős</i>	Pilgermájer Ákos
<i>Oktatók</i>	Gyöngy András, László István, Pilgermájer Ákos, Szabó Péter

## TÁRGYLEÍRÁS

A tantárgy rövid leírása (max. 10 rövid mondat). (Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Alapadatok/Tárgyleírás rovat)

A kurzus első felében a lineáris algebra klasszikus fejezeteinek megismerése (mátrixok, determinánsok) és a modern lineáris algebra alapjainak elsajátítása (vektorterek, lineáris leképezések, sajátértékek) a lineáris egyenletrendszerek megoldásán keresztül. A második felében a valószínűségszámítás és statisztika elemeinek bemutatásával segítjük a hallgatót a véletlen tömegjelenségek felismerésében, a modellalkotásban, az elméleti alapok elsajátításában és a statisztikai számítások kivitelezésében, annak érdekében, hogy képesek legyenek mérnöki tudományokban alkalmazni azt. Lehetőség szerint számítógép használata egyes problémák megoldásához.

## TÁRGYTEMATIKA

(Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika ablak)

### 1 AZ OKTATÁS CÉLJA

Célkitűzések és a tantárgy teljesítésével elérhető tanulási eredmények megfogalmazása.

(Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika/Oktatás célja rovat)

A kurzus első felében a cél a lineáris algebra klasszikus fejezeteinek megismerése (mátrixok, determinánsok) és a modern lineáris algebra alapjainak elsajátítása (vektorterek, lineáris leképezések, sajátértékek) a lineáris egyenletrendszerek megoldásán keresztül. A második felében a valószínűségszámítás és statisztika elemeinek bemutatásával segítjük a hallgatót a véletlen tömegjelenségek felismerésében, a modellalkotásban, az elméleti alapok elsajátításában és a statisztikai számítások kivitelezésében, annak érdekében, hogy képesek legyenek mérnöki tudományokban alkalmazni azt. Lehetőség szerint számítógép használata egyes problémák megoldásához.

### 2 A TANTÁRGY TARTALMA

(Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika/Tantárgy tartalma rovat)

## TÉMAKÖRÖK

### ELŐADÁS

- 1 Lineáris egyenletrendszerek (LER) algebrai írásmódja, Gauss-Jordan elimináció.
- 2 LER vektoros írásmódja. Vektortér, altér, lineáris kombináció, kifeszített altér, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió fogalma. Bázisra vonatkozó koordináták.
- 3 LER mátrixos írásmódja, mátrixok algebrája, mátrix hatványa, inverze.
- 4 Mátrix, mint lineáris leképezés: sortér, oszloptér, nulltér, képtér. Mátrix rangja. Dimenzió-tétel mátrixokra. A sík lineáris transzformációi: forgatás, nagyítás, kicsinyítés, tükrözés, vetítés (projekció) altérre.
- 5 Áttérés bázisok között. Lineáris transzformáció mátrixa új bázisban. Négyzetes mátrixok determinánsa, viselkedése elemi sor műveletek mellett. Szorzat mátrix determinánsa. Mátrix inverze és az adjungált mátrix. Determináns, mint terület vagy térfogat.
- 6 Négyzetes mátrixok sajátértéke, sajátvektora, sajátaltér, algebrai és geometriai multiplicitás, diagonalizálhatóság.
- 7 Euklideszi terek: belső szorzat. Vektorok hossza, távolsága, szöge. Merőlegesség, ortonormált rendszer. Gram-Schmidt-ortogonalizáció. Merőleges kiegészítő altér. Merőleges vetület

