TANTÁRGYI TEMATIKA ÉS TELJESÍTÉSI KÖVETELMÉNYEK 2023/24. TAVASZI FÉLÉV

Cím	*Mérnöki matematika 2.*
Tárgykód	MSB594MLVM
Heti óraszám: ea/gy/lab	2/2/0
Kreditpont	4
Szak(ok)/ típus	VIllamosmérnöki BSc
Tagozat	*levelező*
Követelmény	vizsga
Meghirdetés féléve	2023/2024/2
Előzetes követelmény(ek)	Mérnöki matematika 1.
Oktató tanszék(ek)	Mérnöki Matematika Tanszék
Tárgyfelelős	*Dr. Perjésiné Dr. Hámori Ildikó*
Oktatók	*Szegő Dóra*

TÁRGYLEÍRÁS

A tárgy a Mérnöki matematika 1. tárgy folytatásaként betekintést nyújt a mérnöki tudományokhoz szükséges matematikai apparátus hátterébe.

TÁRGYTEMATIKA

1. AZ OKTATÁS CÉLJA

A tárgy célja, hogy a hallgatók betekintést nyerjenek a mérnöki szakmai tanulmányok hátteréül szolgáló matematikai eszköztárba. Konkrét módszerek megismerése mellett az általános szemléletfejlesztés igényét is szem előtt kívánjuk tartani, hogy olyan alapokat biztosítsunk, melyekre szükség szerint a továbbiakban is építeni lehet.

2. A TANTÁRGY TARTALMA

	TÉMAKÖRÖK
ELŐADÁSOK ÉS GYAKORLATOK	1. *A differenciálszámítás alkalmazásai: görbék érintkezése, függvényközelítés, függvényvizsgálat* 2. *Többváltozós függvények differenciálszámítása* 3. *Egyváltozós valós függvények integrálszámítása: az integrálszámítás alkalmazásai, improprius integrálok, numerikus módszerek* 4. *Közönséges differenciálegyenletek megoldása*

RÉSZLETES TANTÁRGYI PROGRAM ÉS A KÖVETELMÉNYEK ÜTEMEZÉSE

KONZULTÁCIÓK

Okta-tási hét	**Téma**	**Kötelező irodalom hivatkozás, oldalszám (-tól-ig)**	**Teljesítendő feladat (beadandó, zárthelyi, stb.)**	**Teljesítés ideje, határideje**
2.	Görbék érintkezése, függvények közelítése	[1] 21.8-9. fejezet [3] 8.1.4. fejezet [4] 3.8. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben	4. hét csütörtök 20.00
2.	Teljes függvényvizsgálat	[1] 21.6. fejezet [4] 4.1-4. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben	4. hét csütörtök 20.00
4.	Többváltozós valós függvények differenciálszámítása	[2] 12. fejezet [6] 14. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben	4. hét csütörtök 20.00

			1. zárthelyi dolgozat	
7.	Egyváltozós valós függvények integrálszámítása, az integrálszámítás alkalmazásai	[1] 21.10-13. [2] 13-15. fejezet [3] 9.1.1-5. fejezet [5] 8.1-5. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben **2. zárthelyi dolgozat**	7. hét csütörtök 20.00
12.	Improprius integrálok, numerikus módszerek	[1] 21.14. fejezet [2] 18. fejezet [3] 9.1.7. fejezet [5] 8.8. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben **3. zárthelyi dolgozat**	12. hét csütörtök 20.00
14.	Közönséges differenciálegyenletek megoldása	[1] 21.15. fejezet [3] 14. fejezet [5] 9.1-2. fejezet	Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben **4. zárthelyi dolgozat**	14. hét csütörtök 20.00

3. Számonkérési és értékelési rendszer

Jelenléti és részvételi követelmények

A *PTE TVSz* 45.§ (2) és *9. számú melléklet 3.§ szabályozása szerint a hallgató számára az adott tárgyból érdemjegy, illetve minősítés szerzése csak abban az esetben tagadható meg hiányzás miatt, ha levelező tagozaton egy tantárgy esetén a tantárgyi tematikában előirányzott foglalkozások több mint 50%-áról hiányzott.*

A jelenlét ellenőrzésének módja

Jelenléti ív

Számonkérések

Vizsgával záruló tantárgy

Félévközi ellenőrzések, teljesítményértékelések és részarányuk a vizsgára bocsájtás feltételének minősítésben

Típus	**Értékelés**	**Részarány a vizsgára bocsájtás feltételének minősítésben**
Ellenőrző kérdések megválaszolása a Moodle-ben	*max. 12 pont*	*12%*
1. ***zárthelyi dolgozat***	*max. 22 pont*	*22%*
2. zárthelyi dolgozat	*max. 22 pont*	*22%*
3. ***zárthelyi dolgozat***	*max. 22 pont*	*22%*
4. zárthelyi dolgozat	*max. 22 pont*	*22%*

Az ellenőrző kérdések megválaszolása nem pótolható.

A zárthelyi dolgozatok értékelése „emelőmódszerrel” történik. Amennyiben egy dolgozat eredménye jobb, mint az azt közvetlenül megelőző dolgozaté, úgy a megelőző dolgozat eredménye automatikusan felemelkedik a jobb dolgozat eredményére. Példát az alábbi táblázatban láthat.

	1. zh.	2. zh.	3. zh.	4. zh.	Összesen (pont)
Eredeti eredmény (pont)	9	6	12	15	44
Emelőmódszer bevetése után (pont)	9	6	15	15	47

Az emelés nem vonatkozik a 30% alatti, valamint a pótolt és javított dolgozatokra.

Súlyos hiba vétése esetén az adott feladat (rész) hiba utáni része 0 pontra értékelt. Súlyos hibának minősül az 1-10. évfolyamos matematika kerettantervben foglaltak megsértése, *különös tekintettel, de nem kizárólag* a zárójelhasználat és a törtekkel végzett műveletek hibáira.

A számonkérések során számológép használható.

A papíron beadott munkákra a következő formai követelmények érvényesek:
- papírméret A4-es nyomtató- vagy füzetpapír legyen
- a lap minden széle egyenes legyen
- utólag nem módosítható tintával készüljön a munka, kivéve az ábrákat, melyek ceruzával is készülhetnek
- minden beadott lap jobb felső sarkában szerepeljen a hallgató neve és Neptun-kódja
- a munka legyen átlátható

Formai követelményeket sértő munkák nem kerülnek értékelésre.

A vizsgán elvárás az alkalomhoz illő, rendezett és elegáns megjelenés.

Az aláírás megszerzésének feltétele

Aláírást az a hallgató kaphat, aki minden zárthelyi dolgozatot legalább 30%-os eredménnyel megír, valamint a félév során elérhető pontok legalább 60%-át megszerzi.

Pótlási lehetőségek az aláírás megszerzéséhez (PTE TVSz 50§(2))

A félév során meg nem írt, vagy 30% alatti eredményű dolgozatok egy alkalommal, a vizsgaidőszak első hetében pótolhatók. Értékemelő javításra ugyanekkor van lehetőség, a javítás minden esetben felülírja az eredeti eredményt.
Amennyiben a hallgató eredménye ezután is 60% alatti, egy alkalommal, a vizsgaidőszak második hetében aláíráspótló vizsgán vehet részt.

Vizsga típusa*: írásbeli és szóbeli.*

Írásbeli vizsgarész: beugró a mellékelt kérdésekből. A beugró sikeres, ha a hallgató eredménye legalább 70%-os. Ha az írásbeli rész sikertelen, az egész vizsgarész sikertelen. Az írásbeli vizsgarész időtartama 55 perc.
Szóbeli vizsgarész: a beugró sikeres teljesítése után a vizsgázó a mellékelt tételsorból egy tételből felel, és egy differenciálegyenlet megoldását bemutatja, kivéve a 4. tételt, melyhez külön feladatmegoldás nem tartozik. Ha a szóbeli rész sikertelen, az egész vizsga sikertelen. A szóbeli vizsgarész időtartama 15 perc.