## GYAKORLAT

- számítása ortogonális bázis esetén. Mátrix sor tere és null tere merőlegesek. Legkisebb négyzetek módszere.
- 8 Matematikai statisztika bevezető, leíró statisztika: statisztikai adatok grafikus és numerikus jellemzése egy és két változó esetén.
  - 9 Mintavétel, kísérlet, valószínűségi mező,  $\sim$  változó, valószínűségi és tapasztalati eloszlásfüggvények, valószínűségi szabályok, nevezetes eloszlások és jellemzőik.
  - 10 Statisztikai következtetések, pont-, és intervallumbecslések, maximum-likelihood módszer.
  - 11 Hipotézisvizsgálat, statisztikai próbák (z-, t-, F-próba), illeszkedés-, homogenitás-, függetlenségvizsgálat Khi-négyzet próbával
- 1 LER algebrai alakja, ÉT, megoldáshalmaz, homogén, inhomogén, konzisztens, inkonzisztens LER. Sorekvivalens átalakítások, Gauss-Jordan elimináció, lépcsős alak (LA), redukált lépcsős alak (RLA).
  - 2 LER oszlopvektoros nézete. Vektorterekre példák, (kifeszített) altér, lineáris független vektorrendszer, bázis keresése, dimenzió, koordináták meghatározása G-J eliminációval.
  - 3 LER mátrix alakja, mátrix műveletek, tulajdonságai, speciális mátrixok, hatvány, inverz számítása.
  - 4 Lineáris leképezések és mátrix reprezentációjuk. Nevezetes alterek meghatározása, mátrix rangja, dimenzió tétel. A sík lineáris transzformációi, mátrixuk.
  - 5 Áttérés bázisok között. Lineáris leképezés mátrixa új bázisban. Determinánsok számolási szabályai, geometriai jelentése.
  - 6 Sajátérték probléma, karakterisztikus polinom,  $\sim$  egyenlet és gyökei (sajátértékek), a kapcsolódó homogén LER megoldásai a sajátvektorok, sajátaltér és dimenziója. Többszörös gyökök esete, diagonalizálhatóság. Szimmetrikus mátrix sajátvektorai.
  - 7 Vektor altérre vett ortogonális projekciója, merőleges kiegészítő altér, Gram-Schmidt ortogonalizáció. Legkisebb négyzetek módszere.
  - 8 Statisztikai bevezető: sokaság, egyed, minta, jellemző (ismérv, változó). Leíró statisztika egy változós adatokra: grafikus ábrázolás kör-, oszlopdiagrammal illetve gyakorisági-, sűrűség-hisztogrammal, idősorral; jellemzők leolvasása. Numerikus ábrázolás: minimum, első kvartilis, medián, harmadik kvartilis, maximum, ábrája: boxplot; a központi trend mértéke: átlag, medián, módusz; a szóródás mértéke variancia, szórás. Sűrűségfüggvények, normális eloszlások, standard normális eloszlás. Két numerikus változóra ugyanazon populációból: szórásdiagram (scatterplot), kapcsolat iránya, formája, erőssége leolvasható, kiugró adatpontok felfedezhetők. Lineáris összefüggés esetén korreláció megadása az átlag és szórás mellé.
  - 9 Tapasztalati (empirikus) eloszlás(függvény) és variabilitása. Valószínűség, mint hosszútávú viselkedés mérőszáma. Eseménytér, esemény, valószínűség, számolási szabályok. Kizáró és független események. Feltételes valószínűség fogalma, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel.
  - 10 Valószínűségi változók (folytonos és diszkrét) eloszlás- és sűrűségfüggvényei. Várható érték és variancia, szórás. Val-i változók transzformációi. Együttes illetve peremeloszlások két változóra. Függetlenség. Kovariancia, korreláció.
  - 11 Nevezetes eloszlások és jellemzőik. Nagy számok törvénye, centrális határeloszlás tétel és a statisztika alaptétele.
  - 12 Becslések: alapprobléma; torzítatlan, hatásos, konzisztens, elégséges. Várható érték és szórás pontbecslése; maximum-likelihood becslés; paraméter intervallum becslése.
  - 13 Hipotézisvizsgálat fogalma, menete, típusai. Főbb statisztikai próbák, illeszkedés-, homogenitás-, függetlenségvizsgálat Khi-négyzet próbával.