Beugró kérdések

1. Mikor mondjuk, hogy az $y_1 = f(x)$ és $y_2 = g(x)$ görbék legalább negyedrendben érintik egymást az x_0 helyen?
2. Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények mikor érintkeznek pontosan harmadrendben az x_0 helyen?
3. Igaz-e? Állítását indokolja! Ha $f''(x_0) = g''(x_0)$, akkor az $f(x)$ és $g(x)$ függvények legalább másodrendben érintik egymást az x_0 helyen.
4. Milyen feltételek teljesülése esetén írható fel az $f(x)$ függvény Taylor-formulája?
5. Mit nevezünk Lagrange-féle maradéktagnak?
6. Igaz-e? Állítását indokolja!
   a. Az $f(x) = |x|$ függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor–polinomja nem létezik.
   b. Ha az $f(x)$ függvény páros, akkor az $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor-polinomja (MacLaurin-polinomja) csak páros kitevőjű hatványfüggvényeket tartalmaz.
7. Mi a szükséges feltétele annak, hogy az $]a;\ b[$ intervallumon differenciálható $f(x)$ függvény az $]a;\ b[$-n szigorúan monoton csökkenő legyen?
8. Mit mondhatunk az $f(x)$ függvényről, ha tudjuk, hogy $f'(x_0) = 0$?
9. Mi a szükséges feltétele annak, hogy az $]a;\ b[$-n differenciálható $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke legyen?
10. Mi a szélsőérték létezésének elégséges feltétele?
11. Mi az inflexiós pont létezésének elégséges feltétele?
12. Hogyan szemléltetjük a kétváltozós függvény értelmezési tartományát?
13. Igaz-e, hogy az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény képét adó felület és az xy sík metszésvonala szemlélteti a kétváltozós függvény értelmezési tartományát?
14. A $z = f(x;y)$ egyenletű felület milyen speciális síkmetszeteinek egyenletei a következők?
   a. $z = f(x_0;y)$
   b. $z = f(x;y_0)$
   c. $z = f(x;y)$
15. Mit nevezünk az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény $P_0(x_0;\ y_0)$ pontbeli x szerinti parciális differenciálhányadosának? Mi a geometriai (szemléletes) jelentése?
16. Mit nevezünk az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény $P_0(x_0;\ y_0)$ pontbeli y szerinti parciális differenciálhányadosának? Mi a geometriai (szemléletes) jelentése?
17. Mit nevezünk az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény x szerinti parciális deriváltjának?
18. Mi az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény y szerinti parciális deriváltjának értelmezési tartománya?
19. Mit nevezünk az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjainak?
20. Mit nevezünk az $(x;y) \to f(x;y)$ kétváltozós függvény tiszta másodrendű parciális deriváltjainak?

21. Mi adja a $z = f(x; y)$ egyenletű felület $Q_0(x_0;\ y_0;\ f(x_0; y_0))$ pontjában a felülethez húzható tetszőleges érintő iránytangensét? (képlettel)
22. Milyen irányt választ a felület egy adott pontjában a „vérbeli hegymászó'"?
23. Ha egy P_0 pontban a kétváltozós függvény parciális differenciálhányadosai nullától különbözőek, akkor itt milyen irányban 0 az iránymenti differenciálhányados? Miért?
24. Mikor mondjuk, hogy a $\Phi(x)$ függvény primitív függvénye $f(x)$-nek?
25. Lehet-e egy függvénynek több primitív függvénye?
26. A polinomok integrálásánál a határozatlan integrál milyen tulajdonságait használjuk fel?
27. Az alább felsorolt függvények közül melyik lehet az $f(x) = \sin x$ függvény primitív függvénye?
    a. $-\cos x + 5$
    b. $-5\cos x$
    c. $-\cos x - 5$
    d. $-5\cos x + 5$
    e. $-\cos 5x$
28. Milyen integráltípusokat kapunk a páratlan kitevőjű trigonometrikus függvények integrálásakor?
29. Melyek a linearizáló formulák, és mire használjuk őket?
30. Igaz-e az $\backslash displaystyle\ \int \frac{h(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$ ($C \in \mathbb{R}$) egyenlőség? Ha nem, milyen feltétellel tehető helyessé?
31. Milyen típusú függvényeket integrálunk parciálisan?
32. Melyek azok a függvények, amelyeket „csak" parciálisan tudunk integrálni?
33. Igaz-e? Indokolja! Minden szorzatfüggvényt parciálisan kell integrálni.
34. A polinomok integrálásánál a határozatlan integrál milyen tulajdonságait használjuk fel?
35. Milyen racionális törtfüggvényeket bonthatunk parciális törtek összegére?
36. Milyen módszert használunk a felbontásban szereplő A, B... együtthatók meghatározására?
37. Milyen típusú integrálásra vezetjük vissza a felbontással a racionális törtfüggvényeket?
38. Mit értünk az $[a;\ b]$ zárt intervallum n részre való felosztásán?
39. Lehet-e $x_i - x_{i-1} < 0$ az integrálközelítő összegben?
40. Mikor mondjuk, hogy a felosztást minden határon túl finomítjuk?
41. Hány tagból áll a σ_5 Riemann-féle integrálközelítő összeg?
42. Milyen kapcsolat van az integrálközelítő összeg és a határozott integrál között?
43. Mikor mondjuk az f függvényt Riemann szerint integrálhatónak?
44. Mi a szükséges feltétele annak, hogy az f függvény $[a;\ b]$-n Riemann szerint integrálható legyen?
45. Van-e olyan $[a;\ b]$-n folytonos függvény, amely $[a;\ b]$-n nem integrálható?
46. Igaz-e? Állítását indokolja!
    a. Ha az f függvény az $[a;\ b]$-n Riemann szerint integrálható, akkor az f folytonos $[a;\ b]$-n.
    b. Ha az f függvény folytonos $[a;\ b]$-n, a g pedig differenciálható $[a;\ b]$-n, akkor az $f + g$ függvény integrálható $[a;\ b]$-n.
47. Ha F az f függvény integrálfüggvénye $[a;\ b]$-n, akkor milyen feltételek esetén igaz, hogy $F' = f$?
48. Milyen feltételek teljesülése esetén alkalmazható a Newton--Leibniz-tétel?
49. Milyen feltételek mellett adja $\int_a^b f(x)\ dx$ az $f(x)$ függvény görbe alatti területének mérőszámát?
50. Mennyivel változik meg a két görbe által bezárt síkidom területe, ha az ordinátatengely mentén d távolsággal pozitív irányba eltoljuk?
51. Igaz-e? Indokolja! Ha $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, akkor az $f(x)$ görbe alatti területének mérőszáma is 0.
52. A Riemann-integrál melyik feltétele nem teljesül az $[a; \infty[$ intervallumon vett improprius integrál esetén?
53. Mit nevezünk az $f(x)$ függvény $]-\infty;\ b]$ intervallumon vett improprius integráljának?
54. Mikor közönséges egy differenciálegyenlet?
55. Mikor másodrendű egy differenciálegyenlet?
56. Mikor lineáris egy differenciálegyenlet?
57. Mikor homogén egy differenciálegyenlet?
58. Mikor inhomogén egy differenciálegyenlet?
59. Mit jelent differenciálegyenletet megoldani?
60. Mitől függ az általános megoldás paramétereinek száma?
61. A harmadrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldása hány paramétert tartalmaz?
62. Igaz-e? Állítását indokolja!
    a. Ha egy differenciálegyenlet megoldása 1 szabad paramétert tartalmaz, akkor az csak elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása lehet.
    b. Ha egy megoldás nem tartalmaz integrációs állandót, akkor az partikuláris megoldás.
    c. Ha egy differenciálegyenlet nem minden tagjában szerepel az ismeretlen függvény vagy annak deriváltja, akkor a differenciálegyenlet inhomogén.
63. Mi a szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános alakja?
64. Mit jelent a változók szétválasztása?