## LABOR- GYAKORLAT

### RÉSZLETES TANTÁRGYI PROGRAM ÉS A KÖVETELMÉNYEK ÜTEMEZÉSE

*Jelezzük az oktatási szüneteket is!*

## ELŐADÁS

Okta- tási hét	Téma	Kötelező irodalom hivatkozás, oldalszám (-tól-ig)	Teljesítendő feladat (beadandó, zárthelyi, stb.)	Teljesítés ideje, határideje
1.	Vektortér, altér, lineáris kombináció, kifeszített altér, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió fogalma (áttérés a 3D geometriai vektorokról a koordinátavektorokra). Bázisra vonatkozó koordináták. LER vektoros írásmódja.			
2.	Lineáris egyenletrendszer ÉT-a, megoldás halmazának meghatározása Gauss-Jordan eliminációval. Geometriai szemléltetés 2D és 3D esetekben. Bővített mátrix redukált lépcsős alakra hozása elemi sor műveletekkel. Inhomogén egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer kapcsolata, általános, partikuláris megoldások.			
3.	LER mátrixos írásmódja, mátrixműveletek, speciális mátrixok, mátrix hatványa, inverze.			
4.	Mátrix, mint lineáris leképezés: sortér, oszloptér, nulltér, képtér. Mátrix rangja és számítása Gauss-eliminációval. Dimenzió-tétel mátrixokra. A sík lineáris transzformációi: forgatás, nagyítás, kicsinyítés, tükrözés, vetítés (projekció) altérre mátrixai. Ezek kompozíciója.			
5.	Áttérés bázisok között. Lineáris transzformáció mátrixa új bázisban. Négyzetes mátrixok determinánsa. Determináns viselkedése elemi sor műveletek mellett. Szorzat mátrix determinánsa. Mátrix inverze és az adjungált mátrix. Determináns, mint terület vagy térfogat.			
6.	Négyzetes mátrixok sajátértéke, sajátvektora. Karakterisztikus polinom, $\sim$ egyenlet. Sajátaltér fogalma. Mátrixok diagonális alakra hozása hasonlósági transzformációval. Szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak és diagonalizálható ortogonális transzformációval.			
7.	Euklideszi terek: belső szorzat. Vektorok szöge, hossza, távolsága. Merőlegesség, ortonormált rendszer. Gram-Schmidt-ortogonalizáció. Merőleges kiegészítő altér. Merőleges vetület számítása ortogonális bázis esetén. Mátrix sortere és nulltere merőlegesek. Legkisebb négyzetek módszere, normál egyenletek.		ZH1	Külön időpontban
8.	Statisztikai bevezető: sokaság, egyed, minta, jellemző (ismérv, változó). Leíró statisztika egy változós adatokra: grafikus ábrázolás kör-, oszlopdiagrammal illetve gyakorisági-, sűrűség-histogrammal, időszorral; jellemzők leolvasása. Numerikus ábrázolás: minimum, első kvartilis, medián, harmadik kvartilis, maximum, ábrája: boxplot; a központi trend			

	mértéke: átlag, medián, módusz; a szóródás mértéke variancia, szórás. Sűrűségfüggvények, normális eloszlások, standard normális eloszlás. Két numerikus változóra ugyanazon populációból: szórásdiagram (scatterplot), kapcsolat iránya, formája, erőssége leolvasható, kiugró adatpontok felfedezhetők. Lineáris összefüggés esetén korreláció megadása az átlag és szórás mellé.		
9.	Tapasztalati (empirikus) eloszlás(függvény) és variabilitása. Valószínűség, mint hosszútávú viselkedés mérőszáma. Eseménytér, esemény, valószínűség, számolási szabályok. Kizáró és független események. Feltételes valószínűség fogalma, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel.		
10.	Valószínűségi változók (folytonos és diszkrét) eloszlás- és sűrűségfüggvényei. Várható érték és variancia, szórás. Val-i változók transzformációi. Együttes illetve peremeloszlások két változóra. Függetlenség. Kovariancia, korreláció.		
11.	Nevezetes eloszlások és jellemzőik. Nagy számok törvénye, centrális határeloszlás tétel és szerepük a statisztikában: a statisztika alaptétele.		
12.	Becslések: alapprobléma; torzítatlan, hatásos, konzisztens, elégséges. Várható érték és szórás pontbecslése; maximum-likelihood becslés; paraméter intervallum becslése.		
13.	Hipotézisvizsgálat fogalma, menete, hibái. Főbb statisztikai próbák (u,t,F), illeszkedés-, homogenitás-, függetlenségvizsgálat Khi-négyzet próbával.	ZH2	Külön időpontban