65. Mit értünk kezdeti feltételen?
66. Igaz-e? Indokolja!
    a. Megoldani egy kezdetiérték-problémát annyit jelent, mint meghatározni a differenciálegyenletnek azt a megoldását, amely kielégít egy kezdeti feltételt.
    b. Megoldani egy kezdetiérték-problémát annyit jelent, mint meghatározni a differenciálegyenlet általános megoldását.
    c. Megoldani egy kezdetiérték-problémát annyit jelent, mint meghatározni a differenciálegyenlet szinguláris megoldását.
    d. Megoldani egy kezdetiérték-problémát annyit jelent, mint meghatározni egy görbesereg adott ponton áthaladó görbéjét.
67. Mi az elsőrendű lineáris (homogén) inhomogén differenciálegyenlet általános alakja?
68. Mit értünk az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenleten?
69. Hogyan keressük meg az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását?
70. Mit értünk az állandó variálásának módszere alatt?
71. Milyen alakú az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása?
72. Mi a másodrendű tiszta hiányos differenciálegyenlet általános alakja?
73. Hogyan oldjuk meg a másodrendű tiszta hiányos differenciálegyenletet?
74. Egy másodrendű differenciálegyenlet esetén mi különbözteti meg a kezdeti feltételt a peremfeltételtől?
75. Mi a másodrendű lineáris homogén (inhomogén) állandó együtthatós differenciálegyenlet általános alakja?
76. Mikor nevezzük az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvényeket lineárisan függetleneknek?
77. Milyen alakban keressük a másodrendű lineáris homogén állandó együtthatós differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását?
78. Hogyan állítható elő egy állandó együtthatós differenciálegyenlet általános megoldása két lineárisan független partikuláris megoldás segítségével?
79. Mit nevezünk karakterisztikus egyenletnek?
80. Mi a próbafüggvény módszer lényege?

Vizsgatételek

1. Görbék érintkezése és egy függvényközelítő módszer ismertetése
2. Összefüggések egy függvény deriváltja és monotonitása között
3. Összefüggések egy függvény deriváltja és konvexitása között
4. Teljes függvényvizsgálat
5. Kétváltozós függvények parciális deriváltjai
6. Kétváltozós függvények iránymenti deriváltja. A gradiens
7. Egyváltozós függvények határozatlan integrálja 1. Primitív függvény, műveleti tulajdonságok, elemi függvények deriváltjai
8. Egyváltozós függvények határozatlan integrálja 2. Integrálási szabályok
9. A határozott integrál bevezetése, fogalma és tulajdonságai
10. A határozott integrál értelmezése és a Newton–Leibniz-tétel
11. Az integrálszámítás alkalmazásai
12. Differenciálegyenletek tulajdonságai, a szétválasztható változójú és az elsőrendű, lineáris homogén differenciálegyenletek
13. Elsőrendű lineáris inhomogén és másodrendű differenciálegyenletek

A vizsga minimum 40 %-os teljesítés esetén sikeres.

Az érdemjegy kialakítása *(TVSz 47§ (3))*

50%-ban az évközi teljesítmény, ***50***%-ban a vizsgán nyújtott teljesítmény alapján történik.

Az érdemjegy megállapítása az összesített teljesítmény alapján %-os bontásban

Érdemjegy	Teljesítmény %-ban kifejezve
jeles (5)	85%-tól
jó (4)	70–85%
közepes (3)	55–70%
elégséges (2)	40–55%
elégtelen (1)	40% alatt

Az egyes érdemjegyeknél megadott alsó határérték már az adott érdemjegyhez tartozik.

14. IRODALOM

Felsorolás fontossági sorrendben. (Neptunban: Oktatás/Tárgyak/Tárgy adatok/Tárgytematika/Irodalom rovat)

KÖTELEZŐ IRODALOM ÉS ELÉRHETŐSÉGE

Minden lentebb sorolt irodalom ingyenesen elérhető az edu.interkonyv.hu oldalon, eduID-s belépés után.

[1] Reiman István: *Matematika*. ISBN 978 963 279 300 9
[2] Mezei István, Faragó István, Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe*. ISBN 978 963 279 224 8
[3] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Valós analízis I*. ISBN 978 963 279 732 8
[4] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: *Thomas-féle Kalkulus 1*. ISBN 978 963 279 833 2
[5] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: *Thomas-féle Kalkulus 2.* ISBN 978 963 966 427 2
[6] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: *Thomas-féle Kalkulus 3*. ISBN 978 963 966 428 9