### GYAKORLAT/LABORGYAKORLAT

Okta- tási hét	Téma	Kötelező irodalom, oldalszám (-tól-ig)	Teljesítendő feladat (beadandó, zárthelyi, stb.)	Teljesítés ideje, határideje
1.	Vektortér, altér, lineáris kombináció, kifeszített altér, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió fogalma (áttérés a 3D geometriai vektorokról a koordinátavektorokra). Bázisra vonatkozó koordináták. LER vektoros írásmódja.			
2.	Lineáris egyenletrendszer ÉT-a, megoldás halmazának meghatározása Gauss-Jordan eliminációval. Geometriai szemléltetés 2D és 3D esetekben. Bővített mátrix redukált lépcsős alakra hozása elemi sor műveletekkel. Inhomogén egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer kapcsolata, általános, partikuláris megoldások.			
3.	LER mátrixos írásmódja, mátrixműveletek, speciális mátrixok, mátrix hatványa, inverze.			

4.	Mátrix, mint lineáris leképezés: sortér, oszloptér, nulltér, képtér. Mátrix rangja és számítása Gauss-eliminációval. Dimenziótétel mátrixokra. A sík lineáris transzformációi: forgatás, nagyítás, kicsinyítés, tükrözés, vetítés (projekció) altérre mátrixai. Ezek kompozíciója.			
5.	Áttérés bázisok között. Lineáris transzformáció mátrixa új bázisban. Négyzetes mátrixok determinánsa. Determináns viselkedése elemi sor műveletek mellett. Szorzat mátrix determinánsa. Mátrix inverze és az adjungált mátrix. Determináns, mint terület vagy térfogat.			
6.	Négyzetes mátrixok sajátértéke, sajátvektora. Karakterisztikus polinom, $\sim$ egyenlet. Sajátaltér fogalma. Mátrixok diagonális alakra hozása hasonlósági transzformációval. Szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak és diagonalizálható ortogonális transzformációval.			
7.	Euklideszi terek: belső szorzat. Vektorok szöge, hossza, távolsága. Merőlegesség, ortonormált rendszer. Gram-Schmidt-ortogonalizáció. Merőleges kiegészítő altér. Merőleges vetület számítása ortogonális bázis esetén. Mátrix sortere és nulltere merőlegesek. Legkisebb négyzetek módszere, normál egyenletek.			
8.	Statisztikai bevezető: sokaság, egyed, minta, jellemző (ismérv, változó). Leíró statisztika egy változós adatokra: grafikus ábrázolás kör-, oszlopdiagrammal illetve gyakorisági-, sűrűséghistogrammal, időszorral; jellemzők leolvasása. Numerikus ábrázolás: minimum, első kvartilis, medián, harmadik kvartilis, maximum, ábrája: boxplot; a központi trend mértéke: átlag, medián, módusz; a szóródás mértéke variancia, szórás. Sűrűségfüggvények, normális eloszlások, standard normális eloszlás. Két numerikus változóra ugyanazon populációból: szórásdiagram (scatterplot), kapcsolat iránya, formája, erőssége leolvasható, kiugró adatpontok felfedezhetők. Lineáris összefüggés esetén korreláció megadása az átlag és szórás mellé.			
9.	Tapasztalati (empirikus) eloszlás(függvény) és variabilitása. Valószínűség, mint hosszútávú viselkedés mérőszáma. Eseménytér, esemény, valószínűség, számolási szabályok. Kizáró és független események. Feltételes valószínűség fogalma, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel.			
10.	Valószínűségi változók (folytonos és diszkrét) eloszlás- és sűrűségfüggvényei. Várható érték és variancia, szórás. Val-i változók transzformációi. Együttes illetve			

	peremeloszlások két változóra. Függelenség. Kovariancia, korreláció.		
11.	Nevezetes eloszlások és jellemzőik. Nagy számok törvénye, centrális határeloszlás tétel és szerepük a statisztikában: a statisztika alaptétele.		
12.	Becslések: alapprobléma; torzítatlan, hatásos, konzisztens, elégséges. Várható érték és szórás pontbecslése; maximum-likelihood becslés; paraméter intervallum becslése.		
13.	Hipotézisvizsgálat fogalma, menete, hibái. Főbb statisztikai próbák (u,t,F), illeszkedés-, homogenitás-, függetlenségvizsgálat Khi-négyzet próbával.		

### 3 SZÁMONKÉRÉSI ÉS ÉRTÉKELÉSI RENDSZER

(Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika/Számonkérési és értékelési rendszere rovat)

#### JELLENLÉTI ÉS RÉSZVÉTELI KÖVETELMÉNYEK

A PTE TVSz 45.§ (2) és 9. számú melléklet 3§ szabályozása szerint a hallgató számára az adott tárgyból érdemjegy, illetve minősítés szerzése csak abban az esetben tagadható meg hiányzás miatt, ha nappali tagozaton egy tantárgy esetén a tantárgyi tematikában előírányzott foglalkozások több mint 30%-áról hiányzott.

**A jelenlét ellenőrzésének módja** (pl.: jelenléti ív / online teszt/ jegyzőkönyv, stb.)

Jelenléti ív/teszt

#### SZÁMONKÉRÉSEK

A tantárgy követelménytípusának megfelelő rovatok töltendők ki (félévközi jeggyel, vagy vizsgával záruló tantárgyak). A másik típus rovatotai törölhetők.

#### Félévközi jeggyel záruló tantárgy (PTE TVSz 40§(3))

**Félévközi ellenőrzések, teljesítményértékelések és részarányuk a minősítésben** (A táblázat példái törölendők.)

Típus	Értékelés	Részarány a minősítésben
ZH1	pontozás	40%
ZH2	pontozás	40%
Egyes gyakorlatok végén 5-10 perces ellenőrző kérdések	pontozás	20%

Minden ZH megírása kötelező, kihagyása előzetesen bejelentett és nyomós indokkal fogadható el maximum egy esetben.

Mindegyik ZH pontosan akkor sikeres, ha legalább 30 %-osan teljesített. A félévközi teljesítményt a sikeres ZH-k pontjaiból és a gyakorlati ellenőrzésekből, azok fenti táblázat szerinti súlyozott átlaga adja.

**Pótlási lehetőségek módja, típusa** (PTE TVSz 47§(4))

A javításra, ismétlésre és pótlásra vonatkozó különös szabályokat a TVSz általános szabályaiival együttesen kell értelmezni és alkalmazni. Pl.: minden ZH és a beadandó jegyzőkönyvek, ..., a szorgalmi időszakban legalább egy-egy alkalommal pótolhatók/javíthatók, továbbá a vizsgaidőszak első két hetében legalább egy alkalommal lehetséges a ZH-k, a beadandók, ..., javítása/pótlása.

Az esetleg kimaradt ZH pótlása, javítása a vizsgaidőszak első hetében lesz. Ha így sem sikerül a teljesítés, akkor a második vizsgahéten újra írandó mindkét ZH. Ezek felülírnak minden előbbi teljesítést, továbbá, ha egyenként legalább 40%-osak, akkor legfeljebb elégséges jegyet kap a hallgató.

**Az érdemjegy kialakításának módja %-os bontásban**

Az összesített teljesítmény alapján az alábbi szerint.

Érdemjegy	Teljesítmény %-ban kifejezve
jeles (5)	85 % ...
jó (4)	70 % ... 85 %
közepes (3)	55 % ... 70 %
elégséges (2)	40 % ... 55 %
elégtelen (1)	40 % alatt

Az egyes érdemjegyeknél megadott alsó határérték már az adott érdemjegyhez tartozik.

## 4 IRODALOM

*Felsorolás fontossági sorrendben. (Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika/Irodalom rovat)*

### **KÖTELEZŐ IRODALOM ÉS ELÉRHETŐSÉGE**

[1.] <https://mersz.hu/gerocs-vancso-matematika/>

[2.] Obádovics J. Gyula, Valószínűségszámítás és matematikai statisztika, Scolar Kiadó, Bp. 2001. (ISBN 963 9193 35 6) (letöltés Teams-ből)

[3.] Solt György, Valószínűségszámítás. Példatár. Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1993. (letöltés Teams-ből)

### **AJÁNLOTT IRODALOM ÉS ELÉRHETŐSÉGE**

[4.] David S. Moore, The Basic Practice of Statistics, Fourth edition, W. H. Freeman and Company, 2007 (letöltés Teamsből)

[5.] Anthony Hayter, Probability and Statistics for Engineers and Scientists (4. ed.), Brooks/Cole, 2012. (ISBN-13: 978-1-111-82704-5) (letöltés Teams-ből